

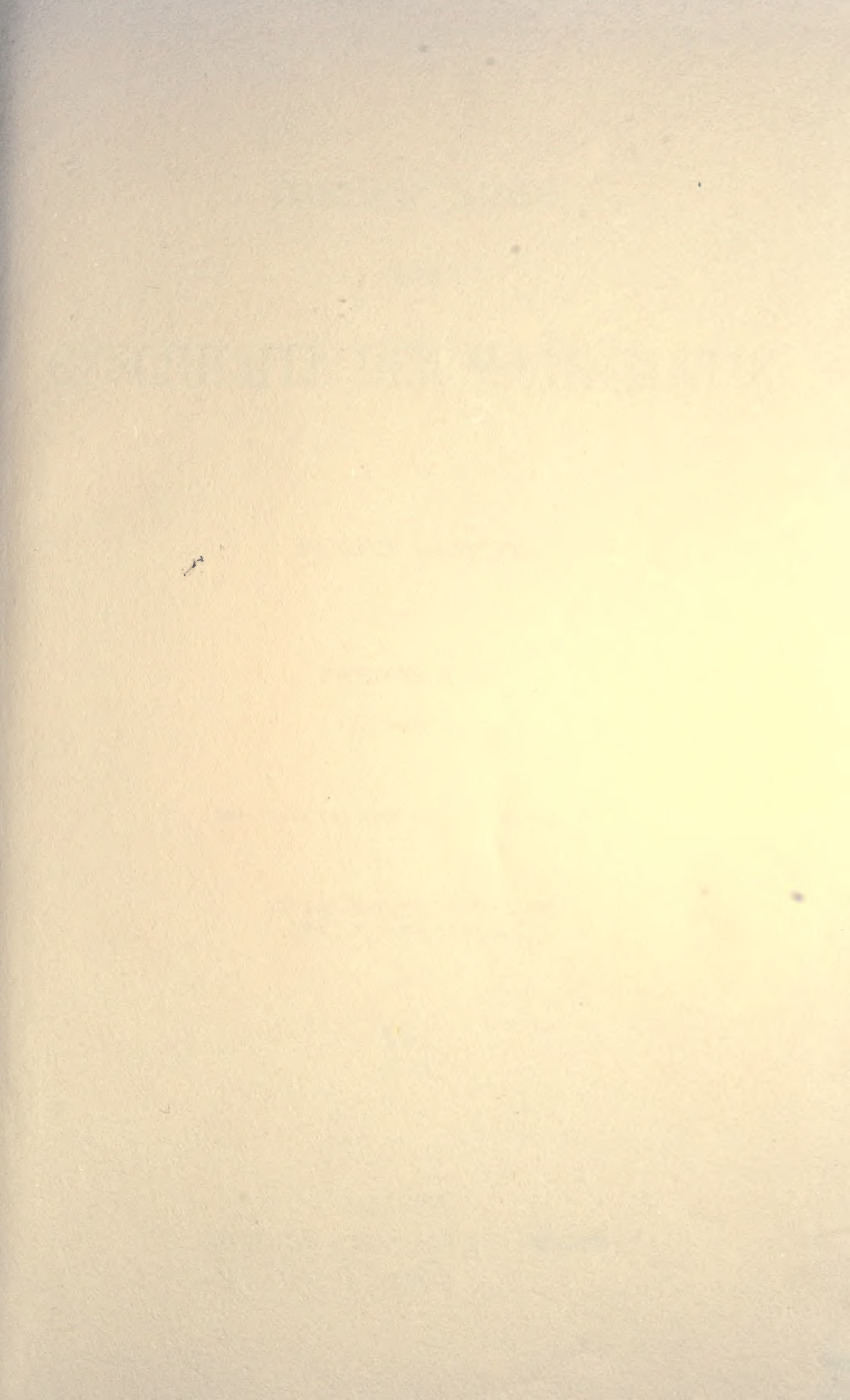





STAT.
LIBRARY









VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

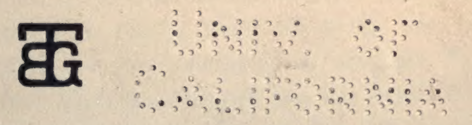
MORITZ CANTOR.

ZWEITER BAND.

VON 1200—1668.

MIT 190 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

UNVERÄNDERTER NEUDRUCK
DER ZWEITEN AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913.

Vorwort.

Leser meiner im Druck erschienenen Schriften sind es schon gewohnt, dass ich das Vorwort dazu zu verwenden pflege, noch nachträglich diese oder jene Aenderung vorzunehmen, zu welcher mir die Anregung erst während des Druckes des betreffenden Bandes wurde. Indem ich mich anschicke, abermals in solcher Weise zu verfahren, komme ich zugleich der angenehmen Pflicht nach, über die Quelle zu berichten, welche mir nicht wenige dieser Aenderungen zuführte. Während die Druckbogen der zweiten Hälfte dieses Bandes zwischen Leipzig und Heidelberg hin- und herliefen, durfte ich am 23. August 1899 die Feier der Vollendung meines siebzigsten Lebensjahres begehen, und zwei bewährte Freunde und Arbeitsgenossen, Professor Max Curtze und Professor Dr. Siegmund Günther, mit welchen ich seit 1863, beziehungsweise 1866, in immer enger werdender Verbindung stand und stehe, liessen es sich nicht nehmen, mich durch das Erscheinen einer Festschrift, an deren Herstellung 32 Schriftsteller auf dem uns gemeinsamen Gebiete der Geschichte der Mathematik und Physik sich beteiligten, auf's Freudigste zu überraschen. Es ist mir Bedürfniss, allen diesen Mitarbeitern öffentlich meinen wärmsten Dank auszusprechen und in diesen Dank auch die Teubnersche Verlagshandlung einzuschliessen, welche in der Ausstattung des Bandes noch zu überbieten wusste, was sie sonst in dieser Richtung leistet. Wie viel ich aus dieser Festschrift lernen durfte, wird teilweise noch in diesem Vorworte sich zeigen, denn sie ist es, von der ich oben als der Quelle so mancher Aenderungen, so mancher Verbesserungen sprach. Für andere Richtigstellungen bin ich brieflichen oder gedruckten Mittheilungen zu Danke verpflichtet, die sich an das Erscheinen der ersten Hälfte dieses Bandes knüpften.

S. 12 und S. 264. Wenn es auch richtig ist, dass Leonardo von Pisa der erste abendländische Schriftsteller war, welcher über die Zerfällung eines Bruches in eine Summe von Stammbrüchen sich ausliess, dass Regiomontan wiederum im Abendlande zuerst eine selbständige Trigonometrie verfasste, so durfte doch diese Beschränkung

auf das Abendland nicht verschwiegen werden, nachdem Bd. I[2], 470 und 735 von dem Rechenbuche von Achmîm und von Nasîr Eddîn das Gleiche berichtet ist.

S. 49. Neben den Wörtern *radix* und *res* kommt bei Leonardo von Pisa noch ein drittes Wort für die Unbekannte vor: *causa* (z. B. Leonardo Pisano II, 236 lin. 18). Diese wichtige Bemerkung hat H. Eneström in seinem Berichte über die erste Abtheilung dieser 2. Auflage des II. Bandes meiner Vorlesungen Gesch. Math. (Bibliotheca mathematica 1899, p. 49—57) gemacht. Ihre ganze Tragweite leuchtet ein, sobald man die Lautverwandtschaft zwischen *causa* und dem später in Übung gekommenen *cosa* in Erwägung zieht.

S. 72. Zum IV. Buche *De numeris datis* des Jordanus Nemorarius ist auf den Aufsatz: R. Daublensky von Sterneck, Zur Vervollständigung der Ausgaben der Schrift des Jordanus Nemorarius etc. (Monatshefte für Mathematik und Physik 1896. VII, 165—179) hinzuweisen.

S. 87—88 und S. 379. H. Eneström macht darauf aufmerksam, dass die Bestimmung des Todesjahres des Sacrobosco auf 1256 neuerdings erhobenen Zweifeln gegenüber nicht mehr festgehalten werden kann; ferner dass Sacrobosco wenn auch im Allgemeinen seine Quellen verschweigend doch einmal, und zwar bei der Ausziehung der Quadratwurzel, sich auf die Arithmetik des Boethius bezieht; endlich dass das von Clichtovaeus herausgegebene *Opusculum de praxi numerorum* thatsächlich mit Sacrobosco's Tractatus de arte numerandi übereinstimmt.

S. 112. Zu Levi ben Gerson ist zu vergleichen Curtze, Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab (Bibliotheca mathematica 1898, p. 97—112). Die der Abhandlung vorangehende *Epistola auctoris* scheint zu beweisen, dass Levi, als Petrus von Alexandrien seine Abhandlung aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzte, zum Christenthum übergetreten war. Unter vielen der Beachtung würdigen Stellen erwähne ich den Sinussatz der ebenen Trigonometrie mit einem sehr eigenartigen Beweise (l. c. S. 105 und 107).

S. 123. Da Johannes de Muris schon 1321 als Schriftsteller auftrat, so muss das Poggendorff entnommene Geburtsjahr 1310 unrichtig sein. In Verbindung mit dieser Bemerkung berichtige ich zugleich zwei Druckfehler: S. 254, Note 2, ist 1654 und nicht 1555 das Druckjahr von Gassendi's Schrift; S. 345 Note 3 ist Schwenter anstatt Schmenter zu lesen.

S. 215. Jahreszahlen auf Münzen in Stellungszahlen treten früh in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, nicht erst gegen das Ende

auf. H. G. Wertheim hat (Bibliotheca mathematica 1898, pag. 120) auf eine solche Münze von 1458 hingewiesen.

S. 230 und S. 296. Libri's Behauptung des Vorkommens der Zeichen + und — bei Lionardo da Vinci ist, laut einer Bemerkung des H. Eneström, durch Govi als unrichtig widerlegt worden. H. Eneström gibt ferner an, eine von Lionardo da Vinci herrührende Handschrift *Il codice di Leonardo da Vinci nella biblioteca del Principe Trivulzio in Milano* sei 1891 durch Luca Beltrami und Angelo Della Croce in Mailand dem Drucke übergeben worden.

S. 235. H. Curtze hat die in der Münchner Bibliothek befindliche deutsche Uebersetzung des Robertus Anglicus von 1477 nunmehr (Festschrift S. 43—63) zum vollständigen Abdrucke gebracht, wofür man ihm bei der geringen Zahl ähnlicher deutscher Schriften aus der genannten Zeit nur dankbar sein kann. Die deutsche Uebertragung der Kunstausdrücke, wie *hofstat* für area, *begrifflichkeit* für capacitas, *zwiestand* für distantia u. s. w., dürfte auch den Sprachforscher zu fesseln im Stande sein.

S. 248. In der Dresdner Handschrift C 80, welche einst in dem Besitze des Johannes Widmann war, und welche später von Adam Riese benutzt worden ist, finden sich die sogenannten Randaufgaben der Dresdner Algebra. Während man sich früher mit der Angabe begnügen musste, sie seien von einer anderen Hand als der des Schreibers des Textes hinzugefügt, ist H. Wappler (Festschrift S. 539—554) bei erneuter Prüfung der Handschrift zu weiteren Ergebnissen gelangt. Er hat erkannt, dass die in ihr enthaltene deutsche Algebra die früher unverstanden gebliebene Datirung von Ostern 1481 trägt. Er hat ferner erkannt, dass die Randaufgaben von der Hand des Johannes Widmann herrühren und hat daraus Veranlassung genommen, eine ganze Anzahl derselben zum Abdrucke zu bringen. Widmann zeigt sich hier als ganz gewandt in einer Kunst, auf welche man in der Kindheit der Algebra grosses Gewicht gelegt zu haben scheint, nämlich in der Kunst, die Unbekannte einer Textaufgabe so auszuwählen, dass man mit ihr allein den Gleichungsansatz zu Stande zu bringen vermag, ohne Symbole für weitere Unbekannte nöthig zu haben.

S. 349. Das Wort *anteriorer*, welches bei Chuquet das allmälige Verschieben des Divisors nach rechts bedeutet, ist viel älteren Ursprunges. H. Eneström hat *anteriorare* und *anterioratio* bei Sacrobosco nachgewiesen.

S. 351. Pappus hat in seinem VII. Buche als 8. Lemma zu dem Verhältnissschnitte des Apollonius (ed. Hultsch II, 688 und 690) den

genau gleichen Satz, dass $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ stets zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ liege, ausgesprochen, auf welchen Chuquet's Regel der mittleren Zahlen gegründet ist. Indem ich auf diese wenig bekannte Thatsache hinweise, bemerke ich jedoch, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Chuquet den damals nur in griechischer Sprache handschriftlich vorhandenen Pappus gelesen haben sollte, eine ausserordentlich geringe ist, und dass ferner Pappus keinerlei Anwendung von seinem Satze gemacht hat.

S. 420. Johann Böschenstein hat nach Angabe von H. Felix Müller (Festschrift S. 308 Note 23) seine Regeln, ähnlich wie Georg Reichelstain es that, in deutsche Verse zu kleiden geliebt. Er war auch als Wiedererwecker der hebräischen Sprache in Deutschland bekannt. Nach H. Steinschneider (Festschrift S. 474—475) hielt es Böschenstein eben darum für nothwendig, Verwahrung dagegen einzulegen, als ob er von jüdischen Eltern abstamme, was aber deshalb doch nicht unmöglich erscheine.

S. 429. Ich hege nicht den leisesten Zweifel an der Richtigkeit der Herleitung der Wortverbindung *regula cecis* von *Zeche*. Gleichwohl möge der Vollständigkeit wegen mit H. Eneström auf Bibliotheca mathematica 1896 pag. 96 und 120, 1897 pag. 32 hingewiesen werden, wo von einer durch den dänischen Mathematiker J. W. Lauremberg 1643 mitgetheilten Herleitung aus dem Arabischen, richtiger aus dem Türkischen, von *sikkir* = der Trinker die Rede ist.

S. 438. Bezüglich des Standpunktes, welchen Stifel dem Irrationalen gegenüber einnahm, hat H. Pringsheim (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I, 51) unter Berufung auf die Stelle der Arithmetica integra fol. 103 verso lin. 3 v. u. [*Item licet infiniti numeri fracti cadant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri irrationales cadunt inter duos numeros integros immediatos. Ex ordinibus tamen utrorumque facile est videre, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare*] hervorgehoben, dass Stifel sich bereits den heutigen Ansichten insoweit näherte, als er anerkannte, dass jeder irrationalen Zahl gerade so gut wie jeder rationalen ein eindeutig bestimmter Platz in der geordneten Zahlenreihe zukomme.

S. 441 und S. 445. H. Eneström hat darauf hingewiesen, dass Stifel neben den Bezeichnungen der Unbekannten einer Gleichung und ihrer Potenzen, deren er sich in der Arithmetica integra bediente, in der Ausgabe der Rudolff'schen Coss von 1553 noch eine andere vorschlug und auch anwandte, welche den später benutzten Bezeichnungen sehr nahe verwandt ist. Fol. 61 verso der genannten Aus-

gabe ist nämlich gesagt: Es mag aber die Cossische progreß auch also verzeychnet werden.

0 1 2 3 4
1 . 1𝔄 . 1𝔄𝔄 . 1𝔄𝔄𝔄 . 1𝔄𝔄𝔄𝔄

Und so fort ahn on ende. Eine Anwendung dieser Zeichen steht aber auf Fol. 465 verso in dem 13. Exemplum.

S. 449. Die Behauptung, es sei mit der deutschen Algebra nach Michael Stifel ziemlich rasch abwärts gegangen, bedarf einer Verbesserung, seit H. Staigmüller (Festschrift S. 431—469) die Verdienste des Tübinger Professors Johannes Scheubel in ein deutlicheres Licht gerückt hat. Ich habe (S. 550) dessen deutsche Bearbeitung des 7., 8. und 9. Buches der Euklidischen Elemente von 1558 beiläufig genannt. Schon vorher, und zwar 1550, hat Scheubel bei dem bekannten Basler Drucker Hervagius die sechs ersten Bücher des Euklid lateinisch herausgegeben und ihnen Regeln der Algebra vorausgeschickt. Die Euklidausgabe ist durch zwei Eigenthümlichkeiten besonders gekennzeichnet. Erstlich sind alle Buchstaben streng vermieden, und statt ihrer ist eine Beschreibung der betreffenden Punkte oder Linien angewandt, z. B. die Spitze des rechten Winkels, die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Dreiecksseite und dergl. Euklid, sagt Scheubel, mache es im Wortlaute seiner Lehrsätze ebenso, und die Beweise sollten nichts einführen, was die Lehrsätze vermeiden. Zweitens gibt Scheubel, wo immer Dreiecksflächen in den Sätzen auftreten, Zahlenbeispiele, welche mit Hilfe der Heronischen Flächenformel $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ausgerechnet die Wahrheit des Satzes bestätigen müssen; an einen Beweis der Heronischen Formel selbst ist natürlich nicht gedacht. Die vorausgeschickte *Brevis regularum algebrae descriptio* ist durch Kürze der Darstellung wie durch reichen Inhalt ausgezeichnet. Indem ich der Hauptsache nach auf H. Staigmüller's Abhandlung verweise, betone ich nur, was auch zu S. 248 von Johannes Widmann lobend erwähnt wurde, die Geschicklichkeit mit einer Unbekannten auszukommen, wo die Natur der Aufgabe deren mehrere zu verlangen scheint. Scheubel lehrt ferner eine allgemeine Näherungsformel für die Auffindung irrationaler Wurzelwerthe höheren Grades kennen. In Buchstaben kommt sie darauf hinaus, dass, wenn $a^n < a^n + b < (a+1)^n$ ist, man näherungsweise zu schreiben hat:

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a + 1}.$$

Nachdem H. Staigmüller's Abhandlung gedruckt war, hat H. Curtze in der Tübinger Bibliothek die Originalhandschrift von Scheubel's lateinischer Uebersetzung der sechs ersten Bücher Euklid's aber ohne die im Druck von 1550 vorausgehende Algebra aufgefunden.

S. 459. Auch andere Schriftsteller vor wie nach Dürer haben den Versuch gemacht, die Kunstausdrücke der Mathematik zu verdeutschen. H. Felix Müller (Festschrift S. 303—333) hat eine grosse Anzahl solcher Uebersetzungsproben mit Quellenangabe vereinigt. Es ist lehrreich zu bemerken, wie wenige derselben Bürgerrecht errungen haben.

S. 548. Nach einer mir brieflich durch H. Hultsch mitgetheilten Berichtigung kann Joachim Camerarius in den Jahren 1557 und 1569 nicht als Nürnberger Humanist bezeichnet werden. In Nürnberg war Camerarius nur 1526—1535, dann in Tübingen, von wo aus er 1538 den Commentar des Theon von Alexandria zum Almagest herausgab, dessen Handschrift dem Nachlasse des Regiomontan entstammte. Seit 1541 wirkte Camerarius in Leipzig. Vgl. Bursian, Geschichte der classischen Philologie in Deutschland I, 185.

S. 572 flgg. Ueber die Schriften Stevin's hat mir H. Gravelaar höchst werthvolle Bemerkungen zugehen lassen. Die *Hypomnemata mathematica* (S. 572) sind die buchstäbliche Uebersetzung der in holländischer Sprache verfassten *Wisconstige Gedachtenissen* und erschienen in 5 Abschnitten, von welchen die 4 ersten als *Mémoires mathématiques du Prince Maurice de Nassau* in die Girard'sche Ausgabe von Stevin's Werken (1634) übergingen. Kästner's Beschreibung der Hypomnemata ist fehlerhaft. Die Schriften des 2. Abschnittes der Hypnomnemata sind ebensowenig wie die übrigen Theile ursprünglich in lateinischer Sprache verfasst, wonach Note 3 S. 620 zu berichtigen ist. Die *Problemata geometrica* (S. 573), gedruckt 1583 in Antwerpen, sind in der Leidner Bibliothek vorhanden. Ihr Inhalt ist grösstentheils in die späteren Bücher *De la practique de géométrie* hineinverarbeitet.

S. 583. H. Hunrath hat neuerdings (Festschrift S. 217—240) eine viel genauere Beschreibung als seiner Zeit in Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII von Vieta's *Canon mathematicus* (1579) geliefert. Ein Exemplar findet sich ebenso wie Vieta's *Universalium inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis* (1579) in der Landesbibliothek zu Cassel. Unter zahlreichen Näherungswerthen, welche dort angegeben sind, sei nur einer erwähnt, dem ich mich nicht erinnern kann anderwärts begegnet zu sein: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[4]{2} + \frac{1}{20}\sqrt{2}$.

S. 599. Brieflicher Mittheilung von H. Hunrath, der in der Lage war, die durch Snellius besorgte Ausgabe von L. van Ceulen,

De circulo et adscriptis liber (1619) einzusehen, entnehme ich, dass die von mir den *Bouwstoffen* entnommenen Angaben irrig sind. In den Rechnungen van Ceulen's sind erst die Sehnen- und Tangentenvielecke mit $3 \cdot 2^{31}$ Ecken verwerthet, dann die mit $15 \cdot 2^{31}$ Ecken, und aus letzteren ist π auf 20 Decimalstellen gefunden.

S. 600. Ueber eine nur 12 Blätter starke Abhandlung des Rhäticus aus dem Jahre 1551: *Canon doctrinae triangulorum* hat H. Hunrath (Festschrift S. 203—205) kurz berichtet.

S. 642. Das Räthsel, wer der „Lehrer" Ylem war, ist in Folge einer neuen Untersuchung der Göttinger Handschrift durch H. Curtze im August 1899 gelöst. Die Handschrift beginnt nämlich mit der lateinischen Uebersetzung der Lehrsätze des II. Buches Euklid's, giebt für jeden derselben deutliche Erläuterungen und Beweise und fährt dann fort: nachdem jetzt die Sätze des Ylem, des *Praeceptoris Algebrae*, beendigt seien, beginne das Buch Algebrae selbst. Darnach kann kein Zweifel sein, dass der Verfasser des arabischen Urtextes, auf welchen die Handschrift jedenfalls zurückgeht, Ylem für den Namen Euklid's hielt und ferner dass er einsah, dass man das II. Buch der Elemente als Algebra auffassen kann. Wieso aber Euklid zu Ylem geworden ist, dürfte leicht zu begreifen sein, wenn man an die fast regelmässige griechische Bezeichnung als *στοιχειωτής* denkt, wovon Lehrer eine ganz erträgliche Uebersetzung ist. Was andere abendländische Leser aus Ylem machten, zeigt eine gleichfalls von H. Curtze im August 1899 in der Landesbibliothek zu Cassel aufgefundene Handschrift. Ihr zufolge wäre Euklides der Titel eines Buches gewesen, dessen Verfasser den Namen Elias führte. Dass aber Elias sehr leicht aus Ylem entstanden sein kann, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

S. 698. H. Caverni hat im IV. Bande seiner *Storia del metodo esperimentale in Italia* die Behauptung zu begründen gesucht, die Erkenntniss der Parabel als Wurflinie rühre nicht von Galilei, sondern von Cavalieri her, der die Entdeckung 1632 in seinem *Specchio ustorio* veröffentlichte. Demgegenüber hat H. Wohlwill (Festschrift S. 579—624) erwiesen, dass, wenn auch Cavalieri's Veröffentlichung durch den Druck die erste war, die durch sie bekannt gemachte wissenschaftliche Thatsache nichtsdestoweniger von Galilei herrührt, der sie muthmasslich schon vor 1610 besass, und durch welchen sie, sei es unmittelbar, sei es wahrscheinlicher mittelbar, Cavalieri bekannt wurde.

S. 712. Einen genauen Bericht über *Melchioris Jostelii Logistica Prosthaphaeresis Astronomica* hat H. von Braunmühl (Festschrift S. 17—29) nach einer Handschrift der Wiener Bibliothek veröffent-

licht. Inzwischen hat H. Curtze die Originalhandschrift des Melchior Jöstel selbst in der Dresdener Bibliothek aufgefunden.

S. 777. Wenn auch die Geschichte der von Fermat gestellten Aufgabe, die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$, wo a eine nichtquadratische Zahl bedeutet, ganzzahlig zu lösen, im Texte richtig skizzirt ist, so wäre es doch wohl wünschenswerth gewesen, auf den literarischen Streit, der sich über diese Aufgabe erhob, und dessen Acten Wallis in dem sogenannten *Commercium epistolicum* von 1758 veröffentlicht hat, näher einzugehen, weil er auf die Art und Weise, in welcher Wallis einen Streit führte, ein helles Licht wirft, dessen Wiederschein vielleicht auch andere etwas dunkle Stellen der literarischen Thätigkeit des gleichen Verfassers, z. B. die geschichtlich sein sollenden Erörterungen seiner Algebra, von denen ich im III. Bande (Kapitel 82) handle, zu beleuchten vermag. H. Wertheim hat (Festschrift S. 557 bis 576) diese Lücke vortrefflich ausgefüllt. Wallis erscheint neben seinem Landsmanne Brouncker als der erheblich untergeordnete Geist, der bald die Aufgaben, zu deren Lösung er nicht im Stande ist, zu missachten vorgiebt, bald die Auflösungen Brouncker's so veröffentlicht, dass man zunächst Wallis einen grösseren Anteil daran zuzuschreiben geneigt ist, als ihm zukam. Auch Frénicle's Methoden, so empirisch sie waren, treten nunmehr mit den durch dieselben erzielten Erfolgen schärfer hervor.

S. 815. In der Behandlung der sogenannten Descartes'schen Ovalen tritt ein Bipolarcoordinatensystem zu Tage, dessen Erfindung man mit H. P. Tannery (Festschrift S. 510 letztes Alinea) weit sicherer als die des rechtwinkligen Coordinatensystems für Descartes in Anspruch zu nehmen hat. In dem gleichen Aufsatze (Festschrift S. 503—513) handelt H. Tannery von im Jahre 1701 gedruckten Auszügen aus Descartes'schen Aufzeichnungen, welchen kein zu grosser mathematischer Werth anhaftet.

Dieses sind die Berichtigungen und Ergänzungen, welche mir während des Druckes des Bandes bekannt geworden sind, und welche ich ihm auf seinen Weg in die Oeffentlichkeit noch mitzugeben wünsche.

Heidelberg im November 1899.

Moritz Cantor.

Inhaltsverzeichniss.

IX. Die Zeit von 1200—1300.

und Gegenpäpste bald mit den Kaisern aus dem Hause der Staufen in offenem Kriege lebten, bald sie krönten, bald mit kaiserlichen Heeren in Rom einzogen, bald wieder vor diesen Heeren flohen; wo Städtebünde sich einigten und lösten; wo Verträge, kaum geschlossen, wieder gebrochen wurden: da hält es schwer zu sagen, was an diesen Erscheinungen als Folge, was als Ursache zu betrachten sei. So viel ist übrigens sicher, dass die kriegerische Kraft insbesondere der drei obengenannten Hafenstädte sich nicht bloss in gegenseitiger Bekämpfung in der Heimath aufrieb, sondern auch in fruchtbaren Handelsunternehmungen sich äusserte. Wir wissen (Bd. I, S. 850—851), von welch bedeutendem Einflusse die Kreuzzüge auf die Handelsbeziehungen des italienischen Kaufmannsstandes gewesen sind. Anwohner eines im Verhältniss zur Grösse des Landes unmässig langen Küstengebietes, vieljährige Nachbarn von arabischen Bewohnern Siciliens, mit denen sie Tauschverkehr zu treiben kaum jemals unterbrochen hatten, waren Italiens Kaufleute wie von der Natur darauf hingewiesen, den Handel mit den reichen Gegenden Vorderasiens wie nicht minder des nördlichen Afrikas zu vermitteln, mochten diese Gegenden als Kreuzzugsstaaten dem christlichen Glauben erworben sein, oder nach wie vor dem Islam huldigen. Venedig, Genua, Pisa waren, wie oben angedeutet, die drei Städte, welche wetteifernd um den ersten Rang des Handels und der Colonisation stritten, da und dort, häufig an gleichem Orte nebeneinander, Ansiedelungen gründend, welche nicht selten in Streitigkeiten, die zu blutigen Kämpfen führten, ihre Eifersucht bethätigten. Von Pisa's Ansiedelungen müssen wir besonders eine hervorheben[1]). Von Bugia als dem westlichsten Punkte bis Sfax finden wir um das Jahr 1200 pisanische Factoreien, grossartige Waarenhäuser verbunden mit ganze Stadttheile bildenden Wohnräumen für die ankommenden Schiffsleute wie für ansässig gewordene Beamte. Aehnliche Besitzungen der Pisaner sind in Alexandria, ähnliche an der vorderasiatischen Küste, besonders in Tyrus, ähnliche in Constantinopel vorhanden. Die Absicht bei den von den Herren des Landes nicht ungern gesehenen Niederlassungen gipfelte darin, dass die Ersten am Platze sich bestrebten, Zollvergünstigungen bei der Einfuhr und Ausfuhr von Waaren wo möglich für sich allein zu erlangen. Deren Mitgewährung an andere Handelsstädte z. B. an Genua oder Venedig nährte und stachelte die aus dem Mutterlande schon mitgebrachte Eifersucht. Es handelte sich mithin um ganz wichtige

---

[1]) Vergl. W. Heyd, Die mittelalterlichen Handelscolonien der Italiener in Nordafrika von Tripolis bis Marocco in der Zeitschr. f. d. gesammte Staatswissensch. XX, 617—660 (Tübingen 1864) und desselben Verfassers zweibändiges Werk: W. Heyd, Geschichte des Levantehandels im Mittelalter (Stuttgart 1879).

Dinge, welche die Beamten, die Zollaufseher und Schreiber einer solchen Niederlassung, zu besorgen hatten, um die Fürsorge dafür, dass die zugesicherten Vergünstigungen auch eingehalten wurden, dass den Kaufleuten aus ihrer Heimath keine höhere Zollgebühr abgefordert wurde, als sie vertragsmässig zu zahlen verpflichtet waren; es handelte sich unter Umständen um den Abschluss neuer Verträge. Die Stellung der Beamten, mochten sie auch nur Schreiber heissen, ist demnach keineswegs eine untergeordnete gewesen.

Von einem pisaner Schreiber wissen wir, der am Ende des XII. Jahrhunderts in Bugia lebte. Seinen Namen kennen wir nicht, wohl aber einen spöttischen Beinamen, den er führte, Bonaccio (der Gute), und welcher sich in der Ueberschrift eines von seinem Sohne Leonardo verfassten Werkes erhalten hat:[1]) Incipit liber Abaci Compositus a leonardo filio Bonacij Pisano. In Anno M°CC°II°. Er liess diesen Sohn Leonardo aus der Heimath kommen, um ihn bei einem Rechenmeister unterrichten zu lassen. Er sollte verschiedene Tage — per aliquot dies — dem Studium des Abacus widmen. Er wurde in die Kunst mit Hilfe der neun Zahlzeichen der Inder eingeführt, fand an der Wissenschaft Vergnügen, lernte auf Handelsreisen, die er später nach Aegypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und der Provence unternahm, Alles kennen, was an jene Rechnungsverfahren sich anschloss. Aber dies Alles, sagt Leonardo, und der Algorismus und die Bögen des Pictagoras schienen mir nur ebensoviele Irrthümer verglichen mit der Methode der Inder[2]). Er habe desshalb eben die Methode der Inder enger umfasst, habe Eigenes hinzugefügt, Manches von den Feinheiten der geometrischen Kunst des Euclid beigesetzt und so das Werk geschaffen, welches er jetzt in 15 Abschnitten veröffentliche, damit das Geschlecht der Lateiner hinfort nicht mehr unwissend in diesen Dingen befunden werde.

In der That scheint das umfangreiche Werk — der vorhandene Abdruck erfüllt 459 Seiten — den Erfolg gehabt zu haben, welchen Leonardo sich von ihm versprach. Noch Jahrhunderte hindurch ist die Nachwirkung dieses merkwürdigen Buches unmittelbar zu erweisen. Die von Leonardo gebrauchten Beispiele sind von zähester Lebenskraft und haben, theilweise selbst aus grauester Vergangenheit stammend, weitere Zeiträume durchlebt, als die stolzesten Bauten des Alterthums.

---

[1]) Vergl. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Bald. Boncompagni* (Rom 1857—62) I, 1. Wir citiren immer Leon. Pisano mit nachfolgender Angabe von Band und Seitenzahl. Leonardo's Bildungsgang ist I, 1 Z. 16 v. u. beschrieben. [2]) *Sed hoc totum et algorismum atque arcus pictagore quasi errorem computavi respectu modi indorum.* Leon. Pisano I, 1 Z. 9 v. u.

Ueber den augenblicklichen Erfolg von Leonardo's liber Abaci — Abacus werden wir das Buch hinfort nennen — könnte der Umstand zweifelhaft machen, dass dem Verfasser so wenig als seinem Vater ein spöttischer Beiname erspart blieb. Bigollo, Tölpel, nennt sich Leonardo in Ueberschriften[1]) mit demselben Gleichmuthe, mit welchem er sich zu anderen Malen oder auch gleichzeitig Filius Bonacij nennt, woraus spätere Zusammenziehung den Namen Fibonaci gebildet hat, unter welchem Leonardo fast am häufigsten bekannt ist. Muthmasslich waren aber diese Spottnamen doch nur im Munde der kenntnisslosen Menge entstanden und ebendesshalb von Leonardo selbst in stolzem Gegenspotte angenommen worden. Ganz anders wurde der Abacus, wurde dessen Verfasser in den Kreisen der gebildeten Minderheit betrachtet und geachtet. Wir gehen schwerlich irre, wenn wir annehmen, dieses Werk sei es gewesen, welches Leonardo den Zutritt zum kaiserlichen Palaste eröffnete. Jedenfalls stand Leonardo in Hofkreisen mitten inne, als er die zweite Bearbeitung des Abacus veranstaltete, welche allein auf uns gekommen ist, und von welcher somit eigentlich gilt, was wir bisher angeführt haben.

Man könnte zunächst das Datum 1202 auf diese zweite Ausgabe beziehen, an deren Spitze es sich befindet, doch ist die Unmöglichkeit davon leicht zu erweisen. Die zweite Ausgabe beginnt nämlich mit einem Widmungsschreiben an Meister Michael aus Schottland, in welchem mitgetheilt ist[2]), es sei schon lange her, dass das Werk vom Abacus verfasst sei, und inzwischen habe Leonardo auch eine Schrift über die Praxis der Geometrie verfasst. Von dieser letzteren haben wir im folgenden Kapitel zu reden und werden sehen, dass sie von 1220 datirt ist. Jedenfalls nach 1220 muss also auch die zweite Ausgabe des Abacus gesetzt werden, allerdings „lange Zeit“ nämlich, wie sich zeigen wird, wohl 26 Jahre später als die erste Ausgabe. Auf ebendenselben Zeitpunkt verweist aber auch die Persönlichkeit des Meister Michael aus Schottland[3]). Michael Scotus, der Hofastrolog Kaiser Friedrich II., der offenbar gemeint ist, wurde um 1190 in der schottischen Stadt Balwearie geboren, konnte also 1202 unmöglich als grosser Gelehrter, summe philosophe,

---

[1]) Leon. Pisano II, 227: *Incipit flos Leonardi bigolli pisani* und nach Libri II, 21 Note heisst es in einem Pariser Codex eines anderen Werkes Leonardo's: *Incipit pratica geometrie composita a leonardo Bigollosio fillio Bonacij pisano.* [2]) *Scripsistis mihi domine mi magister Michael Scotte, summe philosophe, ut librum de numero, quemdudum composui, vobis transscriberem . . . Verum in alio libro, quem de practica Geometrie composui . . .* [3]) *Nouvelle Biographie universelle* XXXV, 363 (Paris 1861).

in einem Widmungsschreiben angeredet werden. Er bereiste nach einem Studienaufenthalte in Paris auch noch Spanien, wo er 1217 in Toledo verweilte und mit Astronomie sich beschäftigte. Erst nach dieser Zeit kam er zu Kaiser Friedrich und mit diesem nach Italien. Es ist mindestens als wahrscheinlich, wenn nicht als gewiss zu betrachten, dass Michael Scotus einer der Gelehrten war, die Friedrich II. damit betraute, in Bologna Uebersetzungen aus dem Arabischen nach neu aufgefundenen griechischen Urtexten zu verbessern. So entstanden gereinigtere lateinische Ausgaben einiger aristotelischer Schriften, so eine Ausgabe des Almagest, welche im Laufe der Jahrhunderte in die Wolfenbüttler Bibliothek gelangte[1]). Der Tod des Kaisers im December 1250 gab den Anlass zur Entfernung seines Astrologen, der nun nach England an den Hof Eduard I. übersiedelte. Somit ist die Entstehungszeit der zweiten Ausgabe von Leonardo's Abacus innerhalb der Grenzjahre 1220 und 1250 zu suchen und es ist kein Grund vorhanden, an der Richtigkeit einer Notiz zu zweifeln[2]), welche die zweite Ausgabe in bestimmter Weise an das Jahr 1228 knüpft.

Die 15 Abschnitte, in welche das Werk zerfällt, führen folgende Ueberschriften[3]):

1. Von der Kenntniss der neun Zahlzeichen der Inder und wie mittels derselben jede Zahl anzuschreiben sei; ferner welche Zahlen und wie sie durch die Hände behalten werden können, sowie die Einführungen des Abacus (pag. 2—6).
2. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen (pag. 7—18).
3. Vom Zusammenzählen ganzer Zahlen (p. 18—22).
4. Von dem Abziehen kleinerer Zahlen von grösseren (pag. 22—23).
5. Von dem Theilen ganzer Zahlen (pag. 23—47).
6. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen mit Brüchen (pag. 47—63).
7. Vom Zusammenzählen, Abziehen und Theilen der Zahlen

---

[1]) Monatl. Correspond. z. Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben von F. v. Zach XXVII, 192—193 (Gotha 1813). [2]) Libri II, 24 Note 2: *Incipit liber Abaci a Leonardo filio Bonacci compositus anno 1202 et correctus ab eodem anno 1228.* Die gleichen Worte wurden von L. Gegenbauer, auf dessen briefliche Mittheilung ich mich stütze, in folgenden drei Handschriften des XIII. S. gefunden: a. Codex der Ambrosianischen Bibliothek in Mailand mit der Signatur J 92 p. sup. b. Codex der Bibliotheca pubblica in Siena mit der Signatur L. IV. 20. c. Codex der Vaticanischen Bibliothek in Rom mit der Signatur Palat. 1343. Die zuerst genannte Handschrift a. scheint sich durch zahlreiche Noten und Randglossen auszuzeichnen. [3]) Die Titel sind als Schluss der Einleitung I, 2 der Druckausgabe vereinigt, stehen dann aber auch als besondere Ueberschriften am Anfange der einzelnen Abschnitte.

mit Brüchen und von der Zerlegung vielfacher Theile in einzelne (pag. 63—83).

8. Von der Auffindung der Preise der Waaren nach der längeren Weise (pag. 83—118).

9. Von dem Umtausche der Waaren und ähnlichen Dingen (pag. 118—135).

10. Von der Genossenschaft unter Gesellschaftern (pag. 135—143).

11. Von der Mischung der Münzen (pag. 143—166).

12. Von den Auflösungen vieler Aufgaben, die wir als mannigfache [1]) bezeichnen (pag. 166—318).

13. Von der Regel Elchatayn und wie durch dieselbe fast alle mannigfache Aufgaben des Abacus gelöst werden (pag. 318—352).

14. Von der Auffindung der Quadrat- und Kubikwurzeln und von deren gegenseitiger Vervielfachung, Theilung und Abziehung, sowie von der Behandlung der mit ganzen Zahlen verbundenen Wurzelgrössen [2]) und ihren Wurzeln (pag. 352—387).

15. Von den Regeln, die zur Geometrie gehören und von den Aufgaben der Aljebra und Almuchabala (pag. 387—459).

Es wird nun nothwendig sein, den Inhalt der einzelnen Abschnitte übersichtlich zu besprechen und Einzelheiten hervorzuheben, soweit dieselben wichtig erscheinen.

Im ersten Abschnitte sind die als von den Indern herrührend erklärten, aber nach arabischem Vorbilde von der rechtsstehenden 1 nach der zu äusserst links befindlichen 9 geordneten Zahlzeichen, sowie die Null, welche von den Arabern *zephirum* genannt worden sei, abgebildet. Beim Zahlenschreiben soll man die Hunderter, Hunderttausender, Hundertmillionen u. s. w. oben, die Tausender, Millionen, Tausendmillionen u. s. w. unten accentuiren. Das Darstellen der Zahlen mittels Fingerbeugungen beginnt an der linken Hand, um sich an der rechten fortzusetzen. Die Gelenke der Finger spielen bei solchen Beugungen eine Rolle. Einmal ist das Daumengelenk als *nodus* bezeichnet [3]), während das Wort *articulus* nicht vorkommt. Die Einführungen, introductiones in ac ditione et multiplichatione numerorum [4]), sind nichts Anderes als eine Einsundeins- und eine Einmaleinstabelle.

Der zweite Abschnitt lehrt auf einer weissen Tafel, auf

[1]) *erraticus* = umherschweifend oder zerstreut heissen diese Aufgaben in der Zusammenstellung auf I, 2. Am Anfange des 12. Abschnittes selbst I, 166 steht dagegen *Capitulum duodecimum de quaestionibus abbaci.* [2]) *De tractatu binomiorum et recisorum.* [3]) Leon. Pisano I, 5 Z. 14. Das gleiche Wort *nodus* ist auch I, 305 mehrfach benutzt, wo von einem an einem Fingergelenke befindlichen Ringe die Rede ist. [4]) Ebenda pag. 6.

welcher die Zeichen leicht weggewischt werden können[1]), diejenige Multiplication ausführen, welche die Inder (Bd. I, S. 571) unter dem Namen der *blitzbildenden* übten, und geht dabei so weit, zwei achtziffrige Zahlen mit einander vervielfachen zu lassen. Zur Prüfung des Ergebnisses dient die vorher bewiesene Neunerprobe[2]). Das Product heisst regelmässig *summa multiplicationis*[3]).

Der dritte Abschnitt wendet die Addition auf die *schachbrettartige* Multiplication (Bd. I, S. 571) an. Die Neunerprobe wird neuerdings und zwar mittels durch Buchstaben angedeuteter aber nicht gezeichneter Linien bewiesen[4]). Wir lassen die nur an wenigen Stellen wegen vom Sinne gebotener kleiner Aenderungen nicht ganz wortgetreue Uebersetzung des Beweises folgen: „Um zu zeigen, woher diese Probe stammt, seien zwei Zahlen $.a.b.$[5]) und $.b.g.$ gegeben, welche wir addiren wollen, und es sei also $.a.g.$ die aus ihnen vereinigte Zahl. Nun sage ich, dass aus der Vereinigung des Gewichtes (*pensa*) der Zahl $.a.b.$ mit dem Gewichte der Zahl $.b.g.$ das Gewicht von $.a.g.$ entsteht. Erstlich sei jede der Zahlen $.a.b.$ und $.b.g.$ durch 9 theilbar, 9 also Gemeintheiler von $.a.b.$ und $.b.g.$ Folglich ist auch die vereinigte Zahl $.a.g.$ durch 9 theilbar, und Null ist ihr Gewicht, wie es aus der Addition der Probezahlen (*probe*) oder aus der Prüfung der Zahlen $.a.b.$ und $.b.g.$ erhalten wird. Ferner sei eine der beiden Zahlen durch 9 theilbar, die andere nicht, und es sei die Zahl $.a.b.$, die durch 9 theilbar ist, und bei der Theilung von $.b.g.$ durch 9 bleibe $.d.g.$ übrig. Die Zahlen $.d.b.$ und $.b.a.$ sind demnach durch 9 theilbar und ebenso auch ihre Summe $.d.a.$ Weil nun die Zahl $.a.g.$ über $.a.d.$ um $.g.d.$ überschiesst und $.a.d.$ durch 9 theilbar ist, so bleibt aus der ganzen $.a.g.$ die durch 9 untheilbare $.d.g.$ übrig, welche aus der Addition der Probezahl von $.a.b.$ — nämlich Null — mit der Probezahl von $.b.g.$ — nämlich $.d.g.$ — entsteht. Endlich sei keine der Zahlen $.a.b.$ und $.b.g.$ durch 9 theilbar, vielmehr bleiben aus $.a.b.$ die

[1]) Leon. Pisano I, 7: *in tabula dealbata in qua littere leviter deleantur.* [2]) Ebenda pag. 8. [3]) Ebenda pag. 12 und häufiger. [4]) Ebenda pag. 20 Z. 9—28. [5]) Man beachte die regelmässig wiederkehrende Anwendung von drei Pünktchen vor, zwischen und hinter den die Strecke bezeichnenden Buchstaben, sowie auch die dem arabischen oder dem griechischen Alphabete nachgebildete Buchstabenfolge. Jene vielen Punkte finden sich überall in mittelalterlichen Handschriften und stammen daher, dass sonst die Zahl $.a.b.$ von dem Worte *ab* nicht zu unterscheiden gewesen wäre. Wir verdanken diese Bemerkung wie zahlreiche andere den brieflichen Mittheilungen von Max Curtze. Wir berufen uns künftig auf diese Mittheilungen mit den Worten: Curtze brieflich. Der Bequemlichkeit wegen lassen wir die Pünktchen, ausser an dieser Stelle, künftig überall weg.

$.a.e.$ und aus $.b.g.$ die $.d.g.$ übrig. Die Restzahlen, d. h. $.e.b.$ und $.b.d.$ sind durch 9 theilbar, und theilbar ist auch die ganze $.e.d.$ als aus irgend einer Menge von Neunern zusammengesetzt. Es bleiben also aus der ganzen Zahl $.a.g.$ die untheilbaren Zahlen $.a.e.$ und $.d.g.$ übrig, welche eben die Probezahlen von $.a.b.$ und $.b.g.$ waren, und aus deren Vereinigung das Gewicht der Zahl $.a.g.$ entsteht, wie zu zeigen war.“ Zum Schlusse des Abschnittes erscheint die Addition benannter Zahlen.

Der vierte Abschnitt handelt kurz von dem Abziehen, welches immer *extrahere* heisst. Ein Wort wie subtrahere kommt nicht vor. Ist eine Ziffer des Subtrahendus von höherem Werthe als die entsprechende Ziffer des Minuendus, so wird, ähnlich wie bei einigen aus indischen und arabischen Quellen schöpfenden anderen Schriftstellern (Bd. I, S. 570 und 763), zu dem Minuendus eine X des betreffenden Ranges geborgt, welche dann auch dem Subtrahenden als Einheit der nächsthöheren Ordnung zugesetzt wird.

Der fünfte Abschnitt geht zur Division über. Wiewohl eigentlich nur von der Division ganzer Zahlen in diesem Abschnitte die Rede sein soll, ist doch das Schreiben von Brüchen, und zwar ganz nach arabischem Muster gelehrt. Arabisch ist das Auftreten der Brüche links von den ganzen Zahlen, z. B. $\frac{1}{2}182$ für unser $182\frac{1}{2}$, während allerdings die ganzen Zahlen dennoch vor den Brüchen ausgesprochen werden[1]). Arabisch sind (Bd. I, S. 764—765) die aufsteigenden Kettenbrüche[2]) z. B. $\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$ in der Bedeutung von $\frac{7}{10}+\frac{5}{6\cdot 10}+\frac{1}{2.6.10}$. Der Quotient einer Division heisst *summa divisionis*[3]). Unter *differentia* ist, wie bei Johannes von Sevilla (Bd. I, S. 753) die Rangordnung einer Ziffer verstanden[4]). Primzahlen, welche Leonardo *numeros sine regulis* nennt, sollen bei den Griechen *coris canon*, bei den Arabern *hasam* heissen[5]). Ganz richtig ist diese sprachliche Doppelbemerkung nicht. Das Wort χωρίς, ausgesondert, wird zwar von Nikomachos gebraucht, aber nicht für Primzahl, und das arabische asamm, stumm, bedeutet wieder keine Primzahl, sondern eine Zahl, welche gegen die neun ersten Zahlen theilerfremd und keine Quadratzahl ist[6]). Eine kleine Randtabelle[7])

---

[1]) Leon. Pisano I, 27: *Nam rupti vel fracti semper ponendi sunt post integra, quamvis prius integra quam rupti pronuntiari debeant.* [2]) Ebenda pag. 24. [3]) Ebenda pag. 27. [4]) Ebenda pag. 31, Z. 24: *secundum differentiam ipsorum.* [5]) Ebenda pag. 30. [6]) *Kafî fîl Hisâb* des *Alkarkhî* (ed. Hochheim) S. 11, Anmerkung 4 und Beha-eddin (ed. Nesselmann) S. 4. [7]) Leon. Pisano I, 31.

enthält die 21 Primzahlen von 11 bis 97, während auch die Factorenzerlegung der zusammengesetzten Zahlen von 12 bis 100 in einer Tabelle[1]) zu finden ist. Die Zerlegung höherer Zahlen in Factoren wird gleichfalls gelehrt, wobei auf die Merkmale der Theilbarkeit durch 2, durch 5, durch 9, beziehungsweise durch 3 aus der Endziffer und dem Gewichte der Zahl Bezug genommen ist. Theilbarkeit durch 7, 11, 13 u. s. w. wird durch Probiren untersucht, welches fortzusetzen ist, bis man zu der Quadratwurzel der betreffenden Zahl gelangt[2]). Als Sicherung der richtigen Zerlegung wird die Siebenerprobe empfohlen, welche neben der Elferprobe[3]) und neben der am häufigsten zur Verwendung kommenden Neunerprobe dem nicht unbekannt sein konnte, welcher an der Nordküste Afrikas das Rechnen erlernt hatte (Bd. I, S. 759). Dem eigentlichen Dividiren ist verhältnissmässig geringe Aufmerksamkeit gewidmet. Die Theilung wird meist durch die einzelnen Factoren des Divisors nach einander vollzogen, wodurch die Annehmlichkeit sich ergiebt, dass der gebrochene Theil des Quotienten sofort in der beliebten Gestalt eines aufsteigenden Kettenbruches erhalten wird. Beim Anschreiben der Divisionsbeispiele wird der Divisor unter den Dividend gesetzt, und unter den Divisor wieder der Quotient, so dass die Einer dieser drei Zahlen sich untereinander befinden. Die Hilfszahlen der bei dem allmäligen Abziehen der Theilproducte des Divisors in dem Quotienten vom Dividenden verbleibenden Reste kommen über den Dividenden zu stehen.

Der sechste Abschnitt lehrt gemischte Zahlen mit einander zu vervielfachen. Sie werden zu Brüchen eingerichtet; deren Zähler werden sodann mit einander vervielfacht, und hierauf folgt die Theilung durch die einzelnen Nenner, welche nacheinander vollzogen wird, wie man es im vorigen Abschnitte bei der Division durch einen aus mehreren Factoren zusammengesetzten Divisor machte. Auch hier wird nicht versäumt, abseits von der eigentlichen Aufgabe auf manche Dinge hinzuweisen. Bei gemeintheiligen Zahlen, *numeri communicantes,* wird die Aufsuchung des grössten Gemeintheilers nach Euklid, wie ausdrücklich hervorgehoben ist[4]), gelehrt. Andererseits ist auch von dem kleinsten Gemeinvielfachen gegebener Zahlen die Rede[5]). Dasselbe dient zur Vereinigung von Brüchen, welche nicht mit in Einem laufenden Bruchstrichen, vielmehr cum separatis virgulis[6]), gesondert von einander auftreten, wie z. B. $\frac{1}{5}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ sich zu $\frac{47}{60}$ vereinigen. Bruchbrüche von der Art, wie die Araber (Bd. I, S. 765) sie gebrauchten,

[1]) Leon. Pisano I, 37. [2]) Ebenda pag. 38. [3]) Ebenda pag. 39 die Siebenerprobe und pag. 45 die Elferprobe. [4]) Ebenda pag. 51 Z. 4 v. u.: *ut in Euclide apertis demonstrationibus declaratur.* [5]) Ebenda pag. 57. [6]) Ebenda pag. 52 Z. 11 v. u.

sind gleichfalls vorhanden[1]) und zwar von doppelter Gattung. Unter $0\frac{6}{7}\frac{8}{9}\frac{9}{10}22$ wird verstanden 22 nebst dem Producte aus $\frac{6}{7}$ in $\frac{8}{9}$ in $\frac{9}{10}$, während dagegen $\frac{2}{3}\frac{5}{8}\frac{4}{9}0\ 11$ die viel zusammengesetztere Bedeutung hat $11 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}$. Eine in diesem Abschnitte enthaltene kleine Tabelle[2]) lehrt die Addition von Brüchen mit den Nennern 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Der siebente Abschnitt setzt die Rechnung mit aus ganzen Zahlen und Brüchen gemischten Zahlen fort. Der Grundgedanke der an mannigfaltigen Beispielen geübten Methoden besteht darin, dass zu Anfang die Zahlen, mit denen gerechnet werden soll, zu gleichnamigen Brüchen erweitert werden, sodass die Addition und Subtraction, aber auch die Division wesentlich nur mittels der Zähler zu vollziehen bleibt. Ein Beispiel der Division ist[3])

$$\left(523\frac{1}{10}\frac{7}{9}\right) : \left(17\frac{1}{6}\frac{2}{5}\right) = \frac{47149}{90} : \frac{1581}{90} = \frac{47149}{1581}.$$

Der letzte Theil dieses Abschnittes, der der Aufgabe gegebene Brüche in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen[4]) gewidmet ist, hat für den Geschichtsforscher eine grosse Bedeutung. Solcher Zerlegungen bedienten sich bereits die Aegypter (Bd. I, S. 25 flgg.). Alle unmittelbaren wie mittelbaren Schüler derselben folgten ihrem Beispiele. Eine Andeutung darüber, wie jene Zerlegung zu erhalten sei, ist kaum jemals vorhanden. Leonardo ist von den uns bekannt gewordenen Schriftstellern der erste, er ist auch der Einzige, der die Zerlegung selbst als Aufgabe behandelt und sich nicht damit begnügt, nur von der gleichviel wie ausgeführten Zerlegung Gebrauch zu machen. Ist Leonardo hier einziger Originalschriftsteller, oder müssen wir sagen, er sei für uns der Einzige, der theilweise oder ganz und gar Uraltes uns aufbewahrt hat? Volle Gewissheit ist für keinen der beiden Wechselfälle zu beanspruchen, doch scheint die Annahme von der hier vorhandenen Erhaltung älteren Stoffes aus mehr als nur einem Grunde gerechtfertigt. Gerechtfertigt ist sie dadurch, dass Leonardi vielfach auch anderwärts nachweislich alte Stoffe behandelt hat, ohne gerade immer seine Quellen zu nennen, gerechtfertigt ferner dadurch, dass Leonardo sich nicht auf ein Verfahren beschränkt, sondern mehrfache Regeln giebt, während die Unterscheidung von Einzelfällen recht eigentlich als Kennzeichen alterthümlichen Ursprunges gelten darf. Eine Tabelle[5])

---

[1]) Leon. Pisano I, pag. 61. [2]) Ebenda pag. 54—55. [3]) Ebenda pag. 75. [4]) Ebenda pag. 77—83. [5]) Ebenda pag. 79.

enthält die Zerlegung derjenigen Brüche, deren Nenner 6, 8, 12, 20, 24, 60, 100 heissen. Regeln, welche sodann folgen, lassen aus ihrem Wortlaute leicht in Formeln sich umsetzen, welche dem heutigen Auge übersichtlicher so lauten:

$$\frac{a}{na-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(na-1)}$$

$$\frac{a+1}{na-1} = \frac{1}{na-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(na-1)}$$

$$\frac{2a+3}{(2n+1)(2a+1)-1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)a+n} + \frac{1}{(2n+1)[(2n+1)(2a+1)-1]}.$$

Eine weitere Regel zur Zerlegung von $\frac{a}{b}$ ist folgende: Es sei $b > a$ und zwar $ma < b < (m+1)a$, so ist $\frac{1}{m} > \frac{a}{b} > \frac{1}{m+1}$. Mithin kann als Anfang der Zerlegung $\frac{a}{b} = \frac{1}{m+1} + \frac{a(m+1)-b}{b(m+1)}$ gesetzt werden, und die Zerlegung des Restgliedes erfolgt durch, wenn es sein muss, wiederholte Anwendung der Regel. Es ist leicht ersichtlich, dass diese Regel ebenso wie die erste unserer Gleichungsformeln zu der ägyptischen Formel $\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2} \cdot p}$ (p ungrad gedacht) verhelfen konnte. Eine letzte Zerlegungsmethode von $\frac{a}{b}$, praktisch vielleicht die beste, besteht darin, dass man innerhalb der Grenzen $\frac{b}{2}$ und $2b$ eine Zahl c sucht, welche recht viele Divisoren besitze. Als Beispiele solcher vortheilhaft zu wählenden Zahlen nennt Leonardo 12, 24, 36, 48, 60. Mit diesem c wird zunächst der Bruch $\frac{a}{b}$ erweitert zu $\frac{ac}{bc}$. Weil $a \geqq 2$, $c > \frac{b}{2}$, muss $ac > b$ sein. Bei der Kürzung der neuen Bruchform in $\frac{ac:b}{c}$ erscheint also im Zähler jedenfalls ein ganzzahliger Theil $e \geqq 1$ d. h. es wird $\frac{a}{b} = \frac{e}{c} + \frac{ac-be}{bc}$, wo $\frac{e}{c}$ vermöge der genannten Eigenschaft des eigens desshalb gewählten c und unter Anwendung der früheren Zerlegungstabelle sich leicht als Summe von Stammbrüchen darstellt und das Gleiche meist auch für $\frac{ac-be}{bc}$ gilt.

Im achten Abschnitte wird der einfache Dreisatz gelehrt. Gegeben ist der Preis der Waare mit Hilfe von zwei Zahlen, deren erste eine feste Menge der Waare, die zweite den im Allgemeinen wechselnden Geldwerth dieser Menge nennt. Die beiden Zahlen werden an das obere Ende der Tafel geschrieben, und zwar die erste

Zahl rechts, die zweite links. Ferner ist jedesmal noch eine dritte Zahl gegeben, welche aber verschiedener Natur sein kann, entweder eine Waarenmenge oder eine Geldsumme. Diese dritte Zahl wird unter die ihr gleichnamige der beiden ersten geschrieben. Die gesuchte vierte Zahl mit der Bedeutung der für die bekannte Waarenmenge zu erlegenden Geldsumme, oder der für die bekannte Geldsumme zu beziehenden Waarenmenge wird gefunden, indem die dritte Zahl mit der ihr schräg gegenüberstehenden oberen Zahl, mit welcher sie durch eine geneigte Gerade in Verbindung gesetzt ist, multiplicirt und das Product durch die andere obere Zahl dividirt wird. Heisst es z. B. 100 Rotuli (ein pisaner Gewicht) kosten 40 Lire, was kosten 5 Rotuli? so sieht der Ansatz folgendermassen aus:

40 L. 100 R.
\
5 R.

Fragt man dagegen unter denselben Vorbedingungen nach der Anzahl der für 2 Lire zu erwerbenden Rotuli, so muss man ansetzen:

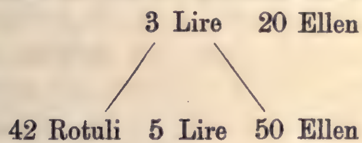
40 L. 100 R.
/
2 L.

und das Ergebniss ist $\frac{40 \cdot 5}{100} = 2$ L., beziehungsweise $\frac{100 \cdot 2}{40} = 5$ R. Warum diese Art von Rechnungen, welche an zahlreichen Beispielen mit verschiedenartigen Gewichtsmengen, Längen, Geldsorten u. s. w. gelehrt wird, den Namen des Verfahrens nach der längeren oder grösseren Weise, *ad majorem guisam* führt, ist im Texte nirgend angegeben. Die ziemlich nahe liegende Vermuthung, es sei damit gemeint, dass der grösseren Fragezahl immer die grössere Antwort entspreche, es sei also die directe Proportion gemeint, ist kaum zulässig, weil sonst im nächsten Abschnitte, wo indirecte Proportionen vorkommen, irgend ein Hinweis auf jene hier nicht mehr zutreffende Benennung, vielleicht *ad minorem guisam*, zu erwarten wäre. Nun ist allerdings letzterer Ausdruck an sich Leonardo nicht fremd. Im 11. Abschnitte[1]) wird ein Buch *minoris guise* erwähnt, welches Leonardo geschrieben haben will, aber von einer indirecten Proportion scheint darin nicht die Rede gewesen zu sein. Somit ist eine andere Deutung beider einander gegenüberstehender Ausdrücke nothwendig, und vielleicht gehen wir, wie im 102. Kapitel begründet werden wird,

[1]) Leon. Pisano I, 154 Z. 1: *Est enim alius modus consolandi quem in libro minoris guise docuimus.*

nicht irre, wenn wir als das längere Verfahren die gewöhnliche Bruchrechnung erklären, als das kürzere diejenige Bruchrechnung, welche einen Bruch als Summe von Stammbrüchen in die Rechnung einbezieht.

Auch im neunten Abschnitte kommt ein eigenthümlicher Kunstausdruck vor. Es handelt sich um den Tausch von Waaren unter einander gemäss gegebener Preise. Es sollen z. B. 20 Ellen Tuch 3 pisaner Lire kosten und 42 Rotuli Baumwolle 5 Lire; wie viele Rotuli Baumwolle kann man um 50 Ellen Tuch erhalten? Da sollen nun die fünf gegebenen Zahlen in folgender Weise angeschrieben werden: In einer ersten Zeile kommen von rechts nach links 20 Ellen nebst ihrem Preise 3 Lire zu stehen; unter den Lire die entsprechende zweite Preisangabe 5 Lire und links davon die dafür zu erhaltende Waarenmenge von 42 Rotuli; endlich setzt man die zu vertauschenden 50 Ellen unter die frühere Ellenzahl 20. Wenn, heisst es nun[1]), die fünf Zahlen angeschrieben sind, so vervielfacht man die links allein in der unteren Reihe stehende Zahl mit der ihr nach rechts oben, dann mit der dieser nach rechts unten gegenüberstehenden Zahl. (Die Multiplication wird dabei durch Verbindungsstriche geleitet.) Das Product wird durch die beiden anderen Zahlen dividirt, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Das Beispiel sieht also folgendermassen aus:

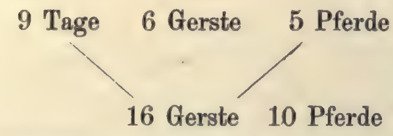


und die Rechnung lautet $\frac{42 \cdot 3 \cdot 50}{5 \quad 20} = 63$. Die Verbindungsstriche zwischen den miteinander zu vervielfachenden Zahlen lassen das Bild einer Kette entstehen und erinnern so an den von diesem Bilde seinen Namen entlehnenden Kettensatz[2]), welcher in Lehrbüchern des kaufmännischen Rechnens eine bevorzugte Stellung einzunehmen pflegt. Der Name, welchen der Satz bei Leonardo führt, hat durch eigenthümlichen Zufall einen mit dem Worte „Kette“ ähnlichen Klang. Es sei, sagt unser Schriftsteller[3]), die *figura cata* — an anderer Stelle

---

[1]) Leon. Pisano I, 118: *Et descriptis itaque ipsis quinque numeris tunc ultimum eorum per numerum pretii oppositum multiplica, et quot inde provenerit in alium numerum eidem pretio oppositum ducere studeas, quorum numerorum summam per reliquos duos numeros divide, et habebis optatum.* [2]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 91—98 (Kettenregel) und V, 728—766 insbesondere Nr. 45, S. 747 (Verhältniss). [3]) Leon. Pisano I, 119: *Est enim hec talis propositio proportionum ex que ostenditur in figura cata, scilicet sectoris per quam Tholomeus docuit in almagesti reperire demonstrationem circulorum a cir-*

erscheint die Schreibform chata[1]) — deren Ptolemäus im Almagest und Ahmed, der Sohn, in dem Buche über die Verhältnisse sich bediente, wo er 18 Combinationen behandelte; Ptolemäus habe des Schnittes (sectoris) sich bedient, um vom rechten Winkel aus für alle Winkel Beweise zu finden. Diese schwierige Stelle bedarf einiger Erläuterungen. Ahmed, der Sohn[2]), ist unzweifelhaft Ahmed, Sohn des Jusuf, der am Anfang des X. Jahrhunderts als Schriftsteller auf mathematischem und astronomischem Gebiete thätig war. Was dessen 18 Combinationen waren, werden wir gleich sehen. Die Anführung des ptolemäischen Almagestes weist auf die dort vielfach in Anwendung tretende Regel von den 6 Grössen (Bd. I, S. 386 und 392), die zwei Grössen im zusammengesetzten Verhältnisse von zwei Paar anderen Grössen stehen lässt. Sie stammt aus dem Satze des Menelaos, bei welchem die drei Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten werden, so dass sechs Abschnitte der Seiten entstehen. Mittels jenes Satzes hat Ptolemäus das rechtwinklige Dreieck und von ihm aus die übrigen Dreiecke behandelt. Die Schneidende, sector, heisst aber in arabischer Uebersetzung des Wortes al-kaṭṭâ. So hiess desshalb bei den Arabern der Satz des Menelaos selbst, und mit dem arabischen Namen wiederum stimmt die figura cata überein[3]), welche den Wortlaut getreu wiedergiebt. Leonardo giebt mehrfache Aufgaben, bei welchen ein Fünfsatz, d. h. die Anwendung von fünf gegebenen Zahlen zur Auffindung der sechsten unbekannten Zahl, vorkommt. Darunter sind auch Aufgaben mit sogenannten indirecten Verhältnissen. Da heisst eine Aufgabe die von den Pferden, welche in gegebenen Tagen Gerste fressen[4]), und verlangt zu wissen, wie viele Tage 10 Pferde mit 16 Sechstern Gerste gefüttert werden können, wenn 5 Pferde in 9 Tagen 6 Sechster fressen. Der Ansatz findet hier in der Form statt:



die Ausrechnung nach der aus den Verbindungsstrichen abzulesenden

---

culo recto, et multa alia; et Ametus filius ponat decem et octo combinationes ex ea in libro, quem de proportionibus composuit. [1]) Leon. Pisano I, 132 Z. 23: *figura chata.* [2]) Steinschneider, Iusuf ben Ibrahim und Ahmed ben Iusuf in Eneström's Biblioth. mathem. 1888 pag. 49—52 und 111—117. [3]) Die richtige Erklärung von *figura cata* gab, wenn auch ohne auf den wörtlichen Sinn des Ausdruckes hinzuweisen, schon Costard im XVIII. Jahrhundert. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. XXX, Hist.-literar. Abthlg. 127. [4]) Leon. Pisano I, 132—135.

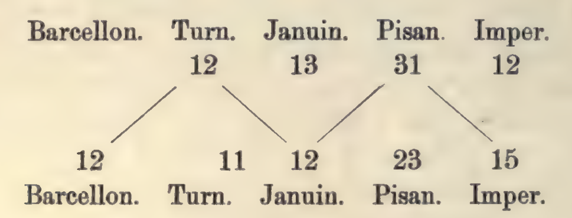
Vorschrift $\frac{9 \cdot 16 \cdot 5}{6 \cdot 10} = 12$. Ausser an den bestimmten Zahlen führt Leonardo die Aufgabe auch an einfachen Buchstaben durch[1]), indem er die beiden Behauptungen einander zuordnet: a Pferde fressen b Gerste in c Tagen, d Pferde fressen e Gerste in f Tagen, alsdann ist ein erstes Product $.a.e.c.$ einem zweiten Producte $.d.b.f.$ gleich[2]) oder mit anderen Worten: jede Zahl des ersten Productes steht zu irgend einer Zahl des zweiten Productes in einem aus zwei Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse. Beispielsweise ist

$$e : f = db : ac.$$

Leonardo schreibt allerdings diese Proportion nicht in Zeichen an, aber er kleidet sie in nicht misszuverstehende Worte: die Zusammensetzung (compositio) des Verhältnisses einer ersten Zahl e zu einer zweiten Zahl f sei gebildet aus den vier übrigen Zahlen, von welchen db erstes Glied (antecedentes), ac zweites Glied (consequentes) seien, und zwar könne die Zusammensetzung $db : ac$ eine doppelte sein, gebildet aus $d : a$ und $b : c$ oder aus $d : c$ und $b : a$. Da nun e als erstes Glied nicht blos f, sondern auch d oder b als zweites haben könne und dann wieder je zwei Auffassungen des zusammengesetzten Verhältnisses sich ergeben, so seien im Ganzen $3 \cdot 2 = 6$ Proportionen vorhanden, welche mit e anfangen. Ebensoviele können mit a, ebensoviele mit c beginnen. Es erscheinen also $3 \cdot 6 = 18$ Combinationen. Es kann kein Zweifel obwalten, dass dieses dieselben 18 Combinationen sind, welche Ahmed kennen lehrte[3]), sowie auch die hier deutlich ausgesprochene Zusammensetzung der Verhältnisse zur Bestätigung dient, dass die regula cata wirklich von der regula sex quantitatum abstammt, wozu eine weitere Bestätigung in einer anderen Schrift Leonardo's sich finden wird. Wir sagen mit vollbewusster Betonung des Ausdruckes, die regula cata stamme von der regula sex quantitatum ab und nicht sie sei mit dieser ein und dasselbe, weil die regula cata beim Fünfsatze nicht stehen geblieben ist. Folgende Aufgabe Leonardo's bringt nicht weniger als neun Angaben in Rechnung[4]): Imperiale 12 valent pisaninos 31 et soldus Januinorum valet pisaninos 23 et soldus turnensium valet Januinos 13 et soldus Barcellonensium valet turnenses 11; quaeritur de imperialibus 15 quot barcellonenses valeant. D. h. 12 Imperialen = 31 Pisaniner, 12 Januiner = 23 Pisaniner, 12 Turnenser = 13 Januiner, 12 Barcellonenser = 11 Tur-

[1]) Leon. Pisano I, 132 Z. 23 bis pag. 133 Z. 7 v. u. [2]) *sit numerus .a.e.c. quaedam coniunctio quae vocetur prima, numeri vero .d.b.f. sit coniunctio secunda.* [3]) Cantor, Ahmed und sein Buch über die Proportionen in Eneström's Biblioth. mathem. 1888 pag. 7—9. [4]) Leon. Pisano I, 126 Z. 2 v. u. bis 127 Z. 8 v. u.

nenser; wie viele Barcellonenser betragen 15 Imperialen? Man könne, sagt Leonardo, die Rechnung in vulgärer Art (secundum vulgarem modum) allmälig vollziehen. Die 15 Imperialen betragen $38\frac{3}{4}$ Pisaniner; diese betragen $20\frac{5}{23}$ Januiner; diese wiederum werden zu $18\frac{198}{299}$ Turnensern; diese endlich gelten so viel wie $20\frac{1180}{3289}$ Barcellonenser. Nach der Kunst aber (sed secundum artem) verfertige man folgenden einzigen Ansatz:



dessen Entstehung so zu denken ist. Man beginnt mit Anschreibung der Benennungen in der Reihenfolge, wie die Aufgabe sie mit sich bringt. Man schreibt dann abwechselnd in die obere und untere Zeile zu den schon vorgezeichneten Benennungen die gegebenen Münzvergleichungen: 12 Imper. = 31 Pisan., 23 Pisan. = 12 Januin., 13 Januin. = 12 Turn., 11 Turn. = 12 Barcellon. Endlich füllt man mit der Fragezahl 15 Imper. die rechts unten leergebliebene Stelle aus und beginnt von ihr die im Zickzack auf und ab verlaufenden Multiplicationsstriche. Das Product der so verbundenen Zahlen $15 \cdot 31 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$ ist durch das Product $12 \cdot 23 \cdot 13 \cdot 11$ der übrigen Zahlen zu dividiren. Die Rechnung giebt dann, wie vorher, $20\frac{1180}{3289}$ oder nach Leonardo's Schreibweise mit links an die ganze Zahl sich anfügendem aufsteigenden Kettenbruche $\frac{3\ \ 3\ \ 8}{11\ 13\ 23}20$ d. h. $20 + \cfrac{8 + \cfrac{3 + \cfrac{3}{11}}{13}}{23}$.

Der zehnte Abschnitt lehrt Gesellschaftsrechnungen einfachster Art in der von Alters her bekannten Weise durchführen. Die Einlage sämmtlicher Gesellschafter wird addirt, und ihre Summe muss zu einer Einzeleinlage in dem gleichen Verhältnisse stehen, wie der Gesammtgewinn zu dem Gewinne des Einzelnen.

Der elfte Abschnitt von der Mischung der Münzen schliesst sich an die vorhergehenden Abschnitte nicht bloss dem Inhalte nach eng an, sondern bis zu einem gewissen Grade auch der Form nach, indem dem Leser durch Angabe eines machinalen Verfahrens, durch eine genaue Vorschrift, wohin die in Rechnung tretenden Zahlen

geschrieben werden sollen und wie sie dann zu behandeln seien, die eigene Denkthätigkeit nach Möglichkeit erspart wird. Diese Vorschriften übergehend bemerken wir nur, dass die als zur Münzmischung gehörend bezeichneten Aufgaben in zwei Gruppen zerfallen. Bald soll der Feingehalt von Legirungen aus Feingehalt und Gewicht der zur Legirung verwandten Mischmetalle bestimmt werden, bald wird gefragt, in welchem Gswichtsverhältnisse die gegebenen Mischmetalle, welche selbst schon Legirungen bekannter Zusammensetzung sind, vereinigt werden sollen, um eine neue Legirung von vorgeschriebenem Feingehalte hervorzubringen. Zu dieser letzten Gattung von Aufgaben wird, für den ersten Augenblick überraschend, auch diejenige von dem Manne gezählt, der 30 Vögel verschiedener Gattung um 30 Geldstücke kauft[1]), und doch ist diese Anreihung gerechtfertigt, denn wenn die Bedingungen der Aufgabe dahin lauten, ein Rebhuhn koste 3, eine Taube 2, zwei Sperlinge 1 Geldstück und für 30 Geldstücke sollen 30 Vögel erstanden werden, so kommt dieses darauf hinaus, es solle durchschnittlich jeder Vogel 1 Geldstück kosten, also gewissermassen die Feinheit 1 besitzen, und diese Mischung solle mit Hilfe von Mischmetallen von der Feinheit 3, 2, $\frac{1}{2}$ in ganzzahligen Verhältnisszahlen beschafft werden. Soll aus dem Metall von der Feinheit 3 und dem von der Feinheit $\frac{1}{2}$ die Feinheit 1 hergestellt werden, so muss im Verhältnisse von 1 : 4 gemischt werden; soll aus dem Metall von der Feinheit 2 und dem von der Feinheit $\frac{1}{2}$ die Feinheit 1 hergestellt werden, so ist die Mischung im Verhältnisse 1 : 2 zu vollziehen. Durch die erste Legirung werden 5, durch die zweite 3 Stück geliefert, deren man 30 braucht. Dreimal 5 und fünfmal 3 geben nun 30, also sind 3 Rebhühner mit 12 Sperlingen und 5 Tauben mit 10 Sperlingen zu erstehen, im Ganzen 3 Rebhühner, 5 Tauben, 22 Sperlinge.

Der zwölfte Abschnitt nimmt für sich 152 Seiten, nahezu ein Drittel des ganzen Werkes in Anspruch. In ihm dürfen wir daher die Abtheilung erkennen, auf welche Leonardo selbst wohl das grösste Gewicht gelegt hat. Sie enthält Aufgaben mannigfacher Art, von welchen wir einige um ihrer selbst willen, andere wegen der bei ihrer Auflösung in Anwendung tretenden Verfahrungsweisen namhaft machen müssen. Der Abschnitt beginnt mit arithmetischen Reihen erster und zweiter Ordnung[2]) mit den in Worten aus-

---

1) Leon. Pisano I, 165: *De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis triginta.* 2) Ebenda pag. 166—168.

gesprochenen Summenformeln $a + (a + d) + \cdots + (a + (n - 1)d)$ $= (a + (a + (n-1)d))\frac{n}{2}$ und $a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2 = \frac{na(na+a)(na+(na+a))}{6a}$ nebst verschiedenen Einzelfällen derselben. Die Summirung der Quadratzeilen sei, sagt Leonardo ausdrücklich bei diesem Anlasse [1], in dem von ihm verfassten Liber quadratorum bewiesen, und damit ist ein Zeitpunkt bezeugt, zu welchem jene Abhandlung, welche uns im folgenden Kapitel beschäftigen wird, der Oeffentlichkeit bereits übergeben war. Die Summenformel der geometrischen Reihe ist erst an einer späteren Stelle [2]) in Verbindung mit der bekannten Schachbrettaufgabe (Bd. I, S. 713) angegeben. Im Anschluss an die arithmetischen Reihen ist nur gezeigt [3]), dass das Product des ersten und des letzten, des zweiten und des vorletzten Gliedes u. s. w., allgemein das Product aus symmetrisch vom Anfang und Ende der Reihe befindlichen Gliedarn constant ist, dass mithin $1 \cdot e^{n-1} = e \cdot e^{n-2} = \cdots$. Eine grosse Anzahl von Aufgaben ist nach dem einfachen falschen Ansatze (Bd. I, S. 577) behandelt. Dessen erstes Auftreten findet sich bei den *quaestionibus arborum*, den Baumaufgaben, und dort ist auch eine kurze, deutliche Schilderung des Verfahrens zu finden [4]). Man soll die Höhe eines Baumes berechnen, der mit $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ seiner Höhe, zusammen mit 21 Handbreiten, unter dem Boden steckt. Die durch 3 und 4 theilbare Zahl 12 wird vorläufig als Höhe angesetzt. Dann ist aber $\frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 7$, während 21 erscheinen sollte. Man hat die Proportion $7 : 21 = 12 : 36$ zu bilden, und die wirkliche Höhe des Baumes beträgt 36 Handbreiten. Eine eigenthümliche Anwendung des falschen Ansatzes lehrt folgende Aufgabe [5]) kennen: $\frac{19}{20}$ einer Zahl erweisen sich als die Quadratwurzel eben dieser Zahl (radix eiusdem numeri); wie gross ist dieselbe? Die Antwort lautet $\left(\frac{20}{19}\right)^2 = \frac{400}{361}$ und wird folgendermassen gewonnen. Versuchsweise setzt man die durch 20 theilbare Zahl 60 an. Davon $\frac{19}{20}$ sind 57, und das Quadrat von 57 ist 3249 statt 60. Alsdann sei $\frac{60^2}{3249} = \frac{3600}{3249} = \frac{400}{361}$ die richtige

---

[1]) Leon. Pisano I, 168 Z. 8—9: *Probavi enim geometrice quae hic sunt dicta de collectionibus quadratorum in libro quem de quadratis composui.* [2]) Ebenda pag. 309: *De duplicatione scacherii.* [3]) Ebenda pag. 171. [4]) Ebenda pag. 173 Z. 4 v. u.: *Est enim alius modus, quo utimur, videlicet ut ponas pro re ignota aliquem numerum notum ad libitum, qui integraliter dividatur per fractiones quae ponuntur in ipsa quaestione: et secundum positionem illius quaestionis cum ipso posito numero studeas invenire proportionem cadentem in solutione illius quaestionis.* [5]) Ebenda pag. 175.

Auflöung, wofür eine geometrische Begründung beigefügt wird (Figur 1). Es sei ab die als Strecke gezeichnete gesuchte Zahl, welche auch als Fläche des Rechtecks $abdt$ auftritt, sofern $bd = a$ die Längeneinheit ist. Ueber ae $\left(= \frac{19}{20} ab\right)$ wird das Quadrat $aekz$ gezeichnet, so muss auch dieses vermöge der Bedingungen der Aufgabe durch die gesuchte Zahl gemessen werden, d. h. $aekz =$ Viereck $abdt$; und wird auf beiden Seiten das gemeinschaftliche Stück $aeit$ weggelassen, so bleibt noch $tikz = ebdi$ oder $ti \times ik = ei \times id$, beziehungsweise $ti : id = ei : ik$. Aus dieser Proportion folgt weiter $ti : (ti + id) = ei : (ei + ik)$ oder $ti : td = ei : ek$ oder $ae : ab = 1 : ek$. Da aber $ae : ab = 19 : 20$ bekannt ist, so hat man jetzt $ek = \frac{20}{19}$ und dessen Quadrat $= \frac{400}{361}$. Leonardo setzt einen Zweifelspunkt in diesem Beweise voraus, ob nämlich das über ae beschriebene Quadrat und das Rechteck $abdt$ in Wirklichkeit so gegenseitig über einander hinausreichen werden, wie die Figur es darstellt. Er wirft desshalb selbst diesen Einwand auf, widerlegt ihn aber sogleich[1]). Weil ab grösser sei als ae, müsse ek grösser sein als die Einheit, d. h. grösser als ei. Mit Hilfe des falschen Ansatzes wird des weiteren eine gegebene Zahl, etwa 10, als Summe von 3, von 4, von 5 in stetiger Proportion stehenden Theilen dargestellt[2]). Sollen etwa 4 Theile auftreten, so werden ebensoviele in stetiger Proportion stehende Zahlen z. B. 1, 2, 4, 8 versuchsweise angesetzt. Deren Summe ist nicht 10, sondern 15. Aber $10 = \frac{2}{3} \cdot 15$, also hat man $\frac{2}{3}$ einer jeden der gewählten Zahlen zu nehmen und findet $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}$, womit die Aufgabe gelöst ist, und so wie diese Auflösung giebt es noch unendlich viele, sämmtlich von einander verschieden[3]). Bei manchen Aufgaben bedarf es erst vorbereitender Ueberlegungen, bevor der falsche Ansatz zur Anwendung gelangen kann. Dahin gehört beispielsweise eine Aufgabe, welche einst ein Magister in Constantinopel Leonardo vorlegte[4]), und welche dann für diesen den Ausgangspunkt vieler anderer möglichen und unmöglichen Aufgaben bildet. Ein Mann A verlangt von einem anderen

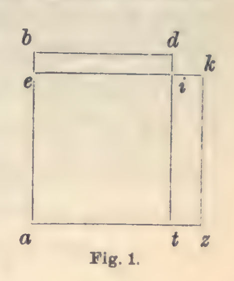


Fig. 1.

[1]) *Manifestum est quod numerus ae maior est unitate; cum maior sit numerus ab numero ae: quare maior est at unitate ae.* [2]) Leon. Pisano I, 181—182. [3]) *Hanc enim divisionem in infinitas variasque partes possumus invenire.* [4]) Leon. Pisano I, 190—191.

Manne B, wie wir zur Abkürzung sagen wollen, während Leonardo fortwährend von dem Ersten und dem Zweiten spricht, die Summe von 7 Denaren, dann habe er fünfmal so viel als jener; giebt dagegen A dem B nur 5 Denare, so hat B damit siebenmal so viel als A. (Figur 2.) Es sei ag der ursprüngliche Besitzstand des A, gb der des B, ab ihr Gesammtbesitz. Stellt nun gd die 7 dar, welche B dem A giebt, so hat in Folge dessen A mit ad das Fünffache des dem B verbleibenden db, oder db ist $\frac{1}{6}$ der Summe. Ist andrerseits eg das Bild der 5, welche A dem B giebt, so dass darnach B mit eb das Siebenfache des dem A verbleibenden ae besitzt, so muss $ae = \frac{1}{8}$ der Summe sein. Darnach beträgt $db + ae = \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ der Summe, welche von der ganzen Summe abgezogen $eg + gd = 5 + 7 = 12$ übrig lassen. Damit sind aber die Bedingungen ausgesprochen, denen zu genügen ein falscher Ansatz gemacht werden kann. Als Summe wird die durch 6 und durch 8 theilbare 24 angesetzt; $\frac{24}{6} + \frac{24}{8} = 7$ davon abgezogen lassen 17 und nicht 12 übrig. Die Summe ist mithin $\frac{12}{17}$ von 24, und in gleichem Verhältnisse mindern sich die Zahlen 4 und 3 herab, welche für db und ae angenommen worden waren. Es wird in Wirklichkeit $db = \frac{12}{17} \times 4 = 2\frac{14}{17}$ und $ae = \frac{12}{17} \times 3 = 2\frac{2}{17}$. A besass zu Anfang $2\frac{2}{17} + 5 = 7\frac{2}{17}$ und B besass $2\frac{14}{17} + 7 = 9\frac{14}{17}$.

Fig. 2.

Ebendieselbe Aufgabe löst die Regula recta, deren die Araber sich bedienen[1]). Leonardo versteht darunter Gleichungen ersten Grades, in welchen die Unbekannte durch das Wort res, die Sache, bezeichnet wird. Der Besitzstand des B, sagt er, sei res nebst 7 Denaren, welche er dem A geben soll, der alsdann 5 res, vorher also 5 res weniger 7 Denare besitzt. Nachdem A dem B dagegen 5 Denare gegeben, besitzt B res und 12 Denare und damit siebenmal so viel als A mit seinem 5 res weniger 12 Denare. Es ist in Zeichen, welche Leonardo noch fremd waren, res + 12 = 7 (5 res — 12) = 35 res — 84, 34 res = 96, res $= \frac{96}{34} = 2\frac{14}{17}$, und daraus findet sich leicht der Besitz von B wie der von A. Auch eine Regula versa kennt Leonardo an anderer Stelle[2]). Es ist ebenfalls eine Auflösung mittels Gleichungen, welche aber den Ansatz von der Schlussbedingung der Aufgabe aus, statt

---

[1]) Leon. Pisano I, 191: *Regula quaedam, quae recta dicitur, qua arabes utuntur.* [2]) Ebenda pag. 203 Z. 3 v. u.

von deren Anfang herleitet und dadurch bis zu einem gewissen Grade der sogenannten Umkehrung der Inder (Bd. I, S. 577) ähnelt. Das erste Verfahren Leonardo's, über welches wir oben im Anschlusse an die Figur, deren er sich zur Erläuterung bediente, berichtet haben, und welches dadurch sich kennzeichnet, dass es die Summe der Besitzstände als Durchgangspunkt für die Auflösung der Aufgabe benutzt, findet unter dem Namen der Regula hominum auch bei mehr als zwei Personen Anwendung[1]). A verlangt von B und C zusammen 7, um fünfmal so viel als sie zu haben; B verlangt von A und C zusammen 9, um sechsmal so viel als sie zu haben; C verlangt von A und B zusammen 11, um siebenmal so viel als sie zu haben. Mithin besass A anfangs $\frac{5}{6}$ Summe weniger 7, B besass $\frac{6}{7}$ Summe weniger 9, C besass $\frac{7}{8}$ Summe weniger 11, und die Summe war so viel als $\frac{5}{6}\,\frac{6}{7}\,\frac{7}{8}$ Summe weniger 7, 9 und 11; d. h. 27 ist der Ueberschuss von $\frac{5}{6}\,\frac{6}{7}\,\frac{7}{8}$ Summe über die Summe oder $\frac{263}{168}$ der Summe und die Summe selbst $\frac{168 \cdot 27}{263}$. A besass $\frac{5}{6}$ der Summe weniger 7 oder $7\frac{98}{263}$. Ganz ähnlich berechnet man $5\frac{206}{263}$ für B und $4\frac{24}{263}$ für C. Aber nicht unbedingt jede beliebige Angabe führt zu Auflösungen. Es giebt auch *quaestiones insolubiles*, welche Widersprüche enthalten[2]), so z. B. wenn die Bedingungen, unter welchen die Regula hominum auf vier Personen mit den Besitzständen A, B, C, D von der Gesammtsumme S angewandt werden soll, in den Gleichungen $C + D = \frac{S}{4} + 7$, $D + A = \frac{S}{5} + 8$, $A + B = \frac{S}{6} + 9$, $B + C = \frac{S}{7} + 11$ ausgesprochen sind. Die erste und dritte Bedingung vereinigt liefern $S = \frac{5}{12} S + 16$, die zweite und vierte dagegen $S = \frac{12}{35} S + 19$, und diese beiden Folgerungen lassen sich nicht mit einander vereinigen. Nächst diesen und ähnlichen bestimmten Aufgaben enthält der zwölfte Abschnitt auch unbestimmte Aufgaben des ersten Grades, welche Leonardo nach Methoden löst, in deren Darlegung er so weit geht, dass nicht daran zu zweifeln ist, dass ihm selbst die Richtigkeit des Verfahrens mehr als nur auf das Ansehen der Persönlichkeiten hin, welche ihm die Aufgaben einst mittheilten, einleuchtend gewesen sein muss. So rührt z. B. folgende Aufgabe[3]) von dem sehr er-

---

[1]) Leon. Pisano I, 198: *Quaestio consimilis inter tres homines.* [2]) Ebenda pag. 201, 227, 251. [3]) Ebenda pag. 249: *Quaestio nobis proposita a peritissimo magistro Musco Constantinopolitano in Constantinopoli.*

fahrenen Magister Muscus von Constantinopel her. Fünf Personen — sie mögen A, B, C, D, E heissen — wollen in Gemeinschaft mit einander ein Schiff kaufen. Jeder Einzelne wäre dazu im Stande, wenn ihm die übrigen vier einen Theil ihres Geldes gäben, und zwar braucht dazu A $\frac{13}{15}$, B $\frac{401}{480}$, C $\frac{799}{957}$, D $\frac{341}{420}$, E $\frac{326}{405}$ des Geldes der Anderen. Der Preis des Schiffes und der Besitz eines jeden Einzelnen ist zu berechnen. Leonardo schreibt in eine erste Zeile die gegebenen fünf Brüche und darunter in eine zweite Zeile fünf andere, welche bei unveränderten Zählern ihre Nenner dadurch bilden, dass sie eben diese Zähler von den früheren Nennern abziehen. Die beiden Zeilen sind demnach:

$$\frac{13}{15} \quad \frac{401}{480} \quad \frac{799}{957} \quad \frac{341}{420} \quad \frac{326}{405}$$

$$\frac{13}{2} \quad \frac{401}{79} \quad \frac{799}{158} \quad \frac{341}{79} \quad \frac{326}{79}.$$

Als kleinstes Gemeinvielfaches der zweiten Nenner erkennt er 158, und mit dieser Zahl vervielfacht er die Nenner der ersten Bruchreihe und theilt jedes Product durch den darunter befindlichen Nenner der zweiten Bruchreihe. So wird eine neue Zeile von fünf Zahlen gewonnen:

$$1185 \quad 960 \quad 957 \quad 840 \quad 810$$

mit der Summe 4752. Der Quotient dieser Zahl durch die um 1 verminderte Personenzahl, also durch 4, giebt ihm 1188 als Summe dessen, was ursprünglich Alle zusammen an Geld besassen, und diese Summe um 158 vermindert giebt 1030 als Preis des Schiffes. Der Besitzstand eines jeden Einzelnen findet sich dann, indem von 1030 das 158fache der Brüche der zweiten Zeile abgezogen wird.

$$A = 1030 - \frac{158 \cdot 13}{2} = 3, \qquad B = 1030 - \frac{158 \cdot 401}{79} = 228,$$

$$C = 1030 - \frac{158 \cdot 799}{158} = 231, \quad D = 1030 - \frac{158 \cdot 341}{79} = 348,$$

$$E = 1030 - \frac{158 \cdot 326}{79} = 378.$$

Prüfen wir nun einmal dieses so eigenartige Verfahren, dessen Einrichtung Leonardo sich selbst zuschreibt[1]), an Buchstabengrössen. Es sollen i Personen die Einzelsummen $x_1, x_2 \ldots x_i$ besitzen, welche zusammen s ausmachen. Der Preis p des Schiffes besteht aus x_h und dem $\frac{m_h}{n_h}$ Theil dessen, was die Anderen besitzen, während der

[1]) Leon. Pisano I, 249: *Quam quaestionem ita ad suprascriptam regulam reducere studui.*

Stellenzeiger h alle Werthe von 1 bis i durchläuft. Als Gleichung geschrieben ist demnach $p = x_h + \frac{m_h}{n_h}(s - x_h)$ und daraus folgt bei leichter Umformung

$$x_h = s + (p - s)\frac{n_h}{n_h - m_h}.$$

Bildet man sämmtliche i Gleichungen dieser Form, welche aus den verschiedenen möglichen Annahmen für h folgen und addirt dieselben unter Berücksichtigung von $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = s$, so entsteht $s = is + (p - s)\sum \frac{n_h}{n_h - m_h}$ und daraus

$$(i - 1)s = (s - p)\sum \frac{n_h}{n_h - m_h}.$$

Da die Aufgabe sich somit als unbestimmt erweist, weil zwischen den beiden Unbekannten s und p nur eine Gleichung vorhanden ist, so steht eine willkürliche Annahme frei. Leonardo trifft sie dahin, dass er $s - p$ als das kleinste Gemeinvielfache der Zahlen $n_h - m_h$ wählt, sofern diese Wahl gestattet, die rechts vom Gleichheitszeichen auftretende Summe noch durch $i - 1$ zu dividiren. Der Quotient der letzteren Division ist s, und zugleich damit kennt man auch $p = s - (s - p)$. Endlich findet sich jedes $x_h = s - (s - p)\frac{n_h}{n_h - m_h}$.

Man müsste geradezu jede Aufgabe der Besprechung unterziehen, wenn man alles Bemerkenswerthe erörtern wollte. Wir gehorchen nur der Nothwendigkeit, indem wir uns beschränken und nur drei Aufgaben dieses Abschnittes noch hervorheben.

Es soll eine durch 7 theilbare Zahl gefunden werden, welche durch 2, 3, 4, 5, 6 getheilt jeweils den Rest 1 übrig lässt[1]). Das Product $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ist durch 2, 3, 4, 5, 6 theilbar und lässt bei Theilung durch 7 den Rest 4. Versuche lehren die Zahl 5 kennen, welche mit 60 zu 300 vervielfacht die Theilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6 unverändert lässt, während Theilung durch 7 jetzt den Rest 6 liefert. Die um eine Einheit grössere 301 löst daher die gestellte Aufgabe, und weitere Auflösungen finden sich durch Hinzufügung ganzer Vielfachen von $7 \cdot 60 = 420$.

Als Kaninchenaufgabe[2]) bezeichnen wir die Frage, wie viele Paar Kaninchen im Laufe eines Jahres aus einem Paare entstehen. Die betreffende Zahl soll aus der Angabe erhalten werden, dass jedes Paar allmonatlich ein neues Paar zeugt, welches selbst vom zweiten

---

[1]) Leon. Pisano I, 281 Z. 3 v. u. — pag. 282 Z. 13. [2]) Ebenda pag. 283—284.

Monate an zeugungsfähig wird, während Todesfälle nicht vorkommen. Am Schlusse des 1. Monats ist das erste Paar und das von ihm erzeugte Paar vorhanden, im Ganzen zwei Paare. Am Schlusse des 2. Monats ist ein drittes Paar hinzugetreten, Junge des ersten Paares. Am Schlusse des 3. Monats sind es $3 + 2 = 5$ Paar, weil ausser dem ersten Paare jetzt auch das im ersten Monat geborene zeugungsfähig wurde, und nun findet die Vermehrung in steigendem Maasse statt. Am Schlusse des 4. Monats zählt man $5 + 3 = 8$, am Schlusse des 5. Monats $8 + 5 = 13$ Paar, u. s. w. Es entsteht mithin die am Rande beigefügte Zahlenreihe 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 233, 377. Diese Zahlen befolgen das Gesetz $u_{r+1} = u_r + u_{r-1}$ und bilden die erste recurrirende Reihe, welche in einem mathematischen Werke bekannt geworden ist.

Im höchsten Grade überraschend tritt die Aufgabe[1]) zum Vorschein, welche bei den Chinesen mittels der Regel Ta yen ihre Lösung fand (Bd. I S. 643—644). Es sind genau die gleichen Zahlen, ist genau das gleiche Verfahren. Ein Beweis wird nicht versucht. Das dürften doch genügende Anhaltpunkte dafür sein, dass hier nicht an zufällige Uebereinstimmung zweier Erfinder, sondern nur an die Mittheilung von Ueberliefertem zu denken ist. Wenn wir im vorigen Bande, wo die Regel Ta yen unsere Aufmerksamkeit zum ersten Male fesselte, auf deren räthselhaftes Auftreten bei einem Byzantiner um das Jahr 1400 hinweisen mussten, so ist jetzt ihr europäisches Vorkommen um weitere zwei Jahrhunderte zurückgetreten, ohne dadurch begreiflicher zu werden.

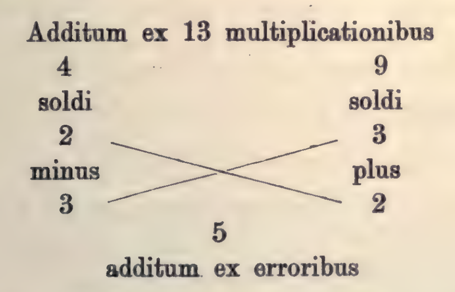
Geschichtlich höchst merkwürdig ist die Aufgabe von den 7 alten Weibern[2]). Dieselben gehen nach Rom. Jede hat 7 Maulesel; jeder Maulesel trägt 7 Säcke; jeder Sack enthält 7 Brode; bei jedem Brod sind 7 Messer; jedes Messer steckt in 7 Scheiden. Was ist die Gesammtzahl alles Genannten? $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 + 117649 = 137256$. Aber, fügt Leonardo dieser ersten Auflösung hinzu, man kann die Rechnung auch anders vollziehen. Man geht von einer alten Frau aus. Die fünf nothwendigen Vervielfachungen mit 7 vollzieht man unter jedesmaliger Hinzufügung einer neuen Einheit, also $7 \cdot 1 + 1 = 8$, $7 \cdot 8 + 1 = 57$, $7 \cdot 57 + 1 = 400$, $7 \cdot 400 + 1 = 2801$, $7 \cdot 2801 + 1 = 19608$ und endlich $7 \cdot 19608 = 137256$ wie vorher, indem thatsächlich nicht 1, sondern 7 alte Frauen vorhanden waren. Das ist genau die Rechnung, welche,

---

[1]) Leon. Pisano I, 304 Z. 6—29. Die hochinteressante Stelle ist zuerst von Curtze bemerkt worden, der Zeitschr. Math. Phys. XLI Histor.-liter. Abthlg. S. 81—82 auf sie hinwies. [2]) Ebenda pag. 311 Z. 5 v. u. — 312 Z. 7.

wenn auch mit anderem Wortlaute der Aufgabe verbunden und bei $7 \cdot 2801 = 19607$ stehen bleibend, bei dem Aegypter Ahmes (Bd. I, S. 42) vorkam. Also nicht allein die Aufgabe der Summirung der aus den Potenzen der Zahl 7 gebildeten geometrischen Reihe hat sich drei Jahrtausende erhalten, auch die Rechnungsweisen erkennen wir wieder, die erste sowohl als die zweite, namentlich der letztere Umstand auffallend genug bei einem Schriftsteller, der nur wenige Seiten früher[1]) die Formel für die Summe der mit stets verdoppelten Zahlen versehenen Schachbrettfelder anzuwenden wusste.

Der dreizehnte Abschnitt ist der Regel des doppelten falschen Ansatzes gewidmet, welche Leonardo, wie der Name *Regula elchatayn* verräth, von Arabern erlernt hat (Bd. I, 689). Ein Beispiel ist folgendes[2]): 100 Rotuli kosten 13 libras zu 20 solidi zu 12 denarii, was kostet 1 Rotulus? Eine erste Annahme setzt 3 solidi für den Rotulus, für 100 also 300 solidi = 15 librae oder 2 zu viel. Eine zweite Annahme setzt 2 solidi für den Rotulus, für 100 also 200 solidi = 10 librae oder 3 zu wenig. Die beiden Fehler addirt, zeigen durch $2 + 3 = 5$ eine Abnahme des Gesammtpreises um 5 librae, während der Preis eines Rotulus um 1 solidus = 12 denarii abnahm. Nun sollte aber der Gesammtpreis nur um 2 librae abnehmen, man muss also 12 mit 2 multipliciren und durch 5 dividiren, um $4\frac{4}{5}$ denarios zu erhalten, welche, von 3 solidis abgezogen, den richtigen Preis 2 solidi $7\frac{1}{5}$ denarii kennen lehren. Leonardo erläutert die Rechnung an einem Diagramme:



und dieses Diagrammes wegen haben wir überhaupt das Beispiel näher erörtert. Auf ihm finden sich nämlich, wie man sieht, die beiden Wörter plus und minus. Bei Additionen gebraucht Leonardo allerdings niemals *plus*, sondern ausschliesslich *et*. Linien-

[1]) Leon. Pisano I, 309: *De duplicatione scacherii.* [2]) Ebenda pag. 319.

grössen (Figur 3) dienen zur Erläuterung des Verfahrens[1]). Sei ab die wahre Länge der unbekannten Zahl. Setzt man irgend ein ag statt ihrer, so kommt eine Zahl als Endergebniss, welche um ez kleiner ist als die, welche herauskommen soll. Setzt man eine zweite angenommene Zahl ad statt der Unbekannten, so erscheint wieder ein fehlerhaftes Ergebniss, welches um iz zu klein ist.

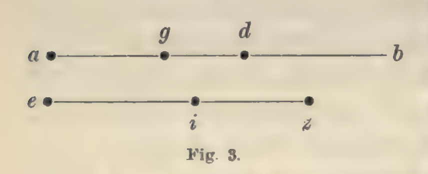


Fig. 3.

Nun kennt man sowohl die Differenz gd der beiden Annahmen, als die ei der beiden Fehler und ist im Stande, den Ueberschuss db, um welchen die unbekannte Zahl die zweite Annahme ad übertrifft, aus der Proportion $ei : iz = gd : db$ zu berechnen[2]). Hat man nämlich $\alpha x = b$ und $\alpha n_1 = b - e_1$, $\alpha n_2 = b - e_2$, so berechnet sich (wie aus der angeführteu Stelle unseres I. Bandes entnommen werden mag) $x = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$. In der Figur entspricht $ag = n_1$, $ad = n_2$, $ez = e_1$, $iz = e_2$, $ei = e_1 - e_2$, $gd = n_2 - n_1$, $db = x - n_2$. Die obige Proportion geht also über in $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (x - n_2)$, und daraus folgt

$$x = n_2 + \frac{e_2(n_2 - n_1)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}.$$

Leonardo führt auch die in letzterer Gleichung sich darstellende Vorschrift ausdrücklich aus[3]): man solle den ersten Fehler mit dem zweiten Ansatze, den zweiten Fehler mit dem ersten Ansatze multipliciren, letzteres Product vom ersteren abziehen und die Differenz durch die Differenz der Fehler dividiren. Wieder an einer Figur wird der Fall des doppelten falschen Ansatzes erörtert, in welchem beide Annahmen zu gross gewählt wurden, mithin $\alpha n_1 = b + e_1$, $\alpha n_2 = b + e_2$ beide zu gross ausfielen. Es sei (Figur 4) ab die richtige Länge der Unbekannten, af und ac die erste beziehungsweise zweite Annahme, denen gi und gk als erster und zweiter Fehler gegenübersteht, oder es sei $af = n_1$, $ac = n_2$, $gi = e_1$, $gk = e_2$, $ki = e_1 - e_2$, $cf = n_1 - n_2$, $bc = n_2 - x$.

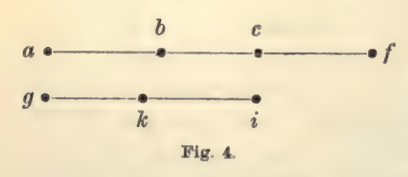


Fig. 4.

Dann soll die Proportion stattfinden[4]) $ik:kg = cf:cb$. Anders geschrieben heisst sie $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_1 - n_2) : (n_2 - x)$

[1]) Leon. Pisano I, 320—322. [2]) In der Druckausgabe pag. 320 Z. 21 schliesst die Proportion irriger Weise mit ab statt mit db, doch dürfte hier ein Fehler irgend eines Abschreibers und nicht Leonardo's vorliegen. [3]) Leon. Pisano, I, 320 Z. 25—29. [4]) Ebenda pag. 321 Z. 3.

und aus ihr folgt $x = n_2 - \frac{e_2(n_1 - n_2)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$, welches wiederum vollständig richtig ist und durch die Vorschrift[1]) bestätigt wird, man solle von dem Producte des ersten Fehlers in dem zweiten Ansatz das Product des zweiten Fehlers in dem ersten Ansatz abziehen und die Differenz durch den Unterschied der Fehler theilen. Endlich versinnlicht ein drittes Linienpaar den noch allein übrigen Fall, dass (Figur 5) eine Annahme *ag* zu klein, die andere *ad* zu gross war, und dass dem entsprechend zuerst ein Mangel *ez*, dann ein Ueberschuss *zi* auftrat. Hier ist die Proportion zu bilden[2]) $gd : bg = ei : ez$ oder in den anderen wiederholt von uns benutzten Buchstaben $(n_2 - n_1) : (x - n_1) = (e_1 + e_2) : e_1$, woraus die richtige Folgerung zu ziehen ist $x = n_1 + \frac{e_1(n_2 - n_1)}{e_1 + e_2} = \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2}$.

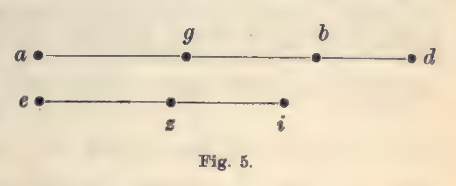


Fig. 5.

So hat Leonardo die Regel des doppelten falschen Ansatzes genau erörtert und sämmtliche Möglichkeiten derselben erschöpft. Darauf werden mannigfache Aufgaben behandelt, welche bereits im vorhergehenden Abschnitte zur Uebung der dortigen Regeln dienten[3]); nächst diesen aber auch andere neue Aufgaben[4]). Wir wollen nur des ersten Beispieles der letzteren Art gedenken. A und B bezeichnen uns, wie schon öfter, zwei Personen und zugleich deren Vermögen. Man besitze darüber die beiden Angaben $A + \frac{1}{3}B = 14$, $B + \frac{1}{4}A = 17$. Eine erste Annahme $A = n_1 = 4$ giebt $4 + \frac{1}{3}B = 14$, $B = 30$, $B + \frac{1}{4}A = 30 + 1 = 31$, während 17 kommen sollten, das ist ein Ueberschuss $e_1 = 31 - 17 = 14$. Die zweite Annahme $A = n_2 = 8$ giebt $8 + \frac{1}{3}B = 14$, $B = 18$, $B + \frac{1}{4}A = 18 + 2 = 20$, während wieder 17 kommen sollten, das ist abermals ein Ueberschuss $e_2 = 20 - 17 = 3$. Da Leonardo für den ersten Fall, welcher bei zweimaligem Ueberschiessen hier zutrifft, die Proportion $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (A - n)$ angegeben hat, so wäre es vollkommen genügend, wenn er nur die Zahlenwerthe einsetzend $(14 - 3) : 3 = (8 - 4) : (A - 8)$ oder $11 : 3 = 4 : (A - 8)$ hätte rechnen lassen. Aber es ist, als wenn er schon Ueberdruss empfunden hätte, seinen Lesern durch gewohnheitsmässige Uebung eines und desselben Verfahrens das

---

[1]) Leon. Pisano I, 321 Z. 7—11. [2]) Ebenda pag. 321 Z. 16 v. u. [3]) Ebenda pag. 322—336. [4]) Ebenda pag. 336—352.

Denken zu ersparen. Nach Angabe der beiden Fehler 14 und 3, welche die Annahmen 4 und 8 zur Folge haben, fährt er nämlich das weitere Verfahren begründend, also fort[1]): Für 4 Einheiten, welche wir dem Ersten A mehr geben (8 anstatt 4), näherte sich die zweite Zahl B um 11 der Wahrheit (3 anstatt 14), und es ist nur noch eine Annäherung an dieselbe um 3 erforderlich. Mithin ist 3 mal 4 getheilt durch 11 dem A noch beizufügen, das beträgt $1\frac{1}{11}$. Von $9\frac{1}{11}$ bis zu 14 sind es aber $4\frac{10}{11}$, und das ist ein Drittel des Vermögens des B, welches mithin $14\frac{8}{11}$ beträgt.

Der vierzehnte Abschnitt führt zu den Wurzelgrössen. Bei der Quadratwurzelausziehung ist namentlich auf solche Zahlen Rücksicht genommen, welche keine vollständigen Quadrate sind, bei denen folglich nur eine Annäherung an das wahre Ergebniss vorgenommen werden kann. Jede Annäherung vollzieht sich der Natur der Sache nach in einzelnen Schritten, deren jeder dem gewünschten Ziele näher bringen soll. Als erste Annäherung zu einer Quadratwurzel $\sqrt{A}$ wählt Leonardo den ganzzahligen Theil derselben, welcher a heissen mag, und durch welchen die fortlaufende Ungleichung befriedigt wird $a^2 < A < (a+1)^2$. Bedienen wir uns, wie es nicht selten geschieht, des Aehnlichkeitszeichens um annähernde Gleichheit zu bezeichnen, so ist also zuerst $\sqrt{A} \sim a$. Die zweite Annäherung ist $\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a}$, mit welcher die Rechnung einigemale abschliesst. Eine dritte Annäherung, über welche Leonardo nie hinausgeht, wie auch die Araber eine dritte Annäherung stets als letzte betrachteten (Bd. I, S. 765), ist:

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a} - \left(\frac{A-a^2}{2a}\right)^2 : 2\left(a + \frac{A-a^2}{2a}\right)$$

oder

$$a + \frac{A-a^2}{2a} - \frac{(A-a^2)^2}{4a(A+a^2)} \text{ oder } a + \frac{(A-a^2)(A+3a^2)}{4a(A+a^2)}.$$

Von diesen letzten Umformungen ist freilich bei Leonardo um so weniger eine Spur zu bemerken, als er die ganze Rechnung nur an bestimmten Zahlenbeispielen durchführt. Ein solches Beispiel[2]) ist $\sqrt{927435} \sim 963 + \frac{11}{321} - \left(\frac{11}{321}\right)^2 : \left(2\left(963 + \frac{11}{321}\right)\right)$. Ein anderes Mittel zur Auffindung einer näherungsweise richtigen Quadratwurzel dürfte ebenfalls auf arabischen Einfluss zurückzuführen sein (Bd. I, S. 752). Leonardo vervielfacht die Zahl, deren Quadratwurzel ermittelt werden soll, mit einer aus Eins und einer geraden Anzahl von Nullen be-

[1]) Leon. Pisano I, 337, Z. 4. [2]) Ebenda pag. 355.

stehenden Zahl. Alsdann genügt eine einzige Bruchannäherung in der neuen Quadratwurzel, um dem genauen Werthe schon recht nahe zu kommen, weil doch noch durch einen Divisor zu theilen ist, durch Eins mit halb so vielen Nullen, als vorher bei der Multiplication auftraten. $\sqrt{7234} = \frac{1}{100}\sqrt{72340000} \sim \frac{1}{100} \cdot 8505\frac{1}{4} \sim 85\,\frac{1}{20}\,\frac{1}{400}$. An die Quadratwurzelausziehungen schliessen sich Betrachtungen über Irrationalzahlen, welche ziemlich genau den Gang von Euklid's X. Buche der Elemente verfolgen. Vielleicht sollten wir betonen, dass bei dieser Gelegenheit[1]) die einfachen Buchstaben a, b, g, d, e als Vertreter von Zahlen auftreten, während eben so wenig Mangel an Beweisen mittels Linien oder mittels Figuren ist, deren Endpunkte durch a, b, c, d, e. f, g, h, i bezeichnet sind[2]). Mittels einer solchen wird z. B. nachgewiesen, wie Zahlen von der Art wie $6 - \sqrt{20}$ und $3 - \sqrt{5}$ mit einander zu vervielfachen sind. Dabei ist (Figur 6) $ad = 6$, $de = \sqrt{20}$, $ab = 3$, $bf = \sqrt{5}$, es handelt sich also um die Entstehung des Rechteckchens $aeif$. — Nach den Quadratwurzeln wendet sich Leonardo zu Kubikwurzeln. Der Würfel einer aus zwei Theilen bestehenden Strecke setzt sich, sagt er, zusammen aus den Würfeln der einzelnen Theile und dem dreifachen Producte des Quadrates je einen Theils in den anderen Theil. Als ich über diese Definition, fährt er fort[3]), lange nachgedacht hatte, *erfand* ich die Methode der Wurzelausziehung, welche ich weiter unten auseinandersetzen will. Leonardo schreibt sich ungemein selten irgend etwas eigenthümlich zu. Es ist wohl also unzweifelhaft, dass wir hier seinen Worten

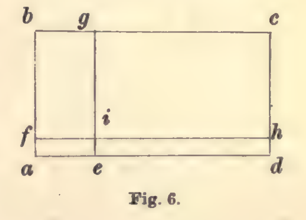


Fig. 6.

Glauben zu schenken haben, dass wir annehmen müssen, solche arabische Schriften, aus welchen er (Bd. I, S. 718 und 732) Kubikwurzelausziehungen hätte erlernen können, seien ihm unbekannt geblieben. Um so zuverlässiger müssen wir auch ein Näherungsverfahren zur Auffindung irrationaler Kubikwurzeln als Leonardo's Eigenthum anerkennen, welches folgendermassen sich darstellt[4]). Man will $\sqrt[3]{A}$ suchen. Eine erste Annäherung besteht wieder in dem ganzzahligen Werthe a, der ähnlich wie bei der Quadratwurzelausziehung die fort-

---

[1]) Leon. Pisano I, 360. [2]) Ebenda pag. 370. Man bemerke den sprachlichen Unterschied zwischen den beiden hier angegebenen Buchstabenfolgen, die erste griechisch-arabisch, die zweite lateinisch. [3]) Ebenda pag. 378 Z. 6 v. u.: *Et cum super hanc diffinitionem diucius cogitarem, inveni hunc modum reperiendi radices, secundum quod inferius explicabo.* [4]) Ebenda pag. 380—381.

laufende Ungleichung $a^3 < A < (a+1)^3$ erfüllt. Diese Ungleichung lässt sich auch $0 < A - a^3 < 3a(a+1)+1$ schreiben, oder die Zahl a ist richtig gewählt, wenn der Rest $A - a^3 < 3a(a+1)+1$ ist, denn die Vermehrung des Kubus besteht aus $3a(a+1)+1$, sofern eine Vermehrung der Kubikwurzel a um die Einheit stattfindet. Nimmt man bei kleiner Vermehrung eine Proportionalität zwischen den Veränderungen der Wurzel und des Radicanden an, so muss, wenn der Radicand um 1 wächst, die Wurzel um $\frac{1}{3a(a+1)+1}$ wachsen. Der Zunahme des Radicanden um $A - a^3$ entspricht also, immer unter der gleichen Annahme der verhältnissmässigen Aenderungen, eine Zunahme der Wurzel um $\frac{A-a^3}{3a(a+1)+1}$ oder in zweiter Annäherung ist $\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A-a^3}{3a(a+1)+1}$. Beispielsweise setzt Leonardo

$$\sqrt[3]{900} \sim 9 + \frac{900-729}{271},$$

wofür man $9\frac{2}{3}$ schreiben dürfe. Ferner $\sqrt[3]{2345} \sim 13 + \frac{2345-2197}{547}$, wofür man $13\frac{1}{4}$ schreiben dürfe, weil 148 wenig mehr als ein Viertel von 547 sei. War auch nach unserer bereits ausgesprochenen Ueberzeugung Leonardo der selbständige Erfinder dieses Verfahrens, so ist damit keineswegs ausgeschlossen, dass ihm auf seinem Erfinderwege ein Vorbild vorschwebte, geeignet die Richtung etwa anzudeuten, nach welcher er sich bewegen musste. Diese Annahme führt aber rückwärts dazu, dass wir von Leonardo's Kubikwurzelausziehung aus die Quadratwurzelausziehung des Alkarchî (Bd. I, S. 722) verstehen lernen. Wenn das Quadrat a^2 bis zum Quadrate der nächsten ganzen Zahl um $2a+1$ zunimmt, und wenn Verhältnissmässigkeit zwischen den kleinen Veränderungen der Wurzel und ihrer Quadratzahl angenommen werden darf, so entspricht der Veränderung der Zahl um $A - a^2$ eine Veränderung der Wurzel um $\frac{A-a^2}{2a+1}$, oder es ist $\sqrt{A} \sim a + \frac{A-a^2}{2a+1}$, wie Alkarchî es vorschreibt. Dass Leonardo bei Ausziehung der Quadratwurzel eben dieses Verfahren nicht lehrt, kann uns in unserer Meinung nicht beirren. Bei der Quadratwurzel ging er über die zweite Annäherung zu einer dritten hinaus, welche ihm ein besseres Ergebniss versprach. Bei der Kubikwurzel liess er sich gern an der einen Bruchannäherung genügen.

Endlich der fünfzehnte Abschnitt vereinigt wieder recht Ungleichartiges in ungleichartiger Folge. Aufgaben über in stetigem Verhältnisse stehende Zahlen, Aufgaben geometrischer Einkleidung, Aufgaben der „Algebra und Almuchabala" wechseln ziemlich bunt.

Bei der zuerst genannten Gattung von Aufgaben sind die Zahlengrössen regelmässig durch Strecken versinnlicht, welche bald zwei Buchstaben, bald nur einen als Bezeichnung führen. Im letzteren Falle bedeutet die einfache Nebeneinanderstellung zweier Buchstaben deren Summe[1]). Die in geometrischer Einkleidung auftretenden Aufgaben sind meistens solche, deren Auflösung von einer Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes abhängt. Einmal handelt es sich z. B. um die Lage eines Brunnens, der gleich weit von den Spitzen zweier Thürme entfernt sein soll[2]). Gegeben ist die Entfernung der Thürme von einander und deren beiderseitige Höhen. Man verbindet die beiden Thurmspitzen geradlinig und errichtet auf dieser Verbindungslinie in ihrer Mitte eine Senkrechte, so trifft letztere bei gehöriger Verlängerung in den Brunnen ein. Der Brunnen liegt für Jemand, der in der Grundebene sich befindet, dem höheren Thurme näher als dem niedrigeren, kann bis zum Fusse des höheren Thurmes vorrücken und sogar jenseits desselben zu suchen sein. Nach dieser Aufgabe treten unvermittelt wieder solche auf, bei welchen Zahlen in stetiger Proportion wachsen. Es sind Gewinnrechnungen[3]), bei denen ein Kaufmann von Ort zu Ort reist und sein Kapital an jedem Orte in gleichem Verhältnisse vermehrt. Dann wird[4]) die Auflösung der unbestimmten Gleichung $x^2+y^2=a^2$ in rationalen Zahlen verlangt, woran neuerdings geometrische Aufgaben[5]) sich anschliessen. Jene unbestimmte Gleichung hat auch Diophant (Bd. I, S. 450) sich vorgelegt, aber die Behandlungsweise ist eine wesentlich andere als bei Leonardo, wenn auch die letzten Gründe der beiden Verfahren die gleichen sind. Leonardo geht von irgend einem pythagoräischen Zahlendreiecke aus, welches $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ bedingt. Daraus folgt $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2=1$ und daraus $\left(\frac{\alpha a}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta a}{\gamma}\right)^2=a^2$. Aehnlicherweise werden auch verwandte Aufgaben behandelt, und zugleich ist wieder auf das *Libellum de quadratis* verwiesen[6]). Den Abschnitt und mit ihm das ganze Werk beschliessen erwähntermassen Aufgaben aus der Algebra und Almuchabala[7]). Gleich zu Anfang giebt eine Randnote *Maumeht* zu erkennen, dass es die Algebra des Alchwarizmî ist, die wir hier zu erwarten haben. Wirklich finden wir die sechs

---

[1]) Leon. Pisano I, 395 Z. 32—33: *quia est sicut a ad b ita g ad d, erit ergo ut ab ad b ita gd ad d.* Vergleiche damit auch pag. 397 Z. 8—9 *sit summa quadratorum ab* 225, womit gemeint ist $a^2+b^2=225$. [2]) Ebenda pag. 398—399. [3]) Ebenda pag. 399—401. [4]) Ebenda pag. 401—403. [5]) Ebenda pag. 403—406. [6]) Ebenda pag. 403: *Nam unde hec inventiones precedunt geometrice demonstrata sunt in libello, quem de quadratis composui.* [7]) Ebenda pag. 406—459.

Gleichungsformen $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$, $ax^2 + c = bx$, deren drei letzte mittels Division durch a zur Auflösung zubereitet werden. Wir finden die gleichen geometrischen Nachweisungen der Richtigkeit der Auflösung wie bei Alchwarizmî (Bd. I, S. 678). Wir finden das Zahlenbeispiel $x^2 + 10x = 39$ nebst anderen und daneben eine zweite Gruppe von Beispielen, welche auf Alkarchî zurückweisen[1]). Wir finden die Bemerkung[2]), dass der Form $ax^2 + c = bx$ regelmässig zwei Wurzelwerthe Genüge leisten. Leonardo geht dann noch in vielfältigen Aufgaben über seine Vorlagen hinaus. Die gestellten Fragen führen stets zu Gleichungen von einer der sechs Formen, sofern auch Wurzel- und Potenzgrössen als Vertreterinnen der Unbekannten zugelassen werden, aber Leonardo legt in der Fragestellung eine Gewandtheit an den Tag, welche auch dem heutigen Leser Staunen erregen mag. Die Kunstausdrücke, deren er sich bedient, sind *census* für das Quadrat der Unbekannten, *radix* (nicht *res* wie im 12. Abschnitte vergl. S. 22) für die Unbekannte selbst, *numerus* für die Gleichungsconstante.

Wir sind in der Schilderung des Liber Abaci fast unerträglich ausführlich geworden, während es eine Zeit gab, in welcher man kaum etwas Anderes von demselben rühmte, als dass dort fast zuerst die modernen Zahlzeichen mit der Null und dem Stellungswerthe durchgängige Verwendung fanden und mit dem Buche sich in weiteren und weiteren Kreisen einbürgerten. Die Entschuldigung der Breite, mit welcher wir berichtet haben, liegt in eben dem, was wir berichten durften, liegt in dem zahlreich Merkwürdigen, an welchem wir schweigend vorübergingen. Welch ein Werk! Wir kennen eine ziemliche Anzahl von Vorgängern desselben in den verschiedensten Sprachen, aber wo ist nur entfernt dessen Gleichen? Wir wissen kaum, was wir mehr bewundern sollen: die Möglichkeit, dass ein solches Werk am Anfange des XIII. Jahrhunderts geschrieben werden konnte oder die Verständnissfähigkeit dafür an dem Kaiserhofe.

Wohl hätten wir an unseren Bericht noch diese und jene Frage anzuknüpfen. Wir unterdrücken sie bis auf eine, welche wir mehr stellen als beantworten. Wir erwähnten (S. 5), Leonardo erzähle, er habe in Allem, was er auf seinen Reisen gelernt, den Algorismus und die Bögen des Pictagoras mit inbegriffen, nur Stümperwerk — quasi errorem — gefunden verglichen mit der Methode der Inder. Was verstand er unter dieser Methode? Man hat diese Frage viel-

---

[1]) Wöpcke hat in seinem *Extrait du Fakhrî* (Paris 1853) pag. 29 die Aufgaben zusammengestellt welche Leonardo aus Alchwarizmî und pag. 25—28 diejenigen, welche er aus Alkarchî geschöpft zu haben scheint. [2]) Leon. Pisano I, 409.

fach aufgeworfen, mancherlei Antworten darauf gegeben. Dass das Rechnen mit Stellungswerth nicht gemeint sein kann, verbürgt der Gegensatz gegen Algorismus. Wir schliessen uns der Vermuthung an, Leonardo habe unter der Methode der Inder die Methode des falschen Ansatzes verstanden, welche ja auch in einem wahrscheinlich aus dem Arabischen übersetzten Schriftstück (Bd. I, S. 688) als indischen Ursprunges bezeichnet wird, und welche in dem 12. Abschnitte des Liber Abaci mit einer unverkennbaren Vorliebe und Ausführlichkeit behandelt ist.

42. Kapitel.

Die übrigen Schriften des Leonardo von Pisa.

So bedeutend nach allen Richtungen der Liber Abaci war, so bildete er doch nicht die bedeutendste schriftstellerische Leistung seines Verfassers. Wir müssen jene anderen mit der ersten Ausgabe des Abacus verglichen späteren Schriften Leonardo's nun kennen lernen.

Im Jahre 1220 widmete er[1]) die Practica geometriae einem Magister Dominicus, der die Ausarbeitung einer solchen von ihm gewünscht hatte. Die Vermuthung[2]), Magister Dominicus sei jener Astrologe gewesen, der bei einem Fach- und Zeitgenossen Guido Bonatti unter dem Namen Dominicus Hispanus Erwähnung findet, ist von so hoher Wahrscheinlichkeit, dass man kaum nach einer anderen wird suchen wollen. Dass Leonardo auf Anregung dieses Freundes das neue Werk verfasste, ist wohl mehr als nur stylistische Wendung. Leonardo's Erstlingswerk war erschienen. Bei vollendeter mathematischer Klarheit und Strenge war es abschreckend schwierig. Andrerseits behandelte es Gegenstände, welche der Kaufmann mitten im Verkehre des Lebens brauchen konnte, mitunter brauchen musste. Zwei Gattungen der Leser werden wir uns demnach zu denken haben: solche die um des Inhaltes willen die Form mit in den Kauf nahmen, solche die an der Form selbst Gefallen fanden. Persönlichkeiten der letzteren Art wies der Kaiserhof auf. Sie waren vorbereitet zu mathematischem Denken durch die seit

---

[1]) Leon. Pisano II, 1—224: *Incipit pratica geometriae composita a Leonardo pisano de filijs bonaccij anno M°CC°XX°. Rogasti amice Dominice et reverende magister, ut tibi librum in pratica geometriae conscriberem.* [2]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano etc.* (*Roma* 1854) pag. 98 in der Note.

knapp fünfzig Jahren vorhandenen Uebersetzungen aus dem Arabischen eines Plato von Tivoli, eines Gerhard von Cremona, vielleicht Anderer, die wir nur nicht mehr kennen. Die Astrologie, vom Kaiser selbst geschätzt, trug auch dazu bei Neigungen zu wecken, welche seit Jahrhunderten in einem Todesschlafe gefangen lagen. Nun war der Spanier Dominicus ein Astrolog. Man kann sich ganz gut vorstellen, er habe gewünscht auch in geometrischen Dingen Unterweisung durch Leonardo zu erhalten, durch ihn, der in Rechenkunst und Algebra als vortrefflicher Lehrer sich bewährt hatte, und auf seinen Wunsch sei die Praxis der Geometrie entstanden, ein Werk, welches trotz seines Namens für die Praxis des Lebens nur wenig bot, kaum einigen wenigen Feldmessern Dienste leisten konnte. Der Feldmesser selbst verlangte nicht die geometrischen Beweisführungen, nach antikem Muster erfunden, wenn nicht geradezu alten Schriftstellern entnommen. Waren doch in den für Feldmesser im Alterthum zusammengestellten Schriften meist nur Regeln gegeben, wie man zu verfahren habe; warum man so verfahre, blieb unerörtert, wenn auch einzelnen feldmesserischen Schriftstellern nicht unbekannt.

Leonardo's Praxis der Geometrie erhebt sich durch die Beweisführungen, welche sie enthält, über ihre Vorbilder aus alter Zeit. Sie bleibt ihnen sehr nahe in der bunten Abwechslung zwischen metrologischen, arithmetischen, geometrischen und stereometrischen Lehren. Die Figuren sind mit Buchstaben versehen und hier tritt fortwährend der Gegensatz zu Tage, auf welchen wir (S. 31 Anmerk. 2) schon hingewiesen haben. Die Buchstaben folgen theils der Anordnung des lateinischen, theils und zwar in ihrer grossen Mehrheit der des griechisch-arabischen Alphabetes. Möglich, dass dadurch eine Unterscheidung zwischen selbsterfundenen und einfach übernommenen Beweisen zu gewinnen ist, möglich auch dass Leonardo die Sitte seiner arabischen Lehrmeister sich so sehr angeeignet hatte, dass sie ihm auch da zur zweiten Natur geworden war, wo er selbständiger arbeitete. In diesem Falle müsste man Gründen nachspüren, welche wenigstens seltene Abweichungen von der Gewohnheit hervorbrachten. Leonardo beginnt mit Definitionen. Maasstabellen folgen und auf diese Rechnungsvorschriften an benannten, theilweise auch an unbenannten Zahlen. Dann erst kommt eigentlich Geometrisches, aber auch wieder mit Arithmetischem untermischt. Wir heben nun Einzelheiten aus verschiedenen Gebieten hervor.

Der pythagoräische Lehrsatz[1]) ist durch Fällung einer Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse und

[1]) Leon. Pisano II, 32.

durch Beachtung der Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke bewiesen. — Ein eigenthümlich auftretendes Wort *casus* bedeutet den Abschnitt, der durch die von der Spitze eines Dreiecks auf die Grundlinie gefällte Senkrechte auf der Grundlinie hervorgebracht wird. Der Einfallspunkt dieser Senkrechten, an den man zu denken geneigt sein könnte, kann nicht gemeint sein, da einmal von *maior casus* und von *minor casus* im Gegensatze zu einander die Rede ist[1]. — Die Ausmessung des Dreiecks als Rechteck aus der Grundlinie und der halben Höhe[2] ist an der gleichen Figur gezeigt, deren später Ganeça in Indien (Bd. I, S. 614) sich bediente. — Die heronische Dreiecksformel ist mit einem Beweise[3] versehen, welcher dem als heronisch überlieferten ähnelt, ohne ihm völlig gleich zu sein. — Es giebt sechserlei Vierecke[4], nämlich die fünf euklidischen Arten und ausserdem — als fünftes in der Aufzählung zwischen das Rhomboid und das unregelmässige Viereck eingeschaltet — das Paralleltrapez, *quae habet capita abscissa*, und von diesem letzteren giebt es wieder vier Unterarten[5], je nachdem das Paralleltrapez gleichschenklig, rechtwinklig, an beiden Seiten der Basis spitzwinklig ohne Gleichschenkligkeit, oder an einer Seite der Basis spitzwinklig, an der anderen stumpfwinklig ist. Hier erscheinen also euklidische und heronische Erinnerungen gemengt, letztere in vermuthlich reinerer Gestalt als die griechische Ueberlieferung uns aufbewahrte. Ausserdem ist auch[6] von der *figura barbata* die Rede d. h. von dem (Fig. 7) Vierecke mit einspringendem Winkel, das *κοιλογώνιον* (Bd. I, S. 341) des Zenodorus. — Das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ist in der Form[7] $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ angegeben. Das arithmetische Mittel von $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{5}$ ist $\frac{29}{90}$ oder beinahe $\frac{1}{3}$. Leonardo von Pisa sagt $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ sei *in medio* zwischen den genannten Grenzen und formt weiter um zu $\pi = \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{4320}{1375} = \frac{864}{275}$ d. h. er setzt $\pi = \frac{34{,}56}{11} = 3{,}141818\ldots$ — Die Theilung von Figuren[8] ist augenscheinlich einer arabischen Bearbeitung von Euklid's gleichnamigem im Urtexte uns verlorenem Buche nachgebildet. — Trigonometrische Betrachtungen lehnen sich an Ptolemäus an. Insbesondere ist diesem Schriftsteller der Beweis

Fig. 7.

---

[1] Leon. Pisano II, 35 lin. 21 und 22. [2] Ebenda pag. 35. [3] Ebenda pag. 40. [4] Ebenda pag. 56. [5] Ebenda pag. 78. [6] Ebenda pag. 83. [7] Ebenda pag. 90. Vergl. Hultsch in Zeitschr Math. Phys. XXXIX Histor.-liter. Abtlg. S. 170 und Weissenborn, Die Berechnung des Kreisumfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano (Berlin 1894) S. 30 flg. [8] Leon. Pisano II, 110—148.

des Satzes[1]) entnommen, dass Bögen in grösserem Verhältnisse stehen als die zugehörigen Sehnen. Der Kunstausdruck *sinus versus arcus*[2]) hat wohl von Plato von Tivoli her Eingang gefunden.

In der praktischen Feldmesskunst sind einige Kunstgriffe gelehrt, welche wohl von Alters her in Uebung waren. Einzelnes[3]) zeigt eine fast wörtliche Uebereinstimmung mit erhaltenen Bruchstücken des Frontinus (Bd. I, S. 513). Anderes[4]) erinnert täuschend an Gerbert. Höhenmessungen mittels eines massiven hölzernen Dreiecks und mittels eines Quadranten werden gelehrt und durch gute Zeichnungen erläutert. Der Quadrant (Fig. 8) besteht, wie sein Name es ausdrückt, aus dem vierten Theile eines Kreises, dessen Bogen in 16 gleiche Theile getheilt ist, während eine vom Kreismittelpunkte ausgehende Gerade den dort durch die beiden den Quadranten begrenzenden Halbmesser gebildeten rechten Winkel halbirt. Von dem Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Quadrantenbogen gehen den genannten Halbmessern parallel wieder zwei feste in je 10 gleiche Theile getheilte Gerade aus. Visirt man längs dem einen Grenzhalbmesser nach einem entfernten Höhen- oder Tiefpunkte, so schneidet ein vom Mittelpunkte herabgelassener Bleisenkel den getheilten Bogen und eine der getheilten Geraden. Auf jenem liest man die Grösse des eingestellten Winkels, auf dieser dessen Tangente, beziehungsweise dessen Cotangente ab. Eine Senkrechte von einem Punkte auf eine gegebene Gerade auf dem Felde wird folgendermassen gefällt[5]). Der Feldmesser stellt sich in dem Punkte auf, von welchem die Senkrechte ausgehen soll, befestigt daselbst ein Seil und begiebt sich mit dem anderen Seilende nach jener Geraden hin, wo dem Augenmaasse nach die Senkrechte ungefähr eintreffen wird. Das Seil wird jetzt gespannt, so dass es über die Grundlinie etwas hinausreicht, dann aber werden die zwei Punkte der Grundlinie bemerkt, in welche die ganze Seillänge genau eintrifft. In der Mitte zwischen beiden ist der richtige Höhenpunkt. Als eine beim Feldmessen nothwendige Vorrichtung wird auch noch das Archipendulum genannt[6]), ein massives gleichschenkliges Dreieck mit einem an der Spitze befestigten Faden, an welchem ein Bleistück hängt (filum cum plumbo).

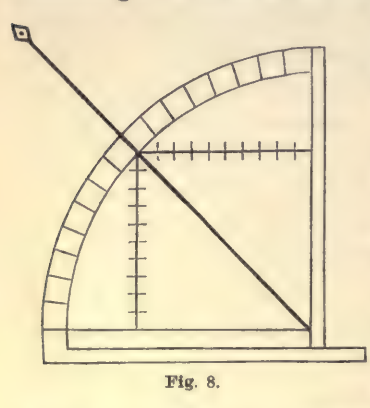


Fig. 8.

---

[1]) Leon. Pisano II, 97. [2]) Ebenda pag. 94. [3]) Ebenda pag. 107. [4]) Ebenda pag. 202—206. Vergl. Agrimensoren S. 180—181. [5]) Leon. Pisano II, 43. [6]) Ebenda pag. 108.

In der stereometrischen Abtheilung finden wir[1]) einen Auszug aus dem XI., XII., XIII. Buche des Euklid und aus jenem Buche des Hypsikles, welches unter dem Namen eines XIV. Buches des Euklid mitgeführt wurde. Die Aufgaben sind abgesondert und den Lehrsätzen nachgeschickt, auch sonstige muthmasslich selbständige Abänderungen in der Reihenfolge der beweislos ausgesprochenen Sätze sind wahrnehmbar. Es ist nicht unmöglich, dass Leonardo sich einer Uebersetzung des Gerhard von Cremona bedient hat[2]). Von Sätzen, welche bei Euklid sich noch nicht finden, erwähnen wir nur den von der Gleichheit des Quadrates der Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedon mit der Summe der Quadrate dreier in einem Eckpunkte aneinanderstossenden Seiten[3]). Als bei griechischen Geometern noch nicht bewiesen hätten wir vielleicht schon oben des planimetrischen Satzes von dem gemeinsamen Durchschnitte der drei Mittellinien eines Dreiecks[4]) gedenken sollen. Allerdings wusste Archimed, dass das Dreieck nur einen Schwerpunkt besitze, und dass er als Durchschnittspunkt irgend zweier Mittellinien gefunden werde. Aber damit war doch kein eigentlich geometrischer Beweis geliefert, und ein solcher ist der Leonardo's (Figur 9). Die Mittellinie bz wird verlängert, bis sie in i eine durch a gezogene Parallele zu bg schneidet Nun ist $\triangle aiz \backsim gbz$, und wegen $az = gz$ findet nicht bloss Aehnlichkeit sondern Congruenz statt, d. h. es ist $ai = gb = 2eb$. Ausserdem ist $\triangle aid \backsim ebd$, folglich wegen $ai = 2eb$ auch $ad = 2ed$, der Schnittpunkt einer Mittellinie durch eine andere theilt die erstere im Verhältnisse von $2:1$, kann also nur einer sein, welche Mittellinie man auch als Schneidende wähle.

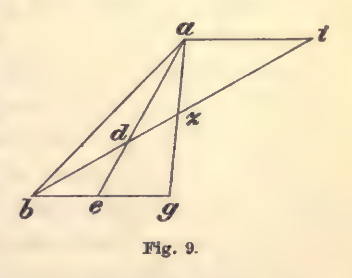


Fig. 9.

Auch Arithmetisches und Algebraisches ist zu berichten. Das Wort *figura cata* tritt auf[5]), unsere frühere Erläuterung dieses Ausdruckes durchaus bestätigend. Es begegnet uns die Behauptung[6]), jede Gleichung $x^2 + c = bx$ habe zwei Wurzelwerthe, wobei allerdings ebensowenig wie im 15. Abschnitte des Abacus (S. 34) der Möglichkeit gedacht ist, es könnte auch einmal $\frac{b^2}{4} \leqq c$ sein. Quadratwurzelausziehungen aus benannten Flächenzahlen[7]), Kubikwurzelausziehungen aus unbenannten Zahlen[8]) werden vorgenommen, welche mit dem

[1]) Leon. Pisano II, 159—162. [2]) Curtze brieflich. [3]) Leon. Pisano II, 163. [4]) Ebenda pag. 112—113. [5]) Ebenda pag. 52 und 54. [6]) Ebenda pag. 60. [7]) Ebenda pag. 23. Vergl. hierzu Hunrath, Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche (Kiel 1884), S. 30 flgg [8]) Leon. Pisano II, 148—153. Hunrath l. c. S. 35—36.

Verfahren im Abacus (S. 32) übereinstimmen. Endlich und gewiss am unerwartetsten in einem praktisch-geometrischen Werke stossen wir auf eine zahlentheoretische Aufgabe. Es soll[1]) eine Quadratzahl gefunden werden, welche um 5 vermehrt wieder eine Quadratzahl gebe. Leonardo löst die Aufgabe nach zwei Verfahren, welche er zwar nur an den bestimmten Zahlenwerthen ausübt, welche aber leicht verallgemeinert zur Darstellung sich eignen. Soll x^2+u neuerdings Quadratzahl sein, so wählt man erstens eine Quadratzahl $a^2 < u$ und setzt dann $(x+a)^2 = x^2+u$, worauf sogleich $x = \frac{u-a^2}{2a}$ gefunden ist. Die zweite Methode unterscheidet zwei Fälle, den eines ungraden und eines graden u. Bei ungradem $u = 2n+1$ ist augenscheinlich $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$ und $1+3+\cdots+(2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$. Die gewünschte Quadratzahl, welche um $u = 2n+1$ vergrössert eine neue Quadratzahl giebt, ist also $n^2 = \left(\frac{u-1}{2}\right)^2$. Bei durch 4 theilbarem $u = 4n = (2n-1)+(2n+1)$ ist $1+3+\cdots+(2n-3) = (n-1)^2$, $1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$. Die gewünschte Quadratzahl ist also $(n-1)^2 = \left(\frac{u-4}{4}\right)^2$. Es fehlt noch die Möglichkeit des durch 2, aber nicht durch 4 theilbaren u. Nun sei gefunden $x^2+uv^2 = y^2$. Daraus folgt $\left(\frac{x}{v}\right)^2 + u = \left(\frac{y}{v}\right)^2$ Bei $v = 2$ sagt uns diese Erwägung, man solle zuerst $\left(\frac{4u-4}{4}\right)^2 + 4u = (u+1)^2$ setzen, um sodann $\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + u = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2$ zu folgern, allerdings keine ganzzahlige Auflösung, welche aber unter der gemachten Voraussetzung gar nicht möglich ist.

So der Inhalt jenes zweiten Werkes Leonardo's. Hatte das erste schon, wie wir annahmen, seine Bekanntschaft mit Persönlichkeiten des kaiserlichen Hofstaates vermittelt, so dürfte auf das zweite hin die Neugier des Kaisers selbst rege gemacht worden sein, der den merkwürdigen Mann, den Wiedererwecker alter Wissenschaft und Erfinder neuer Sätze, kennen lernen wollte. Jedenfalls erfolgte die Vorstellung Leonardo's, die wir in doppeltem Sinne als Vorstellung bezeichnen dürfen, da Leonardo nicht bloss dem Kaiser zugeführt wurde, sondern in dessen Gegenwart Aufgaben löste, welche man ihm zu diesem Zwecke vorlegte. Wann, wo fand dieses Ereigniss statt? Nach der Vorstellung entstanden zwei Schriften, welche uns scheinbar beide Fragen unzweideutig beantworten. Liber quadratorum und Flos verfolgen beide den Zweck, die Methoden zu schildern, nach welchen Leonardo die ihm gestellten Aufgaben löste, und sie nennen den Ort, wo Leonardo bei Hofe erschien. Der Liber quadratorum ist wiederholt in der zweiten Ausgabe des Abacus genannt, mithin vor

[1]) Leon. Pisano II, 216—218.

1228 verfasst, wenn dieses das Jahr ist, in welchem die zweite Ausgabe des Abacus erfolgte. Damit steht in vortrefflicher Uebereinstimmung, dass als Entstehungsjahr des Liber quadratorum 1225 angegeben ist[1]). Die Vorstellung dürfte daher in eben diesem Jahre oder wenigstens nicht allzulange früher, etwa 1224, stattgefunden haben. Nun aber der Ort der Vorstellung! Im Liber quadratorum heisst es gleich nach der Ueberschrift in Worten, welche an seine Hoheit den glorreichen Fürsten F., also offenbar an Kaiser Friedrich gerichtet sind, Meister Dominicus — worunter offenbar wieder jener Spanier gemeint ist, welchem die Praxis der Geometrie zugeeignet ist — habe Leonardo vorgestellt, und zwar *cum me pisis duceret praesentandum*. Damals sei Magister Johannes von Palermo zugegen gewesen, der ihm Fragen vorgelegt habe. Die hier in lateinischer Sprache angeführten Worte können entweder bedeuten, Dominicus habe Leonardo aus Pisa hingeführt oder er habe ihn in Pisa hingeführt, um vorgestellt zu werden. Hier ist nur die letztere Uebersetzung zulässig, denn im Flos findet sie ausdrückliche Bestätigung[2]). In Gegenwart Eurer Majestät, glorreicher Fürst Friedrich, hat Euer Philosoph, Magister Johannes von Palermo sich in Pisa ausführlich über die Eigenschaften der Zahlen besprochen und mir dabei zwei Aufgaben gestellt. So erzählt Leonardo im Flos, und womöglich noch bestimmter klingt eine zweite Stelle derselben Abhandlung: Diese Frage hat mir, mein Kaiser und Herr, in Eurem Palaste in Pisa in Gegenwart Eurer Majestät Magister Johannes von Palermo vorgelegt. Wir wiederholen also unsern Ausspruch, es sei scheinbar unzweideutig festgestellt, dass Leonardo spätestens 1225, vielleicht schon 1224 in Pisa dem Kaiser persönlich bekannt wurde. Aber warum wiederholen wir abermals das Wort scheinbar? Weil die mit grosser Sorgfalt gesammelten Regesten Kaiser Friedrich II. zu erkennen geben, dass dieser vor Juli 1226 überhaupt nicht in Pisa war, und damals auch nur flüchtig, dann erst wieder Ende December 1239, August 1244, Mai 1245, April 1247, Mai 1249[3]). Zwischen diesen festgestellten Daten und einer schon vor 1225 vorgekommenen öffentlichen wissenschaftlichen Vorstellung in Gegenwart Friedrichs im Kaiserpalaste zu Pisa ist ein so klaffender Zwiespalt, dass wir ihn nicht zu überbrücken vermögen.

Magister Johannes von Palermo, magister Johannes panormitanus, der Philosoph des Kaisers, dürfte wohl derselbe Hofmann

---

[1]) Leon. Pisano II, 253: *Incipit liber quadratorum compositus a Leonardo Pisano. Anni M.CC.XXV.* [2]) Ebenda pag. 227 und pag. 234. [3]) Wir verdanken diese Angaben Hrn. Eduard Winkelmann, welcher uns deren Benutzung gütigst gestattete.

sein, welcher als Notar und Getreuer des Kaisers bezeichnet[1]) im Mai 1221 zu Catane eine Urkunde Friedrich's zu Gunsten eines Klosters bei Messina ausfertigte, und welcher auch 1240 noch vom Kaiser in wichtigeren Angelegenheiten beschäftigt wurde[2]). Die Aufgaben, welche er Leonardo stellte, bezeugen, dass er auch als tüchtiger Mathematiker betrachtet werden muss, wenn er es wirklich war, der jene Aufgaben ersann, wenn er nicht etwa ein Freund Leonardo's war, der durch ihn selbst bis zu einem gewissen Grade wenigstens angewiesen worden war, welcherlei Fragen ihm zur schleunigen Beantwortung erwünscht seien. Jedenfalls hält es nicht schwer, den Keim der Aufgaben bei der Pisaer Vorstellung in Leonardo's Schriften ausfindig zu machen.

Die erste Aufgabe ging dahin, eine Quadratzahl zu finden, welche um 5 vermehrt und vermindert neue Quadratzahlen liefere, und Leonardo löste diese mit $\left(3\frac{5}{12}\right)^2 = 11\frac{97}{144}$. Es ist auch wirklich $11\frac{97}{144} + 5 = 16\frac{97}{144} = \left(4\frac{1}{12}\right)^2$ und $11\frac{97}{144} - 5 = 6\frac{97}{144} = \left(2\frac{7}{12}\right)^2$. Wie sollten wir uns hier nicht an jene Aufgabe aus der Praxis der Geometrie erinnert fühlen, welche verlangte eine Quadratzahl zu finden, die um 5 vermehrt abermals eine Quadratzahl liefere? Neu war nur die zusätzliche Bedingung, dass auch die Verminderung um 5 eine Quadratzahl hervorbringen müsse. Und auch sie war keineswegs neu, und ein Schüler arabischer Zahlentheoretiker war in der Lage, die Aufgabe ebensowohl als ihre Auflösung zu kennen. Diophant hatte gelehrt: In jedem rechtwinkligen Dreiecke bleibt das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Product der Katheten davon abzieht oder dazu addirt. Araber beschäftigten sich (Bd. I, S. 708—711) weitläufiger mit dem Gegenstande und gelangten, indem sie von rationalen rechtwinkligen Dreiecken ausgingen, zu den nur ganze Zahlen enthaltenden Endgleichungen $(a^2 + b^2)^2 \pm 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 \pm 2ab)^2$. Allein wenn wir auch die Voraussetzung, Leonardo habe diese Ergebnisse gekannt, für berechtigt halten, so sind wir doch weit entfernt, ihm dadurch den Makel anheften zu wollen, als habe er nur wiederholt, was Andere vor ihm leisteten. Leonardo ging seine eigenen Wege, welche von denen Diophant's, von denen der Araber verschieden waren, welche er dagegen schon in der Praxis der Geometrie bei der unvollständigeren Aufgabe eingeschlagen hatte (S. 40). Seinen Aus-

---

[1]) Huillard-Bréholles, *Historia diplomatica Friderici II imper.* II, 185: *per manus Ioannis de Panormo notarii et fidelis nostri.* [2]) Ebenda V, 726, 727, 745, 928.

gangspunkt bildet der Satz von der Entstehung jeder Quadratzahl n^2 als Summe der n ersten ungraden Zahlen $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$. Eine Folge desselben ist der weitere Satz[1]), dass, wenn zwei aufeinander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zusammen eine Quadratzahl bilden, das Quadrat der grösseren Zahl jedesmal Summe zweier Quadratzahlen sei. Moderne Bezeichnung gestattet leicht die Richtigkeit des Satzes einzusehen. Es ist immer

$$(a + 1)^2 = a^2 + \left(\sqrt{a + (a + 1)}\right)^2,$$

und damit auch das zweite Quadrat rechts vom Gleichheitszeichen eine rationale Wurzel besitze, ist hinreichend und nothwendig, dass a und $a + 1$ eine quadratische Summe besitzen. Durch seinen Satz ist Leonardo in den Stand gesetzt, beliebig viele ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke herzustellen, und zwar in einer ihm eigenthümlichen Weise. Aber das gleiche c^2, welches der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügt, kann auch als Summe gebrochener Quadrate dargestellt werden[2]). Es sei bekannt $d^2 + e^2 = f^2$, so folgt leicht $\frac{d^2}{f^2} + \frac{e^2}{f^2} = 1$, $\left(\frac{cd}{f}\right)^2 + \left(\frac{ce}{f}\right)^2 = c^2$. Nun folgt weiter der Satz[3]), dass $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden könne, vorausgesetzt, dass die Zahlen a, b, c, d keine Proportion bilden, d. h. dass weder $a : b = c : d$ noch $a : b = d : c$. Auch das war nicht neu. Diophant hatte eine ganz ähnliche Behauptung ausgesprochen (Bd. I, S. 451), aber die hinzutretende Bedingung ist von Leonardo beigefügt, und sie giebt uns, falls wir sie dahin aussprechen, es dürfe weder $ad = bc$ noch $ac = bd$ sein, die Gewähr, dass Leonardo die Zerlegungen

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

genau studirt hatte. Wie Leonardo in den bereits von uns genannten Sätzen über seine Vorgänger sich erhob, so auch im weiteren Verlauf des Liber quadratorum. Archimed hat die Summe der mit 1 beginnenden Quadratzahlen gebildet (Bd. I, S. 298). Andere sind ihm gefolgt. Leonardo summirt in ungemein geistreicher Weise die ungraden sowie die graden Quadratzahlen, jedes für sich[4]). Er bedient sich dabei der Identität $r(r + 2)(2r + 2) = (r - 2)r(2r - 2) + 12r^2$. Nimmt in ihr r alle ungraden von $r = 3$ beginnenden Werthe der Reihe nach an, nachdem man schon vorher die von selbst einleuchtende Identität $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12 \cdot 1^2$ anschrieb, und setzt Alles untereinander, so entsteht:

---

[1]) Leon. Pisano II, 254. [2]) Ebenda pag. 256. [3]) Ebenda pag. 257 flg. [4]) Ebenda pag. 263 flg.

$$1\cdot 3\cdot \ 4 = \qquad\qquad 12\cdot 1^2,$$
$$3\cdot 5\cdot \ 8 = 1\cdot 3\cdot 4 + 12\cdot 3^2,$$
$$5\cdot 7\cdot 12 = 3\cdot 5\cdot 8 + 12\cdot 5^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$r(r+2)(2r+2) = (r-2)r(2r-2) + 12\cdot r^2.$$

Addirt man diese Gleichungen, indem man die Glieder streicht, welche links und rechts in gleicher Weise erscheinen, so bleibt zuletzt nur $r(r+2)(2r+2) = 12(1^2+3^2+5^2+\cdots+r^2)$ übrig. Es ist leicht ersichtlich, wie man auch statt r sämmtliche gerade Zahlen einsetzen kann. Dadurch entsteht:

$$2\cdot 4\cdot \ 6 = \qquad\qquad 12\cdot 2^2,$$
$$4\cdot 6\cdot 10 = 2\cdot 4\cdot \ 6 + 12\cdot 4^2,$$
$$6\cdot 8\cdot 14 = 4\cdot 6\cdot 10 + 12\cdot 6^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r(r+2)(2r+2) = (r-2)r(2r-2) + 12\cdot r^2$$

mit der Summe $r(r+2)(2r+2) = 12(2^2+4^2+6^2+\cdots+r^2)$. Weitergehend erörtert Leonardo eine aus zwei ganzen Zahlen a, b gebildete Zahl[1]), welche, jenachdem die Summe $a+b$ grad oder ungrad ist, entweder $ab(a+b)(a-b)$ oder $4ab(a+b)(a-b)$ heisst. Im einen wie im anderen Falle ist, wie Leonardo streng nachweist, die Zahl durch 24 theilbar. Das ist die Zahl, deren, wie wir oben in Erinnerung brachten, die Araber sich bei der Aufgabe drei eine arithmetische Progression bildende Quadratzahlen zu finden bedienten, nur dass Leonardo wieder weiter ging. Von ihm stammt jener Theilbarkeitssatz, der mit der Hauptaufgabe in keinerlei Verbindung steht, dafür aber an sich von zahlentheoretischem Interesse ist. Jetzt kommt auch Leonardo zur eigentlichen Hauptaufgabe[2]). Jede der drei in arithmetischer Progression stehenden Quadratzahlen x_1^2, x_2^2, x_3^2 (wobei $x_1 < x_2 < x_3$ angenommen ist) entstand als Summe aufeinanderfolgender, mit der 1 beginnender ungrader Zahlen. Es muss also x_2^2 aus den gleichen Ungraden wie x_1^2 bestehen, nur um einige vermehrt, ebenso auch aus den gleichen Ungraden wie x_3^2, nur um einige verringert. Mit anderen Worten, die unter sich gleichen Unterschiede $x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2$ sind gebildet, die erste durch einige ungrade Zahlen unterhalb $2x_2 - 1$ mit dieser abschliessend, die zweite durch einige ungrade Zahlen oberhalb $2x_2 + 1$ mit dieser

---

[1]) Leon. Pisano II, 264. [2]) Vergl. namentlich über diese Aufgabe einen commentirenden Aufsatz von Ang. Genocchi in den von Tortolini herausgegebenen *Annali di scienze matematiche e fisiche* (Rom 1855) VI, 273—320.

beginnend, wobei, wegen des fortwährenden Zunehmens der ungraden Zahlen, die Anzahl derer, welche die Summe in der Form $x_2^2 - x_1^2$ lieferte, höher ist als die Anzahl derer, welche $x_3^2 - x_2^2$ hervorbringen, z. B. $25 - 1 = 3 + 5 + 7 + 9$, $49 - 25 = 11 + 13$. Der Unterschied selbst ist eine durch 24 theilbare Zahl von der oben erwähnten Natur und heisst ein Congruum[1]), die Quadrate x_1^2 und x_2^2 heissen congruentes[2]) und Leonardo zeigt nun, wie ein Congruum zu finden sei. Er zeigt auch, dass ein mit einer Quadratzahl vervielfachtes Congruum die Eigenschaft ein Congruum zu sein beibehalte, und dieser Satz bietet die Handhabe zur Lösung der Aufgabe, bei gegebener Differenz die drei Quadrate zu finden, falls die Differenz nicht durch 24 theilbar, also sicherlich kein ganzzahliges Congruum ist. So war es in dem von Johann von Palermo aufgegebenen Beispiele mit der Differenz 5. Leonardo sucht zuerst ein ganzzahliges Congruum von der Form $5y^2$ und findet es als

$$720 = 5 \cdot 12^2 = 4 \cdot 5 \cdot 4(5 + 4)(5 - 4),$$

d. h. bei $a = 5$, $b = 4$. Diese Werthe geben $-a^2 + 2ab + b^2 = 31$, $a^2 + b^2 = 41$, $a^2 + 2ab - b^2 = 49$ und $31^2 + 720 = 41^2$, $41^2 + 720 = 49^2$. Endlich ist also nur noch durch 12^2 Alles zu dividiren, um zu den Gleichungen $\left(\frac{31}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{41}{12}\right)^2$, $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$ zu gelangen, welche die gestellte Aufgabe erfüllen. Bei den vorbereitenden Untersuchungen war Leonardo genöthigt, den Zahlenwerth des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ zu berücksichtigen, und er hatte die Fälle unterschieden, wo $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a+b}{a-b}$ war. Nunmehr beweist er die Unmöglichkeit von $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$. Aus dieser Unmöglichkeit folgt nun freilich, dass $ab(a + b)(a - b)$ nicht $= [b(a + b)]^2$ und $4ab(a + b)(a - b)$ nicht $= [2b(a + b)]^2$ sein kann. Leonardo geht aber weiter und schliesst, es könne überhaupt keine Quadratzahl ein Congruum sein[3]). Hier scheint eine Lücke in dem sonst vollkommen strengen Gedankengange vorhanden, ohne welche man für Leonardo ein unbestimmtes Erstlingsrecht für die Erfindung des Satzes beanspruchen müsste, dass zwei Biquadrate kein Biquadrat zur Summe haben können. Aus $x_2^2 - c = x_1^2$ und $x_2^2 + c = x_3^2$ folgt nämlich $x_2^4 - c^2 = (x_1 x_3)^2$ und $x_2^4 = c^2 + (x_1 x_3)^2$. Kann also c kein Quadrat y^2 sein, so ist unmöglich $x_2^4 = y^4 + (x_1 x_3)^2$, also eben so unmöglich der Einzelfall,

---

[1]) Leon. Pisano II, 266: *qui vocetur congruum.* [2]) Ebenda pag. 270: *quadrati congruentes facto congruo.* [3]) Ebenda pag. 272: *nullus quadratus numerus potest esse congruum.*

der bei $x_1 x_3 = z^2$ entstehen würde, d. h. unmöglich $x_2^4 = y^4 + z^4$. Immerhin würde Leonardo, wie wir absichtlich sagten, nur ein unbestimmtes Recht auf diese Entdeckung haben, indem er die hier gezogenen Folgerungen in keiner Weise andeutet. Leonardo schliesst noch andere verwickelte Aufgaben aus dem Gebiete der unbestimmten Analytik zweiten Grades an, deren eine, wie er mittheilt, ihm vom Magister Theodorus, dem Philosophen des Kaisers, gestellt wurde[1]). Sie würde in Zeichen geschrieben darauf hinauskommen, drei Zahlen x, y, z zu finden, welche jede einzelne der drei Summen $x + y + z + x^2$, $x + y + z + x^2 + y^2$, $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ zu einer Quadratzahl machen, was durch $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$ erfüllt wird, indem alsdann jene Summen zu $\left(\frac{36}{5}\right)^2$, zu $(12)^2$ und zu $\left(\frac{156}{5}\right)^2$ werden.

Wir kommen zu einer zweiten Aufgabe, welche Johannes von Palermo unserem Leonardo in Gegenwart des Kaisers vorlegte, und von welcher in der Flos überschriebenen Abhandlung[2]) die Rede ist. Auch diese Abhandlung ist, gleich den anderen Schriften Leonardo's, ein Zeichen der genauen Beziehungen des Verfassers zum kaiserlichen Hofe. Sie ist einem Cardinal R., Diaconus der heiligen Maria in Cosmedin gewidmet, das ist, wie aus der beigefügten näheren Bezeichnung zu ermitteln gelang[3]), Cardinal Raniero Capocci von Viterbo. Den Titel *Flos* erläutert Leonardo selbst in der Widmung mit Berufung theils auf die blumenreiche Beredsamkeit des Gönners, dem die Abhandlung zugeeignet ist, theils auf die blühende Art, in welcher schwierige Aufgaben bewältigt werden, die selbst wieder den Keim zu Neuem in sich tragen. Die Hauptaufgabe ist die durch Johannes von Palermo verlangte Auflösung der kubischen Gleichung[4]):

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Aus den Seiten 10 und x wird ein Rechteck gebildet. Dann wird unter Benutzung der gleichen Höhe 10 ein zweites Rechteck x^3, ein drittes $2x^2$ angesetzt, mit anderen Worten, es wird die Folgerung $10\left[x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5}\right] = 20$ und daraus weiter $x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} = 2$ gezogen. Daher muss $x < 2$ sein, und wenn x ganzzahlig sein sollte, müsste es den Werth 1 besitzen. Aber $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$, folg-

---

[1]) Leon. Pisano II, 279. Genocchi l. c. pag. 357 flgg. [2]) Ebenda pag. 227—247. [3]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 17—19. [4]) Leon. Pisano II, 227: *ut inveniretur cubus numerus qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti.*

lich ist x nicht ganzzahlig. Ebensowenig ist x eine rationale gebrochene Zahl. Denn es kann unmöglich $x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10}$ zur ganzen Zahl 2 werden, wenn x bereits eine ganze Zahl im Nenner führt, x^2 dem Nenner einen zweiten, x^3 noch überdies ihm einen dritten Factor zuführt. Auch eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl kann x nicht sein. Die gegebene Gleichung lässt nämlich die Umformung in $x = \frac{20 - 2x^2}{10 + x^2}$ zu, und damit wäre unter der gemachten Annahme die Gleichheit von Rationalem und Irrationalem ausgesprochen. Nach diesen einfacheren Annahmen, die leicht beseitigt wurden, geht Leonardo zu verwickelteren quadratischen Irrationalitäten über, dergleichen Euklid im X. Buche seiner Elemente ausführlich behandelt hat, und zeigt, dass auch sie die Gleichung nicht erfüllen, vielmehr Widersprüche hervorrufen [1]. Zuletzt giebt Leonardo einen Näherungswerth $x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$, wobei die Anwendung von Sexagesimalbrüchen weiter fortgeführt erscheint, als es sonst irgendwo der Fall sein dürfte [2]. Man hat mit Hilfe der neuesten und genauesten Auflösungsmethoden die Gleichung behandelt [3] und den Wurzelwerth gleichfalls in Sexagesimalbrüchen als

$$x = 1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 38{,}5^{VI}$$

gefunden, mithin nur um $1\frac{1}{2}^{VI} = \frac{1}{31\,104\,000\,000}$ weniger als Leonardo's Werth! Eine so ausserordentlich genaue Rechnungsfähigkeit darf das höchste Erstaunen hervorrufen, und mit demselben das tiefste Bedauern darüber, dass Leonardo nar den Werth giebt, ohne zu verrathen, wie er ihn erhielt. Mag es ja die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben, dass Leonardo's Kubikwurzelausziehungen für Johann von Palermo die Veranlassung boten, die Auflösung einer kubischen Gleichung von ihm zu verlangen, auf dem Wege zur Ermittlung von Leonardo's Verfahren sind wir dadurch keinen Schritt weiter, und Versuche, welche gemacht wurden, über diese schwierige Frage Licht zu verbreiten [4], muss man leider als ganz erfolglos bezeichnen. Von dem einen Versuche werden wir zu reden haben, wenn wir mit Cardano uns beschäftigen werden. Der andere sucht nun gar einen Zusammenhang zwischen dem Verfahren Leonardo's und dem des Al-Kâschî (Bd. I, 736—737) im XV. Jahrhunderte,

---

[1] Eine algebraische Wiederherstellung der bei Leonardo der Form nach geometrisch geführten Untersuchung von Wöpcke in Liouville's *Journal des mathématiques* (1854) XIX, 401—406. [2] Leon. Pisano II, 234. [3] Wöpcke l. c. [4] Genocchi l. c. pag. 165—168 und Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 293.

während letzteres nur dann anwendbar ist, wenn die Gleichung die Gestalt $x^3 + Q = Px$ mit gegen Q sehr grossem P besitzt, also auf $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in keiner Weise passt. Ein dritter Versuch[1]) geht von der Voraussetzung aus, Leonardo sei im Stande gewesen, die Umwandlung der Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in $\left(x + \frac{2}{3}\right)^3 + 8\frac{2}{3}x = 20\frac{8}{27}$ und weiter in $y^3 + 8\frac{2}{3}y = 26\frac{2}{27}$ oder unter Anwendung von Sexagesimalbrüchen in $y^3 + 8^0\,40'\,y = 26^0\,4'\,26''\,40'''$ vorzunehmen. Da $1^0 < x < 2^0$ oder $1^0\,40' < y < 2^0\,40'$ bekannt war, habe Leonardo versuchsweise $y_0 = 2^0$ gesetzt. Er erhielt $y_0^3 + 8^0\,40'y_0 = 25^0\,20'$ mit einem Fehler $f_0 = 44'\,26''\,40'''$ Nahm er als zweiten Näherungswert $y_1 = y_0 + k$ an, d. h. setzte er $y_1^3 + 8^0\,40'y_1 = 26^0\,4'\,26''\,40'''$ und zog davon $y_0^3 + 8^0\,40'y_0 = 25^0\,20'$ ab, so gelangte er zu $3ky_0^2 + 3k^2y_0 + k^3 + 8^0\,40'k = f_0$. Links war aber das erste Glied $3ky_0^2$ überwiegend und gab mit dem vierten allein berücksichtigt $k = \frac{f_0}{3y_0^2 + 8^0\,40'} = \frac{44'\,26''\,40'''}{20^0\,40'} \sim 2'$ nebst $y_1 = 2^0\,2'$. Nun sei y_1 in die Gleichung eingesetzt worden u. s. w. Wenn noch einige Vermuthungen zu Hilfe gezogen werden entsteht $y_4 = 2^0\,2'\,7''\,42'''\,33^{IV}\,4^{V}\,40^{VI}$ und daraus der von Leonardo angegebene Werth von x.

Wieder eine Aufgabe, welche Johann von Palermo im kaiserlichen Palaste in Pisa in Gegenwart Friedrichs II. Leonardo stellte, und zu welcher der Anlass in irgend anderen Textaufgaben gefunden werden mag, die in Leonardo's früheren Schriften durch Gleichungen gelöst wurden, ist die von den drei Männern, welche eine Geldsumme gemeinschaftlich besitzen[2]). Die drei Männer haben an die gemeinschaftliche Summe ein Eigenthumsrecht von $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Sie greifen jeder auf's Gerathewohl zu, legen dann der Erste $\frac{1}{2}$, der Zweite $\frac{1}{3}$, der Dritte $\frac{1}{6}$ des Ergriffenen wieder hin und theilen das so Zusammengelegte zu gleichen Theilen, wodurch jeder erhält, was ihm gebührt. Wie gross war die Summe, und wieviel hatte jeder zunächst genommen? Der dritte Theil der beim zweiten Zusammenlegen entstandenen Geldsumme heisse x (bei Leonardo *res*), die ganze ursprüngliche Summe s (bei Leonardo *tota comunis pecunia*). Da Jeder

---

[1]) J. P. Gram, Essai sur la restitution du calcul de Léonard de Pise sur l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ in dem *Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark,* vorgelegt am 13. Januar 1893 im Anschluss an eine Mittheilung gleichen Datums und ähnlicher Ueberschrift von H. G. Zeuthen. [2]) Leon. Pisano II, 234: *De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus.*

durch x sich zu seinem Guthaben $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{3}$, $\frac{s}{6}$ ergänzt, so hatten die drei Männer vorher $\frac{s}{2} - x$, $\frac{s}{3} - x$, $\frac{s}{6} - x$. Diese Summen waren entstanden, indem die gleichen Männer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ des zufällig Ergriffenen abgegeben, mithin $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ desselben zurückbehalten hatten. Sie ergriffen folglich $2\left(\frac{s}{2} - x\right) = s - 2x$, $\frac{3}{2}\left(\frac{s}{3} - x\right) = \frac{s - 3x}{2}$, $\frac{6}{5}\left(\frac{s}{6} - x\right) = \frac{s - 6x}{5}$ und da sie zusammen s an sich genommen hatten, so war $s = s - 2x + \frac{s - 3x}{2} + \frac{s - 6x}{5}$ oder $7s = 47x$. Dieser Bedingung genügt $s = 47$, $x = 7$, und als die von den Männern ergriffenen Summen erscheinen 33, 13, 1. Die Aufgabe ist nicht grade schwierig, aber die geschickte Auswahl der Unbekannten, welcher die Einfachheit der Auflösung zu verdanken ist, macht einen sehr angenehmen Eindruck.

Wie wir es aus dem Abacus gewöhnt sind, begnügt Leonardo sich selten oder nie mit einer einzigen Aufgabe einer gewissen Gattung, sondern er wählt andere und andere Spielarten, welche je zu neuen mitunter wichtigen Bemerkungen Anlass geben. So auch hier; wir verweilen jedoch nur bei zwei Sonderfällen, in welchen die eine Unbekannte einen negativen Werth annimmt[1]). Diese Aufgabe, sagt Leonardo bei der ersten, ist unlöslich, es sei denn, dass man zugebe, dass der Antheil des einen Mannes eine Schuld sei[2]), und nur wenig verschieden ist seine Aeusserung bei der zweiten Aufgabe, bei welcher er überdies andere Zahlenwerthe der vorkommenden Angaben bestimmt, deren Wahl lauter positive Wurzeln ergeben. Woher stammt Leonardo's Wissen von der Möglichkeit negativer Gleichungswurzeln? Da er selbst darüber schweigt, so ist man auf Vermuthungen angewiesen, wovon zwei, soviel wir sehen, zur Verfügung sind. Es wäre möglich, dass Leonardo auf seinen Reisen irgend einmal indischem Wissen begegnet wäre, indem ja die Inder (Bd. I, S. 580) negative Zahlen Schulden nannten. Es wäre auch möglich, dass Leonardo's bürgerlicher Beruf ihn selbständig zu dieser Auffassung leitete, die in der That für Jeden, der mit kaufmännischer Buchführung zu thun hatte, sehr nahe lag, während die Buchführung in Italien, in Südfrankreich, vielleicht auch in Spanien[3]) früh bekannt gewesen zu sein scheint.

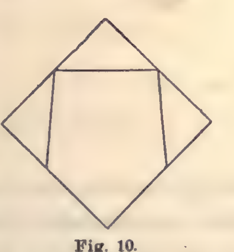
[1]) Leon. Pisano II, 238: *De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis* und pag. 242: *De quatuor hominibus bizantios habentibus.* [2]) *Hanc quidem questionem insolubilem esse monstrabo, nisi concedatur primum hominum habere debitum.* [3]) Kheil, Valentin Mennher und Antich Rocha (Prag 1898), S. 46—48.

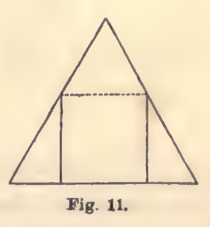
Ausser dem Liber quadratorum und dem Flos hat sich auch ein Brief an Meister Theodor[1]) erhalten, offenbar an die gleiche Persönlichkeit gerichtet, welche eine im Liber quadratorum erhaltene Aufgabe gestellt hat (S. 46), und den der Verfasser einer Chronik jener Zeit, der im Jahre 1200 in Padua geborene Rolandino, als Astrologen bezeichnet[2]). Der Brief behandelt in dem Zustande, in welchem er auf uns gekommen ist, Aufgaben sehr verschiedener Natur. Vielleicht müssen wir der Meinung[3]) uns anschliessen, hier sei einige Unordnung dadurch entstanden, dass Cardinal Raniero Capocci alle drei kleineren Schriften des Leonardo oder gar noch mehrere, besass, die auf einzelne Blattlagen geschrieben irgend einmal irgend wie durcheinander geriethen, worauf ein unvorsichtiger Abschreiber Alles copierte, wie es nun einmal lag. Sei dem nun wie da wolle, jedenfalls finden wir als erste Aufgabe die vom Vögelkaufe[4]). Es sollen für 30 Geldstücke 30 Vögel gekauft werden; es sollen dabei für ein Geldstück 3 Spatzen oder 2 wilde Tauben erhältlich sein, während eine zahme Taube 2 Geldstücke kostet. Leonardo nimmt an, man habe zuerst nur von den billigsten Vögeln eingekauft, mithin 30 Spatzen für 10 Geldstücke, und beabsichtigt nun Vertauschungen von Spatzen gegen Vögel der beiden anderen Arten unter Zahlung eines Aufgeldes von 20 Geldstücken vorzunehmen. Umtausch eines Spatzes gegen eine wilde Taube verlangt $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, gegen eine zahme Taube dagegen $2 - \frac{1}{3} = \frac{10}{6}$ Aufgeld, während die zur Verfügung stehende Summe $20 = \frac{120}{6}$ beträgt. Die Aufgabe hat sich mithin jetzt so weit verschoben, dass es auf die Zerlegung von 120 in die Summe der Producte von 10 in eine Unbekannte und von 1 in eine zweite Unbekannte ankommt, während die Summe der beiden Unbekannten unterhalb 30 liegen muss, da doch auch Spatzen noch vorhanden bleiben sollen. Es wird also verlangt $y + 10z = 120$ unter der weiteren Bedingung $y + z < 30$. Durch Subtraction der Ungleichung von der Gleichung folgt $9z > 90$, $z > 10$. Setzt man $z = 11$ in die Gleichung ein, so zeigt sich $y = 10$, während $z = 12$ bereits $y = 0$ zur Folge hat, also schon gegen die stillschweigende Annahme, es sollten Vögel von allen drei Gattungen gekauft werden, verstösst. Die einzige statthafte Möglichkeit ist daher die des An-

---

[1]) Leon. Pisano II, 247—252: *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris.* [2]) Bald. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 64 sqq. [3]) Genocchi l. c. pag. 233. [4]) Leon. Pisano II, 247: *De avibus emendis secundum proportionem datam.*

kaufes von 11 zahmen, 10 wilden Tauben und 9 Spatzen. Nicht der Umstand, dass die Aufgabe gelöst erscheint, sondern das vollbewusste methodische Verfahren zieht unsere Aufmerksamkeit auf sich. Er habe das Verfahren, sagt er[1]), als ein solches erfunden, welches zur Auflösung jeder beliebigen Mischungsaufgabe ausreiche, und er stelle dessen nähere Auseinandersetzung zu beliebiger Verfügung. So weit hatte er die Sache noch nicht geführt, als er (S. 19) im 11. Abschnitte des Abacus eine ganz ähnliche Aufgabe behandelte, wenn auch der Zusammenhang mit Mischungsaufgaben ihm damals schon vorschwebte. Leonardo hielt eben eine einmal begonnene Untersuchung mit Zähigkeit fest und suchte ihr immer neue Seiten abzugewinnen. Diesen Eindruck bekommen wir auch von einer im Wortlaute des Briefes sich nun anschliessenden geometrischen Aufgabe[2]). Bei unserem Berichte über die Praxis der Geometrie sind wir schweigend an einigen Aufgaben vorübergegangen, welche algebraisch behandelt wurden, nämlich durch Zurückführung auf eine quadratische Gleichung, deren Wurzel die Länge einer gesuchten Strecke maass. Wir beabsichtigen auch jetzt nicht, das dort Vermiedene ausführlich nachzuholen. Wir nennen nur zwei jener Aufgaben unter Beigabe erläuternder Figuren. Es soll (Fig. 10) in ein Quadrat und unter Benutzung einer Ecke desselben ein gleichseitiges Fünfeck eingezeichnet werden[3]). Es soll (Fig. 11) in ein gleichseitiges Dreieck unter Mitbenutzung eines Stückes der Grundlinie als Seite der neuen Figur ein Quadrat eingezeichnet werden[4]). Denkt man sich in diesem Quadrate die desshalb in der Figur nur punktirte Scheitellinie ausgelöscht, so hat man abermals ein gleichseitiges Fünfeck, diesmal mit zwei rechten Winkeln vor sich. Wieder um ein gleichseitiges Fünfeck handelt es sich an der angeführten Stelle des Briefes an Magister Theodorus. Es soll (Fig. 12) in einem gleichschenkligen Dreieck unter Mitbenutzung


Fig. 10.


Fig. 11.

---

[1]) Leon. Pisano II, 247: *praesentem modum inveni, per quem non solum similes questiones solvuntur, verum et omnes diversitates consolaminum monetarum* und pag. 249: *et sic possumus in similibus etiam et in consolamine monetarum, et bizantiorum operari; quod quandocumque vel placuerit dominationi vestrae liquidius declarabo.* [2]) Ebenda pag. 249: *De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum.* [3]) Ebenda pag. 214. [4]) Ebenda pag. 223.

der aus den Schenkeln des Dreiecks gebildeten Ecke desselben und eines Stückes von dessen Grundlinie hergestellt werden. Es ist $ab = ac = 10$, $bc = 12$, folglich die Höhe $ah = 8$. Nun sei x die gesuchte Fünfecksseite

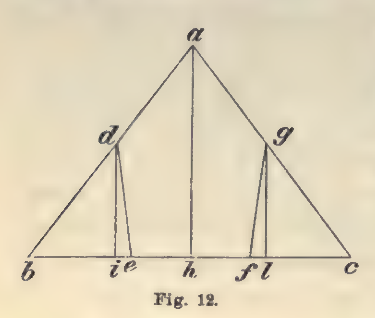


Fig. 12.

$$ad = de = ef = fg = ga,$$

so ist $db = 10 - x$ und wegen $ad : db = ah : di$ ist

$$di = \frac{(10-x)8}{10} = 8 - \frac{4}{5}x.$$

Andrerseits ist $ab : ad = hb : hi$, also $hi = \frac{6x}{10}$. Weil ferner $he = \frac{x}{2}$, so ist $ie = \frac{6x}{10} - \frac{x}{2} = \frac{x}{10}$. Endlich war $de = x$. Man kennt also die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks dei und kann zwischen ihnen die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes ansetzen:

$$de^2 = ie^2 + di^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{x^2}{100} + 64 - \frac{64}{5}x + \frac{16}{25}x^2,$$

welche sich in $\frac{7}{20}x^2 + \frac{64}{5}x = 64$ umwandelt, et sic reducta est questio ad unam ex regulis algebrae, und so ist die Aufgabe auf eine der algebraischen Gleichungsformen zurückgeführt. Leonardo rechnet nun den Werth von x unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen aus und findet für denselben $x = 4^0\, 27'\, 24''\, 40'''\, 50^{IV}$. Die allgemeine Auflösung der Aufgabe ist, sofern jeder der gleichen Schenkel a und die Grundlinie b heisst.

$$x = -\frac{4a^2 - b^2}{2b - a} + \frac{1}{2b - a}\sqrt{(a+b)(2a+b)(2a-b)(3a-b)}.$$

An die geometrisch-algebraische Aufgabe schliesst sich unter der Ueberschrift[1]): *Andere Art ähnliche Fragen zu beantworten* eine Aufgabe an, welche die Auflösung von fünf Gleichungen ersten Grades mit fünf Unbekannten verlangt, welche also unbedingt voraussetzt, dass vor ihr Aehnliches, jedenfalls aber nicht eine quadratische Gleichung stand, und daraus ist eben die obenerwähnte Folgerung von einer irgendwie entstandenen Durcheinanderwerfung von Blättern oder auch von einer jetzt nicht mehr auszufüllenden Lücke gezogen worden.

Wir haben am Schlusse des vorhergehenden Kapitels, nachdem wir über Leonardo's Abacus berichtet hatten, geglaubt unserer Be-

---

[1]) Leon. Pisano II, 250: *Modus alius solvendi similes questiones.*

wunderung Ausdruck geben zu dürfen. Fast möchten wir gegenwärtig bereuen, dass wir es thaten, denn mit welchen Worten sollen wir Leonardo jetzt rühmen, nachdem wir die Schriften kennen gelernt haben, welche ganz gewiss ihrem wesentlichen Inhalte nach als sein geistiges Eigenthum zu betrachten sind, mag er im Abacus, mag er in der Praxis der Geometrie noch so viel von Vorgängern entlehnt haben. Jetzt steht das zu fällende Urtheil unzweifelhaft fest. Leonardo war ein gewandter Rechner, ein feiner Geometer, ein geistreicher Algebraiker, wie es vor ihm nur Vereinzelte gab; er wusste die Algebra auf geometrische Fragen anzuwenden, wie kaum Abû'l Dschûd (Bd. I. S. 715) es verstand; er war endlich ein geradezu schöpferischer Zahlentheoretiker.

Ein glänzendes Meteor taucht er auf, wie ein Meteor verschwindet er! Wir haben allen Grund anzunehmen, die Abacusausarbeitung von 1202 habe die Erscheinung, die zweite Bearbeitung von 1228 das Verschwinden begleitet. Wir dürfen nicht vergessen, dass Friedrich II. grade 1228 seinen Kreuzzug antrat, dass in seiner Abwesenheit Bürgerkrieg in Italien wüthete, welcher auch nach Friedrichs Rückkehr bald da bald dort in neuen Flammen aufloderte. Schon möglich dass Leonardo, in der stets ghibellinischen Stadt Pisa geboren und selbst Ghibelline aus Neigung, in diesen Kämpfen unterging, falls er nicht den Kaiser in das heilige Land begleitete und dort umkam.

43. Kapitel.

Jordanus Nemorarius. Seine Arithmetica und der Algorithmus demonstratus.

Leonardo von Pisa war uns als eine der beiden Persönlichkeiten angekündigt, welche die Marksteine eines neuen Zeitalters für die mathematischen Wissenschaften bilden. Jordanus Nemorarius ist die andere. Auch er war ein aus seiner Zeit weit hervorragender Geist, aber dennoch unterbricht er weniger als Leonardo die Stetigkeit der mittelalterlichen Culturentwicklung.

Diese Entwicklung knüpfte sich der Regel nach an bestimmte Schulanstalten, zumeist an Klosterschulen, aus welchen da und dort Universitäten herauswuchsen[1]). Die Lehrer waren dementsprechend

---

[1]) Als Quellen dienten H. Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400 Bd. I (1885). — G. Kaufmann, Die Geschichte der deutschen Universitäten Bd. I (1888). — S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525 (1887, III. Bd. der *Monumenta*

ihrer Mehrzahl nach Ordensgeistliche, oder doch wenigstens Theologen, wenn auch an dem Vorhandensein einzelner, und darunter hochberühmter Laien nicht zu zweifeln ist. Abälard z. B., dessen Ehe mit Heloise feststehende Thatsache ist, kann, wie durch den Vollzug dieser Ehe bewiesen ist, unmöglich Kleriker gewesen sein. Aber selbst da, wo der Lehrer der Kirche nicht angehörte, bildete das Studium der Theologie den Gipfelpunkt der Studien überhaupt. Oberstes Ziel alles wissenschaftlichen Strebens war es, die Vollendung des Glaubens zu erreichen, die Umsetzung desselben in Erkenntniss. Als Mittel dazu galt ein folgerichtiges Schliessen, und dieses wieder sich anzueignen gab es nach mittelalterlicher Meinung kein vollkommneres Lehrbuch als die Schriften des Aristoteles. So entstand die Scholastik, wesentlich eine Kunst der Behandlung strittiger Fragen, auf deren praktische Bedeutung es ebensowenig ankam, als auf die thatsächliche Wahrheit oder Unwahrheit der aus den Schlüssen gezogenen Folgerungen, sofern nur die Schlüsse selbst keinen Anfechtungen aus dialektischen Gründen unterworfen waren.

Wir haben gesagt, die Universitäten seien der Regel nach aus Klosterschulen und ähnlichen von Geistlichen geleiteten Anstalten herausgewachsen, aber das war nicht ihre einzige Entstehungsweise. Eine andere war die, dass Berufslehrer sich irgendwo niederliessen, und dass um sie Schüler sich schaarten. Mit einiger Vorliebe mochten zu solchen Niederlassungen Orte gewählt werden, wo auch Schulen bereits bestanden, denn eine solche Nebenanstalt konnte damals dem neu auftretenden Lehrer nur Erleichterung, nicht Schwierigkeiten bereiten. Am Ende des XII. Jahrhunderts herrschte unbedingte Lehrfreiheit in dem Sinne, dass Jeder ohne irgend vorhergegangene Prüfung zum Lehren zugelassen werden musste. Kaum dass es möglich war, einen einmal in Thätigkeit befindlichen Lehrer auf Grund einer ihm erst zu beweisenden Unfähigkeit zu entfernen.

Wieder eine andere Entstehungsweise von Universitäten war die der eigentlichen Gründung. Gründer konnte der Papst sein, oder eine städtische Gemeinschaft, oder ein Fürst. So hat Friedrich II. 1224 eine Universität in Neapel gegründet[1]. Eine Frage, welche weiter oben schon hätte gestellt werden können, wenn wir nicht absichtlich deren Erörterung auf diesen Zusammenhang hätten aufsparen wollen, geht dahin, ob Leonardo von Pisa dieser in Neapel

Germaniae Paedagogica). — H. Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters (Programm der Kantonsschule in Zürich 1887, zugleich als Festschrift zur 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner).

[1]) Ed. Winkelmann, Ueber die ersten Staatsuniversitäten (Heidelberger Prorectoratsrede vom 22. November 1880)

errichteten Hochschule als Lehrer angehörte? In den Gewohnheiten späterer Zeit befangen ist man geneigt, wiewohl ausdrückliche Berichte fehlen, die Frage einfach zu bejahen. War es nicht selbstverständlich, dass Friedrich einen Lehrer sich nicht entgehen liess, der seiner Gründung zur höchsten Zierde gereichen musste? So denkt man heute, so dachte man nicht in der Zeit der alles beherrschenden Scholastik. Dem Universitätsstudium muss und musste immer eine gewisse Vorbereitung vorausgehen. Heute wird sie durch das Gymnasium vermittelt, damals war die Artistenfacultät, die unterste Facultät einer jeden Universität, mit dieser Aufgabe betraut, und sie vereinigte daher alle Schüler in sich, welche, nachdem sie durch die Artistenfacultät sich hindurchgearbeitet hatten, anderen und anderen Richtungen folgten. Jene vorbereitenden Kenntnisse waren die des Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialektik. Das Quadrivium dagegen, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie, wurde mit Ausnahme allenfalls der Musik, soweit sie dem Kirchengesang sich dienstbar erwies, aller Orten vernachlässigt. Wir werden gleich nachher sehen, wie selbst in Paris, am damaligen leitenden Hochsitze der Wissenschaft, diese Vernachlässigung sich actenmässig erweisen lässt. Nicht anders war es in Neapel. Das Schweigen der Berichte über eine Anstellung Leonardo's von Pisa ist also schwerlich anders zu verstehen, als dass Leonardo einer Anstalt nicht angehörte, an welcher für ihn kein Platz war. Was wir über Leonardo's meteorartiges Erscheinen und Verschwinden sagten, ist auch darin wahr, dass selbst für Italien eine Nachwirkung Leonardo's sich nicht eher als mehr als 200 Jahre nach seinem Tode mit Deutlichkeit erkennen lässt.

Wenn einzelne Gelehrte bald da bald dort nach eigener Willkür, oder berufen von Behörden, mitunter berufen von Studirenden sich niederliessen, so wissen wir auch von gemeinsamen Niederlassungen vollzogen von Angehörigen geistlicher Orden. Zwei Orden insbesondere sind hier zu nennen: die Dominikaner und die Franciskaner. Anstalten beider Mönchsorden waren in Deutschland vor Entstehung der Universitäten vorhanden. Köln, Regensburg, Magdeburg, Leipzig waren Sitze derselben. In Paris finden wir Dominikaner kurz nach der 1216 erfolgten Gründung des Ordens. Vollständig festen Fuss fassten sie, aber auch ihre Nebenbuler, die Franciskaner, in Paris, seitdem im Mai 1229 in Folge eines an Fastnacht entstandenen Streites die Universität zeitweilig geschlossen wurde. Es ist uns nicht unwahrscheinlich, dass bei den pariser Dominikanern oder Prädicatoren, wie der Orden eigentlich hiess, der Predigt und Lehre — *praedicationem et doctrinam* — als das Feld seiner Wirksamkeit bezeichnete, diejenigen Wissensgebiete gepflegt wurden,

welche die Universität in den zweiten Rang zurückstiess. Satzungen der pariser Universität aus dem Jahre 1215 schreiben ausdrücklich vor[1]), dass die Professoren die Bücher des Aristoteles über die ältere wie über die jüngere Dialektik in den Schulstunden ordentlich und nicht bloss cursorisch lesen sollten. Ordentlich sollten sie auch lesen die beiden Bücher des Priscian oder wenigstens eines derselben. An Feier- und Ferientagen (in festivis diebus) solle nicht gelesen werden, höchstens philosophische Schriften, Reden, Schriften über das Quadrivium, über Barbarismen, über Ethik, wenn man Lust dazu hat, und das vierte Buch der Topik. Die Bücher des Aristoteles über Metaphysik und Naturwissenschaften aber dürfen gar nicht gelesen werden. Das hier ausgesprochene Verbot einiger Schriften des Aristoteles ist nur erneuert aus einem Erlasse von 1210 und eine abermalige Bestätigung erfolgte 1231 für Paris. An anderen Orten war man duldsamer. In Toulouse war es seit 1233 gestattet öffentlich anzukündigen, dass auch die in Paris untersagten Bücher des Aristoteles gelesen werden würden. In Paris selbst aber traten 1254 die ehemals verbotenen Schriften in den Rahmen des regelmässigen Studienplanes ein[2]). Auch in diesem letzteren erweiterten Studienplane, der uns nebst der Stundenzahl, welche auf jede ordentliche Vorlesung zu verwenden ist, genau erhalten ist[3]), ist von Vorlesungen über Gegenstände des Quadrivium keine Rede. Sie waren nicht verboten, sie waren aber ebensowenig geboten. Sie konnten nach wie vor in der Ferienzeit der Universität Behandlung finden, als Lehrgegenstände untergeordneter Bedeutung. Damit stimmt vollständig die Klage Roger Bacon's aus der Mitte des XIII. Jahrhunderts überein[4]), die pariser Universität kümmere sich nicht um fünf Wissenszweige, welche doch vortrefflich und der Gottesgelehrsamkeit nahe verwandt seien, um fremde Sprachen, Mathematik, Perspective, Moralwissenschaft und Alchymie. Und trotzdem ist es eine Thatsache, dass von mathematischen Studien in Paris seit der Mitte des XII. Jahrhunderts wiederholt die Rede ist, dass z. B. in jener Zeit Johannes von Salisbury als seine Lehrer in Paris in Gegenständen des Quadriviums[5]) einen sonst unbekannten Hardeivinus Teutonicus und ferner Richardus Episcopus nennt, welcher letztere 1182 wahrscheinlich als Archidiacon in Constanz starb. Es ist eine Thatsache, dass in der Grabschrift des 1199 in

[1]) Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters S. 24 mit Berufung auf Bulaeus, *Historia Universitatis Parisiensis* III, 82. [2]) G. Kaufmann, Geschichte der deutschen Universitäten I, 94—95. [3]) Bulaeus, l. c. III, 280. [4]) *Opus minus* des Bacon, erwähnt bei Suter l. c. S. 18. [5]) Suter l. c. S. 18: *inaudita quaedam ad quadrivium pertinentia*

Paris verstorbenen Hugo Physicus ausdrücklich des von ihm im Quadrivium ertheilten Unterrichts[1]) gedacht ist. Damit ist also festgestellt, dass wenn nicht in ordentlicher, doch in ausserordentlicher Weise dafür gesorgt war, dass das immerhin vorhandene Bedürfniss nach Anleitung in den Fächern, welche damals die Mathematik ausmachten, Befriedigung fand.

Sollten dazu immer und ausschliesslich Ferienstunden gedient haben? Sollte nicht, was die Universität verschmähte, um so eifriger von den wettbewerbenden Anstalten geboten worden sein, vorausgesetzt, dass sich die richtigen Persönlichkeiten zur Ertheilung solchen Unterrichtes in diesen Anstalten fanden? Das war aber im ersten Viertel des XIII. Jahrhunderts bei den Dominikanern in Paris der Fall.

Domingo de Guzman, ein 1170 geborener Altcastilianer von hoher wissenschaftlicher Bildung, war Gründer des Ordens gewesen, der nach seinem Plane vornehmlich als Gegengewicht gegen die Ketzerei der Albigenser und verwandter Richtungen dienen sollte, welchen nichts mehr Vorschub leistete als der Mangel an Volksunterricht. Ueber den streng monarchisch gegliederten, in acht Provinzen eingetheilten Orden herrschte ein General mit durch päpstliche Bestätigung seiner Rechte fast unumschränkter Gewalt. Als Domingo, der erste General, 1221 zu Bologna starb, waren schon 60 Klöster seiner Regel unterthan. Es galt seine Ersetzung, und zum Nachfolger des Spaniers wählte man einen Deutschen. Jordanus von Sachsen[2]) war dem Orden erst 1220 in Paris beigetreten. Er gehörte nach einer Ueberlieferung dem Geschlechte der Grafen von Eberstein, nach einer anderen der Familie von Dach an. Er war nach einem Berichte in Borrentrick (gegenwärtig Borgentreich) bei Warburg im Paderbornschen geboren, einem Orte, der einstmals zur Diöcese Mainz gehörte; nach einem anderen Berichte stammt Jordanus aus der Herrschaft Dassel aus der Hildesheimer Diöcese. Wird der Geburtsort Borrentrick für den richtigen gehalten, so stand Jordanus' Wiege in den Wäldern des Eggegebirges, und daher rührt dann wohl der Beiname Jordanus Nemorarius, welcher neben Jordanus Saxo in Gebrauch war. Allerdings gebrauchten kirchliche

---

[1]) Suter l. c. S. 20 Note 5: *Quadrivium docuit.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIV, 501—503. — *Iordani Nemorarii de triangulis libri quatuor*, herausgegeben von Max Curtze als VI. Heft der Mittheilungen des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn (1887). Einleitung S. IV—V ein Brief von Denifle, der sich dagegen erklärt, in Jordanus Saxo und Jordanus Nemorarius dieselbe Persönlichkeit zu erkennen. — Die Papsturkunden Westfalens bis zum Jahre 1378 bearbeitet von Dr. Heinrich Finke (1888), Einleitung S. XXXII—XXXIII.

Quellen ausschliesslich den Namen Jordanus Saxo; weder im Generalarchiv des Ordens noch in den Briefen des Jordanus kommt jemals *Nemorarius* vor, welcher Beiname nur in Ueberschriften wissenschaftlicher Werke angetroffen wird. Aus diesem Grunde war es auch lange unbekannt und wird es noch heute von schätzbarer Seite in Abrede gestellt, dass beide Persönlichkeiten nur eine und dieselbe seien. Uns scheint ein schwerwiegender Beweisgrund dafür eine Stelle[1]) in der Chronik eines englischen Schriftstellers des XIV. Jahrhunderts, Nicolaus Trivet, welche von dem 1222 in Paris zum Ordensgenerale gewählten Jordanus deutlich aussagt, er habe in Paris eines grossen Namens in den weltlichen Wissenschaften, insbesondere in der Mathematik, sich erfreut und habe zwei äusserst nützliche Bücher geschrieben, das eine *De Ponderi*, das andere *De lineis datis*, und grade solche Ueberschriften kommen in Verbindung mit dem Verfassernamen Jordanus Nemorarius vor. Eine weitere Bestätigung giebt uns der Dominikaner Jacob von Soest[2]), der um 1420 eine Chronik seines Ordens verfasste und darin an zwei Stellen von dem Ordensgenerale Jordanus berichtet, er habe neben anderen Werken *geometricalia delicata* geschrieben. Die Thätigkeit des Ordens war, während Jordanus demselben vorstand, eine ganz gewaltige. Vier neue Provinzen, Dänemark, Polen, Griechenland, Palästina, wurden ihm eröffnet, an 60 neue Klöster gegründet. Die Beredsamkeit des Generals, die sich namentlich in den abwechselnd in Paris und in Bologna gehaltenen Fastenpredigten, aber auch in Predigten vor den Studirenden in Padua bewährte[3]), gewann über 1000 neue Mitglieder. In den Jahren 1228 und 1230 wurden dem Orden zwei Lehrkanzeln in Paris übertragen, um die sich allerdings ein fast 40 Jahre dauernder Streit erhob, die aber schliesslich dem Orden verblieben. Jordanus starb am 13. Februar 1237 auf der Rückreise aus dem heiligen Lande. Wir haben seiner Ordensthätigkeit genauer gedacht, weil dadurch die Bedeutsamkeit der ganzen Persönlichkeit — wenn deren nach der Annahme, welcher wir uns anschliessen, nur eine ist — um so deutlicher hervortritt. Man wird aus dieser Thätigkeit auch den Schluss ziehen dürfen, dass sie für wissenschaftliche Arbeiten wenig Raum liess, dass daher die mathematischen Schriften wohl schon vor 1222 entstanden sein werden und dem Verfasser den von Trivet gerühmten grossen Namen verschafft hatten. Ob er, wie wir oben leise andeuteten, vielleicht auch

[1]) Der Entdecker dieser Stelle war Fürst Bald. Boncompagni in Rom. [2]) Ueber Jacob von Soest vergl. Allgemeine deutsche Biographie XIII, 556; die hier wichtigen Stellen seiner Chronik sind bei Finke l. c. mitgetheilt. [3]) Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400. I, 282.

in Paris gelehrt hat, ja sogar ob Nemorarius und Saxo eine, ob zwei Personen waren, ist für die Würdigung der Schriften, zu welcher wir uns wenden müssen, ganz gleichgiltig. Nur die eine Bemerkung möchten wir hinzufügen, dass einer Lehrthätigkeit, wie wir sie vermuthen, nicht im Wege steht, dass es in den Satzungen des Dominikanerordens von 1228 heisst[1]): „Die Ordensmitglieder sollen in den Büchern heidnischer Philosophen nicht studiren ...; sie sollen auch die sogenannten freien Künste nicht erlernen, es sei denn, dass für einzelne Persönlichkeiten besondere Erlaubniss ertheilt worden sei.“ Wenn für irgend Einen eine solche Erlaubniss je ertheilt wurde, so muss es für Jordanus gewesen sein, abgesehen davon dass die Zeit, in welcher dieser lernte und auch die, in welcher er vielleicht selbst lehrte, um Jahre früher lag als jene Satzungen. Davon aber vollends, dass wer ausnahmsweise Mathematik zu erlernen die Erlaubniss erhielt, sie nicht weiter lehren dürfe, ist in den Satzungen gar nicht die Rede.

Zur Frage, ob Jordanus Nemorarius und Jordanus Saxo eine Persönlichkeit darstellen oder nicht, müssen wir auch einer gewissen Handschrift gedenken. Sie befindet sich zur Zeit in der Bibliothek des verstorbenen Lord Thomas Philipps in Cheltenham und führt dort die Nr. 16345. H. Schenkl[2]) beschreibt sie unter dieser Nummer als 4° m. S. XII (1170) und bezeichnet den Inhalt als Mathematici veteres. In dem Sammelbande, der mit der Astronomie des Alfraganus in der Uebersetzung des Johannes Hispaniensis abschliesst, befindet sich auch: *Jordani (Magistri), De Algorismo cum commento.* Wäre hier Jordanus Nemorarius gemeint, und wäre der ganze Band 1170 geschrieben, so müsste der Verfasser des Algorismus spätestens 1150 geboren sein und wäre im Todesjahre 1237 des Jordanus Saxo mindestens 87 Jahre alt gewesen, was mit einer Orientreise kaum in Einklang zu bringen ist. Jener Band wird aber auch von seinem Beschreiber als Libri 665 bezeichnet und ist unter dieser Nummer in dem Libri'schen Kataloge[3]) enthalten. Dort heisst es ausdrücklich, nur Alfraganus trage die Jahreszahl 1170, die früheren Bestandtheile des Bandes, und insbesondere der Algorismus des Jordanus, könnten sehr wohl später als Alfraganus niedergeschrieben sein. Damit wird die obige Schlussfolgerung auf das Geburtsjahr des Jordanus hinfällig. Ueberdies sind die Anfangsworte des Algorismus des Magister Jordanus von Libri erwähnt: *Numerorum sunt IX, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*

---

[1]) Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400. I, 719 Note 179.
[2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Historisch-philologische Classe (1893) XXVII, 55. [3]) Catalogue of the extraordinary collection of splendid manuscripts formed by M. Guglielmo Libri. London 1859. Nr. 665 pag. 145—148.

et est prima unitatis, und so beginnt weder die Arithmetik, noch der Algorithmus demonstratus des Jordanus Nemorarius, von welchem sogleich die Rede sein wird.

Ob unter den Schriften des Jordanus Nemorarius auch eine Optik war, ist mehr als nur zweifelhaft. Beschrieben ist sie niemals worden, nur der Titel De speculis, welchen eine Handschrift in der Bodleyanischen Bibliothek zu Oxford führen soll[1]), unterstützt die Annahme, während aus einer Amplonianischen Handschrift in Erfurt hervorgeht[2]), dass die sogenannte Optik des Jordanus nichts anderes als die Katoptrik des Euklid ist.

Eine astronomische Schrift Planisphaerium ist wiederholt im Drucke erschienen[3]). In ihr soll zum ersten Male in aller Strenge bewiesen sein, dass Kugelkreise sich wieder als Kreise auf einer Tangentialebene einer Kugel projiciren, sofern der Berührungspunkt der Projectionsebene und das Auge die entgegengesetzten Endpunkte eines und desselben Kugeldurchmessers sind.

Ferner ist ein Bruchstück einer ursprünglich aus vier Büchern bestehenden Mechanik unter dem Titel De ponderibus in 13 Lehrsätzen im Drucke erschienen[4]), allerdings, wie es scheint, mit ergänzenden Zusätzen des Herausgebers, der die kurzen gedrungenen Beweise des Jordanus, wie sie in einer thorner Handschrift[5]) erhalten sind, erweitern, beziehungsweise verwässern zu müssen glaubte.

Nannten wir diese Schriften nur im Vorübergehen, so müssen wir bei einer Arithmetik etwas verweilen, welche schon seit dem Ende des XV. Jahrhunderts im Drucke bekannt ist[6]). In 10 Büchern werden folgende Hauptgegenstände behandelt: 1. Allgemeine Zahleneigenschaften. 2. Von den Verhältnissen. 3. Von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen. 4. Von Zahlen, die in stetigem Verhältnisse zu einander stehen. 5. Von den zusammengesetzten Verhältnissen. 6. Von Quadratzahlen, Kubikzahlen und einander ähnlichen

---

[1]) Heilbronner, *Historia matheseos universae* (1742) S. 604. § 263 Nr. 14. — Chasles, *Aperçu hist.* 517 (deutsch 605). — Curtze im VI. Heft der Mittheilungen Coppern.-Vereins zu Thorn. Einleitung S. XI. [2]) Curtze brieflich. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 516 (deutsch 603—604) giebt Drucke von 1507, 1536, 1558 an. — Weidler, *Historia Astronomiae* (1741) pag. 276: *Iordanus Nemorarius demonstrationem astrolabii et planisphaerii lucubratus est editum Basileae cum Theonis commentariis in Aratum.* [4]) *Liber Iordani Nemorarii viri clarissimi de ponderibus propositiones XIII etc.* (1533), herausgegeben durch Peter Apianus. Vergl. Curtze im Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. XIII (1868) S. 91—92. [5]) Die Handschrift R. 4°. 2 *Problematum Euclidis explicatio* der königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn. [6]) Die beiden Ausgaben von 1496 und von 1514 besorgte Faber Stapulensis (*Lefèvre d'Étaples*) in Paris. Er veränderte den Text des Jordanus nicht, fügte aber neue Sätze mit eigenen Beweisen hinzu.

Zahlen. 7. Von graden und ungraden, vollkommenen, überschiessenden und mangelhaften Zahlen. 8. Von den vieleckigen und körperlichen Zahlen. 9. Von Gleichheit und Ungleichheit, vielfachen und anderen Verhältnissen unterworfenen Zahlen. 10. Vom arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel.

Keinem Kenner des griechischen Musterwerkes des Nikomachus wie der lateinischen Nachbildung des Boethius kann es entgehen, dass Jordanus nach der älteren Vorlage, und zwar nach der lateinischen gearbeitet hat, aber er hat doch gearbeitet. Weder die Reihenfolge, noch die Ausdrucksweise der einzelnen Sätze ist genau und unverändert beibehalten. Um nur zwei Beispiele hervorzuheben machen wir auf Folgendes aufmerksam. Boethius hat für Grundsätze den Namen Communes conceptiones entsprechend dem griechischen *κοιναὶ ἐννοίαι*. Jordanus hat ein dem griechischen *ἀξιώματα* nachgebildetes Wort Dignitates[1]), das gleiche Wort, welches in einer gleichfalls dem XIII. Jahrhunderte entstammenden lateinischen Uebersetzung des Alfarabi im gleichen Sinne gebraucht ist[2]). Boethius nennt die überschiessenden Zahlen numeros superfluos, Jordanus nennt sie abundantes, und sein Beispiel ist später massgebend geblieben. Numeri perfecti und deminuti sind Kunstausdrücke, in denen Beide übereinstimmen. Jordanus nennt mitunter, wenn auch nicht grade häufig, Boethius oder, wie er lieber sagt, den göttlichen Severinus als seinen Gewährsmann, noch seltener Euklid und Aristoteles. Irgend einem arabischen Namen sind wir nicht begegnet. Die wesentlichste Eigenthümlichkeit, die das Werk des Jordanus gradezu zu einem bahnbrechenden stempelt, ist die fortwährende Benutzung allgemeiner Buchstaben statt besonderer bestimmter Zahlen[3]). Wir haben Buchstaben statt der einzelnen Potenzen der Unbekannten bei Diophant, bei Arabern auftreten sehen. Wir waren in der Lage bei Aristoteles, bei Pappus auf Buchstaben hinzuweisen, die einen beliebigen Werth darstellten. Wir vermochten (S. 17) auch bei Leonardo ein vereinzeltes Vorkommen solcher Buchstabenanwendung nachzuweisen, aber es waren eben nur vereinzelte Vorkommen, während Jordanus diese Anwendung so sehr in Gewohnheit hat, dass fast nirgend neben den Buchstaben bestimmte Zahlen als Beispiele

---

[1]) Bei Ducange ist zwar *Dignitatio* = *ἀξίωμα* angegeben, aber nicht *Dignitas*. [2]) Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande II, 316. [3]) Vergl. Max Curtze in der Einleitung zu seiner Ausgabe des *Tractatus de numeris datis* in der Zeitschr. Math. Phys. (1891) XXXVI Histor.-liter. Abtlg. S. 1—3 ähnliche Gedanken wie die unsrigen, in deren Aeusserung unser verehrter Freund uns in selbständiger Weise zuvorgekommen ist, eine Uebereinstimmung, welche wohl zu Gunsten der Richtigkeit dieser Gedanken gedeutet werden mag.

anders als am Rande mitgeführt werden und niemals Zahlen ohne Buchstaben auftreten. Wir würden desshalb keinen Anstand nehmen, Jordanus den unmittelbaren Vater der späteren Buchstabenrechnung zu nennen, wenn nicht ein zweifacher Unterschied, eiu Zuwenig und ein Zuviel, dazu aufforderten anzuerkennen, dass es auch nach Jordanus noch erfinderischen Geistes bedurfte, um die Buchstabenrechnung der Wissenschaft als brauchbares Mittel an die Hand zu geben. Was Jordanus noch fehlte waren Symbole, die neben und mit den Buchstaben zur Anwendung gekommen wären. Er besass kein Gleichheitszeichen, kein Zeichen der Subtraction, der Multiplication, der Division. Einzig die Addition vermochte er ohne zwischengeschriebenes Wort anzudeuten, da für ihn die unmittelbare Aufeinanderfolge von Buchstaben z. B. abc als Ergebniss der Addition der durch diese Buchstaben dargestellten Zahlengrössen aufgefasst werden muss[1]). Aber dieser Mangel haftete noch Jahrhunderte lang den Versuchen einer allgemeinen Rechenkunst an. Weit empfindlicher ist für den heutigen Leser der Arithmetik des Jordanus das, was wir das Zuviel der Buchstabenanwendung bei ihm genannt haben. Die heutige Buchstabenrechnung vereinigt zwei Vorzüge: Allgemeinheit und Durchsichtigkeit. Wenn etwa $3 + 4 = 7$, $7 \times 5 = 35$, $35 + 5 = 40$, $40 : 4 = 10$, $10 - 3 = 7$ gerechnet wird, so ist eine ganz bestimmte Zahl 7 der Endpunkt dieser aus fünf Einzelrechnungen zusammengesetzten Gedankenfolge, und man weiss in der 7 die Bildung dieser Zahl nicht mehr zu erkennen. Wenn dagegen die Operationen so lauten $a + (a + 1) = 2a + 1$, $(2a + 1)(a + 2) = 2a^2 + 5a + 2$, $(2a^2 + 5a + 2) + (a + 2) = 2a^2 + 6a + 4$, $(2a^2 + 6a + 4) : (a + 1) = 2a + 4$, $(2a + 4) - a = a + 4$, so bleibt nicht nur Alles richtig, wenn auch für a eine andere Zahl als 3 eingesetzt wird, sondern es ist auch $a + 4$ als Endergebniss zu jenem unbestimmt gelassenen a in deutlich erkennbarer Beziehung. Das aber hört auf, sobald in den Einzeloperationen immer neue und neue Buchstabenbezeichnungen eingeführt werden müssen; eine Nothwendigkeit allerdings, die aus den mangelnden Operationszeichen rettungslos sich ergiebt, die aber darum nicht weniger verdunkelnd, also schädlich einwirkt. Lassen wir den 12. Satz des VI. Buches uns als Beispiel dienen[2]): Drei Quadrate zu finden, deren in fortlaufender Reihe gebildete Unterschiede gleich seien, eine Aufgabe also, welche weniger schwierig ist als die Leonardo's von Pisa, welcher die Differenz zum voraus als

[1]) Bei Leonardo von Pisa hatte eine solche Buchstabenfolge (S. 17) multiplicative Bedeutung. [2]) *Quadratos tres investigare, quorum continue sumptorum differentia sint aequales.* Am Rande sind neben anderen Zahlen auch 1, 25, 49 angegeben.

gegeben annahm, welche aber doch dem gleichen zahlentheoretischen Gedankenkreise angehört. Die Lösung des Jordanus ist folgende. Es sei b eine ganz beliebige, c eine grade Zahl. Dann sei ferner $b+c=a$, $a+b=d$, $ca=h$, $cb=k$, $ad=e$, $bd=f$. Man zerlege e in drei ungleiche Theile $e=l+m+g$. Setzt man $g=f$, so darf man $l=h$, $m=k$ setzen. Wird endlich $\frac{l+g}{2}=v$, $g-v=r$, $e-v=q$ gesetzt, so sind r^2, v^2, q^2 die gesuchten Quadrate. Wer kann heute noch dieser Rechnung folgen, ohne sie in andere den Gang der Operationen erkennbar machende Buchstabenverbindungen umzusetzen, bis das Schlussergebniss $r=b^2-\frac{c^2}{2}$, $v=b^2+bc+\frac{c^2}{2}$, $q=b^2+2bc+\frac{c^2}{2}$ nach erfolgter Quadrirung die Richtigkeit der Auflösung erkennen lässt einschliesslich der Nothwendigkeit für c eine grade Zahl zu wählen, wenn man ganzzahlige Quadrate wünscht? Nicht ohne Interesse dürfte es sein, dass an die genannte Aufgabe die weitere sich anschliesst, eine Quadratzahl zu finden, welche zu einer gegebenen Quadratzahl addirt wieder eine Quadratzahl liefere, also mit anderen Worten ein pythagoräisches Dreieck zu bilden, dessen eine Kathete gegeben ist. Wir finden das Interesse nämlich darin, dass hier die Reihenfolge der Aufgaben die umgekehrte ist wie bei Diophant, bei den Arabern, bei Leonardo von Pisa. Sie alle nahmen in mehr oder weniger ausgesprochener Weise das pythagoräische Dreieck zum Ausgangspunkte, um zu einer arithmetischen Progression von Quadratzahlen zu gelangen. Jordanus ist der Einzige, der den entgegengesetzten Weg einschlug.

Genau denselben Charakter wie die Arithmetik trägt eine Schrift, welche unter Anderen in einer Basler Sammelhandschrift[1]) aus der Mitte des XIV. Jahrhunderts neben anderen Schriften des Jordanus sich erhalten hat, und welche desshalb mit an Gewissheit streifender Wahrscheinlichkeit dem Jordanus zugewiesen worden ist[2]). Wir meinen den 1534 bei dem bekannten Drucker Petrejus in Nürnberg erschienenen Algorithmus demonstratus. Der Herausgeber Johannes Schöner berichtet in der Vorrede[3]), ihm stehe ein aus

[1]) Die oftgenannte Handschrift F II, 33 der Basler Stadtbibliothek. [2]) Jordanus als Verfasser erkannt zu haben ist das Verdienst von H. P. Treutlein. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. (1879) XXIV Supplementheft S. 132. [3]) Vorrede pag. 4: *Incidi nuper in libellum . . . exaratum max. et doctiss. viri Regimontani divina manu, quem in Vienensi quapiam bibliotheca audio asservari hoc titulo: Algorithmus demonstratus incerti autoris, unde suspicor hoc exemplum fuisse descriptum.* Der Algorithmus demonstratus selbst besteht aus 57 nicht mit Seitenzahlen versehenen Druckseiten. Unsere Seitenangaben im Folgenden beruhen auf eigener Zählung, wobei die 4 Seiten Vorrede nicht mitgezählt wurden.

der Feder des **Regiomontanus** geflossener Text zur Verfügung, welchen dieser wahrscheinlich aus einer in Wien befindlichen Handschrift abgeschrieben habe. Diese unzweifelhaft richtige Angabe hat aber nicht zu verhindern vermocht, dass man die längste Zeit nur daran sich hielt, dass das dem Drucker zu Grunde liegende Manuscript von Regiomontanus geschrieben war, und dass man ihn, den Schreiber, auch für den Verfasser hielt, jedenfalls ein glänzendes Zeugniss für die Schrift selbst, wie wir im Verlaufe dieses Bandes erkennen werden. Vereinigen wir die Thatsache, dass Regiomontanus den Algorithmus demonstratus abschrieb, mit der anderen nicht minder verbürgten, dass er eine von ihm sehr geschätzte andere Schrift des Jordanus, welche uns im folgenden Kapitel genau bekannt werden wird, herauszugeben beabsichtigte[1]), so kann man vielleicht darin eine Unterstützung der hier festgehaltenen Ansicht von dem Ursprunge des Algorithmus demonstratus finden. Eine unmittelbare Bestätigung des Jordanus als Verfasser wird uns endlich im 69. Kapitel begegnen, wenn wir in unserer Geschichte an den Schluss des XVI. Jahrhunderts gelangt sein werden. Jordanus also setzt seinen Lesern zunächst das dekadische Zahlensystem mit seinen zehn Zeichen auseinander, wobei die Null *cifra* oder Kreis (*circulus*) oder Zeichen für Nichts (*figura nihili*) genannt wird. Er unterscheidet nicht bloss im mittelalterlicher Weise Fingerzahlen (*digiti*) von Gelenkzahlen (*articuli*), sondern auch Gelenkzahlen verschiedener Ordnung, wir würden heute sagen neben den Zehnern die Hunderter, Tausender u. s. w.[2]). Die Zahlen werden dann addirt, von einander subtrahirt. Wo bei der Subtraction das Borgen einer Einheit höheren Ranges nöthig fällt, wird die nächste Ziffer des Minuendus um dieselbe verkleinert[3]). Als besonders behandelte Aufgaben folgen die **Verdoppelung** und die **Halbirung** einer Zahl[4]). Bei der Multiplication ist als erste Regel ausgesprochen, dass das Product f zweier Fingerzahlen a und b entstehe, wenn man von g als dem 10fachen von a die Zahl d abziehe, welche als c-faches von a gebildet ist, während c selbst den Ueberschuss der 10 über b bedeutet[5]). Man wird darin die complementäre Regel $a \cdot b = 10a - (10 - b) \cdot a$ erkennen, welche zwar mit den ähnlichen Regeln, die im I. Bande wiederholt zur Sprache kamen, nicht genau übereinstimmt, ihnen aber begrifflich sehr nahe steht. Weitere Regeln über Multiplication von Fingerzahlen mit Gelenkzahlen, von Gelenkzahlen unter einander schliessen sich an, bis zu-

---

[1]) Treutlein l. c. S. 127 Note und S. 128. [2]) *Algor. demonst.* pag. 4. [3]) Ebenda pag. 6. [4]) Ebenda pag. 7: *Quomodo duplatio numeri facienda sit docere. Datum numerum, si fieri potest, dimidiare sit intentio.* [5]) Ebenda pag. 8.

letzt erklärt wird[1]), man könne unmöglich alle Fälle in Kürze erschöpfen, ein vorsichtiger Rechner werde aber nach Art der gegebenen Muster jedes andere Beispiel bilden können. Die Division wird durch mancherlei Vorübungen eingeleitet, zuletzt in der Form gelehrt[2]), welche künftig immer durch den Namen Ueberwärtsdividiren[3]) bezeichnet werden soll. Der Divisor steht bei diesem Verfahren unter dem Dividenden und über diesem kommt der Quotient zu stehen, während der Dividend selbst durch Abziehen der Theilproducte fortwährend verändert wird. Die Anordnung ist also verschieden von derjenigen, welche Leonardo von Pisa (S. 11) gelehrt hat. Multiplication und Division, heisst es im Anschlusse an die Regel, dienen sich gegenseitig als Probe[4]), dagegen ist von einer Neunerprobe oder dergleichen nirgend die Rede. Es folgt die Bildung der Quadratzahlen[5]) nach der Regel

$$(a+b+c+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+\cdots+2bc+\cdots$$

und unter Hervorhebung des Satzes, dass das Quadrat höchstens aus doppelt so viel Ziffern als die einfache Zahl bestehen könne, dann die Ausziehung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen[6]), sei es dass dieselbe genau möglich sei oder auch nicht. Im letzteren Falle wird freilich die Genauigkeit nicht über die ganzzahlige Annäherung hinausgetrieben. Einigermassen überraschend kommt unmittelbar nach der Quadratwurzelausziehung der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren[7]) $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b$, nach diesem die Bildung von Kubikzahlen mit höchstens dreifacher Ziffernzahl von der der einfachen Zahl[8]) und die Ausziehung der Kubikwurzel[9]) in gleicher Annäherungsbeschränkung wie weiter oben die der Quadratwurzel.

Auf $25\frac{1}{2}$ Seiten ist sonach das Rechnen mit ganzen Zahlen erledigt und Jordanus geht zum Bruchrechnen über. Sexagesimalbrüche (minutiae philosophicae oder auch phisicae) werden von gewöhnlichen Brüchen (minutiae vulgares) unterschieden[10]). Gewöhnliche Brüche werden so geschrieben, dass ohne trennenden Bruchstrich der Zähler (numerans) über dem Nenner (denominans) steht, z. B. $\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{4}$. Wo dagegen im fortlaufenden Texte allgemeine Buchstaben gebraucht sind, stehen dieselben einfach neben einander, also ab für $\frac{a}{b}$. Bei

[1]) *Algor. demonstr.* pag. 12. [2]) Ebenda pag. 18. [3]) Wir lehnen uns in der Anwendung dieses Wortes an Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart (1888) S. 78, § 46 und häufiger. Wir citiren dieses Werk künftig als Unger. [4]) *Algor. demonstr.* pag. 18: *Mutuo se probant multiplicandi et dividendi operationes.* [5]) Ebenda pag 19. [6]) Ebenda pag. 20—22. [7]) Ebenda pag. 22. [8]) Ebenda pag. 23—24. [9]) Ebenda pag. 25. [10]) Ebenda pag. 27.

Sexagesimalbrüchen wird der Nenner nie geschrieben, weil es gewiss ist, dass 60 die Benennung liefert. Man muss bei ihrer Anschreibung (in earum figuratione) auf die Stelle achten. Die erste Stelle ist die der Ganzen, die zweite die der Minuten, die dritte die der Sekunden u. s. w. Die Aufgabe, zwei Brüche auf gemeinsamen Nenner zu bringen[1]), führt wieder zum Addiren und Subtrahiren, zum Verdoppeln und Halbiren der Brüche. Brüche multiplicirt man durch Vervielfachung von Zähler mit Zähler und von Nenner mit Nenner. Die Multiplication von Sexagesimalbrüchen ist mit Rücksicht auf die Benennung des Productes etwas weitläufiger behandelt. Die Ableitung der Divisionsregel[2]) gewöhnlicher Brüche verdient hervorgehoben zu werden. Entsprechend der Multiplicationsregel wäre die einfachste Regel die, man solle Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner dividiren. Da das aber nicht immer ohne Weiteres angeht, so soll man den Dividenden zuerst erweitern, indem man ihn im Zähler und Nenner mit Zähler und Nenner des Divisors vervielfacht. Also

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{cab}{dab} : \frac{a}{b} = \frac{cab:a}{dab:b} = \frac{cb}{da}.$$

Dabei kommt auch das Kürzen von Brüchen in Betracht, welches z. B. so ausgeführt wird[3]), dass man den Bruch vorher durch eine solche Zahl erweitert, welche sodann das Kürzen durch den früheren Nenner gestattet: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{ad:b}{d}\cdot$ Das Dividiren von Sexagesimalbrüchen wird besonders gelehrt[4]). Beim Wurzelausziehen aus Brüchen, sei es Quadrat- oder Kubikwurzelausziehung, wird von der bei Jordanus besonders beliebten Erweiterung Gebrauch gemacht[5]), d. h. die Wurzelausziehung aus dem Nenner wird so ermöglicht und dann die Wurzelausziehung aus dem Zähler bis zu dem Grade von Genauigkeit durchgeführt, den man früher beim Rechnen mit ganzen Zahlen kennen gelernt hatte. Dass auf das Wurzelausziehen aus Sexagesimalbrüchen ausführlicher eingegangen wird, ist selbstverständlich. Für künftige Rückbeziehung bemerken wir, dass im ganzen Algorithmus demonstratus die Sexagesimalbrüche stets nur die Rolle einer besonderen Gattung von Brüchen, von fortlaufend kleiner werdenden Unterabtheilnngen einer Einheit spielen; von der Theilung des Kreises nach Graden u. s. w. ist keine Rede. *Algorithmi demonstrati finis* heisst es auf der 54. Seite, aber ein Anhang über Proportionen füllt noch weitere drei Seiten. Er handelt zuerst von dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel zweier

---

[1]) *Algor. demonstr.* pag. 28—29. [2]) Ebenda pag. 33 flg. [3]) Ebenda pag. 38. [4]) Ebenda pag. 39: *Modum philosophice dividendi pertractare.* [5]) Ebenda pag. 43.

Zahlen, dann von den 18 Veränderungen, welche vorgenommen werden können, wenn, wie es in einem Satze des ptolemäischen Almagestes der Fall sei, von sechs Grössen zwei sich verhalten wie die vier anderen im zusammengesetzten Verhältnisse[1]). Es sind, wie sofort einleuchtet, die 18 Combinationen der Regula katta (S. 16), welche hier einzeln auseinandergesetzt sind. Von dem Ahmed Sohn des Josephus ist dabei ebensowenig die Rede, als irgend einmal im Algorithmus demonstratus sei es ein bestimmter Araber, sei es Araber im Allgemeinen Erwähnung finden. Wir kommen auf die geschichtlich sehr bedeutsame Ursprungsfrage noch zurück, wenn wir erst alle Schriften des Jordanus kennen gelernt haben.

44. Kapitel.

Jordanus Nemorarius: De numeris datis. De triangulis.

Die dem Inhalte nach der Arithmetik und dem Algorithmus demonstratus nächststehende Schrift führt den Namen De numeris datis, in manchen Handschriften wohl auch De lineis datis[2]). Sie war es, mit welcher, wie im vorigen Kapitel erwähnt worden ist, in der Mitte des XV. Jahrhunderts Regiomontanus, mit welcher aber auch ein starkes Jahrhundert später Maurolycus von Messina bekannt geworden ist. Beide Gelehrte, deren Urtheilsfähigkeit sehr hoch zu stellen ist, beabsichtigten die Herausgabe des Werkes[3]), die wohl nur deshalb unterblieb, weil ähnliche Absichten für allzuviele Werke des Alterthums und des Mittelalters daneben bestanden, als dass die Arbeitskraft zweier Männer zur Ausführung hätte ausreichen können. Die Schrift von den gegebenen Zahlen ist

---

[1]) *Ex quadam demonstratione Ptolemaei in Almagesti, positis sex quantitatibus quibuscunque, ubi proportio duarum ex quatuor constat reliquarum proportionibus, sumi possunt coniugationes utiles et modi communes ex uno eorum provenientes, et sunt omnes 18.* [2]) Chasles, *Aperçu hist.* kennt diese Schrift noch nicht; dagegen hat Chasles sich 1841 eingehender mit ihr beschäftigt. Compt. Rend. XIII, 506 und 520. H. Treutlein hat den Text aus der Basler Handschrift F II, 33 in der Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 135—166 unter Vorausschickung einer Einleitung S. 127—135 zum Abdrucke gebracht. Eine gereinigte Ausgabe veranstaltete H. Max Curtze unter Benutzung der Dresdner Handschrift C 80 in der Zeitschr. Math. Phys. (1891) XXXVI Histor.-liter. Abthlg. S. 1—23, 41—63, 81—95, 121—138. Eine werthvolle Einleitung zu dieser neuesten Ausgabe ist auf S. 1—5 zu finden. Wir citiren ausschliesslich die neueste Ausgabe als Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. mit nachfolgender Seitenzahl. [3]) Treutlein in Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 127—128.

in vier Bücher eingetheilt, von welchem das erste 29, das zweite 28, das dritte 23, das vierte 35 Aufgaben behandelt.

Dem 1. Buche könnte als Ueberschrift dienen: Wenn zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben sind, so sind die Unbekannten selbst gegeben. Es sind zu dem Ende die verschiedensten Einzelfälle behandelt. Bald ist Summe und Product der Unbekannten gegeben, bald Summe und Quadratsumme; dann ist wieder Differenz und Product gegeben, Differenz und Quadratsumme, Summe der einfachen Unbekannten und ihre Quadratsumme vermehrt um das Product von Summe und Differenz u. s. w. Zwei Aufgaben unterbrechen, die eine wirklich, die andere scheinbar, die Gleichförmigkeit des Inhaltes. Die 2. Aufgabe[1]) lehrt beliebig viele (quotlibet) Theile einer gegebenen Summe kennen, wenn die Differenzen je zweier aufeinander folgender Theile gegeben werden. Ist a die Summe und sind b, c, d, e die beispielsweise angenommenen vier Theile, deren Unterschiede Jordanus $b - e = f$, $c - e = g$, $d - e = h$ nennt, indem e die kleinste unter den gesuchten Zahlen sein soll, so ist $b + c + d = f + g + h + 3e$, also auch $a (= b + c + d + e) = f + g + h + 4e$, $e = \frac{a - f - g - h}{4}$, und nun sind auch die Zahlen $b = e + f$, $c = e + g$, $d = e + h$ bekannt. Hier ist von quadratischen Gleichungen nicht die Rede. Die die Auffindung von n Unbekannten aus ebensovielen Gleichungen ersten Grades bezweckende Aufgabe erinnert, wie sehr richtig bemerkt worden ist[2]), an das Epanthem des Thymaridas, beziehungsweise an verwandte indische Aufgaben (Bd. I, S. 148 und 584). Die 7. Aufgabe[3]) frägt nach einer Zahl, deren Product in die aus ihr selbst und einer bekannten Zahl gebildete Summe gegeben ist. Hier scheint nur $a(a + b) = d$ aufzulösen, wenn wir der gleichen Buchstaben wie Jordanus uns bedienen wollen, also die einzige Unbekannte a aus der quadratischen Gleichung $a^2 + ba = d$ zu suchen. Jordanus bemerkt aber, es sei b der Unterschied von $a + b$ und a; ihm ist folglich jetzt Unterschied b und Product d zweier Unbekannten bekannt und damit die Aufgabe auf einen Fall quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückgeführt. Er verfährt dann, wie folgt: Nach einander wird $4a(a + b) = 4d$, $b^2 = b^2$ gebildet, und beide Gleichungen addirt man und findet $(2a + b)^2 = 4d + b^2$. Folglich ist $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4d + b^2} - b\right)$. Auch hier ist die werthvolle Bemerkung gemacht worden[4]), die Vervielfältigung von $a(a + b) = d$ mit 4 erinnere an das Verfahren orien-

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 6—7. [2]) Ebenda S. 3—4. [3]) Ebenda S. 9. [4]) Ebenda S. 4.

talischer Mathematiker. In der That wussten Inder so eine Bruchrechnung zu vermeiden, wenn der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten in einer quadratischen Gleichung ungrad war (Bd. I, S. 585). Von den übrigen Aufgaben des 1. Buches nennen wir die 19., in welcher zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrem Quotienten ermittelt werden sollen[1]). Jordanus nennt die beiden Zahlen a und b. Man kennt $\frac{a}{b} = c$, also auch $c + 1 = d = \frac{a+b}{b}$. Daraus folgt, dass $b \cdot d$ die gegebene Summe, b der Quotient der gegebenen Summe durch d sein muss; wie man dann a finde, hält Jordanus offenbar für so ersichtlich, dass er gar nicht davon redet. Die 29. und letzte Aufgabe[2]) des 1. Buches ist dadurch bemerkenswerth, dass in ihr eine irrationale Quadratwurzel $\sqrt{500}$ mit dem Näherungswerthe $22\frac{1}{3}$ auftritt, ohne dass gesagt wäre, wie derselbe erhalten wurde (cujus extrahatur radix ad proximum et erit XXII et tercia). Möglicherweise rechnete Jordanus $\sqrt{500} = \frac{1}{3}\sqrt{4500} \sim \frac{67}{3} = 22\frac{1}{3}$. An anderen Stellen des 1. Buches sind irrationale Lösungen einfach nicht in Betracht gezogen[3]). An zwei Stellen, nämlich in der 5. und in der 8. Aufgabe[4]), verweist Jordanus auf Sätze des ersten Buches seiner Arithmetik, welche er zuerst Arismetica Iordani, dann Arismetica schlechtweg nennt.

Das 2. Buch beginnt mit der Bemerkung, dass wenn aus einer Proportion von vier Zahlen drei derselben gegeben würden, auch die vierte gegeben sei und wendet dann Umwandlungen von Proportionen, wie sie den Griechen vielfach dienten und ihnen die eigentliche Algebra ersetzen mussten, wie aber auch Jordanus im zweiten Buche seiner Arithmetik sie lehrte, zur Auflösung von bestimmten Aufgaben ersten Grades bald mit zwei, bald mit mehreren Unbekannten an. Wählen wir die 20. Aufgabe[5]) einmal heraus. Drei Unbekannte a, b, c stehen in Verhältnissen zu einander und zu bekannten Zahlen, welche in den Gleichungen

$$a + 6 = 1\frac{2}{3}b$$

$$b + 4 = 2c$$

$$c + 2 = \frac{5}{7}a$$

ausgedrückt sind. Nun ist $1\frac{2}{3}$ mal 4 gleich $6\frac{2}{3}$, also

$$a + 6 + 6\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}(b + 4) = 1\frac{2}{3}(2c) = 3\frac{1}{3}c.$$

---

1) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 16—17. 2) Ebenda S. 22—23. 3) Ebenda S. 4 und 15. 4) Ebenda S. 4, 8 und 10. 5) Ebenda S. 51—52.

Ferner ist $3\frac{1}{3}$ mal 2 gleich $6\frac{2}{3}$, also

$$a + 6 + 6\frac{2}{3} + 6\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}(c + 2) = 3\frac{1}{3}\left(\frac{5}{7}a\right)$$

oder

$$a + 19\frac{1}{3} = \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}\right)a, \quad 19\frac{1}{3} = \left(1 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}\right)a$$

und $a = 14$, worauf $b = 12$, $c = 8$ folgen. Ganz eigenthümlich ist dabei das Auftreten der an die alten Stammbrüche erinnernden Vereinigung von $2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}$. Statt ihrer würde in alten Zeiten unfehlbar $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$ geschrieben worden sein. Jordanus aber stand dem Grundgedanken der Zerlegung in Stammbrüche wohl einigermassen fremd gegenüber, wie aus seiner Benutzung gewöhnlicher Bruchformen (z. B. in der dritten Gleichung dieser Aufgabe $\frac{5}{7}$ und nicht $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$) hervorgeht, und dürfte hier so gerechnet haben: Um $3\frac{1}{3}$ mal $\frac{5}{7}$ zu bilden, nimmt man zunächst $3 \cdot \frac{5}{7} = 2 + \frac{1}{7}$, dann $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21}$, also $3\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{21}$. In diesem 2. Buche werden wiederholte Anwendungen von der Regel des einfachen falschen Ansatzes[1]) gemacht. Sie gestaltet sich am bequemsten in der 2. Aufgabe, wo man die Zahl sucht, deren $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{60}$ zusammen $26\frac{2}{3}$ geben sollen. Wäre 60 die Zahl, so käme $\frac{60}{4} + \frac{60}{60} = 16$, folglich ist 60 mit $26\frac{2}{3}$ zu vervielfachen und das Product 1600 durch 16 zu dividiren, wodurch 100 erscheint. Weit verwickelter ist die Anwendung des falschen Ansatzes in der 27. und 28. Aufgabe, wobei namentlich auch der Hinweis darauf, dass Jordanus erklärt[2]), er bediene sich einer arabischen Methode, nicht unterbleiben darf.

Wir gehen zu dem 3. Buche über. Es handelt im Ganzen auch von Proportionen und daraus gebildeten Aufgaben mit mehreren Unbekannten; aber es unterscheidet sich vom 2. Buche dadurch, dass hier fast fortwährend Quadratwurzelausziehungen nöthig fallen, die

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 41—42 und 61—63. [2]) *Opus autem Arabum in partibus tantum consistit estque huiusmodi* heisst es in 27. und dann in 28. (in welcher es sich um eine zweite Auflösung von 26. handelt) *et hoc manifeste docet in opere partium quo utuntur Arabes.*

dort nie vorkommen. Im 3. Buche selbst kann man füglich zwei Abschnitte unterscheiden. Die Aufgaben 1 bis 13 handeln von stetigen geometrischen Proportionen mit nur drei von einander verschiedenen Zahlen, die Aufgaben 14 bis 21 von nicht stetigen Proportionen mit vier von einander verschiedenen Zahlen. Die 22. und 23. Aufgabe schliessen sich leichter der ersten als der zweiten hier hervorgehobenen Gruppe an, und schienen nicht alle Handschriften die gleiche Anordnung aufzuweisen, so wäre man versucht anzunehmen, es sei hier etwas in Unordnung gerathen, und die 22. und 23. Aufgabe hätten ursprünglich hinter der 13. und vor der 14. gestanden. Auch hier wollen wir einige Beispiele mittheilen. Die 9. Aufgabe[1]) spricht aus, man kenne die Glieder a, b, c einer stetigen geometrischen Proportion $a:b=b:c$, sofern das 4. Glied und die Summe der 3 ersten gegeben sind. Man kennt nämlich mit c auch $c^2=d$. Sei ferner $ca=b^2=e$, so ist $c(a+b+b)=e+f+g$, indem $f+g$ statt $2bc$ gesetzt ist. Wird ca durch b^2 ersetzt und $c^2=d$ hinzugefügt, so ist $b^2+2bc+c^2=d+e+f+g$ bekannt, da ja $c+f+g$ das c-fache der Summe der 3 ersten Glieder ist. Endlich ist $b=\sqrt{d+e+f+g}-c$ und $a=(a+b+b)-2b$. Die Aufgaben 12 und 13 gehören zusammen[2]). Von den Gliedern a, b, c einer stetigen geometrischen Proportion $a:b=b:c$ ist die Summe $a+c$ der beiden äusseren Glieder und $b+c$ beziehungsweise $a+b$ gegeben, wobei angenommen wird, es sei $a>b>c$. Die erstere Aufgabe hat nur eine, die zweite zwei Auflösungen. Aus $a+c=34$, $b+c=24$ folgt $a=25$, $b=15$, $c=9$; aus $a+c=25$, $a+b=28$ folgt dagegen ebensowohl $a=24\frac{1}{2}$, $b=3\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$ als auch $a=16$, $b=12$, $c=9$. Natürlich ist der Grund in dem Vorhandensein von nur einer, beziehungsweise von zwei positiven Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu finden. In der 19. Aufgabe[3]) soll die viergliedrige Proportion $a:b=c:d$ ermittelt werden, während $a+d$, $b+c$ und $\frac{a}{c}$ gegeben sind. Da aus der Proportion die Folgerung $\frac{a}{c}=\frac{a+b}{c+d}$ sich ergiebt und $(a+d)+(b+c)=(a+b)+(c+d)$ ist, so kennt man Summe und Quotient von $a+b$ und $c+d$, mithin beide Grössen selbst. Dann kennt man weiter $(a+b)-(a+d)=b-d$ und $(a+d)-(c+d)=a-c$, also auch $\frac{a-c}{b-d}$. Aus der anfänglichen Proportion weiss man aber $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ und

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 85. [2]) Ebenda S. 87—88.
[3]) Ebenda S. 92.

wegen $(a+d)+(b+c)=(a+c)+(b+d)$ kennt man jetzt auch Summe und Quotient von $a+c$ und $b+d$ und damit beide Grössen selbst. So hat man allmälig $a-c$ und $a+c$, also durch sie a und c sich verschafft, welche von $a+d$, beziehungsweise von $b+c$ abgezogen d und b liefern.

Das 4. Buch endlich verlässt die Proportionen wieder, wenn auch von dem Verhältnisse zweier Zahlen zu einander und von Vereinigungen solcher Verhältnisse noch die Rede ist. Ein Hauptinteresse liegt für uns in zwei Gruppen von je drei Aufgaben. Die Aufgaben 8, 9, 10 behandeln die drei Fälle der quadratischen Gleichung[1]: $x^2+bx=c$, $x^2+c=bx$, $bx+c=x^2$ mit zwei Auflösungen des mittleren Falles, während der erste und dritte je nur eine Auflösuug besitzt. Dass im mittleren Falle eine Ausnahme von der Regel stattfinden kann, indem bei $c>\frac{b^2}{4}$ gar keine positive Auflösung erscheint, wusste Jordanus offenbar nicht, da man sonst nicht zu erklären vermöchte, warum er nicht darauf aufmerksam gemacht hat, was Alchwarizmî z. B. nicht versäumte (Bd. I, S. 677). Die zweite Gruppe[2], die Aufgaben 11, 12, 13 umfassend, unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass das quadratische Glied noch einen Coefficienten besitzt, durch welchen die Gleichung dividirt wird, um sie auf die frühere Form zu bringen. Die Kunstausdrücke, deren Jordanus sich dabei bediente, mögen aus der 11. Aufgabe erkannt werden: Si numerus ad quadratum datus (d. h. ax^2) cum addicione numeri ad radicem ipsius dati (d. h. $+bx$) fecerit numerum datum (c) et quadratum et radicem datos esse consequetur. Die 8. Aufgabe ist genau die gleiche, welche als 7. Aufgabe des 1. Buches oben zur Besprechung kam. Jordanus hat sie an beiden Stellen eben ganz verschiedenartig behandelt. Eine weitere Uebereinstimmung zwischen Aufgaben des 4. und des 1. Buches findet bei der 15. bis 26. Aufgabe[3] statt. Sie sind sämmtlich quadratische Aufgaben mit zwei Unbekannten. Einzelne derselben unterscheiden sich von solchen des 1. Buches nur darin, dass dort eine bestimmte, hier eine beliebige Einheit der Aufgabe zu Grunde liegt; so kommt die 4. Aufgabe des 1. Buches auf $x+y=a$, $x^2+y^2=b$, die 15. des 4. Buches auf $x+y=az$, $x^2+y^2=bz^2$ heraus[4]. Die Aufgaben 27 bis 34 kehren wieder zu quadratischen Gleichungen mit nur einer Unbekannten[5] zurück, und die 35. und letzte Aufgabe ist eine rein cubische[6]: Die Hälfte des Quadrates einer Zahl $\left(\frac{x^2}{2}\right)$ mit sich selbst

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXVI H. l. A. S. 124—126. [2]) Ebenda S. 126—128. [3]) Ebenda S. 128—134. [4]) Ebenda S. 8 und 128. [5]) Ebenda S. 134—138. [6]) Ebenda S. 133.

vervielfacht $\left(\text{also } \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4}\right)$ soll 54mal die Zahl ($54x$) geben. Jordanus folgert $x^3 = 4 \cdot 54 = 216$, dessen Kubikwurzel (cuius latus cubicum) 6 die gesuchte Zahl ist.

Haben wir in Jordanus als Verfasser einer Arithmetik, eines Rechenlehrbuchs, einer Algebra den nicht unberechtigten Nebenbuhler Leonardo's von Pisa kennen gelernt, so wird ein geometrisches Werk des gleichen Verfassers die Meinung von seiner Befähigung auch auf diesem Gebiete zu einer sehr achtungsvollen machen müssen. Das Werk De triangulis[1]) ist es, welches wir meinen, und von welchem wir einen Auszug folgen lassen. Es zerfällt in vier Bücher. Die beiden ersten von 13 und 19 Sätzen handeln von gradlinigen Figuren, die beiden letzten von 12 und 28 Sätzen von Kreisen mit Inbegriff solcher gradlinigen Figuren, die zum Kreise in enger Beziehung stehen.

An der Spitze des 1. Buches finden sich gewisse Begriffsbestimmungen, welche durchweg den Stempel der Scholastik tragen. Von einem Griechen oder von einem Araber können sie daher nicht entlehnt sein. Sie bilden entweder das geistige Eigenthum von Jordanus selbst, oder wenn nicht von ihm, jedenfalls eines Zeitgenossen. Da lesen wir gleich zuerst: Stetigkeit ist Nichtunterscheidbarkeit von Grenzstellen verbunden mit der Möglichkeit abzugrenzen. Der Punkt ist Festlegung der einfachen Stetigkeit[2]). Da heisst es, ein Winkel entstehe durch das Zusammentreffen zweier stetiger Gebilde an einem Endpunkte ihrer Stetigkeit[3]). Da wird eine Figur durch eine oder mehrere Curven, durch zwei oder mehrere Curven und Gerade, durch drei oder mehrere Gerade gebildet[4]), lauter Erklärungen, die von den euklidischen sowohl als von den als heronisch überlieferten in wesentlichen Punkten abweichen und auch bei Proklos nicht wörtlich übereinstimmend nachgewiesen werden können. Der an die Einleitung

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 517 (deutsch 604) nennt das Werk *De triangulis* nur im Vorübergehen. Eine Ausgabe mit vorzüglicher Einleitung hat H. Max Curtze im VI. Hefte der Mittheilungen des Coppernicusvereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn (1887) veranstaltet. Wir citiren dieselbe als Jordanus, Trianguli mit folgender Seitenzahl. Ein guter Auszug auf Grundlage der Aushängebogen der damals noch nicht der Oeffentlichkeit übergebenen Ausgabe bei S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter S. 159—162. Dieses Werk citiren wir als Günther, Unterricht Mittela. [2]) *Continuitas est indiscrecio terminorum cum terminandi potencia. Punctus (sic!) est fixio simplicis continuitatis.* [3]) *Angulus autem est continuarum in continuitatis termine conveniencium.* [4]) *Superficiei igitur figura accidit ex terminorum qualitate, quia alia curvis, alia curvis et rectis, alia tantum rectis terminis continetur. Et curvis quidem uno vel pluribus, rectis autem et curvis duobus vel pluribus, rectis vero tribus vel amplioribus.*

anschliessende 1. Satz[1]) giebt die Beziehung einer Mittellinie eines Dreiecks zu dem Winkel an, aus dessen Spitze sie gezogen ist. Der Winkel sei nämlich ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer, je nachdem die Mittellinie gleich der halben Gegenseite ist, die sie halbirt, oder grösser oder kleiner als diese halbe Seite. Wir übersetzen wörtlich den Beweis, um an ihm ein Musterstück des Ganzen zu haben: „Ist die Linie gleich der Hälfte der Basis, so werden vermöge zweimaliger Anwendung von Euklid I, 4 die beiden Winkel an der Basis zusammen dem dritten gleich sein; wegen I, 32 ist also dieser ein rechter. Ist die Linie grösser, so werden wegen I, 18 jene Winkel an der Basis grösser als der dritte, dieser also spitz. Ist die Linie kleiner, so sind auch die Winkel kleiner als der dritte, dieser also wegen I, 32 stumpf.“ Von den hier angeführten euklidischen Sätzen besagt I, 32, dass die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte betrage und I, 18, dass der grösseren Dreiecksseite der grössere Winkel gegenüberstehe. Der dritte noch benutzte euklidische Satz von der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks ist in den durch Theon's von Alexandria Ausgabe uns überlieferten euklidischen Elementen nicht I, 4 sondern I, 5, und ähnliche Abweichungen könnten zahlreich nachgewiesen werden, worauf in anderem Zusammenhange im nächsten Kapitel zurückzukommen sein wird. Auch einen Satz, bei welchem der Beweis an einer mit Buchstaben versehenen Figur geführt wird, wollen wir aus diesem 1. Buche etwas genauer mittheilen, den 7. Satz[2]).

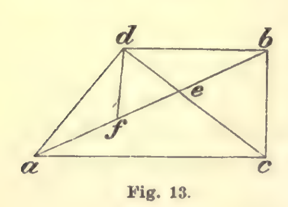


Fig. 13.

Zwischen (Figur 13) den Parallelen ac und bd werden über ac die beiden Dreiecke abc, adc gezeichnet, deren Seiten ab, cd sich durchschneiden; ist alsdann $ab > cd$, so ist $\sphericalangle\, adc > abc$. Wird von den beiden flächengleichen Dreiecken abc, adc das gemeinschaftliche Stück ace abgezogen, so bleibt $\triangle\, bce = ade$, und die Schenkel der den gleichen Dreiecken angehörenden Scheitelwinkel bei e müssen nach Euklid VI, 14 (in der Theon'schen Ausgabe VI, 15) in dem Verhältnisse stehen $ae : ce = eb : ed$. Daraus folgt $ae : ce = (ac + eb) : (ce + ed) = ab : cd$. Nun ist voraussetzungsmässig $ab > cd$, also auch $ae > ec$, und wenn der Punkt f auf ae so gelegen ist, dass $ae : ce = ce : ef$, so muss

---

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 3—4: *In omni triangulo si ab opposito angulo ad medium basis ducta linea dimidio eiusdem equalis fuerit, erit ille angulus rectus; quod si maior acutus: si vero minor obtusus.* [2]) Ebenda S. 6: *Si super eandem basim inter lineas equidistantes due trianguli statuantur, cuius latus laterum sese secancium maius fuerit, eius angulus superior minor erit.*

$ef < ce < ae$ sein, d. h. f fällt auf der Richtung ea zwischen e und a. Nun zieht man df. Es war

$$ae : ce = eb : ed$$

$$ae : ce = ce : ef.$$

Folglich ist $$eb : ed = ec : ef$$

und wegen $\sphericalangle\, def = bec$ ist $\triangle\, def \sim bec$, also auch $\sphericalangle\, edf = ebc$. Aber $\sphericalangle\, edf$ ist bewiesenermassen nur ein Theil von $\sphericalangle\, eda$, also $\sphericalangle\, eda > ebc$. In den übrigen Sätzen des 1. Buches, welche meistens auch mit der relativen Grösse von Winkeln und Seiten in von einander unterschiedenen Dreiecken in ganz eigenartiger Weise handeln, ist von dem eben erläuterten 7. Satze mehrfach Gebrauch gemacht. Es sind meistens Sätze, die nirgend sonst angetroffen werden, so dass es ganz sonderbar anmuthet, zwischen ihnen so Landläufiges wie den 11. und den 13. Satz[1]) zu finden, dass die Flächen von Dreiecken auf gleicher Grundlinie wie die Höhen sich verhalten und die Grundlinien flächengleicher Dreiecke umgekehrt wie die Höhen.

Das 2. Buch wird durch Theilungsaufgaben gebildet. In den sieben ersten Sätzen handelt es sich um die Theilung von Strecken, in den zwölf folgenden um Theilung von gradlinigen Figuren. In diesem ganzen Buche ist gleichwie im ersten vielfach auf Euklid's Elemente verwiesen, daneben auch auf die Arithmetik des Jordanus, welche schlechtweg die Arithmetik genannt wird. Von der euklidischen Schrift über die Figurentheilung ist trotz der grossen Aehnlichkeit der behandelten Aufgaben, die allerdings nicht bis zu voller Uebereinstimmung sich erhebt, keine Rede. Ob wir daraus auf mangelnde Bekanntschaft mit jener Schrift zu schliessen haben? Vielleicht gestattet grade dieses 2. Buch des Jordanus in Verbindung mit ähnlichen aber wieder nicht bis zur Deckung übereinstimmenden Aufgaben bei Leonardo von Pisa (S. 37) den Rückschluss, es sei, angeregt durch arabische Bearbeitungen, wenn nicht Uebersetzungen der euklidischen **περὶ διαιρέσεων** (Bd. I. S. 272), zur wissenschaftlichen Modesache der bedeutenderen Geometer geworden, sich mit Theilungsaufgaben zu beschäftigen. Die 18. (vorletzte) Aufgabe des 2. Buches ist der Auffindung des Schwerpunktes des Dreiecks gewidmet. Wir erinnern uns des Beweises, durch welchen Leonardo von Pisa (S. 39) die Gemeinschaft des Durchschnittspunktes der Mittellinien des Dreiecks feststellte. Bei Jordanus ist der Wortlaut der Aufgabe[2]), wie der Gang des Beweises ein ganz anderer. Es soll der Punkt im Innern

---

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 8 und 9. [2]) Ebenda S. 18: *Infra datum triangulum a puncto uno signato tres lineas ad angulos tres, que triangulum per equalia dividunt, protrahere.*

eines Dreiecks gefunden werden, dessen Verbindungsgerade mit den Eckpunkten das Dreieck in drei gleiche Theile zerlegen (Figur 14).

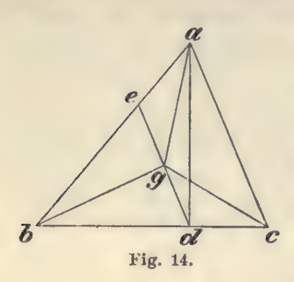


Fig. 14.

Man mache $cd = \frac{cb}{3}$, ziehe $de \parallel ca$ und halbire de in g, so ist dieses der gesuchte Punkt. Es ist nämlich

$$\triangle adc = \frac{abc}{3},$$

$$\triangle agc = adc \quad \text{und} \quad \triangle agb = bgc.$$

Die letztere Behauptung spricht Jordanus nur kurz aus, ohne sie zu beweisen; er traut also seinen Lesern zu, sie würden etwa $\triangle age = cgd$ und $\triangle egb = dgb$ einsehen und beide Gleichungen addiren. Auch den letzten 19. Satz[1]) wollen wir erwähnen. Ein Viereck $abcd$ soll von dem Eckpunkte b aus durch eine Gerade halbirt werden. Halbiren die in g sich schneidenden Diagonalen bd, ac des Vierecks sich gegenseitig, so halbirt jede derselben das Viereck, wie aus dem Satze Euklid I, 38 (dass Dreiecke von gleichen Grundlinien zwischen Parallelen flächengleich sind) hervorgeht. Die Aufgabe ist also in diesem Falle schon gelöst. Nun sei aber (Figur 15)

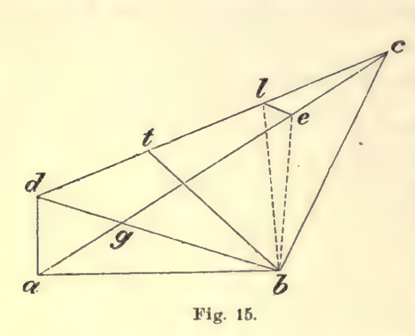


Fig. 15.

$$cg > ag,$$

so kann man $ce = ag$ abschneiden. Von e aus zieht man $el \parallel bd$ und halbirt ld in t, so löst bt die Aufgabe. Es verhält sich nämlich $\triangle dbc : lbc = dc : lc$ und $dc : lc = gc : ec$, endlich

$$ec = ag, \text{ also}$$

$$\triangle dbc : lbc = gc : ag.$$

Ferner:

$$\triangle dbc : dba = gc : ag,$$

wie sich ergiebt, wenn man

$$\triangle dbc = dcg + bcg \quad \text{und} \quad \triangle dba = dag + bag$$

berücksichtigt. Aus den beiden Proportionen folgt aber $\triangle dba = lbc$ und addirt man zu dieser Gleichung die augenscheinlich richtige $\triangle dbt = lbt$, so zeigt sich die Halbirung des Vierecks $abcd$ mittels bt.

Wir kommen zu dem 3. Buche, welches, wie wir oben ankündigten, vom Kreise handelt, und zwar fast fortwährend Verhält-

---

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 18—19: *Ab angulo quadranguli assignati lineam rectam educere, que totam quadranguli superficiem per duo equalia parciatur.*

nisse von Kreisbögen untereinander mit solchen von geradlinigen Strecken in Beziehung setzt. Das Grössersein des einen Verhältnisses als das andere ist meistens Zielpunkt der Untersuchung, wie es bei dem bekannten Satze des Ptolemäus über Bogenquotiente und Sehnenquotiente (Bd. I, S. 390) der Fall ist, der in der That auch hier als 4. Satz[1]) auftritt. Ptolemäus freilich ist dabei nicht genannt, sondern im Laufe des Beweises nur der Satz Euklid XII, 2 (dass Kreisflächen im quadratischen Verhältnisse der Durchmesser stehen) und ein Proportionensatz aus dem V. Buche desselben Verfassers, sowie zwei Bücher[2]), welche die Titel führen: über gekrümmte Oberflächen und über ähnliche Bögen. Man hat die Bemerkung gemacht, in den Büchern De triangulis berufe sich Jordanus ausser auf Euklid's Elemente ausschliesslich auf Werke seiner eigenen Feder[3]). Darnach müssten die genannten beiden Bücher, von welchen das über ähnliche Bögen im Anschlusse an die De triangulis im Drucke herausgegeben ist[4]), von Jordanus verfasst sein. Demgegenüber dürfte indessen doch in Erwägung zu ziehen sein, dass die bekannte Basler Handschrift, von der wir bei Gelegenheit des Algorithmus demonstratus (S. 63) gesprochen haben, ein Buch enthält: *Archimenidis de curvis superficiebus*[5]), von dem wir dahingestellt sein lassen, ob es wirklich in letzter Linie auf Archimed zurückführt, oder ob die Ueberschrift so zu verstehen ist, dass eine Neubearbeitung archimedischer Sätze vorliege. Es dürfte ferner daran zu erinnern sein, dass Ahmed der Sohn Josephs ein Buch schrieb, welches Gerhard von Cremona als *liber de similibus arcubus*[6]) übersetzte. Wir bemerken zu dem 4. Satze überdies, dass die an der Figur angebrachten Buchstaben ganz andere sind als die, deren Leonardo (S. 38) sich beim Beweise bediente. Nur Eines wollen wir aus dem 3. Buche noch erwähnen, nämlich, dass am Schlusse des Beweises des letzten 12. Satzes[7]) der Begriff und Name des *angulus contingencie* auftritt als des Winkels, welchen die Berührungslinie, *contingens*, mit dem Kreisbogen, *arcus*, bildet. Es ist derselbe Winkel, mit welchem (Bd. I, S. 250) Euklid III, 16 sich beschäftigt hat, wo bewiesen ist, dass er kleiner sei als irgend ein geradliniger spitzer Winkel.

Das 4. Buch fesselt noch heute die Aufmerksamkeit des Lesers in einem Maasse, dass wir fast Satz für Satz dasselbe auszuschreiben

---

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 21. [2]) *ut ostensum est in libro de curvis superficiebus* und etwas später *ut habetur in libro de similibus arcubus*. [3]) Ebenda S. XII der Einleitung. [4]) Ebenda S. 48—50. [5]) *Archimedis Opera* ed. Heiberg vol. III. *Prolegomena* pag. LXXXVII—LXXXIX. [6]) Steinschneider in Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1888 S. 114. [7]) Jordanus, *Trianguli* S. 28.

uns versucht fühlen. Der erste Satz spricht aus, dass die Mittelpunkte des Innen- uud des Umkreises eines solche Kreise besitzenden unregelmässigen Vielecks nicht zusammenfallen können. Der 2. Satz behauptet, dass von Sehnendreiecken desselben Kreises auf der gleichen Grundlinie das gleichschenklige die grösste Fläche besitze. Der 4. Satz giebt an, dass Sehnenparallelogramme lauter gleiche Winkel, der 6., dass Tangentenparallelogramme lauter gleiche Seiten besitzen. Ersterer Satz beruht auf dem aus Euklid bekannten Satze, dass je zwei gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks sich zu zwei Rechten ergänzen, letzterer auf dem von der gleichen Summe je zwei gegenüberliegender Seiten eines Tangentenvierecks. Da aber dieser Satz bei Euklid nicht ausdrücklich ausgesprochen ist, so hat Jordanus ihn als 5. Satz zwischengeschoben. Der 8. Satz[1]) und die ihm folgenden stellen eine zusammenhängende Lehre von den gegenseitigen Beziehungen zwischen regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken her. Um dieselbe übersichtlicher aussprechen zu können, wollen wir Flächeninhalt und Umfang eines regelmässigen Sehnen-n-ecks durch i_n und u_n, die entsprechenden Grössen für das regelmässige Tangenten-n-eck des gleichen Kreises durch I_n und U_n bezeichnen. Im 8., 9., 11. Satze beweist alsdann Jordanus die Proportionen:

$$i_n : i_{2n} = i_{2n} : I_n,$$

$$i_n : i_m > u_n : u_m, \text{ sofern } n > m,$$

$$I_n : I_m = U_n : U_m \text{ und } I_m > I_n, \text{ sofern } n > m.$$

Der Beweis des 8. Satzes wird unter der Annahme $n = 3$ geometrisch geführt (Figur 16). Das Tangentendreieck liegt so, dass es die Spitzen des Sehnendreiecks (z. B. d und f) zu Berührungspunkten hat, worauf eine stetige Proportion zwischen Abschnitten der Verbindungsgeraden vom Kreismittelpunkte zu einem Eckpunkte des Tangentendreiecks sich leicht ergiebt. Es ist z. B.

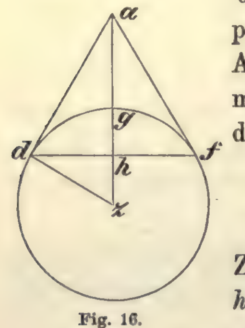


Fig. 16.

$$dh^2 = hz \cdot ha, \quad hz^2 = hz \cdot hz,$$

$$dh^2 + hz^2 = hz(ha + hz) = hz \cdot az.$$

Zugleich ist auch $dh^2 + hz^2 = dz^2 = gz^2$, mithin $hz : gz = gz : az$. Diese Abschnitte als Grundlinien von Dreiecken benutzt, deren gemeinsame Spitze

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 31: *Inter quaslibet duas figuras poligonias equilateras et similes, et quarum una in circulo inscripta, alia circumscripta fuerit, proporcionalis consistit, que duplo plurium laterum existens infra eundem circulum inscribitur.*

im Eckpunkte d des Sehnendreiecks liegt, übertragen jene Proportion einfach auf die Flächen der eben gekennzeichneten Dreiecke:

$$\triangle dhz : \triangle dgz = \triangle dgz : \triangle daz,$$

also auch auf Gleichvielfache derselben, und damit ist der Satz bewiesen, dass $i_n : i_{2n} = i_{2n} : I_n$. Wiewohl Jordanus eigentlich $n = 3$ vorausgesetzt hat, kommt also diese Voraussetzung in der Beweisführung nirgend vor, und Jordanus kann getrost fortfahren[1]), ähnliche Schlüsse könne man ziehen, sofern Vielecke von viel mehr Seiten vorliegen. Auffallend genug, dass Jordanus sich dadurch doch nicht befriedigt zu fühlen schien. Er behandelt vielmehr im 15. Satze noch einmal besonders den Fall $n = 4$, ohne dabei des vorhergegangenen allgemeinen 8. Satzes nur zu gedenken. Im 16. Satze wendet sich Jordanus der Quadratur des Kreises[2]) zu. Dem Kreise a lässt Jordanus ein Quadrat de umschreiben und sucht eine Fläche c, welche der Proportion $c : a = a : de$ genüge. Ist nun das gefundene c wieder ein Kreis, so werde diesem ein Quadrat hk umschrieben, und da sich Kreise wie ihre umschriebenen Quadrate verhalten, so wird auch stattfinden $c : a = hk : de$. Eine Vergleichung beider aufgestellter Proportionen lässt alsdann $a = hk$ erkennen. Ist dagegen c kein Kreis, sondern eine gradlinig begrenzte Figur, so kann dieselbe immer in ein Quadrat ry umgewandelt, ausserdem ein Quadrat mn als geometrisches Mittel zwischen den Quadraten ry und de gefunden werden, und auch dann ist die Aufgabe gelöst, weil $a = mn$. Offenbar ist also der Beweis dialektisch geführt, dass es ein dem Kreise a flächengleiches Quadrat geben müsse, wenn die Voraussetzung wahr ist, die Figur c könne nur entweder ein Kreis oder eine gradlinig begrenzte Figur sein; wie man, selbst wenn man jene Voraussetzung zugeben müsste, c zu finden habe, damit beschäftigt sich Jordanus nicht.

Nehmen wir von dieser echt scholastischen Untersuchung Anlass, hier die Frage zu streifen, ob Jordanus ganz unabhängig gearbeitet hat, oder ob irgend eine fremde Vorlage sich nachweisen lässt, an welche er in seinem Werke De triangulis mehr oder weniger eng sich angeschlossen haben mag. Man hat darauf hingewiesen[3]), dass entfernt Aehnliches bei dem Byzantiner Psellus vorkomme. Aber wenn auch Psellus einen unbestreitbar mächtigen Einfluss auf das Studium der Logik im Abendlande ausgeübt hat, so ist doch die weit höhere geometrische Begabung des Jordanus gewiss nicht bei

---

[1]) Jordanus, *Trianguli* S. 32: *ex eis argues si proposite fuerint figure poligonie multo plurium laterum.* [2]) Ebenda S. 36: *Proposito circulo equale quadratum constituere.* [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 161, Note 2.

einem Psellus in die Schule gegangen. Viel leichter könnten wir mit der am gleichen Orte ausgesprochenen Vermuthung uns befreunden, es sei bei Psellus und Jordanus hier der Einfluss eines Dritten, eines Schriftstellers der griechisch-arabischen Schule etwa, wahrnehmbar, den Jordanus besser verstanden hat, als es Psellus möglich war. Immerhin schweben solche Meinungen ziemlich haltlos in der Luft. Nur zwei verneinende Behauptungen können wir mit Sicherheit aussprechen. Des Jordanus 16. Satz im 4. Buche De triangulis stammt nicht aus der Kreisquadratur des Franco von Lüttich (Bd. I, S. 822), er stammt auch nicht aus dem Buche der drei Brüder (Bd. I, S. 690). Beide Schriften sind gegenwärtig herausgegeben[1]). Auch in der durch Gerhard von Cremona in's Lateinische übersetzten arabischen Schrift findet sich reiches Material zur Kreisquadratur, aber nicht jener 16. Satz des Jordanus. Andere Sätze aus dem Buche der drei Brüder dagegen zeigen mit solchen aus dem 4. Buche De triangulis eine merkwürdige Aehnlichkeit. Der 18. Satz der Araber hat es mit der Dreitheilung des Winkels, ihr 16. Satz mit der Würfelverdoppelung zu thun. Dieselben Fragen beschäftigen Jordanus im 20., im 22. Satze seines 4. Buches. Die Uebereinstimmung im Wortlaute sowie in den Buchstaben der Figuren ist eine so vollständige, dass man herüber und hinüber zweifelhafte Lesarten dadurch festzustellen befähigt war. Da sollte man doch für unzweifelhaft halten, dass Jordanus sich jener Uebersetzung des Liber trium fratrum von Gerhard von Cremona bediente! Und dennoch tragen wir die grössten Bedenken solches anzunehmen. Sie beruhen auf Folgendem: In den neun letzten Sätzen des 4. Buches, von dem 20. bis zum 28. Satze, sind bei Jordanus alle Figuren mit Buchstaben griechisch-arabischer Reihenfolge bezeichnet, während vorher ausschliesslich die lateinische Reihenfolge der Buchstaben zu erkennen ist. Von dem Satze an, wo abg an die Stelle von abc treten, müssen wir wohl an den Einfluss eines Musterwerkes, und dann mit grosser Wahrscheinlichkeit an den eines einzigen denken, und doch ist nur in Satz 20 und 22, wie bemerkt, eine Uebereinstimmung mit dem Buche der drei Brüder, ist schon in Satz 22 ein wesentlicher Unterschied neben der Aehnlichkeit zwischen Jordanus und der Gerhard'schen Uebersetzung wahrnehmbar, sind die Sätze 21 und 23 bis 28 bei den drei Brüdern gar nicht vorhanden. Da drängt sich doch die Vermuthung auf, dem Jordanus werde nicht das Buch der drei

---

[1]) Die Schrift des Franco gab Winterberg in der Zeitschr. Math. Phys. (1882) XXVII, Supplementheft S. 137—190 heraus, den *Liber trium fratrum* sodann (1885) Max Curtze im XLIX. Bande der *Nova Acta* der Kais. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher.

Brüder vorgelegen haben, sondern eine Arbeit, welche selbst ihren Stoff theilweise dem Buche der drei Brüder entlehnt hatte. Ist etwa an Tâbit ibn Kurra zu denken, den Schüler von Muhammed, den ältesten unter den drei Brüdern?[1]) Solche Fragen sind leichter aufgeworfen als beantwortet, und sie würden zu ihrer befriedigenden Beantwortung jedenfalls voraussetzen, dass mehr arabische Mathematiker in Uebersetzungen vorhanden wären, als es der Fall ist. Der 16. Satz des Jordanus aber, von welchem wir den Ausgangspunkt zu dieser Einschaltung nahmen, bleibt von dem Ergebnisse, wie es ausfallen möge, unberührt, da er noch nicht zu der besonders kenntlich gemachten Gruppe von neun Sätzen gehört.

Wir haben bei einigen Sätzen dieser Gruppe noch zu verweilen. Der 20. Satz, sagten wir, habe es mit der Dreitheilung eines spitzen Winkels zu thun (Figur 17) Um b, den Scheitelpunkt des spitzen Winkels abg, als Mittelpunkt wird der Kreis dzm beschrieben, db bis l verlängert, bz senkrecht zu dl gezogen und ze gegen h verlängert, worauf $zq = bd$ abgeschnitten wird. Die Gerade zeh wird nun in gleitende und zugleich drehende Bewegung gesetzt, während welcher sie fortwährend durch e hindurchgeht und z auf der Kreisperipherie hinläuft. Diese Bewegung lässt man andauern, bis q auf der früheren Geraden bz, etwa in s, ankommt, d. h. bis auf est der Theil $st = qz = bd$ ist. Dann ist

$$\text{arc.}\, tl = \frac{1}{3}\, \text{arc.}\, de.$$

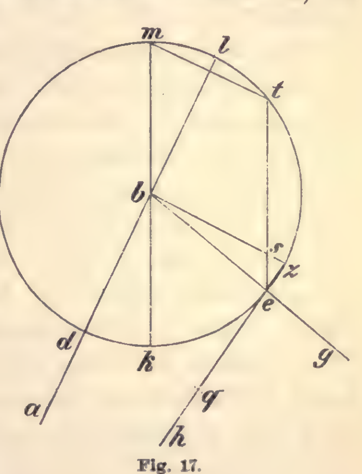


Fig. 17.

Man ziehe $mbk \parallel te$ und mt. Weil ts parallel und gleich mb, muss auch mt parallel und gleich bs sein. Nun war bsz senkrecht zu dl gezogen, also ist auch mt senkrecht zu dl, und daher halbirt dl sowohl die Sehne mt als den von ihr bespannten Bogen mt. Ferner sind $\sphericalangle\, mbl$ und dbk Scheitelwinkel am Kreismittelpunkte, also

$$\text{arc.}\, dk = \text{arc.}\, ml = \frac{1}{2}\, \text{arc.}\, mt = \frac{1}{2}\, \text{arc.}\, ke = \frac{1}{3}\, \text{arc.}\, de.$$

Ist der zu drittheilende Winkel stumpf, so wird seine Hälfte spitz, also diese nach der vorgeschriebenen Regel behandelt werden können.

[1]) Einer nicht wesentlich verschiedenen Meinung scheint Max Curtze zu huldigen, vergl. dessen *Reliquiae Copernicanae* (1875) S. 26 oder Zeitschr. Math. Phys. XIX, 451.

Diese Darstellung (eine nahezu wörtliche Uebersetzung) lässt erkennen, dass hier von Bewegungsgeometrie Gebrauch gemacht ist, wie ein arabischer Schriftsteller in der zweiten Hälfte des X. Jahrhunderts, Assidschzî (Bd. I, S. 706) es nannte, wenn ein als Maassstab eingetheiltes Lineal so um einen Punkt in gleitende Drehung versetzt wird, bis gewisse Längen auf einer Richtung von einer gegebenen Begrenzung an ablesbar werden[1]). Würde man den geometrischen Ort des Punktes q vollständig zeichnen, so bekäme man eine Kreisconchoide, welche durch ihren Durchschnitt mit bz den Punkt s bestimmen liesse, und welche auch das 8. Lemma des Archimed (Bd. I, S. 284) zu einer Winkeldreitheilungsmethode verwerthen würde, die im Grundgedanken mit der soeben erörterten nahe verwandt ist. Wäre es wohl allzugewagt, aus den Bemerkungen von Assidschzî, aus dem Buche der drei Brüder, aus Jordanus den Schluss zu ziehen, die Griechen hätten die Curve der Kreisconchoide wirklich gekannt?[2])

Der 22. Satz beschäftigt sich, wie wir erwähnt haben, gleich dem 16. Satze der drei Brüder mit der Würfelverdoppelung und zwar zunächst nach der Methode des Archytas (Bd. I, S. 215—217). Bei den drei Brüdern ist Mileus, d. h. Menelaus als Erfinder genannt, Jordanus nennt keinen Erfinder. Dagegen stimmt er mit der Uebersetzung des Gerhard von Cremona darin überein, dass er die Umdrehungsaxe *meguar* nennt, eine nicht einmal sehr schlechte Lesung des arabischen Wortes für Axe, welches heute mihwar geschrieben werden würde[3]). Jordanus giebt sodann eine zweite Auflösung, welche die heronische Auflösung (Bd. I, S. 350) mit Einschluss der bei der Figur in Anwendung kommenden Buchstaben genau wiedergiebt und als einzige Abweichung einen Kreis zeichnen lässt, den die heronische Figur nicht aufweist. Auch das Buch der drei Brüder knüpft eine zweite Auflösung an, aber es ist die Plato's[4]) (Bd. I, S. 214), und in diesen zweiten Auflösungen ist der neben sonstiger Uebereinstimmung vorhandene wesentliche Unterschied zwischen dem Liber trium fratrum und Jordanus zu finden, den wir oben schon betonten.

Der zwischen Winkeldreitheilung und Würfelverdoppelung eingeschaltete Satz 21 verlangt[5]) in einem gegebenen Dreiecke den

---

[1]) Wöpcke, *L'algèbre d'Omar Alkayyâmî* pag. 120. [2]) Max Curtze, welcher in den *Reliquiae Copernicanae* l. c. zuerst diese Frage aufwarf, ist geneigt, die Kenntniss der Kreisconchoide den Griechen zuzusprechen. [3]) Vergl. das grosse Wörterbuch von Freytag IV, 157. [4]) *Liber trium fratrum.* Erläuterung zu XVII, S. 61. [5]) Jordanus, *Trianguli*, S. 39: *In omni triangulo noto est punctum invenire, quo continuato cum angulis trianguli dividetur triangulus per tres proporciones notas.*

Punkt zu finden, dessen Verbindungsgerade mit den Ecken das Dreieck nach gegebenem Verhältnisse theilen. Die Aufgabe ist die Verallgemeinerung der 18. des 2. Buches, welche wir (S. 76) besprochen haben. Aber Jordanus erinnert an jene mit keinem Worte und bedient sich einer durchaus anderen Reihenfolge der Buchstaben, wogegen der der Auflösung zu Grunde liegende Gedanke sich nicht geändert hat (Figur 18). Die Grundlinie *ag* wird nach dem gegebenem Verhältnisse in *d* und *e* getheilt. Dann werden von diesen Theilungspunkten aus Parallele zu der jeweils nächsten Dreiecksseite gezogen, deren Durchschnittspunkt *t* der gesuchte Punkt ist. Bei dem 23. Satze, welcher ein regelmässiges Sehnensiebeneck fordert[1]), verweilen wir nur einen Augenblick, um zu berichten, dass die Regel: die Hälfte der Dreiecksseite gebe die Siebenecksseite, welche Abû'l Wafâ lehrte (Bd. I, S. 702) hier als indische Regel[2]) vorgetragen wird. Aber Jordanus sagt uns auch, die indische Regel gehe weiter und liefere allgemein die Seite s_n des regelmässigen Sehnenvielecks von n Seiten in dem Kreise vom Halbmesser r. In eine Formel umgesetzt lautet die Vorschrift $s_n^2 = \frac{18r^2}{\frac{(n-1)n}{2}+3}$. Daraus entsteht, was bei Jordanus allerdings nicht gesagt ist,

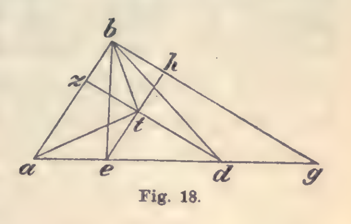


Fig. 18.

$$s_n = \frac{6r}{\sqrt{(n-1)n+6}}.$$

Sonderfälle sind: $s_3 = r\sqrt{3}$, $s_4 = r\sqrt{2}$, $s_6 = r$, $s_7 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, wovon die drei ersten genau richtig sind, der vierte den Werth des Abû'l Wafâ darstellt. Im 25. Satze kommt wie bei Leonardo von Pisa (S. 37) das Wort *casus*[3]) vor für den Abschnitt, welchen im Dreiecke die Senkrechte von einem Eckpunkte auf die Gegenseite auf dieser hervorbringt.

Wir glauben nicht einer Uebertreibung uns schuldig zu machen, wenn wir den Verfasser der vier Bücher von den Dreiecken unter die hervorragenden Geometer zählen. Mag Vieles, mögen insbesondere die oftgenannten neun letzten Sätze des 4. Buches offenkundig ausländischen Ursprunges sein, Jordanus hat sie doch verstanden, hat

---

[1]) Jordanus, *Trianguli*, S. 42: *Circulo proposito eptagonum equilaterum et equiangulum inscribere.* [2]) Ebenda S. 43—44: *Hec est questio Indorum . . . et scias, quod ipsi ponunt latus eptagoni cadentis in circulo per equalitatem medietatis lateris trianguli cadentis in illo.* [3]) Ebenda S. 45.

es berechtigt gefunden, sie in sein Werk aufzunehmen. Auch für die vorhergehenden Bücher und die 19 ersten Sätze des 4. Buches mag Jordanus vielleicht nicht als ganz unabhängiger Erfinder dastehen, aber was wir ihm unter allen Umständen zu gut rechnen müssen, das sind manche Beweisführungen, das sind mindestens die in denselben von Schritt zu Schritt enthaltenen Verweisungen auf Euklid. So erhalten wir das Bild eines durchaus gewissenhaften Schriftstellers, eines Gelehrten, der den seiner Zeit zugänglichen Stoff durchaus beherrschte und denselben zu verwenden wusste. Insbesondere die genaue Kenntniss der euklidischen Elemente muss in einer geschichtlichen Betrachtung stark hervorgehoben werden. Man darf gewiss für einen Zeitraum, der bis tief ins XVI. Jahrhundert sich erstreckt, den Satz aussprechen: je mehr wissenschaftlicher Sinn einer Zeit oder einer einzelnen Persönlichkeit innewohnte, um so gründlicher wurde Euklid studirt.

Als wir vorher die schriftstellerische Thätigkeit des Jordanus in den nicht geometrischen Theilen der Mathematik schilderten, haben wir (S. 67) am Schlusse des 43. Kapitels zugesagt, auf die Ursprungsfrage zurückkommen zu wollen. Wir wenden uns zur Erfüllung dieser Zusage, so weit sie uns möglich ist, und zu gleicher Zeit greifen wir auf die Schriften des Leonardo von Pisa zu ähnlichem Zwecke zurück. Haben doch die beiden Männer sich den Ruhm verdient, an die Spitze eines neuen Zeitraumes — wir dürfen vielleicht sagen eines neuen Zeitalters — gestellt werden zu müssen, und sind doch Beide, wie ihre Schriften mit Ausschluss jeden Zweifels darthun, in arabischer Schulung zu Mathematikern geworden, gleichviel ob sie selbst der arabischen Sprache mächtig waren, oder ob sie Arabisches, beziehungsweise Griechisch-arabisches, aus lateinischen Uebersetzungen kennen lernten. Für Leonardo geht man kaum irre, wenn man annimmt, er habe in Bugia, er habe später in der Levante genügende Kenntnisse in der arabischen Sprache gesammelt, um Uebersetzungen entbehren zu können. Eine gleiche Annahme auch für Jordanus zu machen, fehlt es an einer gesicherten Grundlage. Bei der hervorgehobenen Grundähnlichkeit sind nun einzelne schroffe Gegensätze zwischen Jordanus und Leonardo um so auffallender. Wir wollen sie, die zumeist den rechnenden Abschnitten angehören, hervortreten lassen.

Jordanus führt Verdoppelung und Halbirung als besondere Rechnungsarten an, Leonardo kennt sie nicht als solche. Leonardo lehrt die Neunerprobe, für Jordanus ist sie nicht vorhanden. Jordanus besitzt eine Art complementärer Multiplication (ob freilich aus arabischer Quelle bezweifeln wir), bei Leonardo nichts Aehnliches. Leo-

nardo gebraucht für das Quadrat der unbekannten Grösse das Wort *census*, bei Jordanus ist es nicht zu finden, sondern nur *quadratus*. Fast am Auffallendsten ist der Gegensatz beider Schriftsteller, wo es sich um die Ausziehung von Kubikwurzeln handelt. Jordanus lehrt dieselbe, soweit sie ganzzahlig möglich ist, genau in der gleichen unbefangenen Weise wie vorher die Quadratwurzel, Leonardo rühmt sich der Erfindung der Kubikwurzelausziehung und lehrt dabei eine Näherungsmethode, welche es gestattet, den rohesten ganzzahligen Annäherungen noch Brüche beizufügen.

Wie in aller Welt sind diese Verschiedenheiten bei Männern, deren Lehrjahre gewiss nicht weit auseinander lagen, die beide, wie wir oben sagten, in arabischer Schulung zu Mathematikern geworden sind, zu deuten? Wir glauben einem Erklärungsgrunde auf die Spur gekommen zu sein, ob dem richtigen müssen wir dahingestellt sein lassen. Er hat jedenfalls ein Verdienst, nämlich das, der einzige zu sein, der bisher aufzustellen versucht wurde.

Wir haben (S. 34) einige algebraische Aufgaben Leonardo's als Alkarchî nachgebildet nennen dürfen. Den gleichen Lehrer erkennen wir in allen jenen Dingen, die wir hier als für Leonardo besonders kennzeichnend fanden. Die Kubikwurzel insbesondere hat Alkarchî nicht ausgezogen, aber dafür hat er eine näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel, an welche zu erinnern wir gerade damals für angezeigt hielten, als wir Leonardo's Kubikwurzelausziehung schilderten. Und nun Jordanus. Wir könnten sagen, er hat Alkarchî's Schriften nicht gekannt, aber wir gehen um einen Schritt weiter. Wir vermuthen seine Abhängigkeit von Alnasawî. Diese erklärt nämlich Alles, was wir von Jordanus aussprachen mit Ausnahme der complementären Multiplication, welche er von irgend einem Klostergeistlichen gelernt haben kann, dagegen mit Einschluss der Kubikwurzelausziehung, welche bei Alnasawî vorkommt.

Wunderbarer Zufall! Im fernen Oriente ruft (Bd. I, S. 720—721) vielleicht religiöser und politischer Gegensatz zwei einander feindliche wissenschaftliche Schulen ins Leben. Ein Werk aus der Schule des Alkarchî fällt in die Hand eines geistvollen Kaufmannes, ein anderes aus der Schule des Alnasawî — denn wir behaupten keineswegs, es seien die Werke der Begründer jener Schulen selbst gewesen, die nothwendig bei Leonardo, bei Jordanus dem Unterrichte zu Grunde lagen — fällt in die Hand eines hochbegabten Mönches, und im christlichen Abendlande spiegelt sich ein Gegensatz wieder, der hier auch nicht den Schein einer Berechtigung besitzt! Jetzt aber handelt es sich darum, wie die Weiterentwickelung vorgehen soll, ob für die nächsten Jahrhunderte in Europa Alkarchî, ob Alnasawî sich siegreich

erweist, oder wenn unser Erklärungsversuch des nicht wegzuleugnenden Gegensatzes keinen Beifall finden sollte, wer der Lehrmeister bleibt, Leonardo oder Jordanus?

Haben wir aber erst des Wortes Zufall uns bedient, so ist jetzt aus inneren Gründen die Antwort herzuleiten, welche die zuletzt aufgeworfene Frage zu erhalten hat. Leonardo von Pisa war freilich nach unserer persönlichen Schätzung der bedeutendere Mathematiker von den beiden, zwischen welchen die Wahl stand. Er war ein Kaufmann unter tausenden. Jordanus Nemorarius war ein Ordensgeistlicher wie vielleicht sehr viele, wenngleich an besonderer mathematischer Begabung denselben überlegen, und das musste den Ausschlag geben. War die Wissenschaft und ihre Lehre noch fortwährend Eigenthum der Geistlichkeit, gipfelte, wie wir (S. 54) in kurzem Abrisse anzudeuten uns begnügen mussten, alles Wissen in der Gottesgelehrsamkeit, so musste der gelehrte Mönch einen ganz anderen Einfluss ausüben als der ebenso gelehrte Kaufmann. Und wenn nun gar der Mönch dem Orden angehörte, der, wie wir gleichfalls (S. 55) gesagt haben, in Predigt und Lehre seine Aufgabe fand, wenn er an der Spitze dieses Ordens stand, wenn er zur Ausbreitung des Ordens in grossartiger Weise beitrug, kann es da noch zweifelhaft erscheinen, wer im Wettstreite siegen musste, wenn überhaupt von einem solchen die Rede sein kann? Und nun greifen wir auf eine andere für Manchen noch strittige Frage zurück: wenn Alles so verlief, wie wir hier in Kürze es angedeutet haben, ist dadurch nicht ein bisher unbeachtet gebliebener Grund für die Behauptung gefunden, Jordanus Nemorarius und Jordanus Saxo seien eine Person?

Lassen wir an einem Belege statt an hunderten zum voraus wenigstens die Wahrscheinlichkeit unserer Erörterungen zu Tage treten. Handschriften des Leonardo von Pisa haben sich bis auf den heutigen Tag nur in Italien erhalten, oder wohin sie in den letzten Jahrhunderten von Italienern allenfalls verschleppt worden sind. Handschriften des Jordanus Nemorarius sind in Basel, in Cambridge, in Dresden, in Erfurt, in Mailand, in München, in Oxford, in Paris, in Rom, in Thorn, in Venedig, in Wien vorhanden. Wir haben absichtlich die alphabetische Reihenfolge der Städte gewählt, welche in Kreuz- und Querzügen über ganz Europa hin und her führt.

45. Kapitel.

Johannes de Sacrobosco, Johannes Campanus und andere Mathematiker des XIII. Jahrhunderts.

Was wir aus inneren Gründen als unausbleiblich erkannten, stellt sich als thatsächlich vorhanden dar, sobald wir an die Persönlichkeiten näher herantreten, welche die Geschichte der Mathematik nächst den beiden Männern, welchen unsere seitherigen Betrachtungen gewidmet waren, im XIII. Jahrhundert zu nennen hat.

Gehen wir von Paris aus als dem Sitze derjenigen Schule, welche während der ganzen Zeit der Scholastik die leitende Rolle führte, so treffen wir dort auf Johannes de Sacrobosco[1]). Der Name kommt noch in mehrfachen Formen vor als Sacrobusto, Sacrobuschus oder englisch als John of Holywood, beziehungsweise Holybush. Als sein Geburtsort wird meistens Holywood (jetzt Halifax) in Yorkshire angenommen. Andere halten Holywood bei Dublin für die Heimath des Gelehrten, noch Andere lassen ihn in Nithsdale in Schottland geboren sein. Jedenfalls studirte Sacrobosco, wie wir mit zwar unrichtiger, aber häufiger alleiniger Benutzung des Heimathsnamens sagen wollen, in Oxford und lehrte später Astronomie und Mathematik in Paris. Dort starb er im Jahre 1256, wie aus seiner Grabschrift hervorgeht[2]). Die Geschichte der Astronomie[3]) nennt mit Fug und Recht sein Werk über die Weltkugel, De sphaera mundi, ein gutes Buch für eine schlechte Zeit und begründet dieses Urtheil mit dem Hinweise auf den Beifall, welchen volle drei Jahrhunderte dem ganz unselbständigen Werke, einem Auszuge aus dem Almagest und einigen arabischen Astronomien, spendeten, indem sie es dem Universitätsunterrichte zu Grunde legten und der Abfassung von umfangreichen Erläuterungen für würdig hielten. Eine nicht viel andere Rolle spielt Sacrobosco's Lehrbuch der Rechenkunst[4]),

---

[1]) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften I, 1196—1197. Wir citiren dieses oft benutzte vortreffliche Nachschlagewerk künftig kurzweg als Poggendorff. — *Nouvelle Biographie universelle* XXVI, 556. [2]) Vossius, *De scientiis mathematicis* (1650) pag. 179 giebt die ganze Grabschrift. Kästner, Geschichte der Mathematik (1796—1800) II, 310 giebt allerdings auffallender Weise eine ganz andere Grabschrift an, aber in dem Todesjahre 1256 stimmen beide überein. Diese Werke citiren wir künftig kurzweg als Vossius und als Kästner. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie (1877) S. 210 Note 2. [4]) Der *Tractatus de arte numerandi* ist zuletzt unter diesem Titel von J. O. Halliwell in den *Rara Mathe-*

tractatus de arte numerandi. Es ist eine Sammlung von Regeln ohne den geringsten Beweis, ohne Zahlenbeispiel, ohne Erwähnung einer Quelle, aus welcher der Verfasser schöpfte. Aber in dieser Nüchternheit, in dieser Kürze eignete es sich vortrefflich dazu, den Grundriss zu einem die zahlreichen Lücken mündlich ergänzenden Unterrichte zu bilden, und wurde es Jahrhunderte lang in solcher Weise benutzt. Ob darum die eben bezeichneten Lücken wirklich ausgefüllt wurden? Mitunter geschah es, aber die grosse Menge der Lernenden wie nicht minder der Lehrenden begnügte sich doch wohl gerne mit dem Handwerk des Rechnens, ohne auf die Wissenschaftlichkeit des Algorithmus demonstratus Ansprüche zu erheben; was wir am Ende des vorigen Kapitels von der dauernden Einwirkung des Jordanus sagten, was wir in bestimmterer Weise von seinem Algorithmus demonstratus hätten sagen können, beschränkt sich zunächst ausdrücklich auf das Rechenhandwerk. Sacrobosco's Rechenbuch, über welches wir kurz berichten wollen, lässt das Wort Algorismus von einem Philosophen Algus abstammen. Es benutzt in bekannter Weise die Wörter *digitus* und *articulus.* Es erkennt Halbiren und Verdoppeln als besondere Rechnungsarten an. Man kann fragen, wesshalb diese beiden Operationen jetzt in der entgegengesetzten Reihenfolge auftreten, als die war, in welcher Jordanus (S. 64) sie lehrte? Sacrobosco selbst sowie ein gleich nachher zu erwähnender Commentator geben keinerlei Auskunft darüber, aber merkwürdig genug hat das alte in der Wissenschaft längst abhanden gekommene Verfahren sich praktisch erhalten, und aus ihm sind Schlüsse gezogen worden[1]). In reindeutschen Ortschaften Böhmens wird in der Volksschule die Multiplication $2n$ mal k heute noch so gelehrt, dass $2n$ halbirt, k verdoppelt und $2k$ alsdann n mal unter einander geschrieben wird, worauf die Addition dieser Posten erfolgt. Ist $2n+1$ mal k zu rechnen, so schreibt man n mal $2k$, darunter k und addirt. Das Beispiel 5 mal 36 sieht so aus:

$$\begin{array}{r} 72 \\ 72 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

Hier tritt das Halbiren begrifflich vor dem Verdoppeln auf, und deshalb könnte es als Operation den Vorrang erhalten haben. Das

---

matica (1839) abgedruckt. Aeltere Drucke als *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant* vielleicht veranstaltet durch Jod. Clichtoveus (Paris 1510) und als *Algorismus domini Joannis de Sacro Bosco* (Venedig 1523). Ueber die bezüglich der durch Clichtoveus veranstalteten Ausgabe obwaltenden Zweifel vergl. Eneström in der Bibliotheca Mathematica 1894 pag. 63—64.

[1]) Briefliche Mittheilungen von F. J. Studnička.

soeben geschilderte Verfahren hat sich auch bei russischen Bauern erhalten[1]). Sacrobosco's Rechenbuch lehrt ferner die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Neu, und nunmehr für Jahrhunderte eingeführt, erscheint der Begriff der Progressio zwischen Division und Wurzelausziehung, so dass im Ganzen neun Rechnungsarten erscheinen: Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio, Extractio. Unter Progressio ist aber nicht etwa die Lehre von den Progressionen im Allgemeinen, oder auch nur von den arithmetischen Progressionen in ihrer Vollständigkeit verstanden, sondern die Summirung der natürlichen Zahlenreihe, der Reihe der graden Zahlen und der der ungraden Zahlen, also die Summen $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $2 + 4 + \cdots + 2n$, $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$. Von Einzelheiten bemerken wir die Vorschrift, beim Anschreiben der Zahlen, welches von dem Stellungswerthe der neun Zeichen und von der Null unter dem Namen teca, oder circulus, oder cifra, oder figura nihili Gebrauch macht, je die dritte Stelle durch ein Pünktchen zu bezeichnen, damit man wisse, wie viele Tausender vorhanden sind[2]). Dann ist vor Allem zu beachten, dass nur ganze Zahlen berücksichtigt sind. Brüche werden nie genannt. Es scheint aber, dass man frühzeitig begann, die Lehre von dem Bruchrechnen von der vom Rechnen mit ganzen Zahlen abzutrennen und in besonderen Abhandlungen zu erörtern. Wurde doch im XIV. Jahrhundert der Algorithmus demonstratus selbst in der Basler Handschrift auseinandergerissen, so dass die zweite Abtheilung, das Bruchrechnen, der ersten, dem Rechnen mit ganzen Zahlen, vorangeht, durch eine kleine Abhandlung über Proportionen von ihr getrennt. Addition und Subtraction fangen nach Sacrobosco's Vorschriften rechts bei der niedersten Stelle an. Aber auch die Halbirung beginnt ebenda, was unserer Gewohnheit widerspricht und nur dadurch als thunlich sich erweist, dass alle Rechnungsarten überwärts erfolgen und fortwährende Veränderungen der entstehenden Zahlen als selbstverständlich erachtet werden. Aus dem gleichen Grunde kann die Verdoppelung und Multiplication ebenso wie die Division und Wurzelausziehung links bei der höchsten Stelle beginnen. Im Algorithmus demonstratus, wo Alles an Buchstaben erörtert wird, fehlt jede Vorschrift darüber. Sacrobosco giebt seine Regel bei Gelegenheit der Verdoppelung in den Versen[3])

---

[1]) Plakhovo in der *Mathesis* XVII, 86—87 (Gand 1897). [2]) *Item sciendum est quod super quamlibet figuram loco millenarii positam componenter possunt poni quidam punctus ad denotandum quod tot millenarios debet ultima figura representare quot fuerunt puncta pertransita.* [3]) *Rara Mathematica* pag. 11.

Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis;
A leva dupla, divide multiplicaque,
Extrahe radicem semper sub parte sinistra.
Abziehen sollst Du und beifügen rechts, sowie auch halbiren;
Links verdopple und theile, und ebendort multiplicire;
Wurzelziehung erfolge stets von der Linken beginnend.

Genau die gleichen Zeilen finden sich[1]) in einem Rechenbuche in Versen, welches die Ueberschrift Carmen de algorismo führt. Soll man daraus die Folgerung ziehen, Sacrobosco sei auch der Verfasser dieser Dichtung gewesen, oder soll man umgekehrt annehmen, das von einem Anderen verfasste Gedicht sei schon bekannt und mehrfach in Gebrauch gewesen, als Sacrobosco sein Lehrbuch schrieb? Beide Schlüsse sind gezogen worden. Die an einen anderen Schriftsteller glauben, nennen als solchen den mit Sacrobosco etwa gleichzeitigen Alexander de Villa Dei oder de Villedieu, einen Minoritenmönch aus Dole, dem man allerdings ähnliche poetische Neigungen nachrühmt. Er schrieb eine Doctrinale puerorum (lateinische Grammatik) in Versen und brachte das ganze alte und neue Testament in 212 Verszeilen.

Wir haben (S. 88) einen der Commentare zu Sacrobosco's Rechenbuch besonders erwähnt. Der Verfasser ist Petrus Philomeni de Dacia[2]), und der Commentar ist am letzten Juli 1291 vollendet worden. Petrus von Dacien war, wie sein Name zu erkennen giebt, ein Däne und gehörte dem Dominikanerorden an, welcher schon im Mai 1228 so weit nach Norden vorgedrungen war, dass es eine Dominikanerprovinz Dacien gab. Nehmen wir dazu, dass gleichfalls am Anfange des XIII. Jahrhunderts schon eine dänische Fürstentochter, die unglückliche Ingeborg, als Gemahlin Philipp August's von Frankreich die Beziehungen zwischen beiden Ländern vermehren half, so erscheint es weniger auffallend, einen Schriftsteller dänischer Nation am Ende des Jahrhunderts in Paris zu finden. Ein Petrus von Dacien soll sogar, nach den Einen 1326, nach Anderen 1337, Rector der pariser Universität gewesen sein, doch dürfte dieser entweder Petrus Strangonis de Dacia oder Petrus dictus Winter de Dacia heissend von Petrus Philomeni unterschieden werden müssen. Eine Osterrechnung auf das Jahr 1300 kann aber von unserem Petrus herrühren[3]), und ihm dürfen wir sicher auch eine

---

[1]) *Rara Mathematica* pag. 74—75. [2]) Günther, Unterricht Mittela. S. 167 Note 2. — Suter, Math. Univ. S. 43. — Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius (ed. M. Curtze, Kopenhagen 1897). [3]) Vossius pag. 397. Anno MCCC Petrus de Dacia librum contexuit de calculo seu computo.

Tabula magistri Petri Philomene de Dacia ad inveniendum propositionem cujusvis numeri[1]) in einer Vaticanhandschrift zuweisen, in welcher sämmtliche Producte von 1 mal 1 bis zu 49 mal 49 in Zahlen des Sexagesimalsystems ausgedrückt sind. Der Commentar von Sacrobosco's Rechenbuch ist vorzüglich, und wer ihn zu benutzen verstand, musste sich eine für die damalige Zeit achtunggebietende Summe von Kenntnissen erwerben. Zu jeder einzelnen Regel sind lehrreiche Beispiele gegeben, ausserdem aber stossen wir auch auf theoretisch Interessantes. Wir heben nur die arithmetischen Progressionen hervor. Petrus von Dacien betrachtet solche mit beliebigen ganzzahligen Gliedern. Die Summe wird bei grader Gliederanzahl gefunden, indem die halbe Gliederzahl mit der Summe des ersten und des letzten Gliedes vervielfacht wird. Bei ungrader Gliederzahl vervielfacht man diese mit der halben Summe des ersten und des letzten Gliedes. Gliederzahl oder Summe des ersten und letzten Gliedes oder beides muss immer grade sein[2]). Wir erwähnen ferner, dass bei Erörterung von Quadrat- und Kubikzahlen das Wort *fluere*, fliessen, gebraucht wird[3]), um eine ununterbrochene Bewegung zu bezeichnen. Eine Linie bildet fliessend eine Fläche, eine Fläche fliessend einen Körper. Das ist die früheste bisher bekannte Anwendung dieses bildlichen Ausdruckes. Sacrobosco hat der Null den Namen *teca*, *circulus*, *cyfra* beigelegt. Petrus von Dacien berichtet[4]), *teca* sei ein rundes Eisen, mittels dessen man Dieben ein Brandmal auf die Stirne oder auf die Wange aufgedrückt habe. Sehr glaubwürdig erscheint diese Herleitung freilich nicht, da ausser bei Petrus von Dacien und bei anderen von ihm abhängigen Commentatoren des Sacrobosco ein Wort *teca* für *cautherium* (das ist Brenneisen) nirgend vorkommt, viel wahrscheinlicher ist teca entstellt von *theta* wegen der Aehnlichkeit zwischen Θ und 0.

Etwa 20 Jahre nach Sacrobosco's Tode dürften ein Rechenbuch und eine Geometrie von unbekanntem Verfasser entstanden sein, deren wesentlichster Vorzug darin besteht, dass es die ersten derartigen Schriften in französischer Sprache sind, welche sich erhalten haben[5]). In dem sehr kurzen Traité d'algorisme findet sich die eben besprochene Vorschrift, wann man rechts, wann man links mit dem Rechnen beginnen müsse, in die Worte gekleidet: *Se tu*

---

[1]) Eneström in der Biblioth. math. 1890 pag. 32. [2]) Petri Philomeni de Dacia Commentarius pag. 68. [3]) Ebenda pag. 72 lin. 8 und 11. [4]) Ebenda pag. 26. [5]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 49—52. Dann folgt der Abdruck der Abhandlungen selbst und zwar *Traité d'algorisme* pag. 53—55 und *Traité de géométrie* pag. 55—70.

assembles ou abas ou dimidies tu commenceras a destre se tu dobbles ou multeplies ou devises tu commenceras a senestre. Wurzelausziehung nennt der Verfasser hier nicht, lehrt aber auffallenderweise bei Uebergehung der Quadratwurzel am Schlusse die Ausziehung der Kubikwurzel. Diese Lücke dürfte wie die übermässige Kürze des Ganzen die Frage anregen, ob von einem Ganzen gesprochen werden darf, ob die erhaltene Handschrift uns nicht etwa nur unzusammenhängende Bruchstücke aus einem verlorenen umfang- und inhaltsreicheren Ganzen bietet.

Einen weit vollständigeren Eindruck macht der Traité de géométrie. Die Geometrie handle, heisst es einleitungsmässig[1]), erstens von Messungen in der Ebene (le mesure des planetes), zweitens von Messungen der Höhe, der Tiefe und des Körperinhaltes (le mesure des hauteches et des profondeces et des crasses mesures), drittens von geometrischen und astronomischen Bruchtheilen (a trouer les minuces de gyometrie et dastronomie). Das gleichseitige Dreieck wird durch Zeichnung der Höhe (linel oder lunax) in zwei Hälften getheilt und dann Höhe und halbe Grundlinie vervielfacht; die Höhe findet man, indem $\frac{1}{7}$ der Grundlinie von dieser abgezogen wird[2]), eine Regel, welche seit dem Briefe Gerbert's an Adelbold (Bd. I, S. 816) bekannt war. Andere Dreiecke, deren Figuren uns dadurch eine kleine Ueberraschung bereiten, dass sie, ähnlich wie es in Aegypten (Bd. I, S. 55) Sitte war, die Spitze links, die Grundlinie in verticaler Lage rechts zeigen, sollen auch immer durch Vervielfachung der Höhe mit der halben Grundlinie gemessen werden. Die Rechnungen freilich stimmen mit den Zahlenangaben nur sehr dürftig überein. Beim Fünfeck[3]) ist in die Figur des nach aussen convexen Fünfecks die des Sternfünfecks mit den gleichen Eckpunkten eingezeichnet, was recht bemerkenswerth erscheint. Die Kreisperipherie (la circonference del compas) ist $3\frac{1}{7}$ mal der Durchmesser. Bei der Inhaltsberechnung ist wieder vielfach unrichtig gerechnet. Was der Verfasser orneure du cercle nennt, findet sich durch Vervielfachung des Durchmessers mit sich selbst und mit 22, worauf durch 7 getheilt wird; es sei das Vierfache des Kreisinhaltes. Das stimmt rechnungsmässig zur Kugeloberfläche und in der That hiess diese inauratura, woraus leicht orneure entstehen konnte. Die Grundbedeutung von inauratura ist die, dass ihre Grösse Antwort auf die

---

[1]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Geométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 55. [2]) Ebenda pag. 56. [3]) Ebenda pag. 58.

Frage gab, wie viel Edelmetall man brauche, um eine Kugel zu vergolden[1]). Soll der Kreis vom Durchmesser 7 in ein Quadrat verwandelt werden[2]), so ist dessen Seite $6\frac{1}{5}$ d. h. also $\sqrt{38\frac{1}{2}} \sim 6\frac{1}{5}$, vielleicht erhalten mittels $\sqrt{38\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}\sqrt{3850} \sim \frac{62}{10} = 6\frac{1}{5}$. Der Verfasser wusste demnach mit Brüchen zu rechnen und setzte das Gleiche von seinen Lesern voraus, wodurch vielleicht Bestätigung findet, was wir (S. 89) über die Möglichkeit besonderer Vorschriften zum Bruchrechnen geäussert haben. Wir verweilen nicht bei dem Innenkreise eines Dreiecks, von welchem gleichfalls die Rede ist[3]), nicht bei der zweiten Abtheilung, d. h. bei den Körperinhalten, da es kaum möglich ist, dem offenbar vielfach irrigen Texte ein volles Verständniss abzugewinnen. Die Vergleichung desselben mit den Körpermessungen bei Heron von Alexandria dürfte wahrscheinlich eine lohnende Untersuchung sein. In der dritten Abtheilung[4]) handelt es sich ausschliesslich um Rechnungen und zwar um Multiplicationen, unter welchen sich die Quadraterhebungen der Zahlen 11 bis 20 hervorheben lassen. Nur $13^2 = 169$ und $14^2 = 196$ ist vermuthlich beim Abschreiben vermengt worden, so dass 13 mal 13 von dem Ergebniss 196 begleitet ist. Von einigem Interesse sprachlicher wie arithmetischer Natur ist das vielfache Vorkommen des Vigesimalsystems[5]). Die Zahl 60 ist freilich LX geschrieben, dann aber folgt $\overset{\text{XX}}{\text{IIII}} = 80$, $\overset{\text{XX}}{\text{VI}} = 120$, $\overset{\text{XX}}{\text{VII}} = 140$, $\overset{\text{XX}}{\text{XI}} = 220$, und wollte man über die Lesung zweifelhaft sein, so schliessen Angaben wie XVIII fois XVIII sont XVI vins et IIII jede Möglichkeit eines Irrthums aus. Von den Zahlzeichen des Algorismus ist nirgend Gebrauch gemacht.

Bleiben wir noch immer in Frankreich, so haben wir Vincent de Beauvais oder mit lateinischem Namen Vincentius Bellovacensis zu nennen. Noch im XII. Jahrhundert geboren starb er 1265. Er war Mitglied des Dominikanerordens. König Ludwig der Heilige entzog ihn dem Kloster, um ihn persönlich um sich zu haben, und für den Unterricht der königlichen Söhne verfasste der allseitig gelehrte Mönch ein encyklopädisches Werk in 10 ungeheuren Bänden. Eine der Abtheilungen, in welche das erschreckend grosse Werk zerfällt, heisst Speculum doctrinale[6]), und dessen 17. Buch

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 141. Bemerkung von E. v. Wölfflin. [2]) Ch. Henry, *Sur les deux plus anciens traités français d'Algorisme et de Géométrie* im *Bulletino Boncompagni* XV, 59. [3]) *se tu fais 1 comas dedens le triangle si grant ke tu pues.* [4]) Sie beginnt ebenda pag. 64 Z. 3 v. u. [5]) Ebenda pag. 67. [6]) Eine Druckausgabe ist von 1473, eine spätere von 1624. Wir bedienten uns der älteren Ausgabe.

ist der Mathematik gewidmet[1]). Man sollte zum voraus der Meinung sein, der Ordensgenosse und fast Zeitgenosse eines Jordanus müsse tief in die Mathematik eingedrungen sein, müsse dem entsprechend in seinem grossartig angelegten Sammelwerke voll in die Fusstapfen jenes Gelehrten eingetreten sein. Man würde mit dieser Meinung sich täuschen. Das mathematische Buch entspricht vollständig dem Urtheile, welches ein gründlicher Kenner[2]) des XIII. Jahrhunderts über das ganze Werk ausgesprochen hat: es habe entstehen können, weil das Wissen der Zeit encyklopädisch war, umfassend und oberflächlich. Liber XVII De mathematica et eius speciebus beginnt mit dialektischen Haarspaltereien, wie z. B. dass die Arithmetik an der Spitze der Mathematik zu stehen habe, weil ohne Zahl keine Figur gemessen werden könne, während die Zahlen 3, 4 bleiben, auch wenn kein Dreieck oder Viereck vorhanden sei. Wer mit der Arithmetik des Boethius bekannt ist, erinnert sich augenblicklich dieser Sätze[3]). Andere Stellen weisen auf Isidorus hin, wie z. B. der Satz (Bd. I, S. 774): Nimm die Zahl aus allen Dingen weg, und Alles geht zu Grunde. Boethius und Isidorus werden auch dem entsprechend von Vincentius häufig als seine Gewährsmänner genannt. Das 9. Kapitel ist dem Computus[4]) und dem Algorismus gewidmet. Im weiteren Sinne des Wortes sei Computus jegliche Rechnung, genauer genommen nenne man so die Wissenschaft von der Zeit gemäss der Bewegungen von Sonne und Mond[5]). Damit ist freilich die Aufgabe des Computus erst gestellt, noch nicht gelöst, aber Vincentius begnügt sich damit, und seine Leser müssen die gleiche Enthaltsamkeit üben. Im gleichen Kapitel geht Vincentius zu der scientia algorismi über. Er erklärt Fingerzahlen, Gelenkzahlen, zusammengesetzte Zahlen. Eine Gelenkzahl sei irgend ein Zehnfaches[6]). Zum Anschreiben der Zahlen dienen neun Zahlzeichen. Diese sehen so aus, und nun folgt in der Druckausgabe ein leerer Raum! Man war offenbar in der Zeit der Incunabeln nicht im Stande, die Zeichen der dem Drucke zu Grunde liegenden Handschrift nachzubilden. Ein Ringelchen konnte man herstellen, und so fährt der Druck fort: O que cifra apellatur nihilque representat. Dann werden die sechs Rechnungsarten: Addition,

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* beruft sich fortwährend auf das 16. Buch. Dieser Gegensatz beruht darauf, dass in der älteren Ausgabe als I. Buch gezählt ist, was in den späteren Drucken *Prologus* heisst. [2]) Kaufmann, Geschichte der deutschen Universitäten I, 67. [3]) Boethius (ed. Friedlein) pag. 10—11. [4]) In der Druckausgabe von 1473 heisst es fortwährend *compotus* neben dem Zeitworte *computare.* [5]) *Proprie vero compotus dicitur scientia temporum distinctiva secundum motum solis et lunae tantum.* [6]) *Articulus est numerus decuplus ad aliquem.*

Subtraction, Verdoppelung, Halbirung, Multiplication, Division genannt, für welche geeignete Regeln im Algorismus gegeben seien; diese und viele andere Eintheilungen und Verhältnisse der Zahlen, von welchen bei Isidorus und Boethius die Rede sei, übergehe der Verfasser gegenwärtig der Kürze halber[1]). Den so stillschweigend auf einen zukünftigen Augenblick ausgestellten Wechsel hat Vincentius freilich unseres Wissens nie eingelöst. Die Musik folgt nun und auf diese mit Kapitel 36 die Geometrie. Sie besteht aus drei Abtheilungen, aus Ebenenmessung, Höhenmessung, Weltmessung. Eine entfernte Verwandtschaft mit der Eintheilung der französisch geschriebenen Geometrie wird man hier vielleicht erkennen dürfen, aber inhaltlich geht Vincentius nicht entfernt so weit wie jene. Einige Definitionen, eine Reihe von Grundsätzen, das ist nahezu die ganze Weisheit, und mit Rücksicht auf die Grundsätze bemerkt er in einer Glosse[2]) des 40. Kapitels — wenn anders diese Glosse nicht selbst abgeschrieben ist — Euklid habe viel Grundsätze übergangen. Im 41. Kapitel sind die beiden Grundrichtungen der römischen Feldmessung, cardo und decumanus (Bd. I, S. 498) erörtert, dann kommt die Astronomie zur Behandlung. Wir fürchten nicht es als Untreue gegen unsere Vermeidung dessen, was in die Geschichte der Astronomie gehört, beurtheilt zu sehen, wenn wir beiläufig erwähnen, dass das 46. Kapitel einen ganz ähnlichen Unterschied zwischen Astronomie und Astrologie macht, wie man es heute gewöhnt ist.

Auf französischem Boden, wahrscheinlich in Montpellier, wirkte 1271 Robertus Anglicus[3]) als Professor. Ob ihn der Name Anglicus als Engländer von Geburt bezeichnen soll, ob er nur einer früher englischen schon längere Zeit in Südfrankreich ansässigen Familie angehörte, lässt sich nicht mit Sicherheit bestimmen, wenn auch Manches für die letztere Annahme spricht. Jedenfalls hat Robertus Anglicus in Montepessulano (d. h. in Montpellier) eine Abhandlung über den Quadranten und dessen astronomische sowie feldmesserische Benutzung verfasst, welche in zahlreichen Abschriften aus zum Theil verhältnissmässig später Zeit sich an weit von einander entfernten Orten erhalten hat. Die Abhandlung ist

---

[1]) *De quibus singulis proprie regule date sunt in algorismo. quas et plures alias numeri divisiones et proportiones de quibus in ysidoro et boetio ad presens brevitatis causa praetermitto.* [2]) *Glosa. Nota quod multas communes scientias preter misit Euclides.* [3]) *Le traité du Quadrant de Maitre Robert Anglès* (Montpellier, XIII. Siècle). texte latin et ancienne traduction grecque publiés par M. Paul Tannery (Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque nationale etc. T. XXXV, 2e Partie pag. 560—640. Paris 1897).

sogar in's Griechische übersetzt worden, und eine Abschrift dieser Uebersetzung stammt etwa aus dem Jahre 1500. Der Quadrant ist im Wesentlichen die gleiche Vorrichtung, deren sich Leonardo von Pisa (S. 38) bediente. Der Kreisrand ist aber nicht in 16 Theile, sondern in 90 Grade eingetheilt. Das vorkommende Wort umbra lässt auf unmittelbare oder mittelbare Benutzung arabischer Quellen schliessen.

Der Dominikanerorden hat im XIII. Jahrhunderte noch manches hochbedeutenden Schriftstellers sich zu rühmen. Albertus Magnus (1193—1280), Thomas von Aquino (1225—1274) haben ihm angehört. Die Geschichte der beschreibenden Naturwissenschaften sowie der Physik müssen bei ihnen verweilen, der Mathematiker nennt sie mit Bedauern seiner Wissenschaft fremd.

Etwas mehr, wenn auch nicht sonderlich Günstiges haben wir von dem berühmten Franciskaner Roger Baco (1214—1294) zu berichten. Die Physik, die Chemie nennen seinen Namen unter den bedeutendsten. Er soll auch in einer handschriftlich in Oxford noch vorhandenen Schrift eine Kalenderreform[1]) vorgeschlagen und damit den Anstoss zu einer Bewegung gegeben haben, welche erst nach Jahrhunderten zur Ruhe kam. Aber nun die Mathematik! Freilich wenn man ihn hört liegt dort erst recht seine Stärke. Ich habe, sagt er im 20. Kapitel seines *Opus tertium*[2]), die Gewissheit, innerhalb einer Woche Jeden, der Aufmerksamkeit und Vertrauen besitzt, mit der ganzen Gewalt der Geometrie bekannt zu machen, und zwar mehr als die Mathematiker in zehn Jahren lernen. Und ebenso verhält es sich mit den Zahlen in einer anderen Woche. Denn sehr selten finden sich überhaupt Lehrer der Mathematik und diese haben eine sehr schlechte Unterweisungsart und lehren unendlich vieles Ueberflüssige. Desshalb verachtet man auch fast allgemein die Mathematik. Diesen theils stolzen, theils hämischen Worten dürfen wir Eines entnehmen, dass es damals in der öffentlichen Meinung auch gelehrter Männer schlecht um die Mathematik und ihren Unterricht stand. Bestätigung giebt noch eine andere Stelle[3]): den Knaben würden mit Ruthenschlägen die vier ersten Sätze der euklidischen Elemente beigebracht und schon der fünfte Satz heisse ihnen *Elefuga*, das sei Flucht der Unglücklichen. Wenn es wirklich so aussah, wenn wenigstens dort, wo Baco Gelegenheit hatte, Lehrer und Lernende zu beobachten, der Satz von der Gleichheit der Winkel an

---

[1]) Wolf, Geschichte der Astronomie S. 328—329. — Cantor, Zeit und Zeitrechnung in den Neuen Heidelberger Jahrbüchern II, 202. [2]) Fr. Rogeri Bacon *Opera quaedam hactenus inedita* (edidit J. S. Brewer 1859) I, 66. [3]) Ebenda pag. 21.

der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks so furchtbar erschien, dann begreift man Baco's Hohn. Ob seine Ruhmredigkeit eben so festen Boden unter sich hatte, darüber müssen wir seine Schriften fragen, und die Antwort, welche sie uns geben, klingt nicht sehr befriedigend. Im 40. Kapitel des Opus tertium[1]) ergeht sich Baco in stereometrischen Faseleien, welche ihm kein glänzendes Zeugniss ausstellen. Es handelt sich um die lückenlose Ausfüllung des Raumes. Der Raum ist lückenlos erfüllt, wenn 8 Würfel an einer Ecke zusammenstossen. Jede Würfelecke wird durch 3 ebene Winkel im Gesammtbetrag von 3 Rechten gebildet, also treten bei dem erwähnten Eckpunkte 8 mal 3 Rechte oder 24 Rechte zusammen, und nun bildet Baco sich ein, es trete stets eine lückenlose Raumerfüllung ein, wo die Summe sämmtlicher ebenen Winkel bei dem Zusammensetzungspunkte 24 Rechte betrage. Im Tetraeder sind an jeder Ecke 3 Winkel von je 60^0, zusammen 2 Rechte, also erfüllen 12 an einer Ecke zusammenstossende Tetraeder den Raum. Im Oktaeder betragen die 4 Winkel von je 60^0 an jeder Ecke $\frac{8}{3}$ Rechte, also erfüllen 9 an einer Ecke zusammenstossende Oktaeder den Raum. Im 39. Kapitel des Opus tertium[2]) hatte Baco vorher über stetige Raumgrössen gesprochen und die Unmöglichkeit betont, solche aus einzelnen Punktelementen herzustellen. Einen schlagenden Beweis dafür habe er erfunden. Wäre die Ebene durch solche Punkte gebildet, so würde (Figur 19) die Diagonale eines Quadrates der Seite desselben gleich sein, weil auf beiden gleich viele Punkte liegen, und das sei geometrisch unmöglich. Hierin liegt wenigstens keine mathematische Unrichtigkeit. Ein etwas höheres mathematisches Wissen verrathen Baco's optische Leistungen[3]). So, wenn er die Lage des Brennpunktes am Hohlspiegel bestimmt, wenn er von der Anfertigung parabolischer Spiegel redet, wenn er von der Perspective handelt.

Fig. 19.

Die Perspective, dem Abendlande durch Uebersetzungen der Optik des Ibn Alhaitam (Bd. I, S. 744) bekannt geworden, bildet nunmehr einen regelmässig wiederkehrenden Gegenstand schriftstellerischer Thätigkeit, den wir, ohne ihm eingehende Würdigung angedeihen zu

---

[1]) Fr. Rogeri Bacon *Opera quaedam hactenus inedita* (edidit J. S. Brewer 1859) I, 137. Auf diese Stelle hat K. Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton I, 203 aufmerksam gemacht. [2]) Ebenda pag. 132. Vergl. Lasswitz l. c. I, 194 aber auch I, 149, wo der Beweis Baco's bereits bei den arabischen Mutakallimun nachgewiesen ist. [3]) Heller, Geschichte der Physik (1882) I, 201—202.

lassen, immerkin kurz erwähnen dürfen. So schrieb über Perspective der Ordensgenosse Baco's Johannes Peckham[1]), lateinisch Pisanus aus Sussex (um 1240—1292), Bischof von Canterbury. Ein Schüler Baco's war Johannes von London[2]). Baco führte ihn dem Franciskanerorden zu und nahm ihn mit sich nach Paris, wo er als Philosoph sich auszeichnete. Später vermittelte Johannes als Bote Baco's dessen Briefwechsel mit dem Papste, der ihn in Rom behalten zu haben scheint. Ein Brief des Johannes von London über astronomische Fragen hat sich in der Pariser Bibliothek erhalten. Johannes von London ist es auch, welchen Baco im 11. Kapitel seines Opus tertium als einen der beiden vollkommenen Mathematiker seiner Zeit bezeichnet[3]). Der andere ist ihm Petrus de Mahar-curia aus der Picardie, d. h. also Pierre de Maricourt, der in der Geschichte des Magnetismus eine hervorragende Rolle gespielt hat, gut auch noch Magister Campanus von Novaria (sic). Ueber Campanus reden wir noch in diesem Kapitel. Peckham's Perspektive wurde in den folgenden Jahrhunderten gradezu akademischer Leitfaden für die betreffende Universitätsvorlesung. Zu Baco's Zeiten wurde in Paris noch nicht über Perspektive gelesen, dagegen zweimal in Oxford[4]).

Die Geschichte der Perspective gestattet uns auch Witelo[5]) zu nennen, den Sohn eines Thüringers und einer Polin, der auf polnischem Boden geboren in einer Prämonstratenserabtei im Hennegau unweit von Valenciennes lebte. Durch Verketzerung nahm sein in Thüringen im XIII. Jahrhundert häufig vorkommender Name die lateinische Form Vitellio an, welche den Druckausgaben seiner Perspective vorgesetzt ist. Gewidmet ist das Werk dem Bruder Wilhelm von Moerbecke, der uns gleich weiter beschäftigen wird. Von dem Inhalte des Werkes, dessen erstes Buch übrigens eine ganz nette Geometrie sein soll[6]), haben wir hier nicht weiter zu reden, als dass wir die Schriftsteller nennen, welche Witelo erwähnt[7]). Er beruft sich ausser auf Ibn Alhaitam auf lauter griechische Mathematiker: Euklid, Ptolemäus, Apollonius, Theodosius, Menelaus, Theon,

---

[1]) Die Lebenszeit geben wir nach Poggendorff II, 385. Ueber Peckham's Perspective vergl. Kästner II, 264—274. [2]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, Biographische Einleitung pag. XC Note 1. Fontès in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-lettres de Toulouse. Année 1897 und ebenda 1898. [3]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, 34—35. [4]) Ebenda pag. 37. [5]) Ueber Name und Persönlichkeit vergl. Max. Curtze in *Bullet. Boncompagni* IV, 49 und 78. Zebrawski ebenda XII, 315 und Curtze's letzte Erwiderung in Grunert's Archiv LXIV, 432. [6]) Curtze brieflich. [7]) Poudra, *Histoire de la perspective* (1864) pag. 34.

Pappus, Proklus. Es möchte sich lohnen, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob Witelo seinem arabischen Vorgänger auch in diesen Namensnennungen einfach folgt, oder ob er selbst jene Schriftsteller gelesen, und wenn er sie gelesen haben sollte, ob in der griechischen Ursprache oder in einer lateinischen Uebersetzung, welche dann vermuthlich den Umweg einer vorhergegangenen arabischen Uebersetzung als Text benutzte.

Die griechische Sprache muss man der Zeit, von welcher wir reden, keineswegs für unzugänglich halten. Baco sagt im 6. Kapitel seines Compendium studii philosophiae[1]): „Das Griechische hat sehr bedeutende Uebereinstimmungen mit dem Lateinischen, und es giebt Viele in England und Frankreich, welche hinlängliches Wissen hierin besitzen. Auch wäre es nicht zu viel, um solchen Nutzens wegen nach Italien zu gehen, wo Geistlichkeit und Volk an vielen Orten die reinen Griechen sind.“ Die Sprache war also im Besitze der Gelehrten des XIII. Jahrhunderts, nur an den Werken, welche man hätte lesen können, fehlte es meistens. Solche waren noch in Italien aufzufinden, sofern man es nicht wagte, bis nach dem byzantinischen Reiche den Spuren zu folgen. Unter den Männern, welche vielleicht in Griechenland selbst, vielleicht in Italien griechische Mathematiker aufzustöbern wussten, nennen wir den Dominikaner Wilhelm von Moerbecke[2]). In Ostflandern in der Nähe des Klosters, dem Witelo angehörte, geboren, machte er Reisen wahrscheinlich auch in Griechenland. Im Jahre 1268 war er bei Papst Clemens IV. in Viterbo, und dort übte er seine Uebersetzungskunst aus. Seit 1278 Erzbischof von Korinth hielt er sich 1280 und 1281 persönlich an dem Sitze des Erzbisthums auf. Sein Tod dürfte nicht lange nach 1281 fallen. Unter den zahlreichen, durch Wilhelm von Moerbecke, wie man sagt, auf Anheissen des Thomas von Aquino übersetzten Schriften nennen wir nur zwei: Die Katoptrik Herons von Alexandria[3]), welche er allerdings für ein Werk des Ptolemäus hielt, und die Schriften des Archimed, insbesondere dessen Abhandlung über auf dem Wasser schwimmende Gegenstände[4]), deren griechische Urschrift seit jener Zeit spurlos zu Grunde gegangen ist.

Aehnliche Neigung und Fähigkeit, wie Wilhelm von Moerbecke sie besass, ausländische Mathematik dem Abendlande zugänglich zu machen, können wir noch anderen Persönlichkeiten nachrühmen.

---

[1]) Baco, *Opera inedita* (ed. Brewer) I, 434. [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXIV, 215. [3]) Val. Rose, *Anecdota Graeca et Graecolatina.* Heft II, (1870) S. 293—294. [4]) Val. Rose in der Deutschen Literaturzeitung 1884, S. 210. — Heiberg, Neue Studien zu Archimedes in Zeitschr. Math. Phys XXXIV (1889), Supplementheft.

Ein Engländer Atelhart von Bath (Bd. I, S. 851) hatte mit Reisen in den Orient am Anfange des XII. Jahrhunderts den Reigen eröffnet. Ihm wollte um die Wende des XII. zum XIII. Jahrhundert Daniel von Morley[1]) folgen, der noch 1180 in Oxford studirte, dann nach Paris sich begab, um von dort nach Arabien aufzubrechen. Als er aber in Erfahrung brachte, Toledo sei der Sitz einer mathematischen Schule, wandte er seine Reise dorthin und kehrte mit reichem Wissen in die Heimath zurück, hier als Lehrer sein Leben beschliessend. Johannes von Basyngstoke[2]) studirte am Anfange des XIII. Jahrhunderts gleichfalls in Oxford. Auf seinen Reisen kam er um 1240 nach Athen, wo er geraume Zeit verweilte und den Unterricht der gelehrten Tochter des dortigen Erzbischofs genoss. Von ihr erlernte er das Griechische. Nach England zurückgekehrt übersetzte er Verschiedenes aus dem Griechischen. Er starb 1252. Der Chronist Mathaeus von Paris erzählt in seiner Geschichte Englands zu dem Jahre 1252 von diesem allgemeine Betrübniss erzeugenden Todesfall und bemerkt dabei, der Verstorbene habe aus Athen die Kenntniss der griechischen Zahlzeichen mitgebracht, welche zugleich auch Zeichen für Buchstaben sind[3]). Man wird nicht irre gehen, hierin die gewöhnliche griechische Benutzung ihrer sämmtlichen Buchstaben mit Zahlenwerth[4]) zu erkennen. In Italien hat jedenfalls im XIII. Jahrhundert Guglielmo de Lunis[5]) eine Algebra aus dem Arabischen in das Lateinische übersetzt.

Wesentlich ausführlicher als mit diesen Uebersetzern müssen wir mit Johannes Campanus von Novarra uns beschäftigen. Bestimmt das ihm von Roger Baco ertheilte Lob (S. 98) schon seine Lebenszeit, so ist eine weitere Bestätigung dadurch gegeben, dass Campanus Kaplan des Papstes Urban IV. war[6]), welcher 1261—1281

---

[1]) Suter, Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters S. 21. Wir citiren die sehr gehaltvolle Schrift künftig als Suter, Math. Univ. [2]) Ebenda S. 33—34. [3]) *per quas figuras etiam literae representantur.* [4]) Auch der bei Math. Paris. sich noch anschliessende Satz: *De quibus figuris hoc maxime admirandum quod unica figura quilibet numerus representatur quod non est in Latino vel in Algorismo* stimmt ganz gut mit dieser gewöhnlichen Erklärung, der gegenüber eine abweichende Meinung (Zeitschr. Math. Phys. XXX, Hist.-liter. Abthlg. S. 126) irrig erscheint. [5]) Libri II, 45. H. Gino Loria hat die Algebra im Codex 216 der Florentiner Nationalbibliothek neuerdings untersucht und sich überzeugt, dass sie in lateinischer und nicht, wie Libri behauptet, in italienischer Sprache geschrieben ist. Andererseits ist freilich Libri's Behauptung gestützt auf die Aussage Canacci's, der dem XIV. Jahrhunderte, und Ghaligai's, der dem Anfange des XVI. Jahrhunderts angehörte, sodass man fragen möchte, ob es nicht zwei Bearbeitungen gab, eine lateinische und eine italienische? [6]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* IV, 154—160.

regierte. Später scheint er Kanonikus in Paris gewesen zu sein, und daher stammt vermuthlich die in älteren Werken vertretene irrige Ansicht[1]), als habe es zwei Schriftsteller gegeben, welche beide den Namen Campanus führten. Verschiedene Schriften werden als von Campanus herrührend genannt. Er beschäftigte sich mit der Mangelhaftigkeit der Kirchenrechnung[2]). Ferner geht auf seinen Namen eine Abhandlung über die Quadratur des Kreises, welche aber von Gelehrten[3]), denen eine Druckausgabe aus dem Jahre 1503 vorlag, als eine so schwache Leistung bezeichnet wird, dass man Bedenken tragen müsse, sie Campanus zuzuschreiben. Andrerseits nennt Albert von Sachsen[4]) nur 100 Jahre nach Campanus ausdrücklich diesen als den Verfasser, und so muss doch einen Augenblick dabei verweilt werden. Eine Linie, welche $3\frac{1}{7}$mal die Länge des Durchmessers habe, heisst es, sei gleich der Kreisperipherie. Ebendieselbe ist der Umfang eines Quadrates, dessen Seite somit der siebente Theil von $5\frac{1}{2}$ Durchmessern ist, und dieses Quadrat wird als das gesuchte bezeichnet. Es wäre immerhin denkbar, Campanus habe bei dieser Darstellung nicht an Flächengleichheit gedacht, das Wort Quadratura circuli bedeute ihm vielmehr, allerdings abweichend von dem Sinne des Wortes bei Franco von Lüttich, nur das Zusammenbiegen der Kreisperipherie zu einem umfanggleichen Quadrate. Das hervorragendste Verdienst des Campanus ist jedenfalls die von ihm veranstaltete Ausgabe der euklidischen Elemente mit Einschluss der beiden Bücher, welche fälschlich als 14. und 15. Buch der Elemente benannt werden (Bd. I, S. 342). Wir haben die wichtige Frage nach den lateinischen Euklidübersetzungen, deren das Mittelalter sich bediente (S. 74), im Vorübergehen gestreift. Auch gegenwärtig wagen wir nicht, sie endgültig zu beantworten, da sie zu den Fragen gehört, welche noch heftigem Widerstreit der Meinungen begegnen[5]). Vielleicht liegt die Sache so: lateinische Uebersetzungen des griechischen Euklidtextes gab es sehr frühzeitig. Ein Fragment einer solchen hat sich erhalten (Bd. I, S. 526), über eine durch Boethius

---

[1]) Vossius pag. 178 und 449. [2]) Neue Heidelberger Jahrbücher II, 201. [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 515 (deutsch 602). [4]) Vergl. Suter in der Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 90 und 95. [5]) Als Vertreter der verschiedenen Ansichten vergl. H. Weissenborn in der Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 143—166 und dessen Monographie: Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti (1882). Max Curtze in der Philologischen Rundschau (1881) I, S. 943—950 und in dem Jahresbericht über die Fortschritte der classischen Alterthumswissenschaft XL (1884 III) S. 19—22. Heiberg in der Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Hist.-liter. Abthlg. S. 48—58 und 81—86.

angefertigte Euklidübersetzung wird jedenfalls ausdrücklich berichtet (Bd. I, S. 535), um die hier müssige Frage, ob sie sich erhalten hat, zu übergehen. Auch aus dem Arabischen stammende lateinische Euklidübersetzungen hat es unzweifelhaft sehr früh gegeben. Eine Münchner Handschrift aus dem XI. Jahrhunderte, also vor Atelhart von Bath entstanden, kann als Beweis dienen, da in ihr Spuren arabischer Zwischenarbeit neben solchen des griechischen Urtextes nachgewiesen worden sind. Vielleicht schon damals haben zwei wesentliche geschichtliche Irrthümer sich eingeschlichen. Der eine, durch den lateinischen Geschichtsschreiber Valerius Maximus veranlasst (Bd. I, S. 247), verwechselt den Mathematiker Euklid mit dem „sokratischen Philosophen", um die Redeweise einer pariser Handschrift zu gebrauchen, d. h. mit Euklid von Megara. Der andere gleichfalls vermuthlich ältere Irrthum (Bd. I, S. 542) hält Euklid nur für den Verfasser der Definitionen, der Axiome, der Lehrsätze und nimmt für die Beweise einen anderen Urheber an: Theon von Alexandria. Als nun Atelhart von Bath seine Euklidübersetzung anfertigte (Bd. I, S. 670), dürfte ihm ausser einem arabischen Texte auch schon eine lateinische Bearbeitung, ganz oder in Bruchstücken, zur Hand gewesen sein, eine Annahme, welche durch einen Vers[1]) eines englischen Dichters unbekannten Zeitalters unterstützt wird. Jener Dichter erzählt nämlich, die Geometrie sei durch Euklid in Aegypten erlernt worden und

Thys craft com ynto England, as y ghow say,
Yn tyme of good kyng Adelstones day.

Die Einführung in England rückt dadurch in die fast sagenmässige Zeit des beginnenden X. Jahrhunderts hinauf. Hat aber Atelhart auf einen Vorgänger sich stützen dürfen, so wird das Gleiche für Campanus wahr sein, und die grosse Uebereinstimmung des Textes der Lehrsätze bei Atelhart und bei Campanus legt die Vermuthung nahe, es sei die gleiche lateinische Vorarbeit gewesen, deren beide sich bedienten. Zwar könnte diese Uebereinstimmung ungezwungen dahin gedeutet werden, Campanus habe den Atelhart'schen Euklid vor sich gehabt, wie man wahrscheinlich zu machen wusste, dass es der Atelhart'sche Euklid war, dessen Jordanus Nemorarius sich bediente[2]), doch lässt sich diese zunächst sich bietende Erklärung kaum aufrecht halten. Die Beweisführungen von Atelhart und Campanus unterscheiden sich nämlich mehr von einander, als man mit einer Benutzung der ersteren durch den letzteren in Einklang bringen

---

[1]) M. S. Bib. Reg. Mus. Brit 17. A. 1. f. 2^b—3 abgedruckt in Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 56 Note. [2]) Jordanus, *Trianguli* S. XII der Curtzeschen Einleitung.

kann. Erstens ist ein Unterschied der Anordnung vorhanden: Atelhart's Bearbeitung lässt regelmässig die Beweise den Lehrsätzen, zu welchen sie gehören, vorausgehen, Campanus hält die richtige Reihenfolge ein. Zweitens, und dieses dürfte noch schwerer ins Gewicht fallen, sind Atelhart's Beweise knapp und gedrungen, die des Campanus ausführlich und deutlicher. Nunmehr sind wir aber erst bei dem schwierigsten Theile der ganzen Frage angelangt: Sind die so verschiedenen Beweise Uebersetzungen aus arabischen Euklidausgaben, welche bereits die gleichen Verschiedenheiten aufwiesen, oder gehören die zwei Fassungen wenigstens bis zu einem gewissen Grade den beiden Uebersetzern an? Sind Zusätze, welche da und dort sich finden, gleichfalls fremden Ursprungs? Ein bei Atelhart wie bei Campanus vorhandener Nachtrag zu den Axiomen, in welchem mit den gleichen Worten, welche als Glosse bei Vincent von Beauvais vorkommen (S. 95), Euklid vorgeworfen wird, er habe nicht alle Grundsätze namhaft gemacht, wird bei dem Versuche, auch auf diese Fragen Antwort zu ertheilen, nicht unbeachtet bleiben dürfen. Wir wagen es nicht anders als mit der Bezeichnung ganz persönlichen Dafürhaltens unsere Ansicht dahin auszusprechen, dass wir im arabischen Grundtexte die Quelle jener Zusätze vermuthen, ebenso wie die Namen *elmuain* und *elmuharifa*, deren Atelhart, deren auch Campanus sich bedient, um den Rhombus und das unregelmässige Viereck zu bezeichnen, ganz gewiss arabisch sind.

Fällt damit jeder Anspruch des Campanus, den Platz in der Geschichte der Mathematik, den er Jahrhunderte lang behauptet hat, auch fernerhin zu behaupten? Wir glauben nicht. Die Schilderung der einzelnen Persönlichkeiten des XIII. Jahrhunderts, welche uns in diesem Abschnitte beschäftigte, hat den niederen Stand damaligen geometrischen Wissens dadurch genügend gekennzeichnet, dass Geometrisches von so Wenigen zu erzählen war. Und Campanus hat sich doch die Aufgabe gestellt, den Meister der Geometrie seinen Zeitgenossen näher zu bringen. Er hat diese Aufgabe, wenn nicht für die Zeitgenossen, jedenfalls für spätere Jahrhunderte erfüllt und damit ein grosses Verdienst sich erworben. Einige Stellen in der Euklidausgabe des Campanus haben durch den Einfluss, welchen sie auf spätere Zeiten zu üben vermochten, geschichtliche Bedeutung, und wir erwähnen sie ihrer Reihenfolge nach ohne weitere Berücksichtigung des eigentlichen Ursprunges dieser Stellen.

Der euklidische Satz I, 32 misst die Summe der Dreieckswinkel. Im Anschlusse daran lehrt Campanus die Winkelsumme des Sternfünfecks kennen (Figur 20). Im Dreiecke bhk sagt er, sei $\sphericalangle fba = h + k$ als Aussenwinkel. Ebenso zeige das Dreieck agi, dass

$\sphericalangle fab = g + i$. Endlich im Dreiecke abf ist $\sphericalangle fba + fab + f = h + k + g + i + f = 2R$.

Der Satz III, 16 sagt aus, der Winkel zwischen Kreisbogen und Berührungslinie sei kleiner als irgend ein gradliniger spitzer Winkel. Das ist der Contingenzwinkel, wie Jordanus (S. 77) ihn nannte. Der Satz X, 1 behauptet, dass von zwei Grössen die grössere durch fortgesetztes Wegnehmen von mehr als der Hälfte schliesslich kleiner werde als die kleinere. Campanus stellt die beiden Behauptungen in Gegensatz zu einander und findet die Lösung des Gegensatzes darin, dass der Satz X, 1 nur von Grössen gleicher Art Geltung habe, womit zugleich ausgesprochen ist, der Contingenzwinkel sei nicht gleicher Art mit einem gradlinigen Winkel. Ausser dieser gewiss richtigen Bemerkung folgert aber Campanus noch weiter das Unzutreffende eines Satzes, der, seit Bryson ihn gemäss des aristotelischen Berichtes (Bd. I, S. 190) bei seiner Kreisquadratur anwandte, als unumstösslich wahr galt, und den, was das Auffallendste ist, Campanus selbst am Anfange seiner Euklidausgabe mit den Worten ausspricht: *quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam eiusdem generis, tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam eiusdem generis in quantitatibus continuis*, wo das Schwergewicht auf die Worte in quantitatibus continuis fällt. Bei der stetigen Grösse muss ein Viertes sich finden lassen, zu welchem ein Drittes in dem Verhältnisse steht, wie ein Erstes zu einem Zweiten. Das ist aber nur dem Ausdrucke, nicht dem Sinne nach verschieden von dem Satze, dass beim stetigen Uebergange von einem Kleineren zu einem Grösseren unbedingt ein Zwischenzustand eintreten müsse, der irgend einem zwischen dem Kleineren und dem Grösseren Liegenden genau gleich sei, und dieses Satzes Unwahrheit behauptet Campanus an dieser zweiten Stelle der Euklidausgabe (Fig. 21). Der Winkel, welchen der Kreis mit dem Durchmesser ac bilde, sei grösser als der Winkel dac, kleiner als fac, und doch finde sich kein ihm gleicher Winkel, wenn der Schenkel ad um den Drehungspunkt a gegen die Lage af hinbewegt werde.

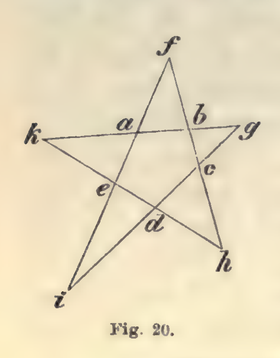


Fig. 20.

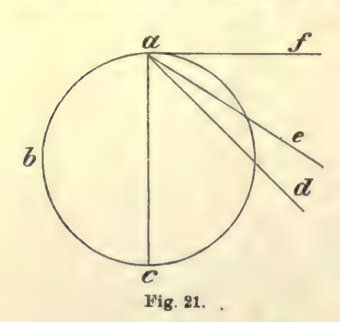


Fig. 21.

Am Schlusse des IV. Buches lehrt Campanus die Dreitheilung

des Winkels[1]). Es ist genau das gleiche Verfahren, welches wir (S. 81) als 20. Satz im 4. Buche De triangulis kennen gelernt haben, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Buchstaben an den Figuren des Campanus stets in lateinischer Reihenfolge gewählt sind, während sie bei Jordanus, wie wir uns erinnern, nach griechisch-arabischem Brauche aufeinander folgten. Merkwürdigerweise fehlt die Winkeldreitheilung in den Handschriften der Euklidausgabe des Campanus[2]).

Die 5. Definition des V. Buches[3]) (Bd. I, S. 263) machte Schwierigkeiten, welche in der verkehrten Uebersetzung wurzelten. Campanus konnte diese, mochte sie von einem Anderen herrühren oder von ihm selbst, nicht gut anders als in dem Sinne verstehen, dass Euklid gesagt hätte, damit Grössen in stetiger Proportion stehen, müssten alle Vielfache derselben gleichfalls in stetiger Proportion stehen, was doch nur eine Definition durch sich selbst, ein Zirkel im Erklären sei. Wir wiederholen, es war Uebersetzungssünde, nicht Unverständniss, welche hier sich rächte, und welche eine stetige Proportion einführte, wo es nur um eine aus irgend vier Grössen bestehende sich handelte.

Zu IX, 16 hat Campanus 13 Zusätze ausgesprochen, deren letzter die Unmöglichkeit behauptet, irgend eine Zahl so zu theilen, dass das Product des Ganzen in den kleineren Theil dem Quadrate des grösseren Theiles gleich werde. Der Gang des Beweises ist in algebraischer Bezeichnung folgender[4]). Sei $(x_1 + x_2) : x_1 = x_1 : x_2$, so folgt $x_1 : x_2 = x_2 : (x_1 - x_2)$ oder wenn $x_1 - x_2 = x_3$ d. h. $x_1 = x_2 + x_3$ gesetzt wird, was wegen $x_1 > x_2$ geschehen darf, auch $(x_2 + x_3) : x_2 = x_2 : x_3$ und damit ist zugleich $x_2 > x_3$ erwiesen. Fortsetzung des gleichen Verfahrens führt zu $(x_3 + x_4) : x_3 = x_3 : x_4$ mit $x_4 = x_2 - x_3 < x_3$ u. s. w. ins Unendliche. Weil aber, wie Euklid in VII, 31 es ausdrücklich ausgesprochen hat, nicht unendlich viele immer kleiner werdende Zahlen möglich sind, so ist gleich

---

[1]) Ein wortgetreuer Abdruck der ganzen Stelle findet sich in Kästner's Geometrischen Abhandlungen I. Sammlung (1790), S. 235—240. Ferner auch in Curtze's *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. Math. Phys. XIX, S. 81. [2]) Curtze brieflich. [3]) Kästner, I, 297—298 giebt den Worlaut dieser Uebersetzung als: *Quantitates quae dicuntur continuam habere proportionalitatem, sunt, quarum aeque multiplicia aut aequa sunt, aut aeque sibi sine interruptione addunt aut minunt.* Was Kästner dabei von dem mit simul zu übersetzenden ἅμα sagt, ist irrig. Das griechische Wort heisst gar nicht ἅμα, sondern ἰσάχις und ist ganz richtig mit aeque wiedergegeben. Der Uebersetzungsfehler steckt in den Worten ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, wo von einer *continua proportionalitas* nicht die Rede ist. [4]) Genocchi in den *Annali di scienze matematiche e fisiche* von Tortolini VI, 307—308.

die erste Annahme falsch, die Irrationalität des goldenen Schnittes somit festgestellt.

So sind wir am Ende des XIII. Jahrhunderts angelangt, ein Abschnitt durch die Zeitrechnung, kein solcher durch innere Gründe. Wir müssen gleichwohl der Uebersichtlichkeit das Opfer bringen, ein Ende eintreten zu lassen, wo kein Schluss ist, und uns zunächst von Jahrhundert zu Jahrhundert, dann in kürzeren Abschnitten den Abgrenzungen zufälliger Zeiteintheilung fügen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieses neunten Abschnittes überhaupt, des ersten des II. Bandes, ist leicht veranstaltet. Haben wir doch das XIII. Jahrhundert als ein solches kennen gelernt, in welchem zwei wirklich hervorragende Mathematiker, ein Laie und ein Geistlicher, zu Beginne des Jahrhunderts auftreten. Sie leisten auf allen Gebieten der Mathematik Gewaltiges, zu Gewaltiges, als dass die Zeitgenossen mitkommen, oder gar über sie hinaus den Weg fortsetzen konnten. Kein Dritter findet sich im XIII. Jahrhunderte, der neben Leonardo von Pisa und neben Jordanus Nemorarius gestellt werden dürfte, ja vielleicht kein Dritter, der in sich aufzunehmen suchte, was Jene in Rechenkunst und Zahlentheorie, in Algebra und Geometrie hervorgebracht haben. Die handwerksmässige Rechenkunst, wie sie aus dem geistvollen Algorithmus demonstratus unter Verflüchtigung allen Geistes als Niederschlag zurückblieb, wurde von Ordensbrüdern geübt und weiter verbreitet. So kam wohl allmälig die Kenntniss der Zahlzeichen und ihres Stellungswerthes in die grosse Menge. In den Handschriften des Lehrgedichtes der Wälsche Gast, deren älteste auf die zweite Hälfte des XIII. Jahrhunderts zurückgeht und, wie man annimmt, nicht in Klosterkreisen entstand[1]), erscheint auf einem Bildchen die Arithmetik, welche solche Zahlzeichen vor sich hat. Neben den eigentlichen Schriftstellern, wenn man so sagen darf, erscheinen einzelne Uebersetzer, Campanus wohl der mathematisch begabteste unter ihnen, welche neuen Lehrstoff der alten Wissenschaft entnahmen. Wird auch dieser zunächst nur als Ballast mitgeführt werden? Diese Frage hat das XIV. Jahrhundert zu beantworten.

---

[1]) A. von Oechelhäuser, Der Bilderkreis zum Wälschen Gaste von Thomasin von Zerclaere (1890), S. 79. Die Abbildung selbst in photographischer Nachbildung auf Tafel VI. Erörterungen dazu auf S. 64.

X. Die Zeit von 1300—1400.



46. Kapitel.

Englische Mathematiker.

Die Frage, mit welcher der vorige Abschnitt schloss, vollständig zu bejahen ist für den Geschichtsschreiber insofern nicht ohne Gefahr, als neue Entdeckungen einem solchen Ausspruche leicht seine Grundlage rauben könnten. Das XIV. Jahrhundert ist in mehr als nur einer Beziehung dem XIII. vergleichbar. Vor Allem ist der äussere Umstand hervorzuheben, dass, als Montucla[1]) am Ende des XVIII. Jahrhunderts sein Meisterwerk der Geschichte der Mathematik schuf, dem man heute noch keinen weiteren Fehler vorwerfen kann, als dass es nicht mehr und nicht Anderes enthielt als damals den Gelehrtesten bekannt war, dass, sagen wir, in jener Zeit das XIII. und XIV. Jahrhundert für den Mathematiker etwa so aussah, wie eine Landkarte des Innern von Afrika, gedruckt während Montucla die Presse beschäftigte. Eine weisse Fläche bot sich dem Beobachter, unterbrochen hier und da durch einen Namen, dem meistens ein vorsichtiges Fragezeichen beigefügt war, oder doch beigefügt hätte sein sollen. Das hat sich wesentlich geändert. Wie in der mathematischen Entwicklung des XIII. Jahrhunderts treten auch in der des XIV. Jahrhunderts bestimmte gesicherte Höhepunkte deutlich hervor. Auch der Charakter ihrer Umgebung ist so weit bekannt, dass man dieselbe, ohne ungerecht zu sein, eine Tiefebene wird nennen dürfen. Aber davon ist die Gegenwart doch weit entfernt, dass sie genau alle Verbindungsstrassen von einem zum anderen Punkte nachzuweisen im Stande wäre, dass sie sicher wäre, nicht an ganz Wesentlichem, aber noch nicht bekannt gewordenem, vorbeigeirrt zu sein. Der Verfasser dieser Vorlesungen ist durchdrungen von dem Gefühle der Lückenhaftigkeit des vorigen wie dieses Abschnittes. Er hofft auf's Höchste, ein künftiger Geschichtsschreiber möge ihm keinen anderen Vorwurf

---

[1]) Montucla, *Histoire des Mathématiques.* IIe. édition. Paris 1799—1802. Die beiden ersten Bände sind von Montucla selbst bearbeitet, der dritte und vierte nach Montucla's Tode (18. December 1799) von Lalande. Wir citiren das in diesem Bande mehrfach benutzte Werk kurzweg als Montucla.

zu machen haben, als den wir heute gegen Montucla erheben müssen. Unter solchen Voraussetzungen ist jedem Ausspruche ein grosses „vielleicht“ hinzuzudenken, und nur innerhalb dieser selbstgezogenen Grenzen glauben wir eine wissenschaftliche Aehnlichkeit des XIV. mit dem XIII. Jahrhunderte behaupten zu dürfen.

Dem XIV. Jahrhunderte gebrach es so wenig als dem XIII. an erhaltender Thätigkeit. Uebersetzungen mathematischer Werke aus dem Griechischen, aus dem Arabischen sind wir zwar nicht im Stande mit besonderen bekannten Namen zu belegen, aber das Vorhandensein hochwichtiger mathematischer Handschriften aus dem XIV. Jahrhunderte in fast allen bedeutenderen Bibliotheken ist Zeugniss von der Wahrheit unserer Behauptung. Die Uebersetzung des Buches der drei Brüder in Basel[1]) ist mit grösster Wahrscheinlichkeit von Gerhard von Cremona angefertigt. In dem vorhandenen Verzeichnisse der von ihm herrührenden Uebersetzungen ist das Buch der drei Brüder erwähnt. Dort findet sich auch die Bemerkung, Gerhard habe in seinen Uebersetzungen sich nie genannt[2]). Ist aber die Uebersetzung anderer in dem gleichen Sammelbande befindlicher Schriften erst im XIV. Jahrhunderte angefertigt? Sind sie bereits Abschriften der Ergebnisse früherer Uebersetzungsarbeit? Sehen wir in ihnen wie in den gleichzeitigen Abschriften von Werken des Jordanus, von Euklidübersetzungen des Atelhart und des Campanus den Fleiss emsiger Mönche, der Werthvolles aus alter wie aus für damals jüngerer Zeit aufzubewahren half? Wir wissen es nicht. Jedenfalls aber zeigt das Vorhandensein solcher Handschriften so viel Interesse für die Erhaltung mathematischer Werke, sei es bei dem abschreibenden Mönche selbst, sei es bei dem Vorsteher des Klosters, der solche Abschriften zu fertigen befahl, dass wir nicht schweigend an der Thatsache vorübergehen durften.

Wir wollen nun versuchen, die Mathematiker des XIV. Jahrhunderts in ihrem Heimathslande nach gebildete Gruppen zu ordnen und beginnen mit England.

Das Rechnen mit Zahlzeichen, denen Stellungswerth beigelegt ist, machte in diesem Jahrhunderte offenbar Fortschritte. Ausser einem die Numeration klar darlegenden Schriftstücke in englischer Sprache[3]) hat auch eine Rechentafel für Kaufleute[4]) sich erhalten, deren Text, so gering er ist, ebenfalls der englischen Sprache angehört, während die Zeichen von der eben erwähnten Art sind.

Wichtiger ist was wir über bestimmte Schriftsteller auszusagen

---

[1]) Wir reden von der berühmten Handschrift F II, 33. [2]) Curtze brieflich. [3]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 29—31. [4]) Ebenda pag. 72.

haben. Richard von Wallingford[1]), welcher etwa um 1326 die freien Künste und Philosophie in Oxford lehrte, ist uns nur durch die Titel einiger Abhandlungen bekannt, welche jedoch, in englischen Bibliotheken handschriftlich erhalten, wohl verdienten einmal von einem Fachmanne durchgesehen zu werden. Titel wie: De sinibus demonstrativis, De chorda et arcu, De chorda et versa deuten darauf hin, dass dem Verfasser, der solche Ueberschriften wählte, arabische Trigonometrie und darunter jedenfalls neben anderen Quellen, die damit nicht geleugnet sein sollen, Albategnius in der Uebersetzung Plato's von Tivoli (Bd. I, S. 693), wo erstmalig das Wort Sinus vorkam, bekannt gewesen sein muss. Eine Abhandlung, welche sich in zahlreichen Abschriften erhalten hat, ist einer Art von Zeitmesser gewidmet, der von seiner Brauchbarkeit den Namen *Instrumentum Albyon* (d. h. all by one = Alles durch Eines) empfing[2]).

In das Gebiet der Trigonometrie gehört weiter eine Schrift von Johannes Maudith[3]), welcher um 1340 in Oxford lehrte. Auch ihr Titel: De chorda recta et umbra fordert eine Untersuchung nur um so dringender heraus, als umbra, die Tangente der heutigen Trigonometrie, eine den Arabern besonders eigenthümliche Winkelfunction war.

Und wieder dasselbe Ergebniss erhalten wir aus einer vereinzelt bekannt gewordenen Stelle der Perspective von Bradwardinus[4]). In einer Handschrift des Vatican ist nämlich die Absicht Bradwardin's Perspective mitzutheilen von einem Abschreiber gehegt, aber mit der Begründung aufgegeben worden, dieselbe enthalte, abgesehen von vier Sätzen, ausschliesslich das, was in der allgemeinen (in communi perspectiva) d. h. in der Peckham'schen Perspective sich vorfinde; darum werden nur die erwähnten vier Sätze berichtet. In diesen kommen aber die Wörter umbra recta und umbra versa wiederholt vor, welche bekanntlich unserer Cotangente und Tangente entsprechen, und von ihnen wird im dritten Satze[5]) ausgesagt, dass sie die Längeneinheit als mittlere geometrische Proportionale besitzen.

Simon Bredon oder Biridanus[6]) von Winchecombe gehört, wiewohl eigentlich Mediciner, auch durch einige mathematische und astronomische Abhandlungen hierher. Er verfasste sie um 1380 unter König Richard II. So wird von ihm namentlich eine Sehnentafel erwähnt, deren Anfangsworte lauten sollen Arcus, sinus rectus, sinus versus. Englische Gelehrte werden in erster Linie Veranlassung

---

[1]) Montucla, I, 529. — Suter, Math. Univ. S. 45—46. [2]) Curtze brieflich. [3]) Suter, Math. Univ. S. 46. [4]) Max Curtze in den *Reliquiae Copernicanae*, Zeitschr. Math. Phys. XX, 224. [5]) *Inter umbras et umbrosum testis est proportio, quod ipsa res semper est medio loco proportionalis inter umbram suam, rectam scilicet et versam.* [6]) Suter, Math. Univ. S. 46.

haben, diesen und den weiter oben genannten insgesammt ungedruckten Abhandlungen diejenige Beachtung zu verschaffen, welche sie zu verdienen scheinen und ihrer Heimath den Ruhm zu sichern, von den ersten europäischen Schriftstellern über Trigonometrie erzeugt zu haben. Die allerersten waren sie indessen doch nicht. Das war ein Anonymus, der bereits dem Ende des XIII. Jahrhundert angehörte, dann der in Avignon lebende spanische Jude Levi ben Gerson mit einer Abhandlung von 1321, endlich ein weiterer Anonymus mit einer Schrift: De tribus notis[1]).

Eine Abhandlung von hohem Interesse ist dem Drucke übergeben[2]). Sie ist in englischer Sprache verfasst und in einer Handschrift des XIV. Jahrhunderts erhalten, und aus diesem letzteren Umstande leiten wir das Recht ab, sie hier zu besprechen, wenn ihre eigentliche Entstehungszeit uns gleich unbekannt ist. Der Inhalt ist feldmesserisch, wie schon die Ueberschrift besagt: *Nowe sues here a Tretis of Geometri wherby you may knowe the heghte, depnes, and the brede of mostwhat erthely thynges* und stellt eine Uebersetzung einer unter dem Titel Ars metrica gehenden Bearbeitung des zweiten Theiles der Schrift des Robertus Anglicus über den Quadranten dar[3]). Geometrie, sagt der der griechischen Sprache etwas mächtige Verfasser, ist zusammengesetzt aus geos, die Erde und metros, das Maass. Zum Höhenmessen, welches am Ausführlichsten behandelt ist, werden verschiedene Verfahren gelehrt. Die Schattenmessung[4]), wie sie seit Thales in Uebung war (Bd. I, S. 128), eine Messung mit Hilfe eines Spiegels[5]), eine Messung mit Hilfe des Quadranten und des Quadrates[6]) sind auseinandergesetzt, aber leider nicht durch Zeichnungen erklärt. Ergänzt man sich solche für den Quadranten (Figur 22) und für das genauer beschriebene Quadrat (Figur 23), so mag man die

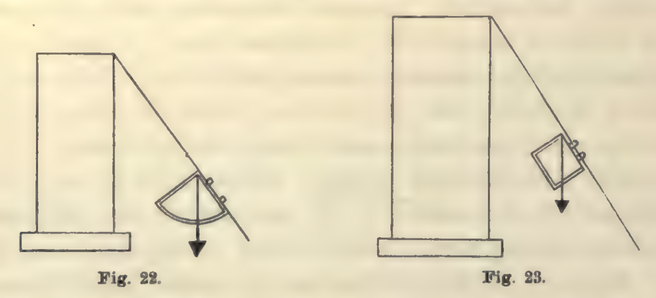


Fig. 22. Fig. 23.

Benutzung auch dieser letzteren Vorrichtung leichter zum Verständniss bringen. Das Quadrat ist aus vier gleichen je in 12 Theile

[1]) Curtze brieflich. [2]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 56—71. [3]) Curtze brieflich. [4]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 62. [5]) Ebenda pag. 66. [6]) Ebenda pag. 58—59.

eingetheilten Stäben zusammengesetzt. In dem einen Eckpunkte ist ein Senkel aufgehängt, und die eine Seite ist ein Diopterlineal, durch welches man nach dem zu bestimmenden Höhepunkt hinsieht. Man hat dann nur zu bemerken, welcher Punkt der eingetheilten Quadratseiten von dem Senkel eingeschnitten wird, um die Höhe mittels Proportionen zu finden. Die betreffenden Eintheilungen der das Quadrat bildenden Stäbe heissen wieder *umbre*.

Und nun kehren wir zu dem hervorragendsten Vertreter der Mathematik in England im XIV. Jahrhunderte zurück, dessen Namen wir schon im Vorbeigehen genannt haben. Thomas de Bradwardina[1]), eigentlich Bredwardin, aber gewöhnlich Bradwardinus genannt, ist geboren zu Hartfield bei Chichester. Als sein Geburtsjahr wird mitunter 1290 angegeben, jedenfalls fällt es noch in das XIII. Jahrhundert. Er war Ordensgeistlicher, muthmasslich Franciskaner. Sicherheit über seine Lebensverhältnisse beginnt mit dem Jahre 1325, in welchem er Proctor, d. h. Procurator, der Universität Oxford wurde. Dort las er im Collegium Mertonense über Theologie, Philosophie und Mathematik mit solchem Erfolge, dass man ihm den Beinamen Doctor profundus beilegte. Solche ehrende Beinamen waren übrigens damals an der Tagesordnung. Roger Baco wurde Doctor mirabilis, Thomas von Aquino bald Doctor angelicus, bald Doctor universalis genannt; Duns Scotus hiess Doctor subtilis, Raimundus Lullus Doctor illuminatus, Wilhelm von Occam Doctor invincibilis oder Doctor singularis, Henricus Gandavensis Doctor solemnis, Johann Baconthorp Doctor resolutus, um nur einige der bekanntesten Namen aufzuzählen. Später wurde Bradwardinus Kanzler der St. Paulskirche in London, und Johann Stratford, Erzbischof von Canterbury, empfahl ihn dem Könige Eduard III. als Beichtvater. In dieser Stellung erwarb er sich die Gunst des Königs, welchen er auf seinen Kriegszügen in Frankreich begleitete, in so hohem Maasse, dass, als 1348 nach Stratford's Tode das Kapitel Bradwardinus zum Erzbischof von Canterbury erwählte, der König ihn nicht entliess. Ein an seiner Stelle neu Gewählter starb aber noch vor der Weihe, das Kapitel einigte sich abermals auf Bradwardinus, und nun gab der König nach. Die Weihe fand am 19. Juli 1349 in Avignon statt. Wenige Wochen nachher wurde

---

[1]) *Encyclopaedia Britannica* (1875), IV, 199. — Poggendorff I, 272. — Chasles, *Aperçu hist.* p. 480 und 521—523 (deutsch 550 und 611—614). Sehr viel mehr bei Max Curtze: Ueber die Handschrift R. 4°. 2 der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn. Insbesondere das Biographische entnehmen wir fast wörtlich dieser im Supplementheft der Zeitschr. Math. Phys. XIII abgedruckten Abhandlung.

Bradwardinus in Lambeth von einer pestartigen Krankheit befallen und starb am 26. August. Die mathematischen Schriften, welche früh (seit 1495) im Drucke bekannt geworden sind, vorher natürlich abschriftlich umliefen, führen die Titel: Arithmetica speculativa, De proportionibus velocitatum, Geometria speculativa, Tractatus de quadratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum. Diese Quadratur ist dieselbe Schrift, von welcher wir (S. 101) unter Campanus gesprochen haben, und kann unmöglich von Bradwardinus herstammen. Die Drucke der drei anderen vermuthlich echten Schriften sind von grosser Seltenheit. Es wäre wünschenswerth, wenn die Schrift von den Proportionen — oder sind es gar deren zwei? — einmal genau untersucht würde, wie weit sie eine Abhängigkeit von Jordanus (S. 66), wie weit sie eine solche von Ahmed Sohn des Josephus vermuthen lassen kann. Wir können nur über die Geometria speculativa nach Auszügen berichten, welche deren wissenschaftliche Bedeutung erkennen lassen. Wenn zwei Handschriften, die eine von 1365, die andere von 1414 datirt, beide gegenwärtig in Rom, Bradwardin's Geometrie dem Petrus von Dacien zuschreiben[1], so beruht das wohl auf Irrthum. Die Geometrie besteht aus vier Abschnitten, von denen jeder mit Voraussetzungen, Erklärungen, Forderungen beginnt, an welche die eigentlichen Untersuchungen sich anschliessen.

Im 1. Abschnitte beschäftigt sich Bradwardinus mit den *figuris angulorum egredientibus.* Sternvielecke, denn diese sind unter jenem Namen verstanden, waren ja seit der Zeit der Pythagoräer bekannt. Das Sternfünfeck insbesondere (Bd. I, S. 166) war mehrfach der Aufmerksamkeit empfohlen. Wir haben seine Gestalt ausser im grauen Alterthum in jener französisch geschriebenen Geometrie (S. 92) auftreten, seine Winkelsumme im Euklide des Campanus (S. 104) bestimmen sehen. Auch die Gestalt eines anderweitigen Sternvielecks lässt sich in benachbarter Zeit nachweisen. Raimundus Lullus, dessen schriftstellerische Thätigkeit zwischen 1285 und 1315 fällt, muss in einer Geschichte der Mathematik immerhin genannt werden. Er hat eine eigene Schrift über die Quadratur des Kreises und eine Geometrie verfasst, welche in dem Uebermaasse religiösen Beiwerkes unverständlich sind. Ebenderselbe hat in seiner Ars magna, einem Gemenge von Logik, kabbalistischer und eigener Tollheit, unter welches, man weiss nicht wie, einige Körner gesunden Menschenverstandes gerathen sind, den Umfang eines Kreises in 9 Theile ge-

---

[1]) *Biblioth. math.* von G. Eneström 1885, pag. 94 und 196.

theilt[1]) und von jedem Theilungspunkte Verbindungsgerade nach allen übrigen gezogen. So entsteht, ob ihm bewusst oder nicht müssen wir in Frage lassen, ein Sternneuneck. Als Frage werfen wir ferner auf, ob in hebräischen kabbalistischen Schriften noch andere Sternvielecke gefunden werden mögen? Keinesfalls sind es wissenschaftliche Untersuchungen über Sternvielecke, welche uns irgendwo ausser bei Campanus gegenübertreten, und nun behandelt Bradwardinus mit ausdrücklicher Betonung der Neuheit des Gegenstandes, den nur Campanus beiläufig gestreift habe, die allgemeine Figur ähnlichen Charakters. Je mehr wir auch auf unserem Wissensgebiete die Wahrheit der Aussprüche anerkennen, dass auf Jahrhunderte hin eine gänzliche Abhängigkeit von der äusserlichen Stoffzufuhr den eigentlichen Grundton des Mittelalters bildete[2]), und dass dessen alleiniges geistiges Motiv in der Macht der Ueberlieferung zu suchen ist[3]), um so stärker treten die wenigen Persönlichkeiten hervor, denen gegenüber jene Regel versagt. Dass aber Bradwardinus zu ihnen gehörte, mögen folgende Sätze beweisen: Ein Vieleck mit ausspringenden Winkeln (egrediens) wird erzeugt, indem man die Seiten eines gewöhnlichen, nach aussen convexen Vielecks bis zum erneuten Durchschnitte verlängert. Vollzieht man das Gleiche bei dem entstandenen Sternvielecke erster Ordnung, so entsteht ein Sternvieleck zweiter Ordnung, aus welchem immer durch das gleiche Verfahren ein Sternvieleck dritter Ordnung hervorgeht. Das Sternfünfeck ist das erste Sternvieleck erster Ordnung und hat die Winkelsumme $2R$. Bei wachsender Zahl der Ecken wächst die Winkelsumme immer um $2R$ für jedes neue Eck, wie es bei den convexen Vielecken auch der Fall ist. Im Sternvieleck erster Ordnung mit $6, 7, 8, \ldots n$ Eckpunkten ist also die Winkelsumme $4R, 6R, 8R, \ldots (2n-8)R$. Die allgemeine Formel spricht Bradwardinus allerdings nicht aus, aber sie ist doch in seiner Regel des gleichmässigen Anwachsens um je $2R$ enthalten. Aus dem convexen Dreieck und Viereck entsteht kein Sternvieleck, sondern erst aus dem Fünfeck. Aus dem Sternvieleck erster Ordnung mit 5 oder 6 Ecken entsteht kein Sternvieleck zweiter Ordnung, sondern erst aus dem mit 7 Ecken. So hat man den Satz, dass das erste Sternvieleck irgend einer Ordnung durch Verlängerung der Seiten des dritten Sternvielecks nächstniedrigerer Ordnung gebildet wird. Von den Winkeln der Sternvielecke höherer Ordnung zu reden, meint Bradwardinus, würde zu weit führen; er wolle einen Satz aussprechen, an dessen Richtigkeit er glaube, ohne sie mit aller

[1]) Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande III, 158. Künftig citiren wir Prantl, Gesch. Log. [2]) Ebenda III, 2. [3]) Ebenda III, 9.

Bestimmtheit behaupten zu wollen: die Summe der Winkel in dem ersten Vielecke jeder Ordnung sei $2R$, und sie nehme mit jedem neuen Eckpunkte um $2R$ zu [1]). Irgend welche Beweise scheint Bradwardinus nicht geführt zu haben, an den Rand sind aber Sternvielecke der drei ersten Ordnungen gezeichnet, solche der ersten Ordnung mit 5, 6, 7, 8 Ecken, solche der zweiten Ordnung mit 7, 8, 9 Ecken, solche der dritten Ordnung mit 9, 10, 12 Ecken.

Der 2. Abschnitt enthält unter Anderem die Lehre von den isoperimetrischen Figuren. In vier Sätzen wird gezeigt: 1. dass unter miteinander verglichenen, isoperimetrischen Figuren diejenige die flächengrösste ist, welche die grösste Eckenzahl besitzt; 2. dass bei gleicher Eckenzahl die Gleichheit aller Winkel den Ausschlag giebt; 3. dass unter der Voraussetzung gleicher Eckenzahl und unter sich gleicher Winkel das regelmässige Vieleck, welches auch unter sich gleiche Seiten besitzt, die grösste Fläche einschliesst; 4. dass der Kreis endlich die flächengrösste unter allen ebenen isoperimetrischen Figuren ist, wie auch der Kugel die räumlich entsprechende Eigenschaft unter den Körpern zukommt. Für diese Sätze giebt Bradwardinus einen Ursprung nicht an, beansprucht sie aber ebensowenig als sein Eigenthum. Es kann kaum einem Zweifel unterworfen sein, dass er sie dem Buche des Zenodorus (Bd. I, S. 341) entnahm, welches jedenfalls in's Arabische und aus letzterer Sprache in's Lateinische übersetzt dem XIV. Jahrhunderte wohl bekannt war. Zeugniss dafür ist eine noch vorhandene Niederschrift einer solchen Uebersetzung aus der erwähnten Zeit, welche die Mittelbarkeit ihres Ursprunges durch Benutzung der Namensform Archimenides statt Archimedes (Bd. I, S. 663) an den Tag legt. Ein gewisser Frater Fridericus, welcher in der Mitte des XV. Jahrhunderts lebte, und dem wir im 54. Kapitel begegnen werden, hat übrigens Bradwardin's Quellen sehr gut erkannt, indem er sagte, dieser habe aus den Büchern des Euklid, des Campanus, des Archimed, des Theodosius, des Jordanus und aus den Büchern über die isoperimetrischen Gebilde geschöpft [2]).

Der 3. Abschnitt beschäftigt sich der Hauptsache nach mit der Lehre von den Verhältnissen. Die Proportion einer Grösse zu einer andern wird benannt nach der Art, wie die erste zur zweiten sich verhalte [3]). Stehen verschiedene Grössen in fortlaufender stetiger Proportion, so ist die Proportion der äussersten Glieder aus denen aller

---

[1]) Dass in der That die Winkelsumme des k-Sternvielecks n^{ter} Ordnung mit $2n+k+2$ Ecken durch $2kR$ sich darstellt, hat Poinsot im *Journal de l'École polytechnique* Tome IV (cahier 10) bewiesen. [2]) Curtze brieflich. [3]) *Quanta est aliqua quantitas ad aliam tanta denominatur proportio eius ad ipsam.*

dazwischenliegenden zusammengesetzt. Proportionen gleicher Benennung sind einander gleich[1]). Grössen sind gleich, wenn sie zu einer Vergleichsgrösse in gleichem Verhältnisse stehen; Grössen sind aber auch dann gleich, wenn Gleichvielfache von ihnen unter einander gleich sind[2]). Diese beiden Regeln, fügt Bradwardinus sogleich hinzu, lassen widersprechende Folgerungen ziehen. Der ersteren gemäss sind alle unendlichen Grössen gleich, der zweiten gemäss kann dieses nicht der Fall sein. Verhältnissmässigkeit und Messbarkeit sind nicht an einander gebunden, jede Grösse steht zu jeder anderen in einem Verhältnisse, hat aber nicht mit jeder ein gemeinsames Maass[3]). Haben zwei Grössen ein gemeinsames Maass, sind sie *communicantes*, so verhalten sie sich zu einander wie zwei Zahlen, wobei Zahl jedenfalls als ganze Zahl gemeint ist. Findet kein derartiges Verhältniss statt, so haben die Grössen kein gemeinsames Maass, sind *incommunicantes*. Diagonale und Quadratseite stehen in irrationalem[4]) Verhältnisse, weil jede Diagonale zur Seite ihres Quadrates eines gemeinsamen Maasses entbehrt. In diesen letzteren Regeln ist der wechselnde Gebrauch der Wörter commensurabilis und communicans, irrationalis und assimetrus bemerkenswerth. Die einen gehören schon dem uns bereits bekannten Sprachschatze an. Boethius sagt commensurabilis, Leonardo von Pisa communicans (S. 11); ob die Wörter assimetrus und namentlich irrationalis schon vor Bradwardinus in mathematischem Zusammenhange irgendwo vorkommen, ausser in Gerhard's von Cremona Uebersetzung[5]) des arabischen Commentars des An-Nairîzî zum X. Buche des Euklid? Jedenfalls sieht man, dass eine Kunstsprache in ihrer Bildung begriffen, wenngleich noch nicht ganz fertig war. Der Kreis, sagt Bradwardinus in demselben 3. Abschnitte, ist einem Rechtecke flächengleich, dessen Seiten die halbe Peripherie und der halbe Durchmesser des Kreises sind. Bradwardinus beruft sich dafür, wie auch für das Verhältniss 22 : 7 der Kreisperipherie zum Durchmesser, auf das Buch über Kreisquadratur des Archimenides. Ihm ist also auch die arabische Ueberlieferung des Namens Archimedes und eine Uebersetzung von dessen Kreismessung bekannt gewesen.

Der 4. Abschnitt endlich geht von der Ebene zum Raume über, handelt von Oertern, von körperlichen Winkeln, von den fünf

---

[1]) *Proportiones sunt equales quorum denominationes equales.* [2]) *Quantitates sunt equales que ad unam quantitatem conporate* (sic!) *proportionem habent equalem. Quantitates quarum equimultiplices sunt equales ipse inter se sunt equales.* [3]) *Omnis quantitas omni quantitati proportionalis, sed non omnis omni commensurabilis.* [4]) *Dyametri quadrati ad latus eiusdem est proportio irrationalis quia omnis dyameter coste sui quadrati assimetrus.* [5]) Curtze brieflich.

regelmässigen Körpern, von der Kugel und von Kreisen auf deren Oberfläche, wobei für die letzteren Sätze die Sphärik des Theodosius als Quelle angerufen wird, eine Schrift, welche vielleicht auch schon Witelo (S. 98) vorgelegen hat.

Ausser den im Drucke längst herausgegebenen Werken des Bradwardinus hat sich noch eines handschriftlich ganz oder wahrscheinlicher theilweise erhalten, aus welchem werthvolle Auszüge bekannt geworden sind[1]), der Tractatus de continuo. Diese Abhandlung steht in ihrem Zwecke wie in ihrem Inhalte nicht vereinzelt da. Sie richtet sich als besondere Schrift gegen diejenige atomistische Weltanschauung, welche in der Scholastik überhaupt vorhanden war, und welche auf der Zusammensetzung der stetigen Grösse aus unstetigen Bestandtheilen beruhte[2]). Roger Baco hatte sich (S. 97) in einem Kapitel seines Opus tertium mit der Widerlegung dieser Ansicht durch mathematische Gegengründe beschäftigt. Andere Scholastiker gingen gleichfalls gelegentlich auf die Streitfrage ein, welche schon seit Aristoteles und länger (Bd. I, S. 191) die Geister anregte und aufregte. Bradwardinus gehörte unbedingt zu den Männern, deren Gedankenfolge eine vorzugsweise mathematische genannt zu werden verdient, und wenn sein Tractatus de continuo einem Grenzgebiete angehörte, wenn die Geschichte der Mathematik, die der Physik, die der Philosophie verpflichtet sind, der Auffindung dieser merkwürdigen Schrift Rechnung zu tragen, und bald diese, bald jene ihrer Sätze zur Sprache zu bringen, so ist die Geschichte der Mathematik dabei in der günstigen Lage loben zu dürfen, worüber sie zu berichten hat. Zu den Vorgängern des Bradwardinus in den erwähnten Untersuchungen gehörte ja auch bis zu einem gewissen Grade Jordanus Nemorarius. Er gab an der Spitze seiner Bücher De triangulis (S. 73) Begriffsbestimmungen, welche, so scholastisch abstossend sie waren, immerhin zeigten, dass der Verfasser manchem verborgen liegenden mathematischen Gedanken nachzugraben für lohnend erachtete, und dass er auch auf der richtigen Spur war, wo das Vertiefen ansetzen müsse. Aehnliches müssen wir von Bradwardinus rühmen. Der Wortlaut beider Schriftsteller, des Jordanus und des Bradwardinus, ist freilich ein ganz verschiedener und nur die eine Aehnlichkeit glauben wir bemerklich machen zu sollen, dass der Punkt bei Beiden punctus, nicht, wie es sonst allgemeiner Gebrauch war, punctum heisst. Bei Bradwardinus ist das Stetige ein Quantum, dessen Theile unter ein-

---

[1]) Vergl. Max. Curtze in der schon angeführten Abhandlung über die Thorner Handschrift R. 4°. 2 Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplementheft.
[2]) K. Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton I, 197 bis 199.

ander verbunden sind[1]), ein offenbar dem aristotelischen συνέχες nachgebildeter Ausdruck. Es giebt zweierlei Stetigkeiten, bleibende und aufeinander folgende. Das bleibende Stetige, *continuum permanens* (Körper, Flächen, Linien) ist ein solches, dessen einzelne Theile zugleich bleiben, das aufeinander folgende Stetige, *continuum successivum* (Zeit, Bewegung) ist ein solches, unter dessen Theilen frühere und spätere sich unterscheiden lassen. Bei der näheren Erörterung des bleibend Stetigen tritt der Begriff der Untheilbarkeit hervor und des Punktes, der die Untheilbarkeit an einen bestimmten Ort bindet[2]). Die Zeit ist dasjenige aufeinanderfolgende Stetige, welches die Aufeinanderfolge misst. Ihr Untheilbares ist der Augenblick[3]). Die Bewegung ist das aufeinanderfolgende Stetige, welches in der Zeit gemessen wird. Im weiteren Verlaufe der Erklärungen kommt das Anfangen und das Aufhören zur Rede. Daran schliesst sich von selbst der Begriff des Unendlichen, dem drei ganze Seiten gewidmet sind. Bradwardinus hatte demnach das volle Bewusstsein von der Wichtigkeit und zugleich von der ganz ungeheuren Schwierigkeit dieses Begriffes. Er unterscheidet zwei Unendlichkeiten, die kathetische und die synkathetische[4]). Kathetisch oder einfach unendlich ist eine Grösse, die kein Ende hat. Synkathetisch unendlich ist eine Grösse, der gegenüber es eine endliche Grösse giebt und ein anderes grösseres Endliche, und wieder Eines grösser als jenes Grössere, und so ohne dass ein Letztes sich fände, welches den Abschluss bildete; auch dieses ist immer eine Grösse, aber nicht wenn es mit Grösserem verglichen wird. Man erkennt leicht, dass das kathetisch Unendliche Bradwardinus' das Ueberendliche oder Transfinite unserer neueren Philosophen ist, dem von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt, fehlt, während das synkathetisch Unendliche mit dem Endlosen oder Infiniten übereinstimmt, welches aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsen hervorgeht[5]). Wie das Unendliche und das Untheilbare in Bradwardin's Geiste in Wechselbeziehung traten, zeigt die Fortsetzung des Tractates. Jede Wissenschaft, heisst es[6]), sei wahr, in welcher nicht die Voraussetzung ge-

---

[1]) *Continuum est quantum cujus partes ad invicem copulantur.* [2]) *Indivisibile est quod nunquam dividi potest. Punctus est indivisibile situatum.* [3]) *Instans est certus athomus* (sic!) *temporis.* [4]) *Infinitum cathetice et simpliciter est quantum sine fine. Infinitum sinkathetice est secundum quid est quantum finitum et finitum maius isto et finitum maius isto maiori et sic sine fine ultimo terminante, et hoc est quantum et non tamen contra maius.* [5]) Wilh. Wundt, Logik II, 128 (1883). [6]) *Omnes scientias veras esse, ubi non supponitur continuum ex indivisibilibus componi.*

macht werde, Stetiges setze sich aus Untheilbarem zusammen. Kein Untheilbares ist grösser als ein anderes[1]). In der gleichen untheilbaren Lage können nicht viele Untheilbare ihren Ort besitzen, so lautet der Satz, in welchen Brandwardinus den Begriff der Undurchdringlichkeit kleidet. Das Stetige setzt sich nicht aus einer endlichen Anzahl von Untheilbaren zusammen; es setzt sich ebensowenig aus einer unendlichen Anzahl von solchen zusammen, es hat nur unendlich viele Untheilbare in sich[2]). Jede gerade Linie z. B. hat unendlich viele Linien in sich, die als ihre Theile aufgefasst werden können. Jede Oberfläche hat unendlich viele Oberflächen in sich und unendlich viele Linien und ähnlicherweise unendlich viele Punkte. Jedes Stetige ist zusammengesetzt aus unendlich vielen Stetigen derselben Art und hat unendlich viele eigene Atome[3]). Aus unendlich vielen Untheilbaren lässt kein Stetiges sich ergänzen oder zusammensetzen[4]).

Wir haben diese wenigen Sätze ziemlich zusammenhanglos dem uns vorliegenden weit umfangreicheren Auszuge bald da, bald dort entnommen. Auch die Wörter Contingenzwinkel und Form[5]) kommen dort vor. Wir fügen hinzu, dass Bradwardinus, wie es dem Zwecke seiner Auseinandersetzung entsprach, es auch an Bemängelung fremder Ansichten nicht fehlen lässt. Ein Waltherus modernus und ein Henricus modernus sind besondere Zielpunkte seiner Angriffe, die regelmässig nach der Methode der Zurückführung auf Widersinniges und Sichwidersprechendes erfolgen. Ob der moderne Walther ein Walterus Evesham war, der 1316 astronomische Beobachtungen machte[6]), ob nicht eher Walter Burleigh, welcher 1337 starb, und welcher über Formen schrieb[7]) — ein Gegenstand damaliger Forschung, von dem wir gleich zu reden haben — sei dahingestellt. Der moderne Heinrich ist mit grosser Wahrscheinlichkeit kein Anderer als Henricus Goethaels von Gent oder Gandavensis[8]), welcher 1217 bis 1293 gelebt hat und als Lehrer der Philosophie in Paris sich den Beinamen des Doctor solemnis (S. 113) erwarb.

Der Begriff der Form gehört in seiner ausführlichen Erörterung der Geschichte der Logik an, genauer gesprochen der Geschichte jener Streitigkeiten, in welchen so viele Geisteskraft unfruchtbar ver-

---

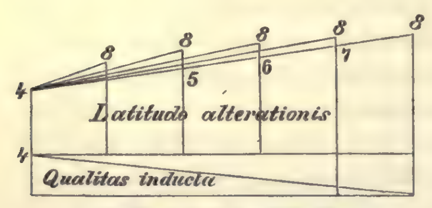
[1]) *Nullum indivisibile maius alio esse.* [2]) *Omnia continua habere athoma infinita, sed ex athomis non componi.* [3]) *Omne continuum componitur ex infinitis continuis eiusdem speciei et habet athoma propria infinita.* [4]) *Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis integrari vel componi.* [5]) Max. Curtze l. c. S. 92 Z. 4 v. u. [6]) Ebenda S. 88 in der Note **. [7]) Prantl, Gesch. Log. III, 297. [8]) Prantl, Gesch. Log. III, 190 flgg. und Quételet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (1864) pag. 46 flgg. Letzteres Werk citiren wir künftig als Quételet kurzweg.

braucht wurde, die als Streit zweier Gelehrtenschulen ihren Anfang nahmen, und, weil Thomas von Aquino und Duns Scotus, welche jene Schulen gegründet hatten, den beiden auf einander eifersüchtigen Orden der Dominikaner und Franciskaner angehörten, in einen Streit der beiden Orden selbst ausarteten. Es war ein Beispiel, wie solche im Laufe der Geschichte menschlicher Geistesentwicklung wiederholt vorgekommen sind, dass wissenschaftliche Meinungsverschiedenheiten mit zufällig vorhandenen politischen und religiösen Gegensätzen sich verquickend zu einer heftigen den Streitpunkt selbst überdauernden Fehde geworden sind. Duns Scotus[1]), der 1308 verstorbene Franciskaner, hatte *forma* diejenige Denkweise genannt, welche das Vorhandensein des gedachten Gegenstandes voraussetzt, so dass dessen Sinneswahrnehmung möglich wird. Die Sinneswahrnehmung ist eine wechselnde, und wechselnd sind die Formen. Eine zeitliche Reihenfolge findet in ihnen statt, so dass die frühere Form auf die spätere wirkt, und ganz besonders die Gradabstufung der Formen, die bald zu grösserer Vollkommenheit sich erheben, bald zu allmählicher Unvollkommenheit herabsinken, ist der Beachtung würdig. Sie äussert sich vorzugsweise bei den Formen der Natur: Kälte und Wärme sind ein oft und gern gebrauchtes Beispiel. Dort heisst die Steigerung und der Nachlass der Formen, deren Vielheit Glaubenssatz ist, *intensio et remissio formarum*. Mit dem zuletzt Ausgesprochenen, d. h. mit einem Gradunterschiede, der im Formenbegriffe hervortrete, ist nun auch die gegnerische Schule einverstanden, aber die Form selbst sei eine einzige, und gerade das Beispiel des Warmen und Kalten diene als Beweis. So der Chronist Aegidius Romanus[2]), † 1316. Wir dürfen den Verlauf des Streites nicht genauer verfolgen. Nur einzelne Namen solcher Schriftsteller seien genannt, welche bald der einen, bald der anderen Richtung huldigend in Frankreich und England über die intensio et remissio formarum schrieben: ein Antonius Andreas[3]) † 1320, ein Armand von Beauvoir[4]) † 1334, ein Walter Burleigh[5]) † 1337, den wir oben erwähnt haben, ein Petrus Aureolus[6]) † nicht vor 1345, ein Wilhelm Occam[7]) † 1347, ein Johann Baconthorp[8]) † 1346. Der zuletzt Angeführte hat in Oxford und Paris Philosophie und Theologie studiert, hat in Paris mit einer Entschiedenheit, die in dem Beinamen des Doctor resolutus (S. 113) sich geltend machte, seine Lehrmeinungen verfochten, sowohl über die eine nur gradweise verschiedene Form, als auch auf einem anderen nicht weniger dornenvollen Gebiete. Glaubte er doch weder
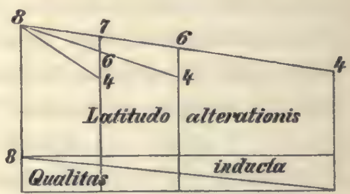
[1]) Prantl, Gesch. Log. III, 202 und 222. [2]) Ebenda III, 263. [3]) Ebenda III, 281. [4]) Ebenda III, 309. [5]) Ebenda III, 297. [6]) Ebenda III, 327. [7]) Ebenda III, 361. [8]) Ebenda III, 318 und Suter, Math. Univ. S. 49.

an Sterndeutung noch an Zauberei und schrieb gegen beide. Nach England zurückgekehrt wurde er Provinzial des Karmeliterordens.

Unter den Schriftstellern, welche über das Wachsen und Abnehmen der Formen sich äusserten, hätte vielleicht schon im 45. Kapiel Roger Baco genannt werden müssen, für welchen eine Handschrift eine derartige Abhandlung in Anspruch zu nehmen scheint[1]). Wir müssen Gelehrten, denen die Geschichte der Logik als Forschungsgebiet angehört, die Beantwortung der Frage überlassen, ob so weit zurück schon von Formen die Rede gewesen sein kann; uns will es mehr als zweifelhaft erscheinen, und so neigen wir eher der Meinung zu[2]), es sei hier eine falsche Benennung vorhanden, und der eigentliche Verfasser der Schrift über die Linie der Zu- und Abnahme der Formen sei nicht Roger Baco, sondern Roger oder Johann oder Richard Suicet oder Suisset oder Swinshed[3]) gewesen. Er soll den Namen Swnished von einem Cisterzienserkloster Vinshed auf der Insel Holy Island an der Küste von Northumberland geführt haben, wohin er sich im Alter zurückzog. Dem Orden selbst gehörte er seit 1350 an. Sein 1520 in Venedig gedrucktes, aber schon nach einem Jahrhunderte kaum in den berühmtesten Büchersammlungen aufzufindendes Hauptwerk führt den Titel *Calculator*, woraus Manche einen Beinamen des Verfassers gemacht haben. Vom Rechnen ist trotz des Titels keine Rede. Dagegen heisst die Ueberschrift gleich des 1. Kapitels: De intensione et remissione, woraus ein Schluss auf den allgemeinen Inhalt sich ziehen lässt. Im 2. Kapitel De difformibus, ein Wort, dessen Bedeutung uns bald klar sein wird, befinden sich zwei Zeichnungen (Figur 24 und 25), die wir allerdings nicht



A *medium non qualificativum.*
Fig. 24.



B *medium qualificativum.*
Fig. 25.

[1]) Suter, Math. Univ. S. 49 Note 1 sagt hierüber: der *Catalogus libr. mspt. Angl. et Hib.* (2. Th. pag. 55) enthält unter den Mss. des Colleg. Corp. Christ. ein solches mit Nro. 254 Vol. I, 8, betitelt *Rogerus Bacon, De linea intentionis et remissionis.* Der Katalog von Coxe hat *Tractatus Rogeri Baconi de graduatione rerum compositarum sive de linea* etc. [2]) Suter l. c. hat diese Meinung ausgesprochen. [3]) Vossius pag. 78. — Kästner I, 50—52. — Brucker, *Historia critica philosophiae* (1743) III, 849—853. — Suter, Math. Univ. S. 47. Von den drei im Textegenannten Vornamen, die sämmtlich vorkommen, scheint Richard der richtige zu sein.

vollständig verstehen, welche aber immerhin nur die Deutung zulassen dürften, dass gewisse Veränderungen durch *Latitudines* versinnlicht werden sollen. Was aber unter dem Worte latitudo seit dem XIV. Jahrhunderte verstanden wurde, wird uns gleichfalls demnächst begegnen.

47. Kapitel.

Französische Mathematiker.

Wir gehen nach Frankreich über. Paris war im XIV. Jahrhunderte, was es vorher im XIII. gewesen war, die geistige Hauptstadt der wissenschaftlich gebildeten Welt. Die Zeit nahte, in welcher dieses Uebergewicht ein Ende nehmen sollte, aber sie war noch nicht da, und wenn wir in unserer doppelt angeordneten, nach Ländern und Jahren sich gliedernden Uebersicht mit England statt mit dem Lande, zu welchem Paris gehört, den Anfang gemacht haben, so war diese Abweichung von der eigentlich richtigeren umgekehrten Reihenfolge uns durch einen einzigen Umstand empfohlen: Bradwardinus erscheint nämlich der Zeit nach früher, als der einzige Franzose, welcher in mathematischem Range neben ihn zu treten hat, als Oresme.

Nicht als ob Paris, und Paris war Frankreich[1]), gar keinen anderen Mathematiker des XIV. Jahrhunderts als nur Oresme zu nennen hätte; aber wie in England unsere Betrachtung den einen Bradwardinus als Mittelpunkt anerkannte, ganz ähnlich wird sein französischer Nebenbuhler der hervorragende Vertreter seines Vaterlandes sein.

Am Anfange des Jahrhunderts begegnet uns Johannes de Muris[2]) mit seinem heimathlichen Namen Jean de Meurs, geboren etwa 1310 in der Normandie, gestorben nach 1360. Er war ein sehr fleissiger Schriftsteller, dem die verschiedensten Wissensgebiete, welche damals zur Mathematik mit eingerechnet wurden, zum Danke verpflichtet sind. Er schrieb eine Arithmetik nach Art der gleichbenannten Schrift des Boethius, wie wir vermuthen dürfen, für solche,

---

[1]) Darin macht uns nicht irre, dass nach einer Handschrift der Bodley. Bibl. Toulouse als vorwiegend mathematische Universität gerühmt wird. Wie Suter, Math. Univ. S. 36 bei Anführung jener Handschrift mit Recht bemerkt, ist von mathematischen Leistungen in Toulouse nicht das Mindeste bekannt.
[2]) Poggendorff II, 132. — Suter, Math. Univ. S. 43. — Alfr. Nagl, Das Quadripartitum des Joannis de Muris und das praktische Rechnen im XIV. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Supplementheft S. 135—146.

denen die Arithmetik des Jordanus zu schwer war, und die Bearbeitung des Johannes von Muris, welche auch 1515 im Drucke erschien, blieb Jahrhunderte lang ein vielgebrauchtes Schulbuch[1]. In der Musik vervollkommete er die Noten, indem er die Stufenzeichen mit Zeitzeichen versah[2]; die Abhandlung *Speculum musicae* stammt aus dem Jahre 1321. Von einem theils in Versen, theils in Prosa geschriebenen Werke: *Quadripartitum rimatum* sind mehrere Handschriften erhalten, darunter eine aus dem XIV. Jahrhundert selbst, also der Lebenszeit des Verfassers sehr nahestehend. Aus dieser in Wien befindlichen Handschrift sind zwei Kapitel, das 11. und 14. des II. Buches, im Drucke veröffentlicht[3]. Darnach scheint das Quadripartitum unter Anderem auch das Rechnen mit ganzen Zahlen gelehrt zu haben, wobei die Unterstützung des Rechners durch ein Rechenbrett an Zeiten erinnert, welche damals doch schon recht weit zurück lagen. Beim Multipliciren soll beachtet werden, in welchen Kolumnen, etwa der k_1^{ten} und k_2^{ten}, die beiden Factoren sich befinden. Die Einer des Productes kommen dann in die $k_1 + k_2 - 1^{\text{te}}$ Kolumne. Aber ausser der Stelle ist auch die eigentliche Ziffer zu beachten nebst ihrer Veränderung bei Vereinigung der einzelnen Theilproducte, und dazu dient eben das Rechenbrett (tabula numerorum quam abacus adinvenit) die Erfindung von Abacus[4], aus welchem Worte hier ein Personennamen geworden ist, wie es anderwärts mit Algebra (Bd. I, S. 672) ungefähr um die gleiche Zeit geschah. Das Rechenbrett besteht bis aus 27 Kolumnen (Bd. I, S. 837), doch begnügte Johannes de Muris sich damit, neun solcher Kolumnen zu benutzen, welche er oben durch einen kleinen Bogen, arcus, abschliesst. Er schreibt dabei in die Bogen, rechts anfangend und nach links fortschreitend, die Zahlen 1 bis 9 und unter jeden Bogen von oben nach unten fortschreitend die Zahlen 1 bis 9, welche folglich in jeder Kolumne schon geschrieben vorhanden sind. Wird nun beispielsweise 365 mit 24 vervielfacht[5], um zu erfahren, wie viele Stunden in einem Jahre enthalten sind, so soll man so verfahren. 2 mal 3 sind 6 und zwar in der $2 + 3 - 1 = 4^{\text{ten}}$ Kolumne. Man nimmt einen Rechenstein (calculus) und bedeckt damit die 6 der 4. Kolumne. 2 mal 6 sind 12. Man bedeckt die 2 der 3. Kolumne mit einem neuen Rechenstein, hebt den über der 6 der 4. Kolumne auf, weil sie mit 1 zu vereinigen ist, und bedeckt die 7. 2 mal 5 sind 10. Man hebt den Rechenstein über der 2 der 3. Kolumne auf und bedeckt dafür die 3 der

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 183, Note 1. [2]) Poggendorff l. c. [3]) Nagl l. c. hat die Veröffentlichung unter Vorausschickung einer kurzen Einleitung besorgt. [4]) Ebenda S. 140 und 144. [5]) Ebenda S. 145.

gleichen Kolumne, weil eine 1 dort hinzukam. So liegen jetzt die beiden Rechensteine der Art, dass sie 7300 bedeuten. Nun wird die Darstellung kürzer[1]). Man soll mit der zweiten und letzten Stelle des Multiplicators 4 — denn mehr Stellen sind eben nicht vorhanden — den ganzen Multiplicandus der Reihe nach vervielfachen. Zuletzt werde 8760 erscheinen, wenn man sich die Rechensteine ansehe, welche über den Zahlzeichen liegen[2]). Im Folgenden wird alsdann eine kurze Anweisung gegeben, wie man 8760 durch 24 dividiren solle. Auch hier zerfällt das Verfahren in zwei Theile; man frägt nach der Kolumne, in welcher die Quotientenziffer zu erscheinen hat und nach der Quotientenziffer selbst; beim Abziehen der Theilproducte bedient man sich wieder der zu verschiebenden Rechensteine. Der Gegensatz gegen die ältere Benutzung von mit Zahlzeichen versehenen Rechensteinen, während jetzt die Zahlzeichen in jeder Kolumne vorräthig erscheinen und die Steine selbst ohne Bezeichnung sind, ist sehr bemerkenswerth. In der Frage der nothwendigen Verbesserung des Kalenders ist Johannes de Muris als einer der Ersten, und wenn die Angabe von Baco's Vorgang auf diesem Gebiete (S. 96) unzuverlässig sein sollte, als der Erste überhaupt zu nennen, der 1337 mit bestimmten Vorschlägen hervortrat[3]), die dahin gipfelten, man solle, um den wirklichen und den kalendermässigen Frühlingsanfang in Uebereinstimmung zn bringen, etwa 40 Jahre lang die Schalttage ausfallen lassen.

Hierbei sei gelegentlich bemerkt, dass für Johann von Muris gleich wie für die Uebrigen, welche die Kalenderverbesserung von nun an dringender und immer dringender verlangten, zunächst kein wissenschaftlicher Grund der bestimmende war. Ob Sommer und Winter in vorauszusehender Frist in kalendermässigem Gegensatze zu den wirklichen Jahreszeiten erscheinen würden, das kümmerte diese Männer viel weniger, als die Sorge, es könne, wenn man aufhöre, darauf zu achten, dass Ostern stets auf die Zeit des Vollmondes falle, irgend einmal auf Charfreitag eine Sonnenfinsterniss eintreten, und es möchte dann die wunderbare Sonnenfinsterniss beim Kreuzestode des Heilandes, von welcher der Evangelist berichtet, für eine natürliche erklärt werden. Auch der Umstand, es könnten durch die Unrichtigkeit des Kalenders die gebotenen Fasttage nicht eingehalten werden, wirkte auf die Gemüther und erklärt eine bis zur Erregung

---

[1]) *Sicut de ultima figura multiplicantis in omnes multiplicandi iam operatus sum, sic de alia id est prima multiplicantis, cum plures modo non sint, in aliarum singulas operabor.* [2]) *aspectis calculis super numeros situatis.* [3]) Schubring, Zur Erinnerung an die gregorianische Kalenderreform (1883) S. 7, wo auch die Quelle für unsere Darstellung der Gründe der Kalenderreform ist.

sich steigernde Sorge um Abstellung des einmal erkannten Missstandes. Waren es sonach kirchliche Bedenken, die zur Kalenderreform führten, so waren es andere kirchliche Bedenken, die sich dem Verlangen widersetzen liessen. Man fürchtete, es möchten nach getroffener Veränderung die alten Messbücher nicht mehr zu benutzen sein, und es brauchte zwei und ein halb Jahrhunderte, bis diese Furcht durch Aufstellung eines vollständigen für denkbare Zeit ausreichenden Reformplanes beseitigt war.

Hier dürfte die richtige Stelle sein, einen schwedischen Magister Sunon, vielleicht richtiger Sven[1]), zu erwähnen, der ohne der Pariser Universität anzugehören sich 1340 erbot, in seiner Wohnung über die Sphäre zu lesen. Im Anschlusse an diesen aber nennen wir auch gleich einen Norweger des XIV. Jahrhunderts, mag er nun irgend eine Zeit in Paris zugebracht haben oder nicht. Es ist Hauk Erlendssön[2]), geboren um 1264, † 1334, ein richterlicher Beamter, welcher einen Algorismus getreu nach dem Muster des von Johannes von Sacrobosco verfassten zusammengestellt hat, der nur darin eine Abweichung zeigt, dass am Schlusse die neun ersten Quadrat- und Kubikzahlen angegeben sind, sowie platonisch-naturphilosophische Erörterungen über die Beziehungen der vier Elemente zu den Zahlen 8, 12, 18, 27.

Johannes de Lineriis[3]) würden wir bei der trostlosen Menge von Unsicherheiten, die sich an diesen Namen knüpfen, am liebsten gar nicht zur Rede bringen. War er ein Picarde, ein Deutscher, ein Sicilianer? Muss man einen Lehrer Johannes de Liveriis von seinem Schüler Johannes de Lineriis (de Ligneres) unterscheiden? Gehörten beide im XIV. Jahrhunderte dem Pariser Lehrkörper an? Das sind die Hauptfragen, welche bald so, bald so entschieden worden sind[4]). Die meisten Schriften dieses Mannes, oder wahrscheinlicher dieser Männer sind astronomischen Inhaltes, haben also für uns unberücksichtigt zu bleiben. Gedruckt wurde 1483 eine Schrift des Johannes de Liveriis über Brüche[5]). Zahlreiche Handschriften nennen freilich den Verfasser des Algorismus de minutiis Johannes de Lineriis, so dass der Titel des Druckes irrig zu sein scheint. In einer Erfurter Handschrift ist der Verfasser genauer als

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 206. [2]) Eneström in seiner *Bibliotheca mathematica* 1885, S. 199. [3]) Libri II, 210 und 528. — Steinschneider im *Bulletino Boncompagni* XII. — Günther, Unterricht Mittela. S. 169—171. — Suter, Math. Univ. S. 42 und 46, Note 6. [4]) M. Steinschneider, der die letzten eigenen Untersuchungen über den sehr verworrenen Gegenstand angestellt hat, entscheidet sich dafür, es seien zwei Persönlichkeiten in eine verschwommen. [5]) *Bulletino Boncompagni* XII, 41 sqq.

Johannes de Lineriis Anbionensis bezeichnet, wodurch die französische Heimath dieses Schriftstellers und seine Verschiedenheit von einem Johannes de Lineriis aus Sicilien gesichert ist[1]). Ausserdem ist eine in Oxford vorhandene Tabula sinus Mag. Joh. de Ligneriis namhaft zu machen, weil sie den bis jetzt einzigen Beleg dafür bildet, dass auch in Paris im XIV. Jahrhunderte die Trigonometrie nicht unbekannt war.

Eine zu Seitenstetten aufbewahrte Handschrift aus dem XIV. Jahrhunderte mit der Bezeichnung Cod. LXXVII enthält einen anonymen Algorismus de minutiis, d. h. also einen Lehrgang der Bruchrechnung, welcher sich durch eine sonst nirgend wahrgenommene Erörterung auszeichnet[2]). Der Verfasser bemerkt nämlich, das Kennzeichnende der Sexagesimalrechnung bestehe nicht in der Zahl 60, sondern in der systematischen Anordnung. Man könne statt 60 auch 10 oder 12 und dergleichen benutzen, und 60 sei der grossen Anzahl seiner Theiler wegen gewählt.

Dominicus de Clavasio[3]), gewöhnlich nach seiner Heimath Dominicus Parisiensis genannt, war in der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts Hofastrolog des Königs von Frankreich. Er schrieb eine *Practica Geometriae* in drei Büchern, welche sich in zahlreichen Abschriften erhalten hat. In Erfurt allein sind deren vier, von welchen eine aus dem Jahre 1378. Das I. Buch behandelt Längenmessungen, das II. Flächenberechnungen, das III. Körperinhalte. Dominicus bedient sich in Quadratform gebrachter Messwerkzeuge für Winkel, beziehungsweise deren trigonometrische Tangenten (S. 112). Seine Verfahren sind vielfach die althergebrachten, die Gerbert schon übte (Bd. I, S. 812—814), aber Dominicus begnügt sich nicht mit Vorschriften, sondern fügt Beweise hinzu, in welchen Verweisungen auf Euklid vorkommen. Er weiss, dass der Kreisumfang nur näherungsweise $3\frac{1}{7}$ Durchmesser beträgt (*vel ea circa*), er weiss, dass auch von einer Quadratur des Kreises nur soweit die Rede sein kann, dass kein merklicher Fehler bleibt (*ita quod error sensibilis non relinquatur*). Soll die Fläche eines ungleichseitigen Dreiecks auf dem Felde bestimmt werden, so schlägt Dominicus vor, man solle ein ähnliches Dreieck auf eine Tafel oder eine Wand (*in tabulis suis vel in pariete*) entwerfen, dessen Fläche mit Hilfe einer auf der Zeichnung gemessenen Höhe berechnen und

---

[1]) M. Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-liter. Abtlg. S. 161 Note.
[2]) Curtze brieflich. [3]) Curtze brieflich unter beigefügter Hinweisung auf *Bulletino Boncompagni* VII, 350 Note, wo eine Perspective eines Magister de Clavasio genannt ist.

sich dann durch Proportionen helfen. Wie das ähnliche Dreieck herzustellen sei, ob aus den Seitenlängen, oder ob Dominicus gar an eine dem späteren Messtische verwandte Vorrichtung dachte, ist nicht angegeben. Jedenfalls erkennen wir in Dominicus de Clavasio einen für seine Zeit hervorragenden Mathematiker.

Wir gelangen zu Nicole Oresme[1]) (ungefähr 1323—1382). Der Name kommt in sehr verschiedenen Formen vor, z. B. Orem, Horem, Horen; auch für den Vornamen findet man mitunter Jean statt Nicole oder Nicolas. Ob Oresme, wie eine Ortssage berichtet, in dem Dörfchen Allemagne bei Caen, ob in Caen selbst geboren ist, steht nicht fest. Jedenfalls kommt der Name Oresme in Urkunden der Stadt Caen zu sehr verschiedenen Zeiten vor, im XIV. und noch im XVII. Jahrhunderte. Im Jahre 1348 trat Oresme in das Collège de Navarre in Paris ein, dem er bis 1361 angehörte, zuerst als Schüler, dann als Lehrer, zuletzt als Vorsteher. Da die Schüler der Regel nach zwischen dem 20. und 30. Lebensjahre standen, so hat man daraus auf das etwaige Geburtsjahr des Oresme schliessen können. Auch ein Datirungsversuch einiger Schriften ist versucht worden. Nach den Satzungen des Collège de Navarre durfte kein Angehöriger desselben in anderer Sprache als in der lateinischen schreiben, daher müssen französische Schriften des Oresme nach 1361 entstanden sein, während natürlich die umgekehrte Folgerung, alle seine lateinischen Schriften müssten vor 1361 zurückgreifen, nicht gezogen werden darf. In dem genannten Jahre wurde Oresme zum Decan der Kirche zu Rouen ernannt und musste trotz anfänglichen Widerstrebens seinen Wohnsitz dort nehmen. Dort trat er in Beziehung zu Karl V. dem Weisen von Frankreich, der 1337 geboren und seit 1356 Regent, nicht Oresme's Schüler gewesen sein kann, wie man sonst annahm. Auf Veranlassung des Königs übersetzte Oresme mehrere aristotelische Schriften aus den schon vorhandenen lateinischen Uebersetzungen in's Französische. Seine Ausdrucksweise in dieser letzteren Sprache wird sehr gerühmt. Auch sein Latein war vorzüglich, und eine Predigt, welche er am Weihnachtsabend 1363 in Avignon hielt (die

---

[1]) Max. Curtze hat diesen Mathematiker so gut wie neu entdeckt und ihm drei Abhandlungen gewidmet, welche wir als Curtze, Oresme I, II, III citiren werden. I. Der *Algorismus Proportionum* des Nicolaus Oresme zum ersten Male nach der Handschrift R. 4°. 2 der Gymnas.-Bibliothek zu Thorn herausgegeben (1868). II. Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplementheft S. 92—97. III. Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (1870). — Ein Commentar des Oresme zu den *Meteorologica* des Aristoteles, welchen H. Suter in der Stiftsbibliothek zu St. Gallen entdeckte und Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Hist.-liter. Abthlg. S. 121—125 zum Theil bekannt machte, scheint sehr interessant für die Geschichte der Physik zu sein.

Veranlassung seines Aufenthaltes dort ist unbekannt), und in welcher er schonungslos die Schwächen und Fehler des Papstes und seiner Cardinäle geisselte, wird als nach Form und Inhalt vollendet bezeichnet. Ein zweiter Aufenthalt in Avignon von 1366 ist unwahrscheinlich. Den gleichen Muth wie in der erwähnten Predigt legte Oresme in einer 1374 verfassten Schrift gegen Astrologie und Zeichendeuterei an den Tag, den gleichen in einer vielleicht derselben Zeit entstammenden Schrift gegen die Bettelorden. Am 16. November 1377 wurde Oresme, unterstützt von dem König, zum Bischof von Lisieux gewählt. Als solcher starb er am 11. Juli 1382. Wann der französisch geschriebene Traité de la sphère verfasst ist, lässt sich ausser durch die nothwendige oben begründete Begrenzung auf die Zeit nach 1361 nicht bestimmen. Das in 50 Kapitel zerfallende Werk gehört überdies seinem Inhalte nach nicht hierher, abgesehen davon, dass es wesentlich Neues, was nicht auch schon in dem ähnlich betitelten Werke Sacrobosco's (S. 87) gestanden hätte, kaum gebracht zu haben scheint. Neu war nur die Sprache, diese aber mustergiltig für alle Zukunft, so dass heute noch die französischen Kunstausdrücke der Sternkunde und der Erdbeschreibung fast durchgängig die von Oresme eingeführten sind.

Unter Oresme's mathematischen Schriften nennen wir zuerst den Tractatus de latitudinibus formarum. Ob er vor 1361 geschrieben wurde, während Oresme Lehrer am Collège de Navarre war, ob die noch zu nennenden mathematischen Schriften aus dem gleichen Zeitraume stammen, lassen wir dahingestellt. Sicher ist, dass dieses Werk einen mächtigen Lehreinfluss übte, dass es 1482, 1486, 1505, 1515 im Drucke erschien mit einer Raschheit der Aufeinanderfolge dieser Ausgaben, welche die Häufigkeit der Benutzung verbürgt. Oresme selbst legte offenbar dem Gegenstande nicht geringere Wichtigkeit bei, da er ihn noch einmal, und wie es scheint ausführlicher in einem handschriftlich gebliebenen Tractatus de Uniformitate et difformitate intensionum behandelte[1]). Der Anfang dieses erweiterten Werkes lautet: „Bei Ordnung der Erzeugnisse der Einbildungskraft der Alten oder meiner eigenen über Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der messbaren Naturerscheinungen begegnete mir einiges Andere, was ich mit hinzuzog." Wer sind die Alten, *veteres*, welche Oresme hier unzweideutig als seine Vorgänger bezeichnet? Man hat die Worte auf arabische Schriftsteller

---

[1]) Curtze, Oresme III, 11—13 besonders S. 12 Z. 6—8: *Cum ymaginacionem veterum vel meam de uniformitate et difformitate intensionum ordinare incepissem occurerunt mihi quaedam alia que huic proposito interieci.*

deuten wollen[1]). Wir können uns dieser Meinung nicht anschliessen, so lange der logische Begriff der *forma* noch nicht bei Arabern nachgewiesen worden ist, wenn wir auch anerkennen, dass Oresme ihm zeitlich so nahe stehende Männer, wie etwa einen Suicet, gewiss nicht als „Alte" bezeichnet haben wird. Wir haben bei unserer Wiedergabe der Anfangsworte einer freieren Uebertragung uns bedienen zu dürfen geglaubt, als da wir (S. 120—121) den Spuren des Formbegriffes nachgingen, aber dass wir dem Sinne treu geblieben sind, ist aus jenen Auseinandersetzungen und nicht weniger aus dem zu erkennen, was bei Oresme an jene Anfangsworte sich anschliesst. Dort heisst es ungefähr[2]), dass das Ausmaass der Erscheinungen (latitudines formarum) vielfältigem Wechsel unterworfen sei, und dass solche Vielfältigkeit nur sehr schwer unterschieden werde, wenn ihre Betrachtung nicht auf die von geometrischen Figuren zurückgeführt sei. Das klingt fast ebenso, als wenn ein Schriftsteller unserer Tage verspricht, den Verlauf gewisser Erscheinungen durch eine Zeichnung zu versinnlichen, und thatsächlich ist es auch das Gleiche. Ausser der latitudo kommt regelmässig eine longitudo vor, welche das vorstellt, was wir heute Abscisse nennen, während die Latitudo unserer Ordinate entspricht. Als Länge wird nämlich die eine Grösse z. B. die Zeit aufgetragen, welche bei den in Frage stehenden Erscheinungen als veränderlich auftritt, und senkrecht zu der Länge als Breite zeichnet man das an jenen Erscheinungen als messbare Menge sich Aeussernde, z. B. die Wärme. Der Unterschied auf einander folgender Breiten heisst *gradus latitudinis*. Wo gar keine Breite vorhanden ist oder, wie man heute sagen würde, wo die Ordinate Null ist, spricht man von *non gradus*, wo sie eine bestimmte Ausdehnung besitzt, von *certus gradus*. Die Erscheinung kann nun entweder als unveränderliche sich zeigen, die latitudo ist *uniformis eiusdem gradus per totum*, bleibt einförmig von der gleichen Ausdehnung über die ganze Länge hin, oder aber die Erscheinung ist eine veränderliche, die latitudo ist *difformis per oppositum*, missförmig durch den Gegensatz. Die *latitudo secundum se totam difformis* zeigt als Verbindung der Endpunkte aller Breiten eine aufoder abwärts gerichtete krumme oder grade Linie, die *latitudo secundum partem difformis* besitzt als solche Verbindung theilweise eine der Längenlinie parallele Gerade. Die Veränderlichkeit der Breite kann dieselbe als *uniformiter difformis* oder als *difformiter difformis*

---

[1]) Suter, Math. Univ. S. 48—49. [2]) Curtze, Oresme II, 92: *Quia formarum latitudines multipliciter variantur et multiplicitas difficillime discernitur nisi ad figuras geometricas consideratio referatur* etc.

erscheinen lassen. Im ersten Falle ist der *excessus graduum*, welcher die Veränderlichkeit misst, immer derselbe, im zweiten nicht; im ersteren Falle liegen, würden wir sagen, die Endpunkte der Breiten auf einer geneigten Geraden, im zweiten auf einer eigentlichen Curve. Unter der letzteren Voraussetzung können die excessus graduum, welche also hier ungleich sein müssen, eine arithmetische Progression, die latitudines selbst also eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden. Oresme benennt diese latitudines als *uniformiter difformiter difformes* und giebt als Beispiel 0, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, wobei allerdings der Anfang mit 0 statt mit 1 als irrig erscheint. Diese Erläuterungen sind wohl geeignet rückwärts einiges Licht auf die Figuren 24 und 25 zu werfen, welche wir (S. 122) Suicet entnahmen. Wir verstehen jetzt ihr Vorkommen in einem Kapitel, welches die Ueberschrift *De difformibus* führt. Noch einen Kunstausdruck Oresme's haben wir zu erörtern, die *figura*. Sie wird gebildet durch zwei latitudines, das Stück longitudo, welches zwischen ihnen sich findet, und die Verbindungslinie der Endpunkte aller latitudines. Diese figura wird zum mindesten zwei Winkel besitzen, wenn sie mit einem non gradus beginnt und mit einem eben solchen aufhört, z. B. wenn sie aus der Längenlinie und einem Kreisbogen besteht, welch letzterer nicht grösser als der Halbkreis sein darf, eine ganz natürliche Einschränkung, ohne welche Curvenpunkte auftreten würden, deren Längen rückwärts vor dem Anfange der Längen sich befinden müssten, während von solchen negativen Abscissen, um wieder den heutigen Ausdruck zu benutzen, keine Rede sein kann.

Oresme hat den ganzen Gegenstand in drei Abschnitten behandelt und dabei die auftretenden Figuren geschildert. Zuletzt er geht er sich in einigen Bemerkungen[1]), auf welche wir besonders aufmerksam machen müssen, wenn wir auch nicht wissen, ob Oresme selbst grosses Gewicht auf sie gelegt hat. Wird die Figur durch einen Kreisabschnitt gebildet, welcher, wie wir sahen, nicht grösser als der Halbkreis sein darf, so wächst in ihr die latitudo vom Anfang bis zur Mitte und nimmt dann wieder bis zum Ende ab. Bei einer solchen Figur ist die Aenderung der Geschwindigkeit des Wachsens und Fallens am obersten Punkte am langsamsten, dagegen ist die grösste Geschwindigkeit der Zunahme, beziehungsweise der Abnahme, am Anfang und am Ende der Figur vorhanden. Das Verhältniss zwischen Form und Form ist dasselbe wie zwischen den entsprechenden Figuren.

Unser nothdürftiger Auszug wird, denken wir, die Tragweite der

---

[1]) Curtze, Oresme II, 96.

Untersuchungen des Oresme und seiner Vorgänger, gleichviel wer sie waren, und wie viel einem Jeden angehört, erkennen lassen. Wir sehen hier eine curvenmässige Darstellung des Verlaufes von Naturerscheinungen vor uns. Wir sehen die Anwendung von Coordinaten, d. h. von gewissen in allen Fällen gleichmässig benutzten, an sich willkürlichen Linien, welche also keineswegs jenen Hilfslinien zu vergleichen sind, deren die griechischen Geometer des grossen Jahrhunderts, die Archimed und Apollonius, sich bedienten. Wohl haben auch jene gewisse Hilfslinien in einer ganzen Anzahl von Beweisführungen gezogen und dadurch die Beweise gleichmässiger zu machen gewusst, aber es waren Linien, die den Curven, um deren Eigenschaften es sich handelte, schon angehörten, welche zweckmässig auszuwählen eine Entdeckung genannt werden mag, keine Erfindung war. Nur die geographische Länge und Breite kann als Vorbild gedient und die Wahl der Kunstausdrücke beeinflusst haben. Haben wir bis hierher verhüten wollen, dass man das Neue an den latitudines unterschätze, so ist nicht minder vor Ueberschätzung zu warnen. Die Lehre von den latitudines ist keineswegs der Methode der späteren analytischen Geometrie gleich zu achten. Ihr fehlt das Entscheidende jener Methode: neben der begrifflichen Uebereinstimmung zwischen analytischer Formel und geometrischer Form die Möglichkeit von der Einen zur Anderen überzugehen, in welcher Richtung man wolle, und auch nachdem gewisse Zwischenschlüsse nur innerhalb der einen Vorstellungsreihe vorgenommen wurden. Auch die zuletzt oben im Drucke hervorgehobenen Stellen ändern nichts an dieser Beschränkung. Oresme's Augen offenbarte sich die Wahrheit des Satzes, den man 300 Jahre später in die Worte kleidete: an den Höhen- und Tiefpunkten einer Curve sei der Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse Null; dass er ihn bewiesen, nur nach einem Beweise sich umgethan hätte, davon ist keine Spur zu entdecken, und erst mit dem Beweise wurde das scharfsinnige Sehen zum tiefsinnigen Verstehen. So ist uns die Methode Oresme's eine Vorläuferin der analytischen Geometrie. Sie wird den Erfindern derselben, wenn sie ihnen bekannt war, die wesentlichsten Dienste geleistet haben, mindestens eben so wesentliche als das Studium der griechischen Curvenlehre, wenn auch von ganz anderer Seite her, aber eine Erfindung blieb noch immer zu machen.

Eine weitere mathematische Abhandlung[1]) Oresme's, welche 1505 in Venedig zugleich mit dem Tractatus de latitudinibus im Drucke erschien, ist der Tractatus proportionum. Wir können rasch

---

[1]) Curtze, Oresme III, 4—6.

an ihm vorübergehen, da sein Inhalt ein längeres Verweilen zu beanspruchen nicht angethan ist. Es handelt sich um Addition und Subtraction von Verhältnissen, den bekannten Kunstausdrücken, statt deren richtiger von Multiplication gesprochen worden wäre, da sie $a:b$ mit $c:d$ vereinigend $ac:bd$ hervorbringen und nur darin sich unterscheiden, dass die zu vereinigenden Verhältnisse das eine Mal beide direct oder beide indirect sind, das andere Mal Eines direct und Eines indirect. Dergleichen Ausdrücke hat sich Jordanus im fünften Buche seiner Arithmetik bedient, während der Anhang zum Algorithmus demonstratus (S. 67), wie wir hier bei passenderer Gelegenheit ergänzen wollen, eine andere Redewendung gebraucht und nur von einer Proportion spricht, die aus zwei anderen zusammengesetzt ist[1]). Dann kommen bei Oresme mittlere Proportionalen zur Rede, hierauf Verhältnisse von Verhältnissen, endlich in den drei letzten Kapiteln Verhältnisse von Bewegungen überhaupt und Bewegungen der Himmelskörper, sowie die gegenseitige Messbarkeit solcher Bewegungen.

Ein Werk von ganz anderer wissenschaftlicher Bedeutung ist der Algorismus proportionum[2]). Drei Abschnitte bilden denselben. Der 1. Abschnitt beginnt mit Definitionen, was man unter halbem, doppeltem, anderthalbfachem u. s. w. Verhältnisse verstehe. Die Bedeutung ist die der Quadratwurzel, des Quadrates, der Quadratwurzel aus dem Kubus u. s. w. unter einer bestimmten, wenngleich nirgend ausgesprochenen Voraussetzung, dass nämlich das Vorderglied grösser sei als das Folgeglied. Im entgegengesetzten Falle ist nie von *proportio*, sondern nur von *fractio* die Rede. So ist z. B. $4^3 = 64$, $\sqrt{64} = 8$, also steht 8 zu 4 in anderthalbfachem Verhältnisse. Heute schreibt man $8 = 4^{1\frac{1}{2}}$, Oresme schrieb

$$\boxed{1^p \frac{1}{2}}\ 4 \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{p \cdot 1}{1\,.\,2}}\ 4.$$

Er war somit der Erfinder der Potenzgrössen mit gebrochenen Exponenten und einer Bezeichnung derselben, welche der viel später eingeführten Schreibweise, deren man heute sich bedient, dem Begriffe nach gleichkommt. Ein Verhältniss zweier ganzer Zahlen, die als solche gegeben sind, z. B. $13:9$, wobei die erste Zahl die zweite um $\frac{4}{9}$ übertrifft, ist rational[3]). Irrational ist ein Ver-

---

[1]) *Si proportio primi ad secundum constituitur ex proportione tertii ad quartum et quinti ad sextum.* [2]) Der erstmalige Abdruck der in zahlreichen Abschriften erhaltenen Abhandlung bei Curtze, Oresme I. [3]) *Et quecunque*

hältniss, bei welchem ein gebrochener Exponent auftritt. Wir haben (S. 117) Bradwardinus im Besitze dieses Wortes gesehen, und wenn es sich auch weder bei Bradwardinus noch bei Oresme um das Erstlingsrecht der mathematischen Benutzung von irrational handelt, so lässt das doppelte Vorkommen eine sehr rasche Verbreitung vermuthen. Neue Regeln lehren nun das Rechnen mit rationalen sowie mit irrationalen Verhältnissen. Addition und Subtraction der Verhältnisse in dem Sinne, wie jene auch im Tractatus proportionum vorkommen, bilden die beiden ersten Regeln. Die dritte Regel[1]) lässt gleich den übrigen sich nur sehr schwer aus ihrem Wortlaute verstehen, während die überall vorhandenen Zahlenbeispiele den wenn auch nicht mühelos zu benutzenden Schlüssel in die Hand geben. Setzt[2]) z. B. die dritte Regel $4^{\frac{2}{3}} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}$, so ist der Zusatz, genau so müsse man bei anderen Zahlen verfahren, sicherlich mit dem Sinne verbunden

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}},$$

wozu die Folgerung sich noch beifügt[3]), es sei $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ und allgemein

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}.$$

Ohne dem Texte weiter genau uns anzuschliessen, begnügen wir uns mit der Angabe der sechs übrigen Regeln in den Zeichen heutiger Buchstabenrechnung:

$$\left(a^m\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{mp}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{rp}\right)^{\frac{1}{s}} \text{ unter der Voraussetzung } \frac{m}{q} = \frac{r}{s},$$

$$a \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n \cdot b\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{p}{mp}},$$

---

portio rationalis scribitur per suos terminos sev numeros minimos, sicut dicitur proportio. 13. *ad.* 9. *que vocatur superpartiens quatuor nonas.*

[1]) *Si proportio irrationalis fuerit partes alicuius rationalis, ipsam possibile est partem notare.* [2]) *Proponatur proportio, que sit due tertie quadruple; et quia duo est numerator, ipsa erit una tertia quadruple duplicate seu sedecuple, et sic de aliis.* [3]) *Due tertie subduple proportionis sunt una tertia duple. Et sic de quibuslibet partibus.*

und unter Anwendung dieses Satzes

$$a^{\frac{1}{e}} \cdot b^{\frac{1}{f}} = \left(a^f\right)^{\frac{1}{ef}} \cdot \left(b^e\right)^{\frac{1}{ef}} = \left(a^f \cdot b^e\right)^{\frac{1}{ef}},$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(ab\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Das Zahlenbeispiel[1]) zur Regel $a \cdot b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n \cdot b\right)^{\frac{1}{n}}$ lautet folgendermassen: $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \left(2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(6\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Oresme zeigt sich in diesem ganzen Abschnitte einestheils als bewandert in der Arithmetik des Jordanus, auf welche er gleich bei der ersten Regel sich beruft, und der er in der Anwendung von Buchstaben als Vertreter allgemeiner Zahlen nacheifert[2]), er geht aber anderntheils so weit über seinen Vorgänger hinaus, dass ihm selbst erst nach mehreren Jahrhunderten Nachfolger entstehen. Oresme fühlt auch ganz gut das Unzutreffende in der Redewendung Addition und Subtraction von Verhältnissen; er wendet sie nur an, weil er eben einer einmal eingebürgerten Ausdrucksweise, sei sie auch falsch, entgegenzutreten für misslich hält. Er empfindet, dass man eine Multiplication von Verhältnissen zu fordern berechtigt wäre, während er keine Operation sieht, welche dieses Verlangen erfüllte[3]). Verhältnisse, sagt er, kann man nicht miteinander vervielfachen, so wenig als man die Multiplication eines Menschen mit einem Esel vollziehen kann[4]). Der 2. Abschnitt enthält Anwendungen der im 1. Abschnitte gegebenen Regeln. Zuerst ist von dem Verhältnisse von Würfeln die Rede, welches, um in der Sprache Oresme's zu bleiben, als das Anderthalbfache des Verhältnisses der Grundflächen sich berechnet. Ein Würfel a habe eine zweimal so grosse Grundfläche wie der Würfel b, eine dreimal so grosse wie der Würfel c, dann ist a so viel wie $8^{\frac{1}{2}}$ von b, und b ist $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ von c. Das Vorkommen eines Schreib- oder Rechenfehlers, mitels dessen b als $\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ von c angesetzt wird, kann kaum überraschen, da wir volles Recht haben zu zweifeln, ob der

---

[1]) *Addatur una tertia duple proportione sesquialtere; continuentur ergo 3 sesquialtere cum dupla et exibit proportio sextupla superpartiens* $\frac{3}{4}$ *que est proportio* 27 *ad* 4. *Et ista proportio sic resultans scribitur sic* $\frac{1}{3} \cdot 6^p \cdot \frac{3}{4}$.

[2]) So bei der 9. Regel: *si tertia pars a addatur tertie parti b exibit tertia pars illius quod fieret ex additione a ad b.* [3]) *Una vero proportio per alteram non multiplicatur nec dividitur nisi inproprie.* [4]) *sicut nec multiplicare hominem per asinum.*

Abschreiber überall verstand, fähig war zu verstehen, was er schrieb. Aehnlich wie bei den Würfeln mit gegebenen Grundflächen ist die Verhältnissmässigkeit bei Kugeln mit gegebenen Grösstenkreisen. Eine musikalische Aufgabe ist folgende. Es seien b und c die Seiten zweier Quadrate, $a = c \cdot \sqrt{2}$ die Diagonale des ersten Quadrates. Nach Boethius[1]) geben über b und c gespannte Saiten Töne von einem Halbton Unterschied, wenn $a : b = 256 : 243$ oder

$$c : b = \sqrt{\frac{256^2}{2}} : \sqrt{243^2}$$

d. h. $= \sqrt{32768} : \sqrt{59049}$. Auffallend genug ist, dass das Verhältniss des grösseren zum kleineren Quadrate nicht einfach als das von $59049 : 32768$ bezeichnet wird, sondern als das halbe Verhältniss (d. h. Verhältniss der Quadratwurzeln) aus 3486784401 und 1073741824. Oresme schiebt jetzt plötzlich wieder eine Regel ein. Er nimmt als bekannt an $a : b = c : 1$, ferner $d = e \cdot a$, $f = g \cdot b$, endlich h als Verhältniss zwischen g und e und sucht nun das Verhältniss zwischen d und f zu bestimmen. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden: $e = g$, $e > g$, $g > e$. Im ersten Falle ist $d : f = a : b$ sofort ersichtlich. Im zweiten Falle ist $e : g = h : 1$, ausserdem $a : b = c : 1$ und durch Addition (Vereinigung) der beiden letzteren Proportionen $ae : bg = ch : 1$ d. h. $d : f = ch : 1$. Der dritte Fall $g : e = h : 1$ unterscheidet selbst wieder die drei Unterfälle $c = h$, $c > h$, $h > c$. Ist $c = h$, so ist $a : b = g : e$, $ea = gb$ d. h. $d = f$. Ist $c > h$, so ist $a : b = c : 1$, $g : e = h : 1$ und durch Subtraction der Verhältnisse $ae : bg = c : h$ d. h. $d : f = c : h$. Endlich bei $h > c$ findet die Subtraction der Proportionen im entgegengesetzten Sinne statt, es folgt $bg : ae = h : c$ oder $f : d = h : c$. Dem heutigen Leser wird die Nothwendigkeit der Unterscheidung aller dieser Fälle nur dann einleuchten, wenn er sich stets in Erinnerung hält, dass, wie oben gesagt wurde, ein Verhältniss nur von dem Grösseren zum Kleineren angenommen wird, nie umgekehrt. Anwendungen für diese Auseinandersetzung findet Oresme in Aufgaben, welche eine Subtraction von Verhältnissen bei ihrer Lösung erfordern. Wir übergehen ein Beispiel, welches dem Zahlenkampf genannten Spiele entnommen ist, ohne mehr darüber zu sagen, als dass es immerhin bemerkenswerth erscheint, dass jenes Spiel, über welches ein gewisser Fortolfus um das Jahr 1100 eine Abhandlung schrieb[2]), auch 250 Jahre später noch in Uebung war. Dagegen führen wir die Aufgabe an, das Verhältniss der dreifachen

[1]) Oresme meint, wie Curtze, Oresme II, 75 Note richtig bemerkt hat, die Stelle Boethius: *De institutione musica* I, 17 (ed. Friedlein pag. 204 Z. 8—9).
[2]) R. Peiper in Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 210.

Diagonale eines Quadrates zu dessen vierfacher Seite zu finden. Hier ist, wenn a die Seite, d die Diagonale bedeuten soll, $3d:a = 3\sqrt{2}:1$ neben $4a:a = 4:1$, Subtraction der zweiten Proportion von der ersten giebt $3d:4a = 3\sqrt{2}:4 = \sqrt{\frac{9}{8}}:1$. In den beiden letzten Aufgaben des Abschnittes handelt es sich um die Ermittelung des Verhältnisses zweier Geschwindigkeiten, nämlich derer zweier Punkte, die einmal die Umfänge zweier Kreise von gegebenem Grössenverhältnisse, das andere Mal die Diagonale und die Seite eines Quadrates in gegebenen Zeiten durchlaufen. Der 3. Abschnitt beschäftigt sich mit regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken desselben Kreises. Derartige Dreiecke und Vierecke, Sechsecke und Achtecke werden ihren Flächen nach in Verhältniss gesetzt. Der letzte Satz dieser Gruppe sagt aus[1]), das Sehnenachteck sei mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Sehnen- und Tangentenvierecke, und eine Handschrift des Algorismus proportionum fügt noch hinzu[2]), was vom Achtecke ausgesagt sei, gelte auch von anderen Figuren. Wir erinnern uns des gleichen Satzes mit der gleichen Ausdehnung bei Jordanus Nemorarius (S. 78). Den Schluss des Ganzen bildet eine kürzere Untersuchung über die sogenannten Aspecten und ihre Verhältnisszahlen, zeigt also Oresme als auch in astronomischen Dingen nicht ganz unerfahren, zeigt zugleich ebenso wie die mechanischen Aufgaben des 2. Abschnittes eine immerhin vorhandene Gedankenverwandtschaft zwischen dem Tractatus proportionum und Theilen des 2. und 3. Abschnittes des Algorismus proportionum, so hoch der letztere über dem ersteren stand. In ihm hat Oresme einen Gipfelpunkt erreicht, der so weit über das Vorherbekannte sich erhob, dass gespannte Erwartung sich äussern darf, nach welcher Richtung der nächste Fortschritt sich vollziehen werde.

48. Kapitel.

Deutsche Mathematiker.

Jetzt grade trat das ein, was wir (S. 123) angekündigt haben. Frankreich wich von der ersten Stelle, welche es wissenschaftlich eingenommen hatte. England, das wir als nächstberechtigten Erben zu betrachten nach den vorhergegangenen Untersuchungen allen

[1]) *Octogonus circulo inscriptus est medium proportionale inter quadratum eidem circulo inscriptum et quadratum eidem circumscriptum.* [2]) Curtze, Oresme I, 11 Note.

Grund haben, trat die Erbschaft nicht an. Deutschland und Italien sind die beiden Länder, in welchen der edle Wettstreit um das Uebergewicht innerhalb der Wissenschaft beginnt. Die Gründe dieser erst im XV. Jahrhundert sich vollziehenden Wandelung liegen bereits im XIV. Jahrhunderte und müssen hier auseinandergesetzt werden.

Zwei grosse geschichtliche Ereignisse sind es vorzugsweise, welche die Verschiebung der geistigen Machtverhältnisse begleiten, wenn nicht hervorrufen. Genannt haben wir beide im Vorübergehen, und zwar in Verbindung mit dem Namen des grössten englischen, des grössten französischen Mathematikers des XIV. Jahrhunderts. Von Bradwardinus berichteten wir (S. 113), dass er 1340 bis 1346 König Eduard III. auf seinen Kriegszügen in Frankreich begleitete, von Oresme (S. 128), dass er 1363 in Avignon eine berühmte Predigt über oder gegen den Papst hielt. Und nun wiederholen wir ausdrücklich, dass wir unter den Ereignissen, welche, so fern sie wissenschaftlichen Bestrebungen zu liegen scheinen, in der Geschichte der Mathematik eine keineswegs unwesentliche Rolle spielen, den englisch-französischen Erbfolgekrieg und den vorübergehenden Aufenthalt der Päpste in Avignon verstehen.

Philipp IV. mit dem Beinamen der Schöne war 1314 gestorben, und der französische Thron vererbte sich auf seinen Sohn. Aber dieser Mannesstamm erlosch 1328, und die Krone ging an die Seitenlinie der Valois über. Eduard III. von England erhob als Schwiegersohn Philipp des Schönen Einsprache und verlangte, entgegen dem in Frankreich geltenden, weibliche Erbfolge ausschliessenden, salischen Gesetze, die französische Krone für sich. Das war der Anfang des langwierigen, auf französischem Boden mit wechselndem Glücke geführten Erbfolgekrieges, der erst 1436 mit dem Einzuge Karls VII. in Paris als beendigt angesehen werden kann. Wogte wildes Kriegestreiben ein Jahrhundert lang in Frankreich, so genoss England keineswegs viel grösseren Friedens, da Kämpfe zwischen England und Schottland in Abwechslung mit den inneren Streitigkeiten, die man unter dem Namen der Kämpfe zwischen der weissen und der rothen Rose kennt, das Land zerfleischten. Schiller's Jungfrau von Orleans, Shakespeare's Königsdramen haben die Kenntniss aller dieser Kämpfe in weite Kreise getragen. Sie bilden die eine Gruppe von Ereignissen, welche wir als dazu angethan erwähnten, den schönen wissenschaftlichen Anlauf zu hemmen, welchen die Geschichte der Mathematik aus England wie aus Frankreich zu verzeichnen hatte.

Und nun die andere Gruppe von Thatsachen folgereicher Natur. Wieder bis zu Philipp dem Schönen müssen wir zurückgreifen, zu dessen Kämpfen mit Papst Bonifacius VIII. Bannfluch und Interdict

erwiesen sich als unwirksam dem Könige sein Land zu entfremden. Bonifacius starb 1303 moralisch besiegt. Sein Nachfolger, Benedict XI., folgte ihm vor Jahresfrist in's Grab, und als nun eine französische Partei unter der hohen Geistlichkeit die Wahl des Bischofs von Bordeaux zum Papste als Clemens V. durchsetzte, verlegte dieser 1305 den Sitz der päpstlichen Gewalt nach Avignon. Nur Franzosen wurden 70 Jahre lang zu Päpsten gewählt. Sie fühlten sich, wie nicht mit Unrecht gesagt worden ist, als französiche Hofbischöfe auf ihrem Sitze zu Avignon. Gregor XI. zog erst 1377 wieder nach Rom, mit endlosem Jubel begrüsst. Sein baldiger Tod brachte Urban VI. die päpstliche Würde, die aber nicht ohne Anfechtung blieb. Ein französischer Gegenpapst, Clemens VII., nahm seinen Sitz in Avignon, und die grosse Kirchenspaltung begann, welcher erst die 1417 auf dem Concile zu Constanz getroffene Wahl des Papstes Martin V. ein vorläufiges Ende setzte. Die Kirchenspaltung hatte, wie nicht anders denkbar, auch den Universitäten sich mitgetheilt, den Stätten, aus welchen die Geistlichkeit hervorging. Bis in die pariser Universität drang der Zwist, und wenn im Grossen und Ganzen die Franzosen auf der Seite des Papstes von Avignon standen, so traten in naturgemässem Gegensatze die nicht französischen, meist deutschen Lehrer und Schüler der pariser Universität auf die Seite des in Rom befindlichen Papstes. Sie kehrten Paris, mehr oder weniger dazu gezwungen, den Rücken, und diese Auswanderung war erleichtert, ermöglicht, vielleicht mit hervorgerufen durch die schon vor der Kirchenspaltung erfolgte Entstehung neuer Universitäten in Deutschland. Prag wurde 1348, Wien 1365, Heidelberg 1386, Köln 1388, Erfurt 1392 zur Universität, gegründet nach dem Muster von Paris und dennoch dessen eifrige Nebenbuhler. Hierhin zog sich freiwillig oder einem Rufe folgend, wer in Paris sich nicht mehr am richtigen Orte fühlte, und Wien vor allen wurde die vorzugsweise mathematische Universität.

Hier dürfte der Ort sein zunächst einzuschalten, was an mathematischem Stoffe die Universität des XIV. Jahrhunderts dem Studirenden bot [1]). In Paris gewährte das Collège de Navarre, dem Oresme seit 1348 angehörte, gemäss seiner Satzungen von 1315 nicht mehr, als dass der leitende Magister verpflichtet war, täglich in einer Stunde über ein logisches, mathematisches oder grammatisches Werk in seiner Behausung zu lesen, je nach dem Wunsche der Mehrzahl

[1]) Quelle ist hierfür das vorzügliche Kapitel „Die Mathematik auf den Universitäten" in Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 354—359, zu welchem Suter, Math. Univ. weitere wesentliche Ergänzungen hinzufügte.

der Zuhörer[1]). Etwas besser wurde die Mathematik in der 1366 durch Papst Urban V. vorgenommenen Durchsicht der Universitätssatzungen von Paris bedacht[2]). Das Licentiat solle nur ertheilt werden können, wenn der Baccalaureus Vorlesungen über einige mathematische Bücher gehört habe, aliquos libros mathematicos audiverit. Ob freilich mehr als das Gehörthaben, ob auch ein Verstehen jener Vorlesungen gefordert wurde, davon steht in den Satzungen nichts, und ein besonderer Nachweis dürfte, wenn er verlangt worden sein sollte, nicht mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden gewesen sein. Genügte doch noch im XVI. Jahrhundert ein Eid[3]), man habe eine Vorlesung über die sechs ersten Bücher des Euklid gehört, statt der Prüfung.

Aus Prag kennen wir[4]) Satzungen von 1367 und ein Vorlesungsverzeichniss von 1366. In jenen sind gewisse Vorlesungen mit der dazu erforderlichen Zeit und dem gesetzlich dafür zu entrichtenden Honorare vorgeschrieben. Für 1 Groschen wurde während 6 Wochen Sphaera materialis vorgetragen, für 8 Groschen während eines halben Jahres sechs Bücher Euklid — natürlich die sechs ersten Bücher der Elemente. Am billigsten und schnellsten erlernte man Algorismus für 8 Heller in 3 Wochen; am theuersten und längsten war die Vorlesung über den Almagest angesetzt: sie dauerte ein Jahr und kostete 1 Gulden. Einmal wenigstens scheint diese kostspielige Vorlesung gehalten worden zu sein, wenn man den Schluss aus ihrer Ankündigung in dem erwähnten Vorlesungsverzeichnisse neben fünf anderen mathematischen Vorlesungen ziehen darf. Darunter sind die sechs ersten Bücher des Euklid, darunter sonderbarerweise auch Computus cyrometricalis, welcher das Handrechnen, d. h. Kopfrechnen unterstützt durch Zahlendarstellung mittels der Finger lehrte.

Auch für Wien[5]) stehen Satzungen von 1389 und Vorlesungsverzeichnisse aus den neunziger Jahren zur Verfügung. Die Satzungen schreiben neben den von Prag aus uns bekannten Gegenständen noch Vorlesungen über die Proportionen und über die Latitudines formarum vor, während die über den Almagest fehlen. Die Satzungen lassen uns allerdings andrerseits erkennen, dass die beiden neuen Lehrgegenstände nicht so vollkommen eingeübt worden sein werden, wie die Schriften des Oresme es wohl möglich gemacht hätten, wenn auch dessen Latitudines formarum dem Unterrichte zu Grunde lagen;

---

[1]) Suter, Math. Univ. S. 26. [2]) Hankel l. c. S. 355, wo aber irrigerweise 1336 als Jahreszahl steht. Suter l. c. S. 36. [3]) Kästner I, 260. [4]) Hankel l. c. S. 356. Suter l. c. S. 36—39. [5]) Suter l. c. S. 39—40 und 51.

für 3 Groschen Proportionen, für 2 Groschen Latitudines, das kann nicht sehr viel gewesen sein, wo die fünf ersten Bücher Euklid's 6 Groschen, die Perspectiva communis 5 Groschen kostete! Nichtsdesto weniger war es ein Fortschritt, der Wien als das kennzeichnet, was wir oben andeuteten, als die mathematischste unter den vor 1400 entstandenen Universitäten. Und ein Fortschritt war es ferner, dass verhältnissmässig hohe Anforderungen für die Erwerbung der Grade gestellt waren. Schon das Baccalaureat erforderte, dass vollständig und ohne Trug, complete et sine dolo, nachgewiesen werde die Vorlesung über die Sphäre, die über den Algorismus, die über das erste Buch Euklid's. Für das Licentiat waren erforderlich die fünf ersten Bücher Euklid's, Planetentheorie, Perspective und *irgend ein* Buch, aliquis tractatus, über Latitudines, irgend eines über Musik, irgend eines über Arithmetik. Endlich ist Wien die einzige Universität, deren Satzungen mit Bestimmtheit auch Disputationen über mathematische Dinge anerkennen, während fast nur Philosophisches dem mündlichen Wettstreite unterworfen war. Den satzungsmässigen Anforderungen zu genügen hielt aber nicht allzuschwer, wo die Vorlesungsverzeichnisse eine reiche Auswahl von Lehrern aufzeigten, die zu den einzelnen Unterrichtsgegenständen sich anboten. War doch ein solcher Zudrang von Lehrern, dass am 1. September 1391 die Artistenfacultät beschloss, die Auswahl der Gegenstände, über welche Jeder zu lesen habe, an eine Auslosung zu knüpfen. Da finden wir in dem genannten und in den Folgejahren Vorlesungen über Algorismus de integris und Algorismus de minutiis, über Arismetica, über Proportiones Bradwardini, über Euclides und über Latitudines formarum, über Computus physicus und Theoria planetarum, lauter uns bekannte oder doch leicht verständliche Gegenstände[1]).

Die Zeitfolge der Gründung führt uns nach Heidelberg[2]). Auch hier sind für Erwerbung des Licentiates, dagegen noch nicht für die des Baccalaureates, gewisse mathematische Voraussetzungen. Auch hier freilich gilt wie in Paris ein Eid als hinlänglicher Beweis der Erfüllung jener Voraussetzungen. Wer das Licientiat erwerben will, muss schwören, dass er einige mathematische Bücher ganz, nicht bloss theilweise gehört habe, dass er insbesondere die Vorlesung über die Weltkugel gehört habe, und dass er an Disputationen sich betheiligt habe, wobei die Frage, ob diese Disputationen einem anderen mathematischen Wissensgebiete als dem Tractatus de spera (sic) mundi angehört haben, für uns eine offene ist. Später werden in

[1]) Eine sehr übersichtliche Tabelle bei Günther, Unterricht Mittela. S. 199.
[2]) Suter, Math. Univ. S. 41 unter Anlehnung an Winkelmann, Urkundenbuch der Universität Heidelberg (1886) S. 33, 38, 42.

den Eidschwur auch die Latitudines formarum einbegriffen, natürlich unter der Vorbedingung, dass sie zur Zeit gelesen worden seien, si saltem legerentur.

In Köln verlangten[1]) die Satzungen von 1398 buchstäblich gleichlautend mit den Wiener Vorschriften als Voraussetzung für das Licentiat irgend ein Buch über Proportionen, irgend eines über Latitudines, irgend eines über Musik, irgend eines über Arithmetik, daneben aber nur drei Bücher des Euklid und angewandte Fächer wieder wie in Wien.

Diese kurze Zusammenstellung genügt, um die Wahrheit unserer Behauptung erkennen zu lassen, dass schon am Ende des XIV. Jahrhunderts die deutschen Bildungsstätten mehr als die Frankreichs die Eigenschaften in sich vereinigten, welche Mathematiker zu erziehen unerlässlich sind, dass sie Gelegenheit zum Lernen boten und satzungsmässig darauf hielten, dass von dieser Gelegenheit Gebrauch gemacht wurde. Selbst die Unsitte des Schwures, diese oder jene Vorlesung gehört zu haben, als hinreichenden Nachweises des erlangten Wissens verliert auf deutschem Boden etwas von ihrer Missgestalt, denn der Eid, allgemein aliquos libros mathematicos gehört zu haben, reicht nicht mehr aus; die zu hörenden Schriften sind besonders genannt und erstrecken sich auf alle damals bearbeiteten Gebiete der Mathematik, wenn auch, wie wir oben vermuthungsweise ausgesprochen haben, nicht in ihrer ganzen Ausdehnung.

Eines freilich blieb ungeändert: die Art des Unterrichtes an der Universität[2]). Sie bestand einzig darin, dass Lehrer und Schüler das gleiche Buch, dessen Vervielfältigung man daher frühe angestrebt haben muss, in Händen hatten, dass Ersterer vorlas und im freien Vortrage erläuterte und ergänzte, dass Letztere wenig oder nichts schriftlich aufzeichneten. Irgend ein Befragen der Schüler durch den Lehrer fand nicht statt. Nur die von uns wiederholt erwähnten öffentlichen Disputationen gaben Gelegenheit, einigermassen zu erkennen, wie viel oder wenig einer der Disputirenden in den Vorlesungen gelernt hatte. So war das Verfahren in allen Wissenszweigen, so auch in der Mathematik.

Wir müssen nun die Persönlichkeiten nennen, durch welche die örtliche Verschiebung nach Osten ins Werk gesetzt wurde. Es sind besonders zwei Gelehrte, die, obwohl Deutsche von Geburt, den Anfang ihrer Berühmtheit in Paris erlangten, die also auch dort hätten genannt werden können, wenn nicht genannt werden sollen, und die

---

[1]) Suter l. c. S. 41. [2]) Günther, Unterricht Mittela. S. 192—197.

als schon allgemein bekannte Männer in die Heimath übersiedelten: Albert von Sachsen, Heinrich von Hessen.

Albertus de Saxonia[1]) war, nach der gebräuchlichsten Angabe, aus Riggensdorf in Sachsen. Er war, wie es scheint, Schüler der eben gegründeten Universität Prag, ging dann nach Paris und wurde hier Magister der freien Künste, später Doctor der Theologie. Seit 1350 lehrte er, ein hervorragender Vertreter der Occam'schen Richtung, aristotelische Philosophie und Mathematik. Da berief ihn 1365 Herzog Rudolf IV. von Oesterreich als Rector an die in der Gründung begriffene Universität Wien, aber schon im folgenden Jahre vertauschte Albert diese Stellung mit der des Bischofs von Halberstadt, und als solcher starb er 1390. Mitglied irgend eines Mönchsordens scheint Albert von Sachsen nicht gewesen zu sein, da bei einer so bedeutenden Persönlichkeit die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Orden sich nahezu immer nachweisen lässt. Widersprechende Angaben wie die drei über Albert vorhandenen, er sei Dominikaner, Franciskaner, Augustiner gewesen, sind meistens alle unrichtig. Seine philosophischen Schriften kümmern uns hier nicht. Ob eine in Venedig handschriftlich erhaltene Abhandlung *De maximo et minimo*[2]) ihnen zuzuzählen, ob sie mathematischen Inhaltes ist, lässt sich nicht entscheiden, so lange sie noch nicht von einem Fachmanne untersucht ist, was jedenfalls sehr wünschenswerth wäre. An mathematischen Schriften des Albert von Sachsen ist ein *Tractatus de latitudinibus formarum* 1505 gedruckt, ein *Liber proportionum* gar in zehn verschiedenen Ausgaben, deren erste auf 1482 zurückgeht[3]). Der Inhalt der ersten Schrift scheint sich dem der gleichnamigen von Oresme, der der zweiten der Schrift Bradwardin's über Proportionen zu nähern. Allgemein zugänglich sind zwei Abhandlungen, welche aus einer Handschrift der berner Stadtbibliothek[4]) in einer mathe-

---

[1]) Die Hauptquellen sind zwei Abhandlungen von H. Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 81—101 und XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 41—56, in welchen die beiden Tractate über Kreisquadratur und über Irrationalität der Diagonale des Quadrates erstmalig abgedruckt sind. Biographisches in der Allgem. deutsch. Biographie I, 182—183. Dort heisst Alberts Geburtsort: Rickmersdorf. Ein Aufenthalt in Pavia wird nur von Jacoli in *Bullet. Boncompagni* IV, 495 ohne jede Quellenangabe behauptet. Vielleicht ist es ein Druckfehler Pavia statt Parigi, ebenso auch die dortige Angabe, Alberts Blüthezeit sei 1330 gewesen statt 1350. Ueber seine philosophischen Schriften vergl. Prantl, Gesch. Log. IV. [2]) Aschbach, Geschichte der Wiener Universität I, 365. [3]) Bald. Boncompagni im *Bullet. Boncompagni* IV, 498—511. [4]) Codex A. 50 geschrieben am Anfange des XV. Jahrhunderts. Eine Beschreibung der Handschrift von Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Athlg. S. 84—85.

matischen Zeitschrift dem Drucke übergeben wurden. An der Richtigkeit der Annahme, dass hier wirklich in allein erhaltener Niederschrift zwei Abhandlungen Alberts von Sachsen vorhanden seien, ist nicht mehr zu zweifeln, seit stylistische Vergleichung derselben mit philosophischen Schriften des gleichen Verfassers die täuschendste Aehnlichkeit an den Tag gelegt hat[1]). So schreibt z. B. Albert, und fast nur er unter seinen Zeitgenossen, *Est dare* in der Bedeutung von: es giebt oder es muss geben. So ist in philosophischen Schriften die Zusage gegeben über Dinge, wie sie in den beiden Abhandlungen sich vorfinden, später wo möglich sich äussern zu wollen, womit zugleich eine Datirung dieser Abhandlungen als zu den letzten Erzeugnissen von Alberts schriftstellerischer Thätigkeit gehörend gesichert ist.

Die eine Abhandlung[2]) beschäftigt sich mit der Quadratur des Kreises. In echt scholastischer Weise wird zunächst untersucht, ob die gestellte Aufgabe gelöst werden könne, ob nicht. Gründe für und gegen werden aufgezählt. Bei jedem werden mit gleicher Unparteilichkeit Gegengründe gesucht. Es ist ein Hin- und Hertasten zwischen Ja und Nein. Es giebt, sagt der Verfasser, ein jedem Kreise umschriebenes, ein ihm eingeschriebenes Quadrat; jenes ist grösseren, dieses kleineren Inhaltes als der Kreis; gäbe es kein dem Kreise genau gleiches Quadrat, so wäre der Uebergang vom Grösseren zum Kleineren durch alle Mittelwerthe vollzogen, ohne dass man dabei zu einem bestimmten mittleren gelangt wäre[3]). Der Quadratur des Kreises zur Seite steht die Kubatur der Kugel; die Kugel aber kann kubirt werden, wie offenbar wird, wenn wir das Wasser, welches ein kugelförmiges Gefäss füllt, in ein würfelförmiges übergiessen[4]). Nein, heisst es dann, die Quadratur des Kreises ist doch nicht möglich, denn gäbe es eine solche, so müsste es auch eine Circulatur des Quadrates geben[5]) und eine solche ist noch niemals überliefert worden. Ein zweiter Gegengrund wird dem Buche über isoperimetrische Figuren entnommen, worunter offenbar jene im Mittelalter bekannte Nachbildung der Schrift des Zenodorus gemeint ist[6]); gäbe es ein dem Kreise flächengleiches Quadrat und wölbte man

[1]) Suter in Zeitschr. Math. Phys. XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 41—42. [2]) Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 87—94. [3]) *Fieret transitus de majore ad minus, sive de extremo ad extremum transeundo per omnia media et tamen nunquam perveniretur ad equale vel ad medium.* [4]) *Sed sphera potest cubicari, ut patet, si aquam replentem vas sphericum infundamus ad vas quadraticum sive cubicum.* [5]) *Si circulus posset quadrari, quadratum posset circulari.* So ist das Wort Circulatur des Quadrates, welches wir Bd. I, S. 546 als Neubildung wagten, schon im XIV. Jahrhunderte in Gebrauch gewesen! [6]) Sie ist z. B. im Basler Codex F 2, 33 enthalten.

dessen Seiten nach aussen, so dass jeder Punkt der neuen Gestaltung gleich weit vom Mittelpunkte entfernt wäre, ohne dass dabei der Umfang eine Aenderung erlitte[1]), so müsste eine Fläche entstehen, die weit grösser wäre, als der ursprüngliche Kreis. Drittens müsste die Hälfte des dem Kreise gleichen Quadrates dem Halbkreise gleich sein, eine Figur mit rechten Winkeln einer Figur mit Winkeln, die keinem gradlinigen Winkel gleich sind, während Figurengleichheit durch Euklid und Campanus aus der Winkelgleichheit bewiesen wird[2]). Viel, meint der spitzfindige Schriftsteller, hängt davon ab, was man Quadriren nennt. Dem Einen ist Quadriren Viertheilung des Kreises durch zwei im Mittelpunkte sich senkrecht schneidende Durchmesser. So Campanus in seiner Theorie und viele andere Doctoren[3]). Zweitens meinen Ungelehrte, man könne den Kreis in eine einem Quadrate einigermassen ähnliche Figur verwandeln, indem man Stücke ringsherum abschneidet und anders anlegt. Die Dritten verstehen unter Kreisquadratur die Auffindung eines Quadrates, welches nicht etwa dem Kreise gleich sei, sondern dessen aneinander gelegte Seiten der zur Geraden ausgespannten Kreisperipherie gleichkommen, und so hat Campanus den Kreis quadrirt[4]). Viertens können wir unter Quadriren des Kreises verstehen ein dem Kreise gleiches Quadrat zu finden, dessen Seiten überdies (cum hoc) der zur Geraden ausgespannten Peripherie gleich kommen[5]). Fünftens können wir den Kreis so zu quadriren wünschen, dass wir ein dem Kreise flächengleiches Quadrat auffinden wollen. Nun werden wieder alle diese Auffassungen der Reihe nach kritisch untersucht. Die erste Kreisquadratur ist möglich, führt aber zu nichts. Die zweite ist unmöglich, denn die abgeschnittenen Stückchen geben, wie man sie auch an einander legen mag, keinen rechten Winkel. Die dritte Art hat Campanus vollzogen, indem er der Aussage vieler Philosophen folgend, die Länge der Kreisperipherie zu $3\frac{1}{7}$ Durchmesser annahm, eine Annahme, welche, wie es an einer späteren Stelle heisst, schwer beweisbar, aber doch beweisbar ist[6]). Für Albert von Sachsen war demnach wie für Campanus, wie für das ganze Mittelalter, $\pi = 3\frac{1}{7}$ kein Näherungswerth,

---

[1]) *si latera quadrati extendantur equaliter a centro.* [2]) *per equalitatem angulorum Euclides et Campanus probant equalitatem figurarum.* [3]) *Isto modo loquitur Campanus in theorica sua et multi alii doctorum.* Welche Schrift des Campanus gemeint ist, wissen wir nicht. [4]) *et isto modo Campanus quadravit circulum.* Unsere Leser erinnern sich, dass wir uns S. 101 zum voraus auf diese Stelle berufen haben. [5]) Dass wir die sprachlich schwierige Stelle richtig übersetzt haben, folgt aus Alberts späterer eigener Polemik gegen diese vierte Auffassung. S. S. 146 Note 2. [6]) *est demonstrabile ad intellectum quamvis difficile.*

sondern genau richtig[1]). Die vierte Auffassung der Kreisquadratur ist wieder unmöglich, weil unter isoperimetrischen Figuren der Kreis die grösste Fläche einschliesst, also mit einem isoperimetrischen Quadrate nicht flächengleich sein kann[2]). Somit bleibt nur eine Quadratur des Kreises im fünften Sinne des Wortes zu vollziehen, und jetzt wird bewiesen, dass der Kreis genau gleich sei einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete dem Kreishalbmesser, die andere dem Kreisumfange an Länge entspricht. Zum Schlusse erscheinen neuerdings scholastische Haarspaltereien über die am Anfange der Untersuchung gegen die Möglichkeit einer Quadratur erhobenen Einwürfe. Wir erwähnen daraus nur den letzten Satz der Abhandlung: Wenn man sagt, Euklid und Campanus beweisen Figurengleichheiten aus Winkelgleichheiten, so gebe ich das zu, aber daraus folgt nicht, dass aus Ungleichheit von Winkeln Ungleichheit von Figuren zu folgern sei[3]). Wir haben den eigentlichen geometrischen Beweis für die Flächengleichheit des Kreises mit dem erwähnten rechtwinkligen Dreiecke noch nachzutragen. Wäre besagtes Dreieck kleiner als der Kreis, so müsste es einem Sehnenvielecke desselben gleich sein, das selbst in ein rechtwinkliges Dreieck übergeht, dessen eine Kathete kleiner als der Halbmesser, die andere kleiner als die Peripherie wäre, und das widerspricht der Annahme. Wäre dagegen besagtes Dreieck grösser als der Kreis, so müsste es einem Tangentenvielecke desselben gleich sein, das selbst in ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Halbmesser als einer Kathete übergeht, dessen andere Kathete jetzt grösser als die Peripherie wäre, und das widerspricht abermals der Annahme. Folglich müssen Dreieck und Kreis einander genau gleich sein.

Die zweite Abhandlung[4]) ist dem Verhältnisse der Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite gewidmet. Albert beginnt auch hier mit Erörterung der irrigen Meinung, als sei die Diagonale doppelt so lang als die Quadratseite, welche mit drei Gründen gestützt zu werden pflege. Erstens sei (Fig. 26) der Weg, den ein Bewegtes von a über b nach d zurücklege, das Doppelte des Weges bd; er könne aber durch den Weg ad ersetzt werden, also

---

[1]) Hierauf hat H. Suter, Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Hist.-liter. Abthlg. S. 94 aufmerksam gemacht. [2]) *(impossibile est) aliquod quadratum esse equale circulo cujus latera simul juncta sint equalia circumferentiae circuli in rectam extense; haec (conclusio) patet ex eo quod figura circularis inter omnes alias est capacissima.* [3]) *Quando dicitur, Euclides et Campanus per equalitatem angulorum probant equilitatem figurarum, bene volo, ex hoc tamen non sequitur, quod inequalitatem angulorum sequeretur inequalitas figurarum.* [4]) Zeitschr. Math. Phys. XXXII, Hist.-liter. Abthlg. S. 43—52.

sei $ad = 2bd$. Zweitens verhalte sich das Quadrat $abdc$ zu seiner Diagonale ad wie das Quadrat $cfdg$ zu seiner Diagonale cd; durch Vertauschung der inneren Glieder zeige sich, dass das Quadrat $abdc$ zum Quadrate $cfdg$ in gleichem Verhältnisse stehen müsse wie ad zu cd; aber das Quadrat $abdc$ sei das Doppelte von dem Quadrate $cfdg$, mithin auch $ad = 2cd$. Drittens stehe nach dem Satze I, 18 von Euklid[1]) dem grösseren Winkel im Dreiecke die grössere Seite gegenüber; nun sei $\sphericalangle acd = 2 \sphericalangle adc$, also finde das gleiche Verhältniss bei den gegenüberliegenden Seiten statt, und es sei $ad = 2ac$. Alle Geometer aber missbilligen diese

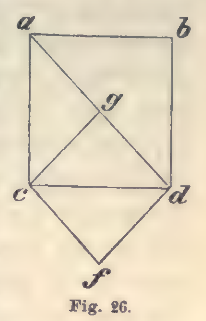


Fig. 26.

Beweisführungen und das Doppelte der Quadratseite ist die Diagonale nicht. Commensurable Grössen (commensurabilia) stehen immer im Verhältnisse ganzer Zahlen. Wären also Quadratseite und Diagonale commensurabel, so müssten auch sie in solchem Verhältnisse stehen, und zwar entweder im Verhältnisse zweier grader, oder zweier ungrader, oder einer graden und einer ungraden Zahl. Alle diese Annahmen widersprechen aber der Thatsache, dass das Quadrat der Diagonale das Doppelte des Quadrates der Seite sein muss, wie genau nach euklidischem Muster (Bd. I, S. 170) gezeigt wird. Es findet folglich zwischen Seite und Diagonale zwar ein Verhältniss statt, aber kein rationales, sondern ein irrationales (proportio irrationalis). Also auch Albert von Sachsen ist im Besitze dieses Wortes. Im weiteren Verlaufe der Abhandlung wird erläutert, wie wenig ein Schluss von dem Umfange einer Figur auf deren Inhalt gerechtfertigt sei. Man halbire ein Quadrat und setze die beiden so entstehenden Rechtecke an der kürzeren Seite an einander, so vergrössere sich der Umfang bei gleich bleibendem Inhalte. Ebenso könne man mit dem eben erzeugten Rechtecke verfahren u. s. w., so dass es keinen noch so grossen Umfang gebe, den man nicht ohne Veränderung des Inhaltes noch übertreffen könnte. Den kleinsten Umfang eines gegebenen Inhaltes stellt dagegen die Kreislinie dar. Ganz ähnliche Schlüsse werden für Körper gezogen, und zwar nicht bloss für eckige, auch für runde Körper. Um einen ersten runden Körper herum kann man einen zweiten biegen, der gleichen Inhaltes, aber weniger dick ist. Soll die Dicke des Körpers unverändert bleiben, so hindert nichts ihn in zwei Körper von der halben Höhenausdehnung zu zerschneiden und diese beiden der Länge nach an einander setzen

---

[1]) Albert von Sachsen citirt nach der Euklidausgabe des Campanus In den gewöhnlichen Ausgaben (nach Theon) ist der Satz I, 19 bezeichnet.

zu lassen. Setzt man das gleiche Verfahren immer fort, und bedarf es etwa der Hälfte einer Stunde, um die erste Zerschneidung und Vereinigung vorzunehmen, die Hälfte der noch übrigen halben Stunde um die zweite Zerschneidung und Vereinigung zu vollziehen u. s. w., ein Gedanke, den Albert in die lakonischen Worte kleidet, man bedürfe stets einen verhältnissmässigen Theil einer Stunde (pars proportionalis horae), so sind in einer Stunde unendlich viele Körper zu einem einzigen vereinigt, und es giebt überhaupt keine Grenze für die Menge der Körper, die vereinigt werden können, oder für die Grösse der Oberfläche, die ein einfacher Körper durch wiederholte Spaltung zu erhalten im Stande ist. Nur die untere Grenze bleibt, dass nämlich ein gegebener körperlicher Raum als Kugel gedacht die geringste Oberfläche besitzt. Jetzt kommt der Verfasser auf die Incommensurabilität der Seite und der Diagonale eines Quadrates zurück, welche auch gleichmässigen Vielfachen beider Längen anhafte. Seien zwei Kreise a und b, die in d sich schneiden, und deren Umfänge wie jene Längen sich verhalten[1]). Dass zu diesem Zwecke genüge, die betreffenden Strecken als Halbmesser der Kreise zu wählen, wird nicht gesagt. Zwei bewegliche Punkte e und f sollen von d aus, e auf a und f auf b, in gleichmässiger Bewegung fortrücken, so wird niemals, auch nicht in der Ewigkeit, ein wiederholtes Zusammentreffen von e und f in d stattfinden[2]). Ein zweites Beispiel liefern Sonne und Mond. Sind die Bewegungen beider um ihren Bewegungsmittelpunkt incommensurabel, wie es wahrscheinlich der Fall, oder wovon das Gegentheil wenigstens noch nicht bewiesen sei, und beschreiben in Folge dessen die Mittelpunkte von Sonne und Mond in gleichen Zeiten Bögen, denen unter sich incommensurable Winkel im Mittelpunkte der Erde als Centriwinkel entsprechen, findet ferner in einem Augenblicke genau gradlinige Conjunction oder Opposition der drei Mittelpunkte statt, so war von Ewigkeit an nie eine damit genau übereinstimmende Finsterniss und wird in Ewigkeit nicht wiederkehren. Als wenigstens mittelbare Folge zeigt sich, dass die Urtheile der Astrologen mitunter sehr ungewiss sind[3]). Eine weitere sich anschliessende, aus dem Wesen der Incommensurabilität selbst hervorgehende Bemerkung zeigt die Unmöglichkeit, dass Stetiges aus Untheilbarem in endlicher Anzahl zusammengesetzt sei, weil es sonst keine incommensurable Längen gäbe. Der Schluss kehrt zu den am Anfange ausgesprochenen Scheingründen dafür, dass die Diagonale

---

[1]) *habeat se circumferentia unius ad circumferentiam alterius sicut dyameter quadrati et costa ejusdem.* [2]) *si ista in eternum moverentur, nunquam amplius in puncto d conjungerentur.* [3]) *Ex quibus sequitur quod judicia astrologorum sunt aliquando valde incerta.*

das Doppelte der Quadratseite sei, zurück und widerlegt sie. Dem scharfsinnigsten Scheinbeweise, den wir der Abhandlung folgend als zweiten auftreten liessen, der aber am Schlusse plötzlich der dritte heisst, weiss Albert von Sachsen nur entgegenzuhalten, man dürfe die Vertauschung von Gliedern einer Proportion nicht vornehmen, wenn es sich nicht um Grössen derselben Art handle[1]). Die Ausführlichkeit, in welcher wir über die beiden Abhandlungen berichtet haben, war vielleicht durch deren mathematische Bedeutung nicht gerechtfertigt, allein es lag uns daran, unseren Lesern recht hervorragende Beispiele davon zu geben, was die Scholastik als würdig eingehender Bekämpfung erachtete, und wie sie ein Schema dialektischen Hin- und Herschwankens zwischen entgegengesetzten Meinungspolen festhielt, welches auszufüllen war

Henricus Hassianus[2]) war die zweite von uns genannte Persönlichkeit. Er wurde 1325 in Langenstein bei Marburg geboren und gehörte wahrscheinlich dem adligen Geschlechte von Langenstein an. Er lehrte schon 1363 in Paris vermuthlich mathematische und astronomische Dinge. Später ging er zur Theologie über. Man nennt ihn als Vater des Gedankens, die Missbräuche, welche damals — von Jedem zugestanden, durch keinen einzelnen Willen zu beseitigen — in der Kirche herrschten, durch ein allgemeines Concilium abschaffen zu lassen[3]). Er war eines der Mitglieder der Sorbonne, welche 1378 durch eine Abordnung an Papst Urban VI. in Rom, an der Heinrich selbst theilgenommen haben dürfte, sich für diesen und gegen Clemens VII. in Avignon entschied. Als fünf Jahre nachher die Anhänger des letzteren in Paris die Oberhand gewannen, ging Heinrich 1383 nach Deutschland zurück, wo er im Kloster Eberbach im Rheingau gastliche Aufnahme fand. Noch in demselben Jahre folgte er einem Rufe an die Universität Wien, um welche er grosse Verdienste sich erwarb. Er erlangte wahrscheinlich die vorher verweigerte päpstliche Genehmigung zur Einrichtung auch einer theologischen Facultät. Er starb in Wien am 11. Februar 1397 und liegt in der dortigen St. Stephanskirche begraben. Eigentlich mathematische Schriften sind von ihm nicht bekannt. Astronomisches soll in dem ersten Buche seines Commentars zur Genesis enthalten sein[4]), auch verfasste er einige astronomische Abhandlungen, darunter die Contra astrologos conjunctionistos de eventibus futurorum, welche schon 1374

---

[1]) *quod iste modus arguendi a commutata proportionalitate non tenet in illis quae sunt diversarum specierum.* [2]) Allgem. deutsche Biographie XVII, 672—673. — Hartwig, *Henricus de Langenstein dictus de Hassia* (1857). — Aschbach, Geschichte der Wiener Universität I, 366—402. [3]) Theod. Stumpf, Die politischen Ideen des Nicolaus von Cues (1865) S. 6. [4]) Kästner, II, 529.

in Paris geschrieben ist. In der Geschichte der Mathematik muss Heinrich von Langenstein nur um deswillen überhaupt genannt werden, weil ein berühmter Gelehrter des XVI. Jahrhunderts ihm das Verdienst zugeschrieben hat[1]), der Mathematik in Deutschland zu einer bleibenden Stätte verholfen zu haben.

Da nun weder Heinrich von Hessen noch Albert von Sachsen in Wien eine eigene mathematische Lehrthätigkeit ausübten, so ist jedenfalls ihre Bedeutung für jene östliche Verschiebung des geistigen Uebergewichtes, so weit es um mathematische Wissenschaft sich handelt, eine mehr mittelbare gewesen, deren Erfolg sich erst im XV. Jahrhunderte deutlich erkennen liess. Aber ein einzelnes vorhandenes Werk aus dem XIV. Jahrhunderte zeigt, dass schon vor ihnen Einflüsse von Paris aus sich geltend gemacht hatten, welche den deutschen Boden dazu vorbereiteten, wissenschaftlichen Samen aufzunehmen. Wir reden von einer am Ende des Jahrhunderts lateinisch verfassten, aber frühzeitig in deutscher Sprache neu bearbeiteten Geometrie[2]). Conrad von Jungingen[3]) war von 1393 bis 1407 Hochmeister der Deutschordensritter. Kraftvoll im Kriegführen, wenn derselbe aufgedrungen war, neigte er von Natur weit mehr zu friedlichen Bestrebungen und liess sich die Ausmessung der von ihm beherrschten Lande angelegen sein. Lantmesser, auch einfach Messer werden genannt, die mit $1\frac{1}{2}$ Mark wöchentlich für ihre Arbeit gelohnt wurden; Andere verrichteten den Dienst mit der „landtmosse" als Lehendienst. Wir müssen uns diese Landmesser, laycos mensores[4]), als blosse Handwerker vorstellen, welche lediglich in der Ausführung von übungsmässigen Verfahren geschult waren, deren Gründe sie kaum zu begreifen befähigt waren. Um je handwerksmässiger wir sie uns denken, um so nothwendiger war ihnen ein Vorgesetzter, der wirklich die Sache verstand, die er zu leiten hatte[5]), und ein solcher war offenbar der Verfasser der Geometria Culmensis. Dieser Name, welcher vom Herausgeber der Schrift beibehalten wurde und ihr daher auch bleiben mag, findet sich freilich

---

[1]) Petrus Ramus, *Scholae mathematicae* (1627) pag. 61: *Henricus Hassianus centesimo abhinc et octogesimo fere anno* (circa 1390) *primus mathematicas artes Lutetia Viennam transtulit, unde brevi tempore per universam Germaniam proseminatae mathematicorum tamquam familiae.* [2]) *Geometria Culmensis.* Ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407) herausgegeben von Dr. H. Mendthal (1886). [3]) Allgem. deutsche Biographie XIV, 718—720. [4]) *Geometria Culmensis* S. 15, Z. 4—8: *laycos mensores in arte tum calculatoria quam geometrica inperitos sepius in agrorum mensura contingit oberrare.* [5]) Ebenda S. 47, Z. 7—8: *ideo laycus mensor debet esse minister geometre.*

nur in einer Handschrift[1]) und ist nur dadurch unterstützt, dass Kulmer Maasse[2]) vorkommen. Der Verfasser selbst nennt sich gar nicht, und sein Buch führt im lateinischen Texte die Ueberschrift: Liber magnifici principis Conradi de Jungegen, magistri generali Prusie, geometrie practice usualis manualis, während in der deutschen Bearbeitung, welche vielleicht von dem Verfasser in eigener Person herrührt, weil man kaum annehmen kann, ein Anderer sei so frei mit dem Wortlaute umgegangen, der Titel folgendermassen klingt: „Eyn buch des irluchten vorsten, Heren Conrad von Jungegen, Homeysters czu Prusen der wirkende ortmose myt Hanvbungen, in dem so sal man leren, wy man messen sal eyn yclych ackerlant unde Gevilde". Der Gedanke, der Hochmeister könne wirklich der Verfasser des Buches sein, wird dadurch natürlich sofort erzeugt, aber beim Weiterlesen vollständig vernichtet. Die Einleitung spendet dem Hochmeister so überschwängliches Lob, dass es ausgeschlossen ist, er könne sie selbst geschrieben haben. Auf eigenen Füssen steht übrigens der Verfasser nicht, und damit erklärt sich vielleicht die bescheidene Zurückhaltung seines Namens. Er habe, sagt er, den Stoff zusammengetragen[3]), und er beruft sich oft auf Euklid, einmal — im letzten Abschnitte allerdings — auf einen Dominicus[4]), und es ist geglückt, in diesem Schriftsteller Dominicus de Clavasio (S. 127) zu erkennen. Ihn hat, wie genaue Vergleichung erkennen liess[5]), der Verfasser der Geometria Culmensis ausgiebig benutzt, an manchen Stellen wörtlich ausgeschrieben, während er freilich dadurch über den gewöhnlichen Abschreiber sich erhob, dass er bald Dinge, die dem Landmesser, für welchen er schrieb, unverständlich gewesen wären, wegliess, bald durch erläuternde Zusätze sie ergänzte. Ein wichtiger Zusatz ist vor allen Dingen die Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel, welche nach der Formel $\sqrt{a^2+r} \backsim a + \frac{r}{2a}$ unter der Voraussetzung $r < 2a + 1$ vollzogen wird. Consulo quod nullus sit mensor tum clericum quam laycus, nisi prius in algorissmo tam de integris quam minuciis sciat computare sagt dabei der Verfasser, und noch bestimmter erwähnt er in der deutschen Bearbeitung „czween

[1]) *Geometria Culmensis* S. 10, Z. 13—14. [2]) Ebenda S. 21: *duo pedes faciunt ulnam Colmensem.* [3]) Ebenda S. 16—17: *praesentem librum compilavi.* [4]) Ebenda S. 69: *ut patet per Dominicum in geometria sua* = als sprycht magister Dominicus in syner ortmose unde auch andir meister. [5]) Auf das Tom. III, pars I, Nr. 410 des münchner Handschriftenkatalogs angeführte Werk hat Max. Curtze den Herausgeber der *Geometria Culmensis* aufmerksam gemacht. Dieser hat dann die Vergleichung vorgenommen und im Drucke die dem II. Buche des Dominicus entnommenen Stellen durch Anführungszeichen kenntlich gemacht. *Geometria Culmensis* S. 6—7.

bucheren, dy do heyssen algorismus, der eyne von ganczen, der andir von teilen"[1]). Dieser Ausspruch bestätigt neuerdings, was wir schon verschiedentlich bemerken durften. Wie die zwei Abtheilungen des Algorithmus demonstratus, welche das Rechnen mit ganzen Zahlen und das mit Brüchen lehren, in der Basler Handschrift räumlich getrennt und in verkehrter Reihenfolge vorkommen, wie in Wien an der Universität zwei verschiedene Vorlesungen über beide Algorismen (de integris und de minuciis) gehalten wurden, wie Sacrobosco über ganzzahliges Rechnen, De Lineriis über Bruchrechnen schrieb, so gab es am Ende des XIV. Jahrhunderts in Deutschland zwei Bücher, vielleicht Nachbildungen der beiden zuletzt genannten, aus welchen der gemeine Mann und nicht bloss der Gelehrte das Rechnen mit ganzen Zahlen, das Rechnen mit Brüchen sich aneignen konnte. Jedenfalls sind aus dem Anfange des XV. Jahrhunderts deutsche Uebersetzungen des Rechenbuches des Sacrobosco und eine deutsche Abhandlung über das Bruchrechnen bekannt[2]).

Die Geometria Culmensis zerfällt in fünf Abtheilungen. Die beiden ersten sind der Berechnung des Dreiecks gewidmet, die dritte dem Viereck, die vierte dem Vieleck, die fünfte den ganz oder theilweise krummlinig begrenzten Räumen. Man kann im Allgemeinen sagen, überall sei Falsches mit Geschick vermieden. Wenn z. B. in der 1. Abtheilung das Dreieck durch das halbe Product von Grundlinie und Höhe gemessen wird, wenn im rechtwinkligen Dreiecke die beiden den rechten Winkel bildenden Seiten als Grundlinie und Höhe gelten, so warnt[3]) der Verfasser davor, in nichtrechtwinkligen Dreiecken das halbe Product aneinanderstossender Seiten als Flächenmaass zu benutzen. Die Höhe (kathetus) wird auf dem Felde mit Hilfe eines rechten *winkelmos* (gnomon) oder eines *crueze*'s (Winkelkreuz) hergestellt und wirklich gemessen. Sie heisst meistens *Drebom*[4]). In der 2. Abtheilung wird mehr rechnend vorgegangen. Auch wo die drei Seiten des Dreiecks auf dem Felde gemessen wurden, soll man zu Hause ein verkleinertes Bild herstellen. So lehrte Dominicus, so lehrt etwas weitläufiger der Kulmer Schriftsteller[5]). Zwei Stangen sollen durch einen Nagel verbunden werden. Auf ihnen werden die Längen von zwei Dreiecksseiten in verjüngtem Maasse

---

[1]) *Geometria Culmensis* S. 47. [2]) Curtze brieflich. [3]) *Geometria Culmensis* S. 31: *Vidi plures laycos mensores et audivi eorum inpericiam, qui volebant in areis triangularibus indifferenter in omnibus medietatem lateris unius in totale latus alterum multiplicare ut sic aree continencium invenirent, nescientes kathetum invenire.* [4]) Ebenda S. 31: Ueber Drebom = Drîboum = triarbor vergl. ebenda S. 8. [5]) Ebenda S. 36—37: *De hiis tribus virgis duas coniunge simul cum clavo* etc.

aufgetragen. Eine dritte Stange, der dritten Dreiecksseite entsprechend, wird beiden, die zu dem Behufe um den verbindenden Nagel drehbar sind, angepasst. Dieses verjüngte Dreieck lässt jedenfalls es zu, dass man die Höhe wirklich ziehe und messe, was auf dem Felde vielleicht nicht möglich war. Bei rechnender Ermittelung der Höhe, d. h. beim gleichschenkligen und beim gleichseitigen Dreiecke[1]), wird der pythagoräische Lehrsatz mit seiner Quadratwurzelausziehung in Anwendung gebracht. Es mag erwähnt sein, dass die alterthümlichen Annäherungswerthe einiger Quadratwurzeln z. B. $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$ in der Geometria Culmensis ebensowenig vorkommen wie die heronische Dreiecksformel, welche die drei Seiten des Dreiecks in Anwendung bringt. Die 3. Abtheilung geht zum Vierecke über. Hier begegnen uns im lateinischen wie nicht minder im deutschen Wortlaute die arabischen Namen *Elimihahym* und *Elmiphariphа* des Rhombus und des unregelmässigen Vierecks[2]), die uns aus den dem Arabischen entstammenden Euklidübersetzungen (S. 103) bekannt sind, deren aber auch Dominicus von Paris sich bediente. Ueberall werden wieder Höhen gezogen, und dadurch neue Figuren auf schon im Verhergehenden behandelte zurückgeführt. So ist unter den unregelmässigen Vierecken zuerst dasjenige besprochen, welches 2, dann dasjenige, welches 1, zuletzt das, welches keinen rechten Winkel besitzt, wobei die Figuren (Figur 27, 28, 29) erkennen lassen, wie wir

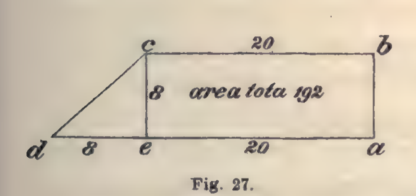


Fig. 27.

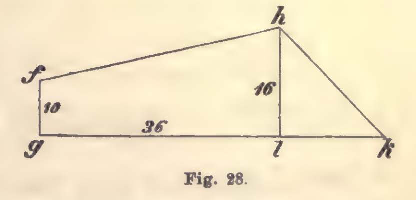


Fig. 28.

jene Zurückführung auf schon Bekanntes meinen. Ebendenselben Figuren mag man entnehmen, dass in der ganzen Geometria Culmensis die Buchstabenfolge ausnahmslos die lateinische ist. Dass in Figur 28 der Buchstabe *i* nicht benutzt ist, muss als Zufall angesehen werden, in anderen Figuren kommt er vor. In der 4. Abtheilung werden Vielecke ausgemessen, und zwar zuerst regelmässige, dann unregelmässige. Durch gerade Linien von einem innerhalb des Vielecks gelegenen Punkte aus nach den Eckpunkten wird das Vieleck in ebensoviele Dreiecke zerlegt als es Seiten

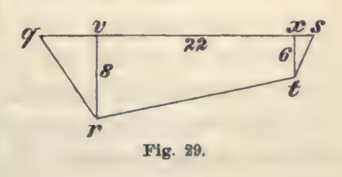


Fig. 29.

[1]) *Geometria Culmensis* S. 38 und 42. [2]) Ebenda S. 52.

besitzt, und diese Dreiecke werden sodann gemessen. Als Punkt im Innern des Vielecks wird der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier benachbarter Vieleckswinkel gewählt, der beim regelmässigen Vielecke dessen Mittelpunkt ist. Gelegentlich wird dabei die Halbirung eines Winkels und die Auffindung der Winkelsumme des Vielecks gelehrt[1]). Auch das Vieleck mit einspringenden Winkeln[2]), *campus tortuosus seu extraeminens*, oder wie der deutsche Kunstausdruck lautet, „eyn wanschaffen geuilde“ wird berücksichtigt und durch Zerlegung in Theilfiguren, welche nicht aus- und einspringen („yczunt us darnoch wedir yn“ verlaufen) gemessen. Die 5. Abtheilung stellt die Aufgabe, solche Figuren zu messen, in deren Begrenzung krumme Linien vorkommen. Das Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser wird wie gewöhnlich „als weren 22 kegen 7“ angenommen[3]), aber immerhin ist ein wesentlicher Unterschied gegen die Art, wie etwa Albert von Sachsen jene Zahlen auffasst. In der Geometria Culmensis ist, genau anschliessend an Dominicus (S. 127), das Bewusstsein blosser Annäherung deutlich ausgesprochen: das Verhältniss gelte nur so weit, dass kein fühlbarer Irrthum übrig bleibe[4]). So der Hauptinhalt jenes für die Zeit und für den Ort seiner Entstehung sehr bemerkenswerthen Lehrbuches. Sein Verfasser — dahin darf man gewiss das Urtheil zusammenfassen — wusste gute Quellen gut zu benutzen und hat, wenn man die vielfachen Zahlenbeispiele näher ansieht, auch als zuverlässiger Rechner sich bewährt.

49. Kapitel.

Italienische Mathematiker.

Wir wenden uns nach dem letzten Lande, dessen mathematische Erzeugnisse aus dem XIV. Jahrhunderte wir noch zu besprechen haben, nach Italien. Wer sich des geistvollen Kaufmannes erinnert, der am Anfange des XIII. Jahrhunderts in Italien lebte, wer damit unsere Ankündigung (S. 138) verbindet, Italien ringe nunmehr bald mit Deutschland um den ersten mathematischen Preis, wird schon im XIV. Jahrhunderte erwarten Bedeutendes sich vorbereiten zu sehen.

Dass diese Erwartung sich erfüllen könnte, wenn aus den Handschriften bekannt würde, was italienische Schriftsteller damals leisteten, will nicht unbedingt in Abrede gestellt werden. Bei aller Vorsicht,

---

[1]) *Geometria Culmensis* S. 57 und 60. [2]) Ebenda S. 63—64. [3]) Ebenda S. 67. [4]) Ebenda S. 69: *circuli et quadrati adinvicem nulla est certa proporcio et precise demonstrata, sed in tantum est quod non relinquitur error sensibilis.*

welche unbewiesenen Behauptungen des Geschichtsschreibers der italienischen Mathematik gegenüber geboten ist, nehmen wir als richtig an, was er mittheilt[1]), dass im XIV. Jahrhunderte mehrere hundert Bände mathematischen Inhaltes in Italien verfasst worden seien, und es wäre gewiss wünschenswerth, dass ein Fachmann sich der, wenn auch sicherlich grossen und keineswegs immer lohnenden Mühe unterzöge, an Ort und Stelle die Handschriften zu prüfen und das geschichtlich Wichtige vollständig oder mindestens im Auszuge zu veröffentlichen.

Eine Veröffentlichung[2]), welche stattgefunden hat, erweist sich bei allem Interesse, das ihr innewohnt, als geeignet, das Bild weit eher eines Rückganges als einer fortschreitenden Entwicklung hervorzurufen. *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* lautet der Titel einer Niederschrift aus der zweiten Hälfte des XIV. Jahrhunderts, und schon dieser Titel muss unser Staunen erregen und giebt zunächst zu verwunderten Fragen Anlass. Ist das kleine Buch in Italien entstanden, oder nur nach Rom verbracht worden? Ist es eine lateinisch verfasste oder aus dem Arabischen übersetzte Arbeit? Ist sie im XIV. Jahrhunderte verfasst oder damals nur abgeschrieben? Diese drei Fragen stellen sogar, je nachdem sie beantwortet werden, unsere Berechtigung grade hier von jener Schrift zu reden in Zweifel. Die erste Frage wird kaum genügend beantwortet werden können, die zweite aber muss wohl dahin entschieden werden, dass dieses „einleitende Buch des Staubes“ nicht übersetzt ist[3]). Erstens fehlt jede gebetartige Gottesanrufung, ohne welche eine arabische Schrift kaum denkbar ist; zweitens fehlt jede Bezugnahme auf Inder, Pythagoras, jede Vergleichung der Zahlzeichen mit arabischen Buchstaben, wie sie gleichfalls kennzeichnend für die Erzeugnisse arabischer Rechenmeister sind; drittens ist ein Kapitel, wie wir noch sehen werden, den römischen Minutien gewidmet, was bei arabischem Ursprunge gradezu unmöglich wäre. Wie aber dann die dritte Frage zu beantworten sei, scheint uns gleichfalls kaum zweifelhaft. Der Inhalt ist so viel geringer als der von irgend anderen im XIV. Jahrhunderte vorhandenen Schriften, dass wir an eine Abschrift zu glauben uns nicht im Stande fühlen. Ein so schwaches Erzeugniss kann in jedem Jahrhunderte einmal niedergeschrieben werden, und der ungerechte Zufall kann es vor dem Untergange bewahren, aber

---

[1]) Libri II, 204 und 212 Note. [2]) *Sur un manuscrit du Vatican du XIVe siècle contenant un traité de calcul emprunté à la méthode Gobâri. Lettre de M. Henri Narducci à M. Aristide Marre* (1883), Sonderabdruck aus dem *Bulletin Darboux.* [3]) Der gleichen Meinung ist H. Narducci: *il s'agit ici d'un travail original écrit et publié en Occident.*

man vervielfältigt es nicht, es sei denn, dass man geschichtliche Forschungen dabei im Auge habe, und das können wir bei einem Abschreiber des XIV. Jahrhunderts einem solchen Schriftchen gegenüber nicht voraussetzen. Die Schrift ist nicht mehr und nicht weniger als ein sieben Blätter füllendes dürftiges Lehrbuch der Rechenkunst. Der Verfasser benutzt die Ziffern mit Stellungswerth, er benutzt zu deren Erläuterung auch die römischen Zahlzeichen. Er kennt Finger- und Gelenkzahlen. Er lehrt Addition und Subtraction, Verdoppelung und Halbirung, Multiplication und Division. Er geht dann zu den Brüchen, deren Multiplication und Division über, zuerst sofern nur Brüche, dann sofern aus ganzen Zahlen und Brüchen gemischte Zahlen vorliegen. Dann kommt die Ausziehung der Quadratwurzel, endlich, wie schon erwähnt, ein Kapitel über die Zerlegung der Einheit in 12 Unzen, der Unze in weitere Duodecimaltheile. Ein solches Lehrbuch aber, in den Rechnungsarten an Jordanus Nemorarius und an Johannes de Sacrobosco erinnernd, mehr als anderthalb Jahrhunderte nach ihnen geschrieben, bildet entschieden einen Rückgang, wo immer sein Verfasser wohnte, einen noch merkwürdigeren Rückgang, wenn wir als Heimath das Land betrachten müssen, in welchem Leonardo von Pisa gelebt hatte.

Für eine geschichtliche Erscheinung nachträglich Gründe zusammenzustellen ist ja nicht immer unmöglich, manchmal auch nicht schwierig. Man könnte sagen: es war ein Rückgang in mathematischer Beziehung eingetreten. Noch war für Italien die Zeit nicht gekommen, auf der von Leonardo von Pisa erreichten Höhe sich wohnlich und bleibend einzurichten, weil die vorzugsweise begabten Geister anderen Bestrebungen zugewandt waren. Giotto 1270—1336, Dante 1265—1321, Petrarca 1304—1374, Bocaccio 1313—1375 drücken dem Jahrhunderte ihren Stempel auf. Eine Kunstschule in's Leben rufen, die italienische Sprache bilden, sie beherrschen in Versen und Prosa, sich versenken in die so gut wie neu entdeckten Schätze römischer und griechischer Dichter, das war es, was den in Italien jetzt schon erwachenden Humanismus kennzeichnete. Naturbeschreibung, selbst ein hoher Gegenstand dichterischer Schilderung, welche ihr die schönsten Bilder entlieh, mochte daneben blühen, für Mathematik erwärmte sich keiner von den genannten Meistern. Nun könnte ja freilich in kaufmännischen Kreisen die Erinnerung an Leonardo von Pisa wach geblieben sein, könnte wenigstens auf dem Felde der Rechenkunst Nacheiferer grossgezogen haben.

Wir werden sehen, dass in der That der italienische Kaufmann Wissenstrieb im Sinne unseres Faches besass, aber einer sehr gedeihlichen Entwickelung, kann man weiter sagen, war der Umstand im

Wege, dass, während Leonardo am Anfange des XIII. Jahrhunderts die Grenze bezeichnete, von der an der unblutige Kampf zwischen Abacisten und Algorithmikern endgiltig als zu Gunsten der letzteren entschieden gelten musste, im letzten Jahre desselben Jahrhunderts ein Rückschritt in die alte Zeit, wenigstens in die alte Zahlenbezeichnung gesetzlich anbefohlen wurde[1]). Ein Verbot aus dem Jahre 1299 hat sich nämlich in Florenz erhalten, wonach es den Kaufleuten untersagt wurde, ihre Bücher mit dem Abbacus zu führen. Es wurde ihnen vielmehr vorgeschrieben, römische Zeichen oder die ausgeschriebenen Zahlwörter zu benutzen. Abbacus heisst hier offenbar, ähnlich wie in dem Werke des Leonardo von Pisa, das was ausserhalb Italiens den Namen Algorithmus führte. Das Florentiner Verbot war sicherlich zu Gunsten grösserer Sicherheit der kaufmännischen Buchführung erlassen, sei es, dass man meinte, römische Zahlzeichen liessen nicht so leicht fälschende Einschiebungen zu, wie die auf dem Stellungswerthe beruhenden Ziffern, sei es, dass man voraussetzte, nicht Jeder würde im Stande sein, letztere lesen zu können, was doch auch nöthig war, wenn die Bücher auf öffentlichen Glauben Anspruch machten; aber mochte die Absicht des Verbotes sein, welche sie wolle, sicherlich musste in Folge desselben das Ziffernrechnen mindestens keine Fortschritte machen.

Solche Bemerkungen also könnte man machen, und vielleicht ist in ihnen mehr als nur ein Körnchen Wahrheit enthalten. Vielleicht aber auch haben wir uns durch eine Missgeburt eines Verfassers, der das Verweilen nicht lohnte, zu ungerechtfertigten Schlüssen verlocken lassen, zu deren Prüfung es nothwendig wäre, dass, wie wir (S. 155) sagten, der Inhalt der zahlreichen Handschriften, welche vorhanden sein sollen, bekannt würde. Eine Handschrift aus Kaufmannskreisen ist bekannt[2]), und sie macht freilich einen ganz anderen Eindruck, als das armselige einleitende Buch des Staubes. Sie ist in italienischer Sprache verfasst, mithin jedenfalls von einem Italiener. Die vorhandene Niederschrift stammt aus dem XIV. Jahrhunderte, einem älteren Ursprunge widerspricht der hochbedeutende Inhalt. Ort und Zeit weisen daher uns an, uns in diesem Kapitel mit dem auszugsweise veröffentlichten Werke zu beschäftigen.

Der Verfasser hat seinen Namen nicht genannt, dagegen äussert

---

[1]) Darauf hat für Mathematiker zuerst Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter S. 341, Note unter Berufung auf *Archivio storico Appendice* T. III (Florenz 1846) pag. 528 aufmerksam gemacht. Die betreffende Stelle lautet: *si proibisce ai mercatanti di tenere i loro registri in abbaco e si prescrive l'uso delle lettere romane e la completa scrittura del numero.*
[2]) Libri II, 214, Note 1 und III, 302—349.

er sich über die Veranlassung, welche ihn zum Schriftsteller machte. Er sei gebeten worden, Einiges über den Abacus zu schreiben, was für Kaufleute nothwendig sei, und zwar von einer solchen Seite, dass die Bitten ihm Befehle gewesen seien, daher werde er nicht in dünkelhafter Weise, sondern um Gehorsam zu zeigen, sich anstrengen. Auch hier ist das Wort *alcune cose di abaco* keineswegs so aufzufassen, als wäre von einem Rechenbrette die Rede. Nach den im Drucke bekannten Auszügen war es vielmehr ein algebraisches Werk, über welches sich der Verfasser so ausspricht, und auch an die Kaufleute erinnern nur gewisse eingekleidete Gleichungen, welche mit Zinsaufgaben sich beschäftigen, und zwar ausschliesslich mit solchen, bei welchen Zinseszinsen in Anwendung kommen, die damals die allein gebräuchlichen gewesen zu sein scheinen, da immer nur von *merito*, Zins, schlechtweg ohne jeden unterscheidenden Zusatz die Rede ist.

Die gebrauchten Kunstausdrücke sind folgende. Die Constante der Gleichung heisst numero, die Unbekannte cosa und deren höhere Potenzen der Reihe nach quadrato censo (oder quadrato allein, oder auch censo allein), censo cubo (oder cubo allein), censo di censo, censo di cubi, Ausdrücke, welche einer weiteren Erklärung kaum bedürfen, da censo nur die italienische Form von census ist, dessen Gerhard von Cremona (Bd. I, S. 755) wie Leonardo von Pisa (S. 34) sich schon bedienten und höchtens könnte cosa bemerkenswerth erscheinen, die Uebersetzung von res, während Gerhard von Cremona und Leonardo meistens radix sagten, Leonardo allerdings einmal (S. 22) auch res. Eine höhere Potenz der Unbekannten als die fünfte kommt in den Auszügen nicht vor. Die zweite bis fünfte Wurzel heissen radice, radice cubo, radice de radice, radice relata[1]), wo besonders der letztere eigenthümliche Namen zu beachten ist. Der Verfasser gebraucht beim allmählichen Bilden des Ansatzes sowohl additive als subtractive Zahlen, letztere mit meno, weniger, verbunden, aber die schliesslich gebildete Gleichung ist immer so geordnet, dass auf beiden Seiten der Gleichung nur Positives erscheint, wie wir heute sagen würden, und dass der letzte Schritt zur Vorbereitung der Auflösung in der Division durch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten besteht, beides Gewohnheiten der arabischen Algebrakundigen seit Alchwarizmî (Bd. I, S. 682—683). Von der Möglichkeit zweier Auflösungen einer quadratischen Gleichung ist, so viel wir bemerken konnten, nie die Rede. Wie weit der Verfasser in Wurzelausziehungen geübt war, ist nicht

---

[1]) Libri, III, 345 und 346: *radice relata di* 5153632 *e* 22.

zu entscheiden. Wo immer eine nur angenäherte Berechnung irrationaler Wurzelgrössen vorkommen musste, hat er sie vermieden und sich mit der Nennung der Wurzelgrösse begnügt. Auffallen möchte nur, dass einmal[1]) ohne weiteres $\sqrt{10} - \sqrt{4\frac{4}{9}} = \sqrt{1\frac{1}{9}}$ gesetzt ist, dass also die Umwandlungen $\sqrt{10} = 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$, $\sqrt{4\frac{4}{9}} = 2\sqrt{1\frac{1}{9}}$ dem Verfasser klar gewesen sein müssen. Dass er $\sqrt[5]{5153632} = 22$ [2]) anders als durch die Vollziehung der umgekehrten Rechnung $22^5 = 5153632$ ermittelt haben sollte, ist gewiss nicht anzunehmen. Die Grösse $\sqrt{7\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{5}{8}}}$ scheint er für gleichbedeutend mit $\sqrt{7\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{5\frac{5}{8}}}$ gehalten zu haben[3]), ein Irrthum, der in so früher Zeit, wo wiederholte Wurzelausziehungen zu dem Schwierigsten gehört haben müssen, nicht Grund zur Missachtung bietet, der uns aber immerhin an die Mangelhaftigkeit damaligen Wissens deutlich mahnt. Noch lebhafter klingt diese Mahnung aus der Auflösung vieler unter den gestellten Aufgaben.

Den Dreisatz beherrscht der Verfasser allerdings vollkommen, so wenn er fragt, was aus 100 Lire in zwei Jahren durch Verzinsung werde[4]). Nach einem Jahre wird 1 cosa daraus; im zweiten Jahre muss 100 Lire zu 1 cosa in dem gleichen Verhältnisse stehen wie 1 cosa zu der Fragezahl. Diese findet sich also durch Vervielfachung von 1 cosa mit 1 cosa zu 1 quadrato censo und Division durch 100.

Auch quadratische Gleichungen und solche, die auf quadratische Gleichungen sich zurückführen, löst er tadellos. Unter den letzteren verstehen wir solche, welche in unserer heutigen Schreibart auf Null gebracht $x^3 + ax^2 + bx = 0$ und $x^4 + ax^2 + b = 0$ heissen würden. Aus

$$x^3 = \frac{16}{27}x^2 + \frac{5}{27}x \text{ wird } x = \frac{8}{27} + \sqrt{\frac{199}{729}},$$

aus $x^4 + 20 = 9x^2$ wird $x = \sqrt{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 20}} = 2$ gefunden[5]), wobei in dem letzteren Falle mit keiner Silbe begründet wird, weshalb bei der erstmaligen Wurzelausziehung die negative Quadratwurzel und

---

[1]) Libri III, 339. [2]) Ebenda S. 346. [3]) Ebenda S. 316, Z. 3. [4]) Ebenda S. 318: *Poni que li rendesse il primo anno* 1 *cosa tra merito e capitale: hora di'* 100 *L da* 1 *cosa, che dara* 1 *cosa? multiplica* 1 *via* 1 *cosa fa* 1 *quadrato censo; partendolo* 100 *ne vene* $\frac{1}{100}$ *di quadrato di censo.* [5]) Ebenda S. 306 und 314.

nicht die positive genommen wurde. Vielleicht war ihm doch bekannt, dass auch die andere Wahl ihm freistand, dass also zwei Gleichungswurzeln hier möglich waren, und er entschied sich für $-\sqrt{\frac{81}{4}-20}$, weil sonst $x=\sqrt{5}$ herausgekommen wäre, während hier, wo es einen rationalen Werth $x=2$ gab, dieser auch gefunden werden sollte.

Bei den genannten Gleichungsformen bleibt der Verfasser bei weitem nicht stehen. Er behandelt vielmehr Gleichungen 3., 4. und 5. Grades nach allgemeinen Regeln, denen leider nur die Begründung fehlt und fehlen muss, da die Regeln, wie man zu erwarten berechtigt war, falsch sind[1]). Wurden schon bei den unreinen quadratischen Gleichungen die drei bekannten Fälle unterschieden, so ist bei den kubischen Gleichungen eine Unterscheidung von noch mehr Fällen nur natürlich. Dass diejenigen Fälle, welche durch Division durch die Unbekannte zur quadratischen Gleichung führen, richtige Lösungen finden, haben wir schon erwähnt. Dass Gleichungen mit nur zwei Gliedern wie $ax^3=bx^2$ oder $ax^3=cx$ oder $ax^3=k$ ebenfalls richtig gelöst werden, ist wieder nicht zu verwundern. Bemerkt sei nur, dass von den zur Auflösung führenden Divisionen durch die Unbekannte nie gesprochen wird. Der Verfasser wird sich dessen ja bewusst gewesen sein, wieso aus $8x^3=3x$ der Werth $x=\sqrt{\frac{3}{8}}$ folgt, aber gesagt hat er es nicht[2]). Bei Gleichungen mit drei und vier Gliedern sind folgende Verfahren eingeschlagen, welche theils aus den ausdrücklich ausgesprochenen Vorschriften, theils aus den Zahlenbeispielen in übereinstimmender Weise hervorgehen. Aus $ax^3=cx+k$ wird $x^3=\frac{c}{a}x+\frac{k}{a}$ gebildet und diese Gleichung als quadratische weiter behandelt:

$$x=\frac{c}{2a}+\sqrt{\left(\frac{c}{2a}\right)^2+\frac{k}{a}}.$$

So $8x^3=5x+16$, welche zu

$$x=\frac{5}{16}+\sqrt{2\frac{25}{256}}$$

---

[1]) Was Libri II, 213, Note 1 darüber sagt, beruht auf einem fast unbegreiflichen Missverständnisse der Stelle, um die es sich handelt. [2]) Libri III, 305: 8 *cubi sono equali a 3 cose; parti 3 per 8 cubi, ne vene* $\frac{3}{8}$ *e la radice de* $\frac{3}{8}$ *vale la cosa.*

führt[1]). $ax^3 = bx^2 + k$ giebt zunächst $x^3 = \frac{b}{a}x^2 + \frac{k}{a}$ und auch diese wird weiter behandelt, als stände links x^2, rechts x, also

$$x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{k}{a}}.$$

So $8x^3 = 9x^2 + 12$ mit $x = \frac{9}{16} + \sqrt{1\frac{209}{256}}$[2]). Die viergliedrige Gleichung $ax^3 = bx^2 + cx + k$ wird so angefasst, als hätte auch die Constante k noch den Factor x. Sie führt mithin zu

$$x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c+k}{a}}, \text{ z. B. } 8x^3 = 9x^2 + 4x + 12,$$

$$x = \frac{9}{16} + \sqrt{2\frac{81}{256}}\ ^{3)}.$$

Wunderlich genug findet später $ax^3 + bx^2 + cx = k$ die Auflösung $x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{k}{a}} - \frac{c}{b}$, welche nur dann richtig ist, wenn $b^2 = 3ac$, wie es in dem entsprechenden Zahlenbeispiele $x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000$ wirklich der Fall ist[4]), so dass $x = \sqrt[3]{12000} - 20$ eine Gleichungswurzel ist.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Gleichung vierten Grades $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = k$, deren Wurzel $x = \sqrt[4]{\left(\frac{d}{b}\right)^2 + \frac{k}{a}} - \sqrt{\frac{d}{b}}$ nur dann als richtig sich erweist, wenn $b^3 = 16a^2d$ und zugleich $bc = 6ad$, wie es in dem entsprechenden Beispiele

$$x^4 + 80x^3 + 2400x^2 + 32000x = 96000$$

wirklich der Fall ist[5]), so dass hier

$$x = \sqrt[4]{400^2 + 96000} - \sqrt{400} = \sqrt[4]{256000} - 20$$

die Gleichung erfüllt. Aber auch die Gleichung $ax^4 + cx^2 + dx = bx^3 + k$ wird besprochen[6]), und hier wird als Auflösung

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{d}{2b}} - \sqrt{\frac{d}{2b}} + \frac{b}{4a}$$

angegeben! Während in dem vorhin beigezogenen Falle das Nichtauftreten des Coefficienten c sich aufdrängte, während doch wenigstens eine vierte Wurzel und sämmtliche übrige bekannte Grössen der Gleichung vorkommen, ist hier sowohl c als k aus dem Wurzelwerthe verschwunden und eine vierte Wurzel ist nicht zu sehen. Die zur Auflösung vorgelegte Gleichung $x^4 + 28x^2 + 720x = 20x^3 + 1800$ wird aber gleichwohl durch $x = \sqrt{43} - \sqrt{18} + 5$ in Folge glücklicher

[1]) Libri III, 306—307. [2]) Ebenda S. 307—308. [3]) Ebenda S. 308—309. [4]) Ebenda S. 316. [5]) Ebenda S. 318. [6]) Ebenda S. 346.

Coefficientenwahl erfüllt. Bei diesem Beispiele gelingt es, dem Verfasser auf die Spur seines Verfahrens zu kommen. Er sagt zwar, es handle sich um die Auflösung der genannten Gleichung vierten Grades, aber diese entsteht auf folgende Weise. Die Zahl 10 soll in zwei Theile zerlegt werden, deren Product durch ihre Differenz getheilt $\sqrt{18}$ als Quotient geben soll. Verallgemeinern wir die Bedingungen dahin, dass wir 10 durch α, 18 durch β ersetzen, so lautet also der erste Ansatz $\frac{x(\alpha - x)}{\alpha - 2x} = \sqrt{\beta}$, und wird derselbe quadrirt und die Gleichung geordnet, so erscheint $x^4 + (\alpha^2 - 4\beta)x^2 + 4\alpha\beta x = 2\alpha x^3 + \alpha^2\beta$ genau wie oben. Die Auflösung kann aber auch ohne Quadrirung vollzogen werden. Durch Multiplication mit $\alpha - 2x$ geht sie über in $x^2 + \alpha\sqrt{\beta} = (\alpha + 2\sqrt{\beta})x$ und daraus wird

$$x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} \text{ und } \alpha - x = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}.$$

Beide Theile von α fallen aber nur dann positiv aus, wenn von dem Doppelzeichen gegen alle sonstige Uebung älterer Mathematiker das untere gewählt wird; dann sind die beiden Theile $\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}$ und $\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta}$. Wird wieder rückwärts $\alpha = 10$, $\beta = 18$ eingesetzt, so ist $\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta} = 5 - \sqrt{18} + \sqrt{43}$ wie der Verfasser aussagt. Es fällt schwer anzunehmen, die Schlüsse seien so, wie wir sie hier vortrugen, gezogen worden, insbesondere bezüglich des Doppelzeichens. Es fällt noch schwerer unter Abweisung unserer Wiederherstellung einen anderen Weg zu erkennen, den der Verfasser eingeschlagen haben könnte. Jedenfalls hat er, und diese Erkenntniss halten wir für nicht unwichtig, in die Form einer Gleichung vierten Grades verlarvt, was nur einer Gleichung zweiten Grades bedurfte.

Wir erwähnen endlich eine Gleichung fünften Grades[1]) von der Form $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex = k$, als deren Wurzel

$$x = \sqrt[5]{\frac{cd}{ab} + \frac{k}{a}} - \sqrt[3]{\frac{e}{b}}$$

auftritt! In dem Zahlenbeispiele

$$x^5 + 100x^4 + 4000x^3 + 80000x^2 + 800000x = 1953632$$

bringt die Vorschrift allerdings $x = \sqrt[5]{5153632} - \sqrt[3]{8000} = 22 - 20 = 2$ hervor, welcher Wurzelwerth der Gleichung genügt.

[1]) Libri III, 345—346.

Was soll man aus diesen tollen und doch die jedesmaligen Zahlenbeispiele befriedigenden Wurzelwerthen machen? Gewiss ist keine andere Folgerung zu ziehen, als diejenige, welche wir an dem einen Falle einer Gleichung vierten Grades zu erörtern versucht haben. Der Verfasser jener Algebra hat irgend welche zum Theil recht kraus aussehende Wurzelwerthe bald von vornherein angenommen, bald durch Mittel, die er nachträglich zu verbergen wusste, aus den Gleichungen sich verschafft; er hat mit ihrer Hilfe Gleichungen dritten, vierten, fünften Grades gebildet; er hat dann gesucht, die ihm bekannten Wurzeln aus den Coefficienten der ihm gleichfalls bekannten Gleichung herauszurechnen; er hat endlich sich und seine Leser mit der Hoffnung getäuscht, die Kunststückchen, welche er unter saurem Schweisse und nach ungezählten vergeblichen Versuchen herausgeklügelt hatte, würden auch in anderen Zahlenbeispielen ihre Schuldigkeit thun. Er war ein ungemein geübter Rechner. Er litt an der Krankheit der ungenügenden, aber für genügend gehaltenen Induction, welche er nebst den Aufgaben der kubischen und biquadratischen Gleichungen seinen Landsleuten hinterliess. Er war trotz der hervorgehobenen Schwäche nichts weniger als ein unbegabter Mathematiker. Den Beweis für diese unsere letzte Behauptung würden vermuthlich die Kenntnisse des Verfassers auf anderen mathematischen Gebieten als dem der Gleichungen höherer Grade zu liefern vermögen, wenn die Auszüge aus seiner Schrift etwas ausgiebiger in dieser Beziehung wären. Einmal ist ein Schild in Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks auf seinen Flächeninhalt zu prüfen[1]). Ist cosa die Seite, heisst es, dann ist die halbe Summe der drei Seiten $1\frac{1}{2}$ cose, und diese um 1 cosa verringert geben $\frac{1}{2}$ cosa, also müsse das Product gebildet werden aus $1\frac{1}{2}$ cose, $\frac{1}{2}$ cosa, $\frac{1}{2}$ cosa, $\frac{1}{2}$ cosa, und dieses oder $\frac{3}{16}$ de censo de censo gebe das Quadrat des Flächeninhaltes; hier ist augenscheinlich die heronische Dreiecksformel

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}}$$

unter Berücksichtigung von $a=b=c$ in Anwendung gebracht. Ausserdem sollen auch folgende Aufgaben behandelt sein[2]): In einen Kreis, in ein Dreieck, in ein Quadrat eine gegebene Anzahl von Kreisen, von gleichseitigen Dreiecken, von Quadraten einzuzeichnen, so dass die Flächensumme der eingezeichneten Figuren die grösstmögliche sei, und ebenso die Aufgabe, in einen Würfel ein Tetraeder von grösstmöglichem Rauminhalte einzubeschreiben.

[1]) Libri III, 311—312. [2]) Ebenda II, 214 Note.

Von einem Schriftsteller des XIV. Jahrhunderts, von Antonio Biliotti, genannt dall' Abaco aus Florenz, wissen wir nur[1]), dass er 1383 in Bologna lehrte.

Den gleichen Beinamen dall' Abaco führte Paolo Dagomari[2]). Er ist etwa 1281 in Prato geboren, 1374 in Florenz gestorben. Er führte neben dem angegebenen Beinamen auch den als Paolo Astrologo, als Paolo Geometra, als Paolo Arismetra. Nach einer Angabe seien seine Werke nebst erläuternden Zusätzen des Micillus 1532 in Basel im Drucke erschienen, doch ist diese Ausgabe von Niemand je beschrieben worden, wenn sie überhaupt vorhanden war. Er schrieb ein Werk, in welchem die Gleichungen ersten und zweiten Grades und diejenigen kubischen Gleichungen, welche nur aus zwei Gliedern bestehen, behandelt sind[3]). Auch unbestimmte Aufgaben kommen in der für Kaufleute verfassten Schrift vor, z. B. die Aufgabe, eine ganze Zahl von der Eigenschaft zu finden, dass ihr Quadrat mit dem um 36 verminderten Quadrate vervielfacht wieder ein Quadrat werde[4]). Paolo Dagomari hat zuerst unter den Nicht-Arabern, freilich wahrscheinlich nach arabischem Muster einen *Almanach* unter dem Titel *taccuino* veröffentlicht, welcher dieser Gattung von Schriften lange beigeblieben ist. Dem Almanach muss allem Anscheine nach ein arabisches Wort zu Grunde liegen, doch ist dasselbe mit Sicherheit noch nicht erkannt. Taccuino dagegen ist unverkennbar das arabische taqwim, die Tabelle[5]). Am bekanntesten sind die mehrfach gedruckten Regoluzze di Maestro Paolo dall' Abbaco[6]). Es sind 52 sehr kurz gefasste Regeln, welche zu einigen Bemerkungen Anlass geben. Die 1. Regel schreibt vor, man solle die Zahlen zum besseren Ueberblick beim Lesen derselben durch Pünktchen in Gruppen von je drei Ziffern abtheilen. Wir wissen, dass Johannes von Sacrobosco das Gleiche vorschrieb. Das Gleiche wird auch von einem wie Dagomari dem XIV. Jahrhunderte angehörenden Paolo von Pisa[7]) berichtet, der aber eine ziemlich zweifelhafte Persönlichkeit ist und vielleicht mit unserem Paolo sich deckt. In der 11. Regel sind Brüche, *rotti*, erklärt. Man schreibt sie mittels eines Bruchstriches,

---

[1]) Libri II, 205, Note 1. [2]) Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano* pag. 133, 134, 137, 138, 274—327, 353—397. [3]) Libri II, 527. [4]) Damit $x^2(x^2 - 36)$ Quadrat sei, muss $x^2 - 36$ ein solches sein, d. h. x muss die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sein, dessen eine Kathete 6 ist, und ein solches Dreieck ist z. B. 6, 8, 10. Man kann daher $x = 10$, $x^2(x^2 - 36) = 6400 = 80^2$ setzen. [5]) M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* von G. Eneström 1888, pag. 13—16. [6]) Libri III, 296—301. — Frizzo, *Le Regoluzze di Maestro Paolo dall' Abbaco* (Verona 1883). [7]) Libri II, 206, Note 5 und 526; III, 295.

verga, über welchem der *denominato*, unter welchem der *denominatore* sich findet. Die 12. Regel lehrt die *rotti infilzati* kennen, jene aufsteigenden Kettenbrüche, deren Leonardo von Pisa nach arabischem Vorbilde (S. 10) sich bediente. In der 14., 15., 16. Regel kommt die Multiplication und nach ihr die Addition von Brüchen zur Sprache, das Dividiren durch eine gemischte Zahl erst in der 38. Regel. Dazwischen schieben sich Regeln des Dreisatzes, der Zinsberechnung, die Angabe, dass man den Kreisumfang erhalte, wenn man den Durchmesser mit 22 multiplicire und durch 7 dividire, die Summirung der Reihe der natürlichen Zahlen. Die Regeln 42 bis 45 beziehen sich auf Kalenderanfertigung. Regel 46 lehrt die Subtraction ganzer Zahlen von einander mit Borgen von 10 im Minuenden, wo es nöthig ist, worauf die nächste Subtrahendenstelle um 1 erhöht wird. Regel 47 lässt die Quadratwurzel einer Zahl näherungsweise nach der Formel $\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a}$ berechnen u. s. w. Ordnung kann man, wie diese Auszüge beweisen, den Regeln nicht nachrühmen!

Giovanni Danti von Arezzo[1]) wird als Verfasser eines der Arithmetik des Boethius entnommenen (?) Algorithmus und einer Geometrie nach arabischen Quellen genannt.

Zuchero Bencivenni[2]) übersetzte Mancherlei astronomischen und mathematischen Inhaltes aus dem Arabischen in das Italienische. Bekannter ist freilich sein Name wegen eines grammatischen Verdienstes, da er es gewesen sein soll, der zuerst den Mitlauter v von dem Selbstlauter u unterscheiden lehrte.

Rafaele Canacci aus Florenz[3]) hat gleichfalls in italienischer Sprache über Algebra geschrieben und zwar, wie es scheint im Anschlusse an Guglielmo de Lunis, wenn man an die italienische Algebra dieses von Canacci selbst genannten Vorgängers (S. 100) glauben darf. Diese Schrift soll namentlich geschichtliche Angaben in bemerkenswerther Anzahl enthalten, deren Bekanntmachung zu wünschen wäre, allerdings unter der Voraussetzung, dass sie nicht alle jener Angabe gleichen, die sich von Canacci aus fortgeerbt zu haben scheint (Bd. I, S. 679), als führe die Algebra ihren Namen nach einem gewissen Geber.

Schriftsteller wie Pietro d'Abano, Cecco d'Ascoli, Andalo di Negro, denen eine ausführliche Geschichte der Physik und der Astronomie in Italien gerecht werden müsste, übergehen wir und nennen nur noch Biagio da Parma[4]). Sein eigentlicher Name war Pelacani.

---

[1]) Libri II, 207. [2]) Ebenda S. 207, Note 4. [3]) Ebenda S. 208. Die Handschrift der Algebra des Canacci gehört der Bibliotheca Palatina in Florenz an. [4]) Ebenda 209. — Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathe-

Er trat an den verschiedensten Orten als Lehrer auf, so auch in Paris, wo man, wie erzählt wird, auf ihn den Ausspruch erfand: „Aut diabolus est, aut Blasius Parmensis.“ Seine erste Lehrthätigkeit entwickelte er seit 1374 in Pavia, wo er selbst sich den Doctorgrad erworben hatte. In der Universität Bologna hatte er die Professur der Astrologie, später die der Philosophie in den Jahren 1378—1384 inne. Von Bologna kam er nach Padua bis 1388, wo er wieder in Bologna Astrologie las. Die Jahre 1404, 1406, 1407 gehören wieder Pavia, die Zeit von 1408 bis zum 15. October 1411 neuerdings Padua an. Dann kehrte er in seine Vaterstadt Parma zurück, in welcher er am 23. April 1416 starb. Sein Charakter scheint den häufigen Aufenthaltswechsel verschuldet zu haben; wenigstens wird glaubwürdig berichtet, er sei seiner Stellung in Padua verlustig geworden, weil die Studirenden, entrüstet über seine Rohheit und Habgier, seine Vorlesungen nicht länger besuchten, worauf die Regierung ihn entliess. Er beschäftigte sich unter anderem mit Statik und mit Perspective und schrieb überdies Erläuterungen zu den Latitudines formarum des Oresme. Letztgenannter Commentar ist 1482 in Padua im Drucke erschienen, gehört aber heute zu den kaum auffindbaren Seltenheiten, und doch wären Nachrichten über ihn sehr erwünscht, sowohl wegen der uns bekannten Bedeutsamkeit des erläuterten Werkes, als auch um ein Urtheil zu gewinnen, wie weit die Berühmtheit des Verfassers eine verdiente war.

Wir haben das Ende des XIV. Jahrhunderts erreicht. Ueberblicken wir dasselbe mit nach rückwärts gewandten Augen, so sind es etwa folgende Punkte, die vorzugsweise sich bemerkbar machen. Die beiden Schulen, deren Vorhandensein im XIII. Jahrhunderte wir erkannten, sind noch immer getrennt vorhanden. Die geistliche Schule der Universitäten, an Zahl und Bedeutung der ihr angehörenden Persönlichkeiten überwiegend, bringt in England einen Bradwardinus, in Frankreich einen Dominicus de Clavasio, einen Oresme hervor, schickt Sendboten einer künftigen Grösse nach Deutschland. Die weltliche oder kaufmännische Schule bleibt noch in Italien haften ohne durch diese Einengung des Bodens ganz zu verkümmern. Sie zählt auch Persönlichkeiten von geistiger Bedeutung, wenn auch keineswegs dem Gründer der Schule, Leonardo von Pisa, nur annähernd gleichzustellen.

Ohne Alles, was das XIII. Jahrhundert hinterlassen hatte, voll-

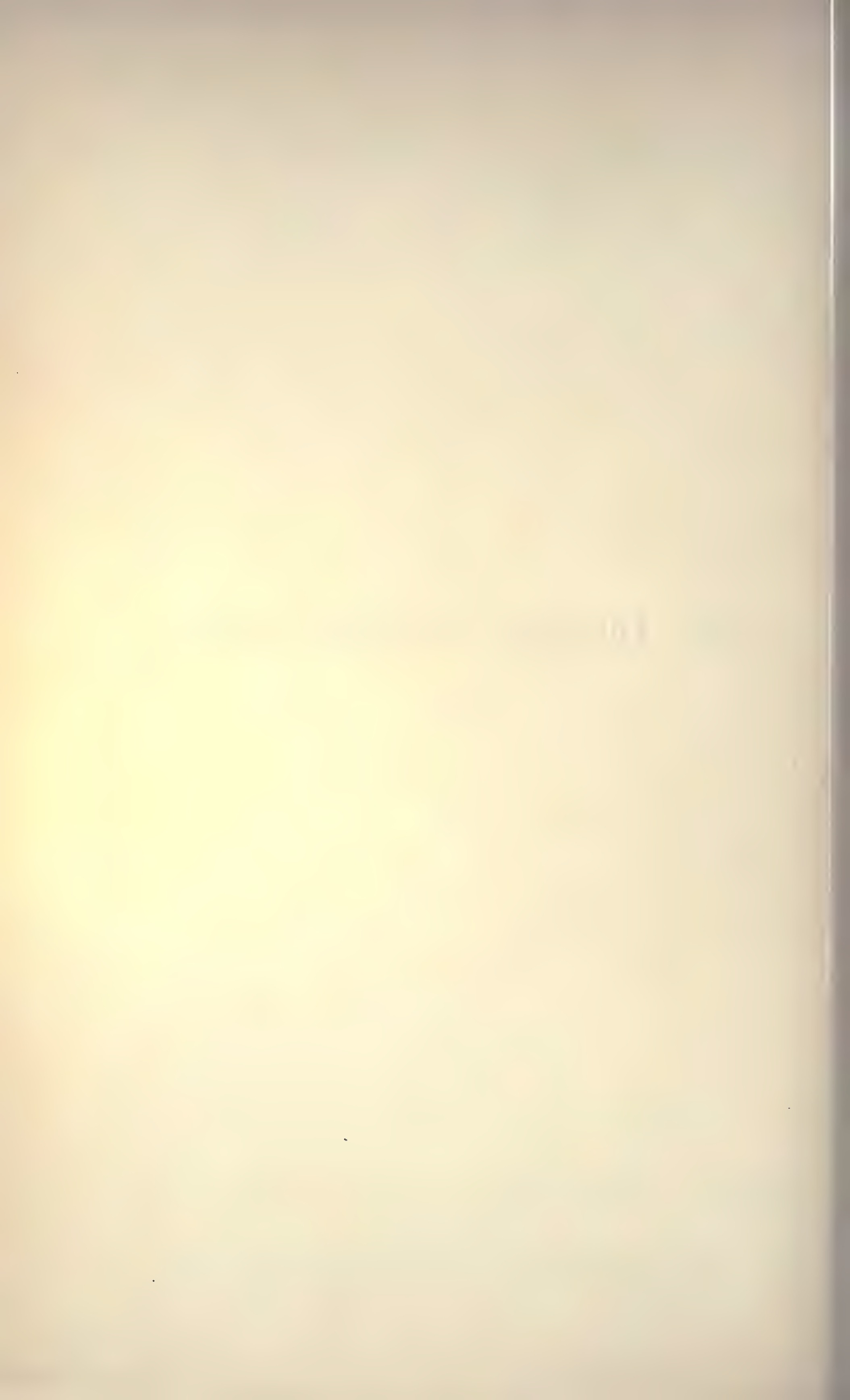
---

matischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze 1871) S. 19. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* (1883), I, 112—114. — Suter, Math. Univ. S. 50.

ständig zu beherrschen, ist das XIV. Jahrhundert dennoch in wichtigen Dingen fortgeschritten. Neue mathematische Begriffe kommen zur Entstehung, deren Reife noch Jahrhunderte auf sich warten lassen wird. Bradwardinus legt den Grund zu einer allgemeinen Lehre von den Sternvielecken. In seine philosophisch-mathematischen Untersuchungen spielt schon die Frage des Unendlichgrossen, des Unendlichkleinen hinein, die nicht mehr zur Ruhe kommen soll. Der Contingenzwinkel, schon von Campanus, der auch die Untersuchung der Sternvielecke in Fluss gebracht hatte, der Beachtung würdig erkannt, bietet einen Gegenstand der Forschung wie des Streites. Oresme giebt einer noch ziemlich fernen Zukunft gebrochene Exponenten. Er giebt ihr eine Versinnlichung von Veränderungen, aus welcher neue Wissenschaften entstehen werden. Sind diese Keime den Gelehrten der Universitäten zu verdanken, so sehen wir italienische Kaufleute mit Gleichungen von höherem Grade als dem zweiten sich beschäftigen. Es war ein Schritt nicht über Leonardo von Pisa hinaus, aber neben dem von diesem gebahnten Wege, den sie wagen. Leonardo hatte eine bestimmte kubische Zahlengleichung annähernd gelöst, nachdem er gezeigt hatte, welche Gestalt die Gleichungswurzel nicht haben könne. Jetzt ist von bestimmten Zahlengleichungen als solchen nicht die Rede, die Frage nach der allgemeinen Auflösung der kubischen, der biquadratischen Gleichung drängt sich mächtig in den Vordergrund. Auch diese Frage wird nun nicht mehr zur Ruhe kommen. Versuche, dieselbe zu bewältigen, scheitern und werden noch scheitern. Ungenügende Inductionen führen höchstens zur Neigung, in geheimnissvoller Weise zu verbergen, wie man die der Induction zu Grunde liegende einzelne Gleichung behandelt hatte. Auch diese Neigung wird sich vererben, in Italien vererben, bis wieder in Italien der wiederholt vergebliche Versuch gelingen und die kubische, die biquadratische Gleichung bewältigt sein wird.



XI. Die Zeit von 1400—1450.



50. Kapitel.

Deutsche Rechenlehrer. Johann von Gemunden, Georg von Peurbach.

Wir haben zu Beginn des 48. Kapitels ein Zurückweichen der mathematischen Wissenschaften in Frankreich und England für den Anfang des XV. Jahrhunderts angekündigt.

Was die englische Mathematik betrifft, so könnten vielleicht Forschungen im Lande selbst ein günstigeres Ergebniss liefern, als wir anzunehmen geneigt sind, wenn es wahr sein sollte, was ein Schriftsteller[1]) berichtet, dass gerade damals ein ganzer Flug von Mathematikern (a coye of mathematicians) aufstieg. Zur Veröffentlichung gelangten indessen bisher nur ärmliche Zeugnisse. Wenn z. B. Höhenmessungen mit der festen Stange (Bd. I, S. 812) vorgenommen werden[2]), so ist das doch ein entschiedener Rückschritt, und einen grossen Fortschritt können wir auch nicht in den Vorlesungen von Johannes Norfolk[3]) über Progressionen, Johannis Norfolk in artem progressionis Summula, erkennen, welche 1445 gehalten wurden. Als eigene Erfindung wird der Inhalt ohnehin nicht vorgebracht. Progressionen seien von einem gewissen Könige Algor von Castellien (sic!) in seinem Algorismus der ganzen Zahlen gelehrt und sollen hier nur vor Vergessenheit bewahrt werden. Die Vergessenheit scheint aber allerdings schon angefangen zu haben, denn 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 2, 7, 12, 17, 22 wird eine *geometrische*, und 1, 2, 4, 8, 16 oder 1, 3, 9, 27 eine *arithmetische Progression* genannt! Nehmen wir diese Benennungen in den Kauf, so besteht Norfolk's obendrein geborgte Weisheit darin, dass die von ihm sogenannte geometrische Progression in *stetige* und *unterbrochene* zerfällt, je nachdem die Differenz 1 oder grösser als 1 ist, dass ferner unterschieden wird, ob die Gliederzahl grad oder ungrad ist, und dass für alle vier

---

[1]) Fuller, *History of the worthies of England* (ed. 1811) II, 413. [2]) Halliwell, *Rara Mathematica* pag. 29—31. [3]) Ebenda pag. 94—106. Die Datirung pag. 103.

Fälle Regeln der Summenbildung angegeben werden. Von seinen arithmetischen Progressionen nennt Norfolk nur die der Potenzen von 2, also 2, 4, 8, 16 u. s. w. Sie werde summirt, indem man das erste Glied von dem verdoppelten letzten Gliede abziehe. Namen von Lehrern der Astronomie an englischen Universitäten in diesem Zeitraume sind uns gleichfalls aufbewahrt, aber von mathematischen Werken derselben etwa über das Grenzgebiet der Trigonometrie ist nicht mehr die Rede, so dass ein Uebergehen jener blossen Namen mehr als nur gerechtfertigt für uns erscheint. Ferner sind uns Prüfungsordnungen der Universität Oxford erhalten[1]). Für das Baccalaureat war im Jahre 1408 Rechnen mit ganzen Zahlen und Kirchenrechnung vorgeschrieben. Die Anforderungen für das Licentiat sind von 1431 bekannt. Sie belaufen sich auf die Arithmetik und Musik des Boethius, auf euklidische Geometrie ohne Angabe der geforderten Bücherzahl oder statt ihrer auf die Perspective des Witelo, endlich auf astronomische Kenntnisse nach Ptolemäus. Man kann ja zugeben, dass diese Anforderungen schon über das in Paris nicht gar lange vorher geforderte Maass (S. 140) hinausgehen, aber den Anforderungen wie den Leistungen von Prag und Wien sind sie nicht zu vergleichen.

Haben wir soeben der Satzungen der Universität Paris aus dem XIV. Jahrhunderte gedacht, so brachte eine 1452 durch den päpstlichen Legaten Tuttavilleo vorgenommene Neuordnung[2]) keine Besserung. Für das Baccalaureat war Mathematik gar nicht vorgeschrieben, für das Licentiat aliqui libri mathematici, eine irgend nähere Bestimmung dieser Schriften fehlt.

Den niedrigen Stand der mathematischen Studien in Frankreich bestätigt ferner die geringe Anzahl von Namen, welche wir auffinden. Höchstens eine einzige Persönlichkeit haben wir aus der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts zu nennen: Pierre d'Ailly[3]), gewöhnlich Petrus de Alliaco genannt, wurde 1350 in Compiegne geboren. Er war eine Zeit lang Vorsteher des Collège de Navarre in Paris, später Rector der pariser Universität. Papst Johann XXIII. ernannte ihn zum Bischof von Cambray und zum Cardinal-Legaten für ganz Deutschland. Er starb in Avignon etwa 70 Jahre alt; als sein Todestag wird allgemein der 8. August genannt, für das Todesjahr wechseln aber die Angaben zwischen 1419, 1420 und 1425. D'Ailly nahm am Concile von Konstanz theil und legte demselben einen Vorschlag zur Kalenderverbesserung vor. Man solle alle 130 Jahre einen Schalt-

[1]) Suter, Math. Univ. S. 52. [2]) Ebenda. [3]) Weidler, *Historia astronomiae* pag. 295—296. — Poggendorff I, 19. — Suter, Math. Univ. S. 44.

tag weglassen, um den Irrthum wieder gut zu machen, der in der zu grossen Annahme der Jahresdauer von $365\frac{1}{4}$ Tagen läge. Das ist die ganze Thätigkeit, um derenwillen wir D'Ailly allenfalls erwähnen durften. Die Geschichte der Geographie nennt noch sein 1410 geschriebenes Buch de imagine Mundi, aus welchem Columbus sich mancherlei für seine Reisepläne nicht unwichtige Kenntnisse angeeignet haben soll.

Wir begeben uns nach Deutschland. Gleich mit Anfang des XV. Jahrhunderts haben wir als kennzeichnend das Auftreten der Modisten[1]) anzuführen. Ein Modist war ein Kenner der „alamodischen" Schreibkunst, d. h. der damals zur Mode gelangenden Kanzleischrift im Gegensatze zu den alten Schriftzügen. Solche Kunst und die Anfangsgründe des Wissens überhaupt lehrte der Modist die zu ihm zur Schule gehenden Kinder, vorzugsweise Knaben, aber auch Mädchen genossen schon einen gewissen Unterricht[2]). Der Lehrplan für die Knaben umfasste frühzeitig die Anfangsgründe der Rechenkunst, und seitdem kann man den Modisten auch als Rechenlehrer betrachten, der gewerbsmässig dieser Beschäftigung sich widmete und daraus seinen Lebensunterhalt zog. Schon 1409 wird von Jobs Kapfer, stulschreiber in Nürnberg, berichtet, der „kint lernt". 1422 war in Frankfurt am Main ein gewiser Heincze, kinderlehrer, der auch unter dem Namen Heincze schriber der modiste vorkommt. Aehnliche Verhältnisse walteten aller Orten in Deutschland, und aus den von Einzelnen ins Leben gerufenen und geleiteten, aber amtlich erlaubten und besteuerten Unterrichtsanstalten entwickelte sich allmählich die deutsche Schule im Gegensatze zur Lateinschule, im ferneren Gegensatze zur nicht erlaubten, aber darum doch in halb öffentlichem Geheimnisse entstehenden Winkelschule. Auf allen diesen Schulen, welcher Art sie angehörten, kann der Rechenunterricht nicht elementar genug gedacht werden. Kaum irgendwo wird er das Rechnen mit ganzen Zahlen überschritten haben, Lehrbücher der Modisten scheinen sich nicht erhalten zu haben, wohl aber ein solches für die Lateinschule[3]). Es ist durch eine basler Handschrift bekannt und in derselben nach Zeit und Bestimmung gekennzeichnet. An das Rechenbuch schliesst sich nämlich eine von

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 294—297; über das Wort Modist S. 295. — Unger, Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart (1888) S. 17—19. Wir citiren dieses Buch künftig als Unger schlechtweg. [2]) Unger S. 20. [3]) Das älteste deutsche Rechenbuch herausgegeben und übersetzt von Friedrich Unger, Zeitschr. Math. Phys. XXXIII, Histor.-liter. Abthlg. S. 125—145. Der Text stammt aus der Handschrift F. VII. 12 der basler Universitätsbibliothek

derselben Hand geschriebene andere Abhandlung an, und an deren Ende hat der Schreiber sich als einen Hildesheimer Stiftsschüler Bernhard unterzeichnet und das Jahr 1445 als das der Vollendung jener Schrift angegeben. Spätestens 1445 muss also Bernhard der Stiftsschüler auch das Rechenbuch zu Ende geschrieben haben, und man geht wohl kaum in der Annahme fehl, er würde des Beiwortes „Hildesheimer Stiftsschüler“ sich nicht bedient haben, wenn das Rechenbuch nicht für jene Stiftsschule bestimmt gewesen wäre, welche unzweifelhaft eine Lateinschule war. Um so verwunderlicher freilich erscheint es, dass das Rechenbuch nicht in lateinischer, sondern in niederdeutscher Sprache verfasst ist, wobei die Kunstausdrücke natürlich lateinische blieben. Ob Bernhard es selbst verfasst, ob nur abgeschrieben hat, darüber fehlt jegliche Auskunft. Das Rechenbuch Bernhard's, wie wir uns deshalb etwas doppelsinnig auszudrücken bescheiden müssen, lehrt nur das Rechnen mit ganzen Zahlen in dem uns schon oft bekannt gewordenen Umfange mit den 7 Rechnungsarten der Addition und Subtraction, der Verdoppelung und Halbirung, der Multiplication und Division, der Wurzelausziehung. Addition, Subtraction und Halbirung beginnen rechts (an die recht syde), die übrigen Rechnungsarten links (an die slinker syde). Bei der Lehre vom Anschreiben der Zahl ist der numerus digitus vom numerus articulus und vom numerus compositus oder mixtus unterschieden. Beim Subtrahiren (aff treeken) ist das Borgen (aff dren) einer Einheit von der Ziffer nächsthöherer Ordnung, welche 10 werth ist (die een is 10 weerf) vorgeschrieben, die nächste Ziffer bleibt um die geborgte Einheit erniedrigt. Beim Multipliciren wird 9 mal 8 in 10 weniger 1 mal 8 verwandelt, also 8 von 80 abgezogen. Das Dividiren erfolgt überwärts. Quadrat- und Kubikwurzeln werden so weit ausgezogen, als es ganzzahlig möglich ist, von weitergehender Annäherung ist keine Rede. Man sieht, es ist das alte in den Klosterschulen bekannte und gelehrte Rechnen, welches wir bis auf Jordanus in Europa zurückverfolgen können. Kaum dass im Wortlaut ein Unterschied von dem ältesten handwerksmässigen Leitfaden, dem des Johannes von Sacrobosco, wahrnehmbar wäre.

Klopfen wir an die Thüre der deutschen Universitäten, so finden wir zwar Mathematik über das Rechnen hinaus, das Rechnen selbst aber auf keiner höheren Stufe als an den vorbereitenden Schulen. Wien war, wie wir (S. 141) gesagt haben, die vorzugsweise mathematische Universität. An ihr wirkte Johann von Gemunden[1]).

[1]) Allgem. deutsch. Biogr. XIV, 456—457. Ueber die wissenschaftlichen Leistungen vergl. M. A. Stern in Ersch. und Gruber's Allgem. Encyklop. der

Er mag um 1380 geboren sein. Für seine Heimath hielt man bald Gmunden am Traunsee, bald ein Dorf Gemünd in Niederösterreich, bald suchte man sie in Schwäbisch Gemünd. Die letztere Meinung stützt sich auf die Auffindung eines Computus, welchen im Jahre 1404 Johannes Wissbier de Gamundia ulme studens verfasst hat. Dieser Verfassersangabe hat man einestheils entnommen, dass schon um die Wende des XIV. zum XV. Jahrhundert die oberschwäbische Reichsstadt eine Art von Bildungsmittelpunkt für die süddeutschen Länder abgab, und dieses Ergebniss wird unter allen Umständen zu bemerken sein, anderntheils dass ein in Ulm dem Studium Obliegender mit grösserer Wahrscheinlichkeit dem benachbarten schwäbischen Gemünden als dem Städtchen im Salzkammergute oder gar einem niederösterreichischen Dorfe entstammte. Fraglich bleibt die Sache immer, so lange der Familienname des gemünder Professors in Wien nicht gesichert ist, ob er Wissbier hiess oder wie sonst. Man findet zwar die Angabe[1]), jener Professor sei in dem Todtenregister der Domherren zu St. Stephan, unter welche er 1411 aufgenommen wurde, als Johannes Nyden de Gemünden eingetragen, doch scheint sie urkundlich nicht nachweisbar. Besser gestützt ist ein dritter Familienname Schindler, der gleichfalls berichtet wird. Fünf Handschriften der Wiener Bibliothek aus dem XV. Jahrhundert nennen sämmtlich Johannes Schindler de Gamundia als Verfasser. Von ihm müsste man dann einen Johannes Schindel aus Königgrätz[2]) unterscheiden. Letzterer ist um 1375 in Königgrätz geboren, lehrte zwischen 1406 und 1410 in Wien, dann in Prag, wo er vor 1450 starb. Im Auslande war er als Joannes Pragensis weit und breit berühmt. Wäre Wissbier doch der richtige Name, so könnte der Umstand, dass Johannes Wissbier 1404 in Ulm studirte und Johannes von Gemunden am 21. März 1406 in Wien zum Magister der freien Künste wurde, bei der oftmals sehr langen Zeit, über welche Studien sich ausdehnten, einen Widerspruch nicht bilden. Die Lehrthätigkeit an den Universitäten war damals noch keine nach Fächern streng gesonderte, so wenig es Studirende dieses oder jenes Einzelfaches in der Artistenfacultät gab. Eigent-

---

Wissensch. u. Kunst II. Section, 22. Theil S. 188—190. — C. J. Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland (1877) S. 5—8. Wir citiren dieses Buch künftig als Gerhardt, Math. Deutschl. — Günther, Unterricht Mittela. S. 232—235.

[1]) Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 86. [2]) Czerny im Archiv für Oesterreichische Geschichte (1888) LXXII, 300—301. F. J. Studnička in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrgang 1892. S. 103—104.

liche Fachwissenschaften waren noch nicht so hoch entwickelt, um eine besondere Lebensaufgabe des Einzelnen bilden zu müssen. Wer lehren wollte, war bereit Alles zu lehren und musste um so mehr dazu bereit sein, nachdem (S. 141) die Ueberzahl der Lehrer in Wien den uns heute so unmöglich scheinenden Ausweg betreten liess, dass am Jahresanfang durch Verlosung die Reihenfolge bestimmt wurde, nach welcher die Professoren Gegenstand und Stunde der Vorlesung sich wählen durften. Wer spät zur Wahl kam, musste in beiden Beziehungen mit dem vorlieb nehmen, was die Vorgänger verschmäht hatten. Vor und nach Johannes von Gemunden finden wir daher Nichtmathematiker mit mathematischen, Mathematiker mit nichtmathematischen Vorlesungen betraut, wenn wir unseren eigenen Aeusserungen entgegen diese Bezeichnungen beibehalten dürfen. Mathematiker nennen wir nicht solche Persönlichkeiten einer frühen Zeit, welche ausschliesslich der Mathematik ihr öffentliches Leben widmeten, denn solche gab es nicht, sondern Männer, deren Spuren die Geschichte erhalten hat; von wem derartige Spuren nicht vorhanden sind, der ist für uns Nichtmathematiker gewesen. Johannes von Gemunden selbst begann mit philosophischen Vorlesungen, wie z. B. mit einer Vorlesung De sensu et sensato. Im Jahre 1412 lehrte er den Algorismus de integris, 1414 Perspectiva communis, 1416 und 1417 Algorismus de minutiis. Seit 1420 las er über die verschiedensten mathematischen Gegenstände, aber ausschliesslich über solche, bald über die Elemente Euklid's und die Sphaera materialis, bald über die Theoriae planetarum, bald über den Gebrauch des Astrolabiums, welche letztere Vorlesung er zuerst in Wien einführte. Es mag wohl allmälig die Gewohnheit sich herausgestellt haben, ihm, zu welchem Augenblicke auch die Reihe ihn traf, denjenigen Gegenstand freizuhalten, den er gerade vorzutragen wünschte, und damit war der allmälige Uebergang von der Professur in der Artistenfacultät überhaupt zur Fachprofessur der Mathematik in Wien angebahnt. Allerdings setzte eine solche Rücksichtnahme auf persönliche Wünsche des Einzelnen eine hohe Achtung voraus, in welcher er selbst und seine Lehrthätigkeit bei den Mitprofessoren stehen musste. Dass dem bei Johannes von Gemunden so war, wird auch dadurch bestätigt, dass man ihm 1418 gestattete, während einer Unpässlichkeit von längerer Dauer seine Vorlesungen im eigenen Hause zu halten, was gegen alle Regel war. Er setzte seine erspriessliche Thätigkeit bis zu seinem am 23. Februar 1442 erfolgenden Tode fort. Seine Bücher und Instrumente hatte er, unter dem Vorbehalte sie lebenslänglich frei benutzen zu dürfen, schon 1435 der Universität geschenkt. Die Bücher sollten in der Bibliothek gesondert aufgestellt und gegen Entrichtung eines in die

Facultätskasse fliessenden Betrages auch ausgeliehen werden. So war Johannes von Gemunden gewiss eine hochansehnliche Lehrkraft. Die Geschichte der Astronomie hebt rühmend hervor, dass er einen, vielleicht auch zwei Kalender anfertigte, die in Holz geschnitten und auf diese Weise vervielfältigt wurden[1]), dass auch andere Tabellen, z. B. die ersten Ephemeriden, von ihm berechnet wurden. In seinen Vorlesungen über den Algorismus de integris hat Johannes von Gemunden stets Sacrobosco's Leitfaden zu Grunde gelegt. In den Vorlesungen über das Bruchrechnen benutzte er sicherlich wenigstens zum Theil eine von ihm selbst verfasste Anleitung, welche 1515 in Wien gedruckt worden ist, und welche den Titel führt: Tractatus de Minutiis phisicis compositus Viennae Austriae per M. Joannem de Gmunden[2]). Welches Buch er bei dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen benutzte, darüber sind wir leider ohne Auskunft. Unter den minutiae phisicae nämlich sind, wie immer unter diesem Ausdrucke, Sexagesimalbrüche verstanden. Dass der 360. Theil des Kreisumfanges als Grad bezeichnet wird, der in 60 Minuten zerfällt, während jede Minute aus 60 Secunden u. s. w. besteht (Bd. I, S. 388), ist bekannt genug. Aber auch nach aufwärts war ein Zusammenfassen von Graden wünschenswerth. Dazu pflegte man sich des Thierkreises mit seinen 12 Zeichen zu bedienen, so das ein Zeichen, signum, aus 30 Graden bestand. Das war freilich eine Regelwidrigkeit gegen die Sechzigtheilung, und ihr konnte entgangen werden, wenn zwei Thierkreiszeichen, also 60 Grade, als eine höhere Einheit zusammengefasst wurden. Dieses vollzog Johann von Gemunden und nannte die 60 Grade ein *signum phisicum*, von welchen also 6 den Kreisumfang bildeten. Diese Neuerung, die keineswegs als eine ganz unbedeutende zu erachten ist, da sie ein deutliches Erfassen des Grundgedankens der Sexagesimalrechnung verräth, war übrigens nicht Eigenthum des Johannes von Gemunden, noch wurde sie von ihm als solche in Anspruch genommen. Er beruft sich vielmehr ausdrücklich auf König Alfons X. von Leon als Vorgänger[3]), und wirklich sind auch in dessen 1252 vollendeten astronomischen Tafeln die 60gradigen Zeichen eingeführt, die nur keine Nachahmung fanden. Jordanus Nemorarius ging bei seiner Darstellung, wie wir (S. 66) ausdrücklich hervorgehoben haben, überhaupt nicht vom Kreise aus. Für ihn gab es dess-

[1]) von Zach, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XVIII, 583—593 mit einem Abdruck einer der erhaltenen Originalholzschnitttafeln. Ferner ebenda XIX, 196—198 und 284—292. [2]) Wir berichten nach dem Auszuge bei Gerhardt, Math. Deutschl. S. 5—8. [3]) *In tabulis vero alphoncii et in tabulis meis non ponuntur talia signa, sed signa phisica quorum quodlibet valet duo signa communia.*

halb weder Zeichen noch Grade, sondern nur Ganze und deren Bruchtheile, die Minuten, Secunden, Tertien. Johannes von Gemunden zeigt nun an einem Beispiele die Verwerthung der Stellung zur Angabe des Ranges der Sexagesimalbrüche. Auch davon war bei Jordanus keine Rede und konnte vermöge der rein theoretischen Anlage seines Algorithmus demonstratus, in welchem Zahlenbeispiele grundsätzlich bald gar keine, bald eine Nebenrolle spielten, kaum die Rede sein. Johannes von Gemunden dagegen lehrt 2 Zeichen 24 Grade 36 Minuten 45 Secunden werden .2. 24. 36. 45. geschrieben. Diese Schreibweise, repraesentatio minuciarum phisicarum, inbegriffen, lehrt er 10 Rechnungsarten. Nämlich 2. Verwandlung von Ganzen in Brüche und umgekehrt, sowie Zurückführung von Brüchen verschiedener Benennung auf den gleichen Nenner und umgekehrt, 3. Addition, 4. Subtraktion, 5. Halbirung, 6. Verdoppelung, 7. Multiplication, 8. Division, 9. Quadratwurzel, 10. Kubikwurzel. Addiren, Subtrahiren, Halbiren beginnen nach alter Gewohnheit rechts, dazu kommt aber abweichend von dem früheren Brauche die Verdoppelung; sie sei nur Addition zweier gleicher Zahlen, und desshalb müsse bei ihr wie bei der Addition verfahren werden. Bei der Multiplication und Division kommen als Sexagesimalbrüche höchster Ordnung solche mit dem Nenner 60^6, also ausser den Tertien noch Quarten, Quinten, Sexten vor. Beim Ausziehen der Quadratwurzel wechseln plötzlich, sofern die Annäherung weiter getrieben werden will, als der unmittelbar gegebene Radicand es zulässt, Sexagesimalbrüche mit Decimalbrüchen. Ganz neu ist ja deren Anwendung auch nicht. Johannes von Luna hat schon (Bd. I, S. 752) sich ihrer ganz ähnlich bedient. Aber dort waren Sexagesimalbrüche nicht schon im Laufe der Rechnung benutzt. Man soll, so ist die Vorschrift des Johann von Gemunden, den ganzen Radicanden auf die Benennung des letzten Sexagesimalbruches bringen, der aber nothwendig von grader Ordnung (60^{2n}) gewählt werden muss und ihm rechts noch Nullenpaare in beliebiger Anzahl beifügen. Dann theilt man von der Rechten anfangend den als ganze Zahl betrachteten neugestalteten Radicanden in zweistellige Gruppen und zieht die Wurzel, bleibt ein Rest, so wird er weggelassen[1]). Von der gefundenen Wurzel schneidet man rechts halb so viele Ziffern ab, als Nullen angefügt waren, und verwahrt sie. Die nach links übrigen Stellen bilden den Zähler der Wurzel, deren Nenner von halb so hoher Ordnung (60^n) ist, als der anfängliche Radicand. Nun nimmt man die vorher verwahrten Stellen, vervielfacht sie mit 60, schneidet wieder genau so viele Ziffern rechts ab als vorher, nämlich immer

[1]) *si sit aliquid residuum pro nihilo computetur.*

halb so viele als Nullen angefügt worden waren u. s. w. So findet man die Zähler weiterer Sexagesimalbrüche, und je mehr Nullen angefügt worden waren, um so genauer erhält man die Wurzel[1]). Das ist ein um so eigenthümlicher gemischtes Verfahren, als Theon von Alexandria (Bd. I, S. 461) die Aufsuchung angenäherter Quadratwurzeln unmittelbar an Sexagesimalbrüchen genau gelehrt hatte, ein Verfahren, welches offenbar nicht zu den Arabern gelangt oder durch deren Vermittelung noch nicht wieder in das Abendland gedrungen war, so wenig dieses mit dem griechischen Texte der Fall gewesen sein muss.

Wir haben somit in Johann von Gemunden einen Mathematiker und Astronomen kennen gelernt, der in mancher Leistung, als Schriftsteller (wofür wir auch eine Abhandlung *De arcubus et sinibus* anführen könnten) wie als Lehrer, über das schon Vorhandene hinausging, der aber trotzdem es nicht verschmähte, noch dem Bildungsgange der damals Studirenden gegenüber es verschmähen durfte, ab und zu das niedrigste Rechnen mit ganzen Zahlen zu lehren. Nicht anders wurde es an den anderen deutschen Universitäten gehalten.

In Prag lebte Křištan von Prachatic[2]) von 1392—1437. Sein *Algorismus prosaycus* enthält was alle ähnliche Schriften damals boten, aber auch Einiges darüber hinaus. Bei ihm findet sich die Netzmultiplication (Bd. I, S. 571), bei ihm ein kleines Einmaleins in quadratischer, ein grosses Einmaleins bis zu 20 mal 20 in dreieckiger Anordnung, bei ihm eine kleine Tafel der Quadrat- und Kubikzahlen bis zu 81 und 729.

In Erfurt musste im XV. Jahrhunderte ein Monat auf die Vorlesung über den Algorismus, ebenso ein Monat auf die über den Computus verwandt werden[3]). Die Universität Leipzig entstand 1409 durch aus Prag dorthin sich wendende Lehrer und Studirende, welche böhmischer Unduldsamkeit sich entzogen. Die ersten Satzungen der neuen Hochschule verlangen für das Baccalaureat die Sphaera materialis, die zweiten Satzungen von 1436 und 1437 fügen dem die Forderung des Algorismus und Computus bei[4]), und ähnliche Vorlesungen liessen sich ohne Schwierigkeit auch an anderen Universitäten nachweisen.

Kehren wir nach Wien zurück, so wissen wir Schüler des Johann von Gemunden als dessen Nachfolger nicht zu nennen. Er soll zwar

---

[1]) *et quanto plures cifras praeposueris tanto praecisius habebis radicem.*
[2]) F. J. Studnička in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Jahrgang 1892, S. 100—103 und: *Algorismus prosaycus Magistri Christiani anno fere 1400 scriptus* herausgegeben von F. J. Studnička. Prag 1893.
[3]) Suter, Math. Univ. S. 42. [4]) Ebenda S. 53.

deren viele gehabt haben, aber wenn schon nach einem Jahrhunderte von ihnen gesagt ist, dass die Zeit ihre Namen verloren gehen liess[1]), so wird denselben vermuthlich nicht viel nachzurühmen gewesen sein. Anders verhält es sich mit dem Manne, der, ohne Schüler des Johann von Gemunden gewesen zu sein, als sein Nachfolger bezeichnet werden darf. Er reicht zwar über die Grenze der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts um einige Jahre hinaus, aber so haarscharf können wir die Abschnitte, in welche wir diesen Band gliedern, nicht begrenzen, dass wir, seltene Ausnahmen vorbehalten, eine Persönlichkeit durchschneiden, um sie in mehreren Abschnitten zu behandeln. Georg von Peurbach[2]), den wir hier im Auge haben, ist geboren den 30. Mai 1423 an der bairisch-österreichischen Grenze unweit von Linz in dem Orte Peurbach. Die Rechtschreibung des Ortes und des Mannes wechselt mehrfach, man findet auch Peyerbach und Burbach. Peurbach, so nennt man ihn jetzt gewöhnlich mit dem Ortsnamen selbst, studirte jedenfalls in Wien und erwarb dort den Grad eines Magisters in der Artistenfacultät. Dann begab er sich auf Reisen, insbesondere nach Italien, wo er mit zwei Männern bekannt wurde, von denen weiter unten die Rede sein muss, mit Bianchini und mit Nicolaus Cusanus. Im Jahre 1453 spätestens kehrte Peurbach nach Wien zurück und lebte dort in sehr ärmlichen Verhältnissen, von Schulden bedrückt, bis er 1454 in die Stellung des Astronomen Königs Ladislaus von Ungarn eintrat. Etwas später finden wir ihn als Lehrer an der wiener Universität. Man würde irren, wenn man glaubte, er habe vorzugsweise mathematische und astronomische Vorlesungen gehalten. Einige von letzterer Art werden allerdings erwähnt, er schrieb auch einen Algorismus für „die jungen Studenten der hoen schuel zu Wien“, allein er las mit Vorliebe über lateinische Schriftsteller: 1456 über Juvenal, 1458 über Horaz, 1460 über die Aeneis des Vergil. Peurbach starb den 8. April 1461 und soll im Stephansdome beerdigt worden sein. Von den Schriften Peurbach's haben wir soeben seinen Algorismus angeführt. Derselbe wurde seit Ende des Jahrhunderts, zuerst vielleicht 1492 unter dem Titel Opus algorismi jocundissimum, mehrfach gedruckt und bildete gleich Peurbach's astronomischem Lehrbuche, Theoricae planetarum, welches in der Zeit von 1460 bis 1581 nicht weniger als 14 mal gedruckt worden ist, lange Zeit das stehende Lehrbuch der Universitäten.

---

[1]) *quorum vetustas nomina abolevit* sagte Tannstetter. Vgl. Kästner II, 529. [2]) Kästner I, 529—548. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 8—12. — Günther, Unterricht. Mittela. S. 235—241. — Alb. Czerny, Aus dem Briefwechsel des grossen Astronomen Georg von Peurbach im Archiv für Oesterreichische Geschichte LXXII, 283—304.

Peurbach, kann man sagen, löste in dieser Beziehung Sacrobosco ab. Der *Algorismus* freilich, der bald Opus Algorismi jocundissimum, wie wir schon gesagt haben, bald Opus Algorithmi, bald Institutiones in arithmeticam, bald ohne nähere Inhaltsbezeichnung Opusculum Magistri Georgii Peurbachii heisst, erhebt sich kaum über den, welchen er verdrängte. Gleich dem Algorismus des Sacrobosco giebt er nur Regeln, nirgend Beweise; gleich ihm beschleppt er sich mit Mediatio und Duplatio als besondern Rechnungsarten; gleich ihm handelt er in den meisten Druckausgaben nur von ganzzahligem Rechnen, ist also ein algorithmus de integris. Man könnte dieses begreiflich finden, auch eine Erklärung dafür darin sehen, dass für das Bruchrechnen, soweit es einer neuen Bearbeitung zu bedürfen schien, soeben erst durch Johann von Gemunden gesorgt worden war, allein eine durch Melanchthon und Voegelin besorgte, in Wittenberg gedruckte Ausgabe von 1536 enthält einen dem Peurbach zugeschriebenen algorithmus de minuciis und einen algorithmus de proportionibus, von welchen der erstere echt zu sein scheint, da er auch in einer Münchener Handschrift des XV. Jahrhunderts vorkommt. Es will scheinen als ob Peurbach zunächst darin sogar hinter seinem Vorgänger Sacrobosco zurückblieb, dass er die Kubikwurzelausziehung wegliess, wiewohl aus den unter einander verschiedenen Drucken, die ja alle mindestens 30 Jahre nach Peurbach's Tode erfolgten, ein sicherer Schluss nicht gezogen werden kann[1]), wiewohl anzuerkennen ist, es sei wahrscheinlicher, dass ein zweiter Drucker dem Bedürfnisse der Zeit Rechnung tragend etwas hinzufügte, was er gleichviel von wem sich anfertigen liess, als dass ein erster Drucker aus dem handschriftlich Vorhandenen etwas fortgelassen hätte. Die Ausführung der Rechnungsarten hat vollends keinerlei Veränderung erhalten. Wüssten wir von keinem anderen Werke Peurbach's, so würden wir die Bewunderung, welche ihm gezollt wurde, und welche z. B. in seiner Grabinschrift[2]) ausgesprochen ist, kaum begreifen. Um so verständlicher wird uns dieselbe, wenn wir eine andere Arbeit in's Auge fassen.

Wir meinen den *Tractatus Georgii Purbachii super Propositiones*

---

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 10 sagt: In seiner ursprünglichen Gestalt enthält der Algorismus Peurbach's die folgenden mathematischen Operationen: *Numeratio*, *Additio*, *Subtractio*, *Mediatio*, *Duplatio*, *Multiplicatio*, *Divisio*, *Progressio*, mit welcher letzteren die Ausziehung der Quadratwurzel verbunden ist. Günther, Unterricht Mittela. S. 237 giebt nach einem Drucke von 1503 an, dass nach der *Radicum extractio quadrata* noch kommen: *Radicum extractio cubica*, *Regula aurea sive de tre*, *Regula societatis*, *Enigma*. [2]) Erhalten bei Weidler, *Historiae Astronomiae* pag. 300.

Ptolemaei de sinubus et chordis, der 1541 in Nürnberg gemeinschaftlich mit einer Tabelle des Regiomontanus, Peurbach's berühmtestem Schüler, gedruckt worden ist, wenn er auch eine gewisse Abhängigkeit von Johann's von Gemunden Abhandlung De arcubus et sinibus nicht verkennen lässt[1]). Bekanntlich unterscheidet sich die Trigonometrie des Ptolemäus von der arabischen Trigonometrie wesentlich dadurch, dass in ersterer Sehnentafeln, in letzterer Sinustafeln (Bd. I, S. 391 und 694) benutzt wurden. Diejenigen Astronomen, welche an Schriften beiderlei Ursprungs ihre Studien machten, waren dadurch genöthigt, mit beiden Auffassungen sich bekannt zu machen. Dass dabei die praktischen Vortheile der Sinustrigonometrie, wenn es gestattet ist diese Wortverbindung zu wagen, deutlich und deutlicher hervortraten, liegt in ihnen selbst begründet. Dass damit im Zusammenhange der Wunsch nach neuen und genauen Sinustafeln auftrat, ist leicht begreiflich, und diesen Wunsch zu befriedigen hat Peurbach zuerst in Deutschland sich zur Aufgabe gestellt. Die beabsichtigte Genauigkeit war nun in zwei Richtungen zu suchen, einmal in der Richtung, dass der Kreishalbmesser, in dessen Theilen die Sinuslinie gemessen wurde, möglich gross angenommen wurde, zweitens in der Richtung, dass die Winkel, deren Sinus unmittelbar aus der Tabelle zu entnehmen waren, in kleinstmöglichen Zwischenräumen auf einander folgten. In letzterer Beziehung hat Peurbach die Winkel von 10 zu 10 Minuten zunehmen lassen[2]). Die Länge des Halbmessers hat er mit 600000 angesetzt[3]). Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir in dieser für den *Sinus totus*, den Sinus in seiner ganzen erreichbaren Länge, d. h. eben den Halbmesser, gesetzten Zahl eine Nachwirkung der von Johann von Gemunden beliebten Vermengung sexagesimaler und decimaler Theilung, von der wir oben sprachen, erkennen. Jener hielt es für nothwendig die decimale Theilung nur als Durchgangspforte gleichsam zu behandeln und nachträglich wieder zu Sexagesimalbrüchen überzugehen. Peurbach ersparte sich die letztere Arbeit durch die Wahl von 60×10^4 als Längeneinheit. Der nächste Schritt musste den Halbmesser rein decimal theilen, und wir werden sehen, dass derselbe nicht lange mehr auf sich warten liess. Die Sinustafel, welche in der die Nummer 5277 tragenden Handschrift der wiener Bibliothek sammt Erläuterungen vorhanden ist, und in deren Beschreibung Proportionaltheile ganz wie in späterer Zeit zur

---

[1]) Curtze brieflich. [2]) Tannstetter sagt: *Nova tabula sinus de decem minutis in decem per multas millenarias partes.* Vergl. Pfleiderer, Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben (1802) S. 21 Note 6. Dieses allzuselten zu Rathe gezogene, ungemein gewissenhaft gearbeitete Buch citiren wir als Pfleiderer. [3]) Kästner I, 535.

Anwendung empfohlen sind[1]), ist nicht zum Abdrucke gelangt, wohl aber, wie wir sagten, im Jahre 1541 die einleitenden Bemerkungen, der Tractatus super Propositiones Ptolemaei u. s. w., und in ihnen[2]) giebt sich Peurbach als klardenkenden Mathematiker zu erkennen, der seinen Stoff überdies durchaus beherrscht, für welchen ihm, wie es scheint, zwei Quellen zu Gebote standen, eine der vorhandenen Uebersetzungen des ptolemäischen Almagestes, so gut oder schlecht sie war, und eine Uebersetzung von Werken eines westarabischen Astronomen Arzachel[3]). Auf ihn beruft sich Peurbach ausdrücklich bei Auseinandersetzung der Rechnung, mittels deren er die Sinusse gewisser Winkel auffindet, und welche er im Geiste Arzachels geführt[4]) nennt. Arzachel, der gegen Ende des XI. Jahrhunderts lebte, setzte die Länge des Durchmessers mit 300, die des Halbmessers mit 150 an[5]), war also auf die von uns besonders betonte Wahl von 600000 für den Halbmesser ohne jeden Einfluss. Wohl aber dürfte sonst mancherlei bei Peurbach auf ihn zurückzuführen sein. Peurbach beginnt mit der Frage nach dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser. Er weiss, dass Archimed es zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ eingeschlossen hat, dass Ptolemäus es zu $\frac{377}{120}$ annahm (Bd. I, S. 394), dass die Inder (Bd. I, S. 606) es mit $\sqrt{10}$ für einerlei erklären; wüsste also Jemand die Wurzeln solcher Zahlen zu finden, welche einer rechten Wurzel entbehren, so fände er leicht, wie viel Theile der Durchmesser im Verhältnisse zum Kreisumfange hätte[6]). Wieder Andere, fährt Peurbach fort, sagen, jenes Verhältniss sei wie 20000 zu 62832 (Bd. I, S. 604), aber streng genommen ist ein Verhältniss überhaupt nicht vorhanden, weil das Gerade und das Krumme nicht Grössen derselben Art sind; dagegen waltet zwischen ihnen eine gegenseitige Beziehung, denn der Sinus ist Sinus eines bestimmten Bogens, und der Bogen ist Bogen eines bestimmten Sinus[7]). Mit Ptolemäus stimmt Peurbach in der Berechnung der Seiten der regelmässigen Sehnenvielecke von 3, 4, 5, 6, 10 Seiten überein, mit ihm in der Benutzung des Satzes, dass der Quotient der grösseren Sehne getheilt durch die kleinere, kleiner ist als der Quotient der von den Sehnen bespannten Bögen, zur Auffindung der Sehne von 1^0.

---

[1]) Curtze brieflich. [2]) Kästner I, 540—548. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 72. [4]) *Haec de mente Arzahelis.* [5]) Kästner I, 524. [6]) *Indi vero dicunt: si quis sciret radices numerorum recta radice carentium invenire, ille faciliter inveniret quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et secundum eos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia radix de decem.* [7]) *. . . eo quod rectum et curvum non sunt eiusdem speciei. Est tamen inter eos mutua relatio, nam sinus est portionis sinus, et portio est sinus portio.*

Peurbach hat auch einen praktischen Gebrauch von seiner Sinustafel zu astronomischen sowohl als zu geodätischen Zwecken gemacht. Sie dienten ihm bei Anwendung eines von ihm erfundenen Messinstrumentes, dessen Beschreibung er einem Erzbischof Johannes von Gran (Strigonium) in Ungarn zueignete[1]). Der gewöhnliche Name jenes Messinstrumentes lautet *Quadratum geometricum*, es ist aber nicht mit jenem Quadrate zu verwechseln, dessen man sich etwa hundert Jahre früher in England (S. 112) zu ähnlichen Zwecken bediente. Jenes wurde selbst gedreht, damit man längs einer Seite desselben nach einem Punkte hinvisiren konnte. Einen solchen Gebrauch gestattet Peurbach's Vorrichtung, welche weit mehr an Gerbert's Astrolabium (Bd. I, S. 812) erinnert, schon ihrer Ausmessungen wegen nicht. Das Quadratum geometricum (Fig. 30) aus Holz oder Metall hergestellt, hatte Seiten von je zwei Ellen Länge. Zwei derselben, als *latus versum* und *latus rectum* bezeichnet, waren in je 1200 Theile getheilt, so dass jedes Theilchen etwa 1 Millimeter betrug. Die Bezeichnung 1200 befand sich an jenem Endpunkte, wo die beiden getheilten Seiten aneinander stiessen. Um den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt war ein mit zwei Diopten ausgestattetes Lineal drehbar. Die Aufstellung des Quadrates wurde durch ein Bleisenkel geregelt, welches von einem Ansatze an die senkrechte ungetheilte Quadratseite herabhing und durch einen Schlitz in einer ähnlichen Verlängerung der wagrechten ungetheilten Seite hindurch sich fortsetzte, so dass ihm etwas Spielraum gegeben war. Von einem Stative ist keine Rede. Wurde nun mit Hilfe des Diopterlineals irgend ein Punkt, Stern, Thurmspitze oder dergleichen einvisirt, so schnitt das Lineal dabei eine getheilte Seite in einem ablesbaren Punkte, z. B. im Punkte 600 des *latus rectum*. Die Länge des Diopterlineals vom Drehpunkte bis zum Schnittpunkte war dann $\sqrt{1200^2 + 600^2} = \sqrt{1800000} = 1341\frac{641}{1000}$ (sexcenta et quadraginta una millesimae fere), mit dieser Zahl ist in 600 mal 600000,

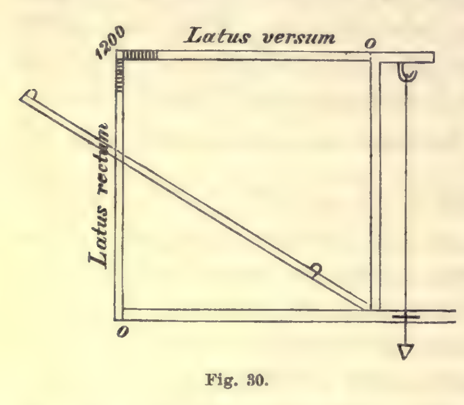


Fig. 30.

[1]) *Canones pro compositione et usu gnomonis pro Reverendissimo domino Joanne Archiepiscopo Strigon. a praeclarissimo Mathematico Georgio Burbachio* (sic!) *compositi.* Der Druck ist unter dem Namen *Quadratum Geometricum* 1516 in Nürnberg erfolgt. Dessen Beschreibung bei Kästner I, 529—540.

weil der Halbmesser als 600000 gedacht ist, zu dividiren, und das geschieht, indem dem Dividendus noch drei Nullen angefügt werden; man rechnet demnach 360000000000 : 1341641 und erhält 268328. Zu dieser Zahl gehört den Sinustafeln gemäss der Winkel von 21° 33′ 55″, und dieser Winkel entspricht also dem Theilstriche 600 auf dem latus rectum. Wir haben der Rechnung, die nahezu wörtlich aus dem Peurbachischen Texte übersetzt ist[1]), nur Weniges hinzuzufügen. Einmal dass aus den Sinustafeln, wenn sie, wie wir wenig späterem Berichte folgend annahmen, für Winkel von 10 zu 10 Minuten berechnet waren, der hier gefundene Winkel nicht unmittelbar hat entnommen werden können. Peurbach muss sich also dazu eines Interpolationsverfahrens bedient haben, welches er uns hier nicht näher beschreibt (S. 182). Zweitens ersetzt die angestellte etwas umständliche Rechnung den Mangel einer Tangententafel, denn es handelt sich in der angeführten Aufgabe doch eigentlich um nichts anderes als um Auffindung des Winkels, dessen Tangente $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ ist. Die von Peurbach berechnete Hilfstafel zum Quadratum geometricum ist also streng genommen eine Tafel vom Argustangens k, wo k durch alle Zwölfhundertstel hindurchgehend die Werthe von $\frac{1}{1200}$ bis 1 annimmt.

Peurbach's rein astronomische Schriften entziehen sich selbstverständlich wieder unserer Betrachtung. Nur von einer Aufgabe haben wir noch ein Wort hier zu reden, welche Peurbach sich stellte, welche für ihn eine Lebensaufgabe sein sollte, aber in deren Erfüllung er durch den Tod unterbrochen wurde. Es war die Anfertigung einer guten lateinischen Uebersetzung des ptolemäischen Almagestes aus dem griechischen Urtexte. Wie und durch wen Peurbach zu dieser Arbeit ermuntert wurde, mag da ausführlicher zur Sprache kommen, wo der Veranlasser der Arbeit, Bessarion, uns beschäftigen wird.

Im Anschlusse an die trigonometrischen Leistungen Peurbach's sei hier aus einer Münchner Handschrift von 1446 eine geographische Abhandlung erwähnt, in welcher die decimale Theilung der Winkelgrade durchgeführt ist[2]).

---

[1]) Kästner I, 535. [2]) Codex latinus Monacensis 11067 (Pass. 67). Blatt 174^r—176^r: *Et notandum quod in praesenti tabula quilibet gradus et hora dividitur in 100 minuta, et quodlibet minutum in 100 secunda et sic de aliis.* Vergl. *Petri Philomeni de Dacia in Algorism. vulgar. Ioh. de Sacrobosco Comment.* edid. M. Curtze, pag. VIII in der Note.

51. Kapitel.

Nicolaus Cusanus.

Der nächste deutsche Mathematiker, dem wir uns zuwenden, war kein Universitätslehrer. Cardinal Nicolaus von Cusa[1]) oder Cusanus hat überhaupt unserer Wissenschaft nur als ganz beiläufiger Nebenbeschäftigung gehuldigt; um so bemerkenswerther sind seine Leistungen. Cusanus war als Sohn eines Fischers Johannes Chryppfs (Krebs) 1401 in dem Dorfe Cues am linken Moselufer geboren. Dem elterlichen Hause entlaufen wuchs Nicolaus im Dienste des Grafen von Manderscheid auf. Wissenschaftliche Vorbildung erhielt er auf der Schule zu Deventer. Schon 1416 vor Johanni wurde er als Nicolaus Cancer de Coesze clericus Trever. dyoc. in das Matrikelbuch der Universität Heidelberg eingetragen[2]). Später widmete er in Padua sich der Rechtsgelehrsamkeit. Dort war er Mitschüler des späteren geographischen Schriftstellers Paolo Toscanelli, dessen Name in der Geschichte der Entdeckung von Amerika genannt wird, der auch der Astronomie Dienste erwies, indem er auf Fehler in den Alfonsinischen Tafeln aufmerksam machte. Vielleicht waren beide, Cusanus und Toscanelli, unter den Zuhörern des Prodocimo de' Beldomandi, mit welchem das 52. Kapitel uns bekannt machen wird. Wenigstens war zeitlich die Möglichkeit solcher Beziehungen geboten, da Beldomandi 1422 als Professor der Astronomie in Padua angestellt wurde, und Cusanus diese Universität 1424 nach Erlangung der juristischen Doctorwürde verliess. Er verlor in Mainz seinen ersten Process und wandte sich dann vollständig der Theologie zu. An den Kirchenstreitigkeiten, welche fast während des ganzen Lebens des Cusanus dauerten, betheiligte er sich in hervorragendem Maasse, zuerst auf dem Basler Concile von 1432—1437 als berufenes Mitglied, später als päpstlicher Legat, seit December 1448 mit dem Titel Cardinal, zu welchem im März 1450 die Verleihung des Bisthums Brixen hinzukam. An diese letztere Verleihung knüpften sich persönliche Streitigkeiten für den Cardinal, welche nur mit seinem am 11. August 1464 in Todi in Umbrien erfolgenden Tode ein Ende

---

[1]) Biographisches vergl. in der Allg. deutschen Biographie IV, 655—662, einen alle vorhandenen Lebensbeschreibungen benutzenden Artikel von Prantl. Nur den Aufenthalt in Heidelberg konnte er nicht kennen, da damals (1876) das Heidelberger Matrikelbuch noch nicht veröffentlicht war. [2]) Töpke, Die Matrikel der Universität Heidelberg von 1386 bis 1662 (1884—1886) I, 128 Z. 4 v. u.

nahmen, und welche einen ziemlich langen Aufenthalt in Italien veranlassten, bei welcher Gelegenheit er, wie (S. 180) erwähnt worden ist, mit Georg von Peurbach persönlich bekannt wurde und zu demselben in wissenschaftliche Beziehungen trat, welche durch Schriftenübersendung sich äusserten. Die Werke des Cardinals Ecusa, wie er gleichfalls oft genannt wird, sind ziemlich vielseitig. Welche Quellen ihm zur Verfügung standen, kann noch heute aus seiner in Cues aufbewahrten Bibliothek ersehen werden. Theologisches, Staatsrechtliches, Philosophisches wechselt in ziemlich buntem Gemenge, und die überall durchblickende mystisch-scholastische Färbung gehört nicht minder ihm selbst als der Zeit an, in welcher er lebte und schrieb. Uns beschäftigen diese philosophischen Gedanken nur so weit sie mathematische Folgerungen erzeugten. Die sonstigen Schriften übergehen wir vollständig mit Einschluss eines Gesprächs über Versuche mit der Wage, welches der Geschichte der Physik angehört. Die Gesammtwerke wurden im XV. Jahrhunderte in Paris dem Drucke übergeben. Eine zweite Ausgabe, welche auch mit Anmerkungen eines gewissen Omnisanctus (?) versehen ist, erschien in Basel 1565. Wir folgen der letzteren Ausgabe[1]).

Die ersten mathematischen, oder richtiger gesagt chronologisch-astronomischen Arbeiten des Cusanus sind seine Vorschläge zur Kalenderverbesserung und zur Verbesserung der Alfonsinischen Tafeln, welche zusammengehören, und mit welchen er 1436 den Versuch machte, das Basler Concil zu einer Beschlussfassung über den Gegenstand zu veranlassen, dessen Wichtigkeit fortwährend in der religiösen Unsicherheit gefunden wurde, welche bald einen Fasttag halten liess, wo kein solcher geboten war, bald auch, und darin lag die Gefahr, Fleischgenuss an Tagen gestattete, die von Rechtswegen durch Fasten begangen werden mussten[2]). Das von Cusanus vorgeschlagene Heilmittel bestand in der Weglassung von 7 Tagen in der Weise, dass im Jahre 1439 Pfingstsonntag noch am 24. Mai gefeiert werden solle, wie die vorhandenen Kalender es wünschten. Dann aber solle man den Pfingstmontag mit der Bezeichnung des 1. Juni versehen und künftig regelmässig alle 304 Jahre

[1]) Einzeluntersuchungen über die mathematisch-astronomischen Leistungen des Cusanus hat Dr. Schanz in Programmbeilagen des Gymnasiums zu Rottweil für die Jahrgänge 1871—1872 und 1872—1873 veröffentlicht: I. Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker. II. Die astronomischen Anschauungen des Nicolaus von Cusa und seiner Zeit. Wir citiren sie als Schanz I und Schanz II. Die Basler Ausgabe (1565) der Werke des Cusanus citiren wir als Cusani Opera. [2]) Schanz II, 17—31. Cusani *Opera* pag. 1155—1167: *Reparatio Calendarii* und pag. 1168—1173: *Correctio Tabularum Alphonsi.*

ein Schaltjahr wegfallen lassen, so werde die Fehlerquelle versiegen, die darin liege, dass im julianischen Jahre mit in vierjähriger Regelmässigkeit eingeschobenem Schalttage die Jahreslänge genau zu $365\frac{1}{4}$ Tagen und damit um ein Geringes zu gross angenommen sei. Das Basler Concil spaltete sich am 7. Mai 1437. Cusanus gehörte zu der Minderheit, welche austrat und sofort mit Entschiedenheit auf die Seite des Papstes sich stellte. Von einer Beschlussfassung über Kalenderfragen war keine Rede mehr.

Ausführlicher müssen diejenigen Schriften uns beschäftigen, welche als philosophisch-mathematische zu bezeichnen sind, und welche den Jahren nach 1450 angehören, wenn auch der philosophische Grundgedanke schon in einem Werke enthalten ist, welches zwischen December 1439 und Februar 1440 theils in einem Kloster in der Eifel, theils in Cues, dem Heimathsorte des Verfassers, niedergeschrieben ist, und welches den Titel De docta ignorantia[1]) führt. Die gelehrte Unwissenheit ist ein innerer Widerspruch, welchen der Verfasser folgendermassen rechtfertigt. Erkenntniss findet statt, wenn man das Verhältniss des Erforschten zu allem, was da ist, zum Bewusstsein gebracht hat. Es sind folglich, entsprechend den unendlich vielen Vergleichungsgegenständen, unendlich viele Vergleichungen anzustellen, und solches ist dem menschlichen Geiste unmöglich. Darum habe schon Sokrates sich dahin ausgesprochen, er wisse nichts als die Thatsache seiner Unwissenheit, und ihm darin nachzufolgen reizt uns der bei alledem in uns gelegte Erkenntnisstrieb. Kommen wir über unser Nichtwissen ins Klare, so dürfen wir von einer gelehrten Unwissenheit reden.

Wir haben zu dieser Erörterung des Cusanus noch einen kleinen, aber nicht unwichtigen Zusatz zu machen. Bei jedem anderen Schriftsteller wäre man versucht, in dem so erklärten Titel eine Absicht in sofern zu erkennen, als solle der Leser durch eine anspruchsvolle Ueberschrift angeregt werden, sich in die Schrift zu vertiefen. Bei Cusanus war es wohl mehr als das, was ihn beeinflusste. Allerdings wählte er absichtlich den sich selbst widersprechenden Titel, aber, wie wir vermuthen möchten, desshalb, weil Vereinigung der Gegensätze für ihn die Grundlage des Wissens ist. Später nennt er eine jede derartige Vereinigung die Kunst der Coincidenzen[2]) und behauptet, mittels ihrer sei das Eindringen in das Verborgene möglich. Die gelehrte Unwissenheit selbst baut auf der Grundlage

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 1—62. [2]) Ebenda pag. 1095 in der Abhandlung *De sinibus et chordis*: .... *ut videatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur.*

solcher Coincidenzen sich auf. Jede Untersuchung, sagten wir schon, geht von Vergleichungen aus. Die Vergleichung führt zur Zahl, und das habe Pythagoras wohl im Auge gehabt, als er das Urtheil abgab, Alles bestehe und Alles werde begriffen durch die Kraft der Zahlen.

Vom Grösseren und Kleineren, welches bei der Vergleichung auftritt, steigt man auf zum Grössten und zum Kleinsten. Das Grösste ist dasjenige, über welches hinaus ein Grösseres nicht gedacht werden kann, und ebensowenig kann es selbst als kleiner gedacht werden, weil es alles ist, was es sein kann. Aber auch das Kleinste ist ein Solches, über welches hinaus Kleineres nicht sein kann, und weil das Grösste von gleicher Art ist, findet zwischen dem Kleinsten und dem Grössten Coincidenz statt [1]. Die Zahl gestattet freilich ein Aufwärtssteigen zu einer thatsächlich grössten, aber weil sie eine begrenzte Zahl bleibt, ist sie nicht zu dem absolut Grössten, über welches hinaus ein Grösseres nicht sein kann, geworden, denn dieses ist unbegrenzt [2].

Das ist gleichfalls ein Gedanke, den Cusanus nie verleugnet hat. In einer seiner spätesten Schriften kommt er auf ihn mit den Worten zurück [3]: Wenn wir 10 vergangene Sonnenläufe und 100 und 1000 und alle zählen können, und es sagt Einer, alle seien durch eine Zahl nicht angebbar, sondern es seien unendlich viele Umläufe vorangegangen, so ist das, als wenn er sagte, im nächsten Jahre werde wieder ein Umlauf vollendet, und dann seien es unendlich viele und eins, was unmöglich ist.

Wirklich unendlich ist nur Gott, aber man kann auch mit mathematischen Versinnlichungen dem Unendlichen beizukommen suchen. Die unendliche Grade ist zugleich auch Dreieck und Kreis [4]. Wie diese Coincidenzen gemeint seien, wird sodann näher erörtert. Der Kreis besitzt Krümmung und ist länger als sein Durchmesser. Je

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 3 in der *Docta ignorantia* Lib. I, cap. 4: *Maximum sicut non potest maius esse, eadem ratione nec minus, quum sit omne id quod esse potest. Minimum autem est, quo minus esse non potest. Et quoniam maximum est huius modi, manifestum est minimum maximo concidere.* [2]) Ebenda pag. 4 (*Docta ignor.* Lib. I, cap. 5): *Si ascendendo in numeris devenitur actu ad maximum, quoniam finitus est numerus, non devenitur tamen ad maximum, quo maior esse non possit, quoniam hic esset infinitus.* [3]) Ebenda pag. 1113 (*Complementum theologicum* cap. 8): *Si enim numerare possumus decem revolutiones praeteritas, et centum, et mille, et omnes: si quis dixerit, non omnes esse numerabiles, sed praeteriisse infinitas, et dixerit unam futurum revolutionem in futuro anno, essent igitur tunc infinitae et una, quod est impossibile.* [4]) Ebenda pag. 9 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 13): *Si esset linea infinita, illa esset recta, illa esset triangulus, illa esset circulus.*

grösser der Durchmesser wird, um so kleiner wird die Krümmung. Die Kreislinie grössten Durchmessers ist selbst grösste Kreislinie, also von kleinster Krümmung, also von grösster Geradheit, wodurch Coincidenz des Grössten mit dem Kleinsten hergestellt ist. Mit dem Dreiecke verhält es sich folgendermassen. Zwei Dreiecksseiten zusammen sind immer grösser als die dritte. Ist also eine Seite unendlich gross, so müssen es die beiden anderen auch sein. Weil ferner zwei Unendlichkeiten nicht stattfinden können[1]), so kann das unendliche Dreieck aus mehreren Linien nicht zusammengesetzt sein. Als Dreieck muss es aber drei Seiten besitzen, folglich ist die eine unendliche Gerade eine Dreiheit von Geraden, und die drei Geraden fallen in eine zusammen. Ebenso schliesse man für die Winkel. Jedes Dreieck habe drei Winkel, die zusammen zwei Rechte betragen. Wird ein Winkel zu zwei Rechten, so gehen in ihm alle drei Winkel auf, und die Gerade ist alsdann Dreieck. So ist das einfach Grösste die grösste Länge, welche wir Wesenheit nennen können, und Dreieck, wesshalb es Dreifaltigkeit genannt werden kann, und Kreis, wesshalb es Einheit heisst[2]). Hier beginnt der mathematische Faden in ein theologisch - philosophisches Gespinnst überzugehen und reisst schliesslich ab. Die Geschichte der Astronomie hat dem zweiten Buche der gleichen Schrift werthvolle Gedanken zu entnehmen, welche Cusanus einen Platz in der Entwickelung der Kenntnisse von der Erdbewegung, von den Sonnenflecken, von der Natur der Sonne sichern. Uns ist es gestattet, an diesem zweiten Buche und noch rascher an dem dritten vorüberzugehen.

Wir gelangen zu einer anderen philosophischen Schrift, welche den eigenthümlichen Titel De Beryllo[3]) führt. Der Beryll, so sagt der Verfasser, ist ein heller, weisser, durchsichtiger Stein, dem sowohl eine concave als eine convexe Gestalt beigelegt wird, und wer durch ihn hindurchsieht, erkennt vorher Unsichtbares. Unterbrechen wir unseren Bericht mit der beiläufigen Bemerkung, dass die genannte Eigenschaft des Berylls seit geraumer Zeit bereits bekannt war und der daraus hergestellten Sehvorrichtung den Namen der Brille verschafft hat. Bei den Italienern hiessen übrigens die Brillen *occhiali*; ihre Erfindung geht vermuthlich auf den 1317 gestorbenen Florentiner Salvino degli Armati zurück[4]). Wir kehren zu Cusanus zurück. Wird dem geistigen Auge, fährt er fort, ein geistiger Beryll — sagen wir nur gradezu eine geistige Brille — vorgesetzt, die ebensowohl

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 10 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 14): *quoniam plura esse infinita non possunt.* [2]) Ebenda pag. 14 (*Docta ignor.* Liber I, cap. 19). [3]) Ebenda pag. 267—284. [4]) Heller, Geschichte der Physik I, 201.

die Gestalt des Grössten als die des Kleinsten besitzt, so erkennt man den unsichtbaren Ursprung aller Dinge. Man sieht hieraus, dass Cusanus in der genannten Abhandlung es wieder mit der Coincidenz der Gegensätze zu thun hat, und zwar derselben Gegensätze des Grössten und Kleinsten, von denen in dem ersten Buche der gelehrten Unwissenheit die Rede war. War aber dort vorzugsweise das Grösste betrachtet worden, so wendet Cusanus im Berylle sein Augenmerk ausschliesslich dem Kleinsten zu. Der Punkt, sagt er, ist untheilbar, aber von übertragbarer Untheilbarkeit[1]). Er ist untheilbar nach jeder Art des stetigen Seins und der Ausdehnung. Die Arten des Seins für das Stetige sind die Linie, die Oberfläche, der Körper. Es nimmt die Linie Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, insofern sie nichtlinienhaft untheilbar ist, d. h. sie kann nicht in Stücke zerlegt werden, die nicht Linien sind, und sie ist nach Breite und Dicke untheilbar. Die Oberfläche nimmt Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, weil sie unoberflächenhaft untheilbar ist; der Dicke nach lässt sie keine Theilung zu, weil sie eben kein Körper ist. Der Körper endlich nimmt Theil an der Untheilbarkeit des Punktes, insofern er in Nichtkörper nicht zerlegt werden kann, der Dicke nach ist er theilbar. In der Untheilbarkeit des Punktes sind also alle jene anderen Untheilbarkeiten mit inbegriffen, und in ihnen wird nichts gefunden als die Entfaltung der Untheilbarkeit des Punktes. Alles was im Körper gefunden wird, ist folglich nichts anderes als der Punkt oder ihm einzig Aehnliches[2]). Und ein Punkt losgelöst vom Körper, oder der Oberfläche, oder der Linie wird nicht gefunden, weil er das innere Princip ist, welches die Untheilbarkeit verleiht.

Bei diesen Stellen erwacht von selbst die Erinnerung an Bradwardinus (S. 119), der dem Punkte die Eigenschaft beilegte, die Untheilbarkeit an einen bestimmten Ort zu binden, und der jede Wissenschaft wahr nannte, in welcher die Voraussetzung nicht gemacht werde, Stetiges setze sich aus Untheilbarem zusammen, der auch das Unendlichgrosse in das Bereich seiner Betrachtungen zog. Von selbst gedenken wir jenes Walther, jenes Heinrich, mit denen Bradwardinus sich auseinandersetzte. Der alte Streit über das Stetige, welcher wohl in dem Jahrhunderte, das zwischen Bradwardinus und Cusanus liegt, auch nicht vollständigem Frieden Platz gemacht hat, wenn er auch mehr ein chemisch-physikalischer zu werden den Anschein gewinnt, findet in Cusanus einen neuen Kämpfer. Wir wissen von ihm

[1]) Cusani, *Opera* pag. 271 (*De Beryllo* cap. 17): *punctum autem communicabilis indivisibilitas.* [2]) *Omni igitur quod reperitur in corpore, non est nisi punctum seu similitudo ipsius unius.*

selbst, dass er es liebte, Klosterbibliotheken zu durchstöbern. An einem oder dem anderen Orte, wo er seine Bildung gewann, fand er vielleicht auch Zeit und Gelegenheit, eine Vorlesung über die Latitudines formarum zu hören. So mag ihm die Streitfrage, mögen ihm die älteren Kampfmittel bekannt geworden sein, mag er der Auffassung von der Zusammensetzung räumlicher Gebilde aus ihnen ähnlich gearteten Elementen, um nicht zu sagen aus Differentialen, sich mehr angeschlossen haben, als dass er sie erfand. Seine Verdienste werden durch diese Annahme keineswegs geschmälert. Es erklärt sich nur, wie Cusanus dazu kam, seinen Coincidenzen so grosses Gewicht beizulegen. Es bestätigt sich nur die Wahrheit dessen, was wir früher andeuteten, dass die Unendlichkeitsfragen nicht wieder zur Ruhe kamen. Noch an ein Anderes, begrifflich einigermassen verwandt, müssen wir bei dieser Rückschau nach den Quellen der Ansichten des Cusanus erinnern. Campanus hat einen geometrisch-philosophischen Satz an einer Stelle ausgesprochen, an einer zweiten Stelle bekämpft, den Satz, dass bei stetigen Grössen irgend einmal Zwischenzustände eintreten müssen, die ein vorgelegtes Verhältniss erfüllen (S. 104). Albert von Sachsen hat (S. 144) des gleichen Satzes sich bedient. Wir werden auch an ihn genug Anklänge finden, sobald wir die im eigentlichen Wortsinne mathematischen Schriften des Cusanus durchmustern, wozu wir uns jetzt anschicken.

Es war eine einzige Aufgabe, welche Cusanus sich gestellt hat, welcher er etwa seit 1450 bis 1460, also zehn Jahre hindurch, in verschiedenen Abhandlungen sein fast ausschliessliches Nachdenken widmete, aber freilich eine Aufgabe schwierigster Art: die der Arcufication einer Geraden. Albert von Sachsen, sagten wir früher (S. 145), und mit ihm fast (S. 127 und 154) das ganze Mittelalter, hielten $\pi = 3\frac{1}{7}$ nicht etwa für einen Näherungswerth, sondern für genau richtig. Von dieser Meinung zurückzukommen war schon ein Fortschritt, und Cusanus machte denselben. Erleichtert war er ihm allerdings durch den Umstand, dass, wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, wo wir der italienischen Mathematik der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts uns zuwenden wollen, grade damals eine Uebersetzung des Archimed in lateinischer Sprache verfasst und Cusanus in die Hände gegeben worden war. So musste er die beiden Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{11}$ kennen lernen, zwischen denen π sich befindet, so musste er zugleich die genaue Bestimmung von π als eine noch nicht gelöste Aufgabe erkennen. Er versuchte ihre Behandlung im Sinne der Arcufication, d. h. er ging aus von einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke als einfachstem regelmässigen Viel-

ecke, er ging dann über zu ihm umfanggleichen regelmässigen Vielecken von grösserer Seitenzahl, bis er zur Kreislinie von gleicher Länge gelangte, deren Halbmesser gesucht wurde. Fand man diesen, so war in der That die Länge des Dreiecksumfangs in eine Kreislinie verwandelt. Zur Kreislinie konnte er aber auf solche Weise gelangen, weil er sie als Unendlichvieleck betrachtete, wie er an vielen Stellen es ausgesprochen hat[1]). Das war also eine neue Fragestellung verschieden von der archimedischen, verschieden von der im Abendlande überhaupt bisher eingebürgerten, und ob die indischen Versuche (Bd I, S. 606) zu des Cusanus Kenntniss gelangt sein können, ist uns mehr als zweifelhaft, wenngleich Georg von Peurbach (S. 183) den indischen Werth $\pi = \sqrt{10}$ kannte. Ein Werth von π kann leicht weitere Verbreitung gefunden haben, ohne dass die Auffassung, mittels deren man zu ihm gelangte, sich mit verbreitet hätte. Eine neue Fragestellung ersinnen hat aber stets als fruchtbares Förderungsmittel der Mathematik sich erwiesen, und dieses Verdienst muss mithin Cusanus in erster Linie angerechnet werden.

Dass bei neuer Fragestellung die Merkmale, welche die Richtigkeit des Verfahrens bekunden sollen, um so leichter versagen, je neuer das Verfahren selbst gleichfalls ist, darf nicht Wunder nehmen. Grade die Geschichte der Entwicklung der Stetigkeitsbetrachtungen, und um diese handelt es sich, zeigt auf's deutlichste, dass jeder Schritt vorwärts von Fehlschritten begleitet war, die kaum Einem erspart blieben. Auch Cusanus stellt keine Ausnahme von dieser Regel uns dar. Sein rasch aufwallender Geist liess ihn Schlüsse für vollwichtig halten, denen er bald selbst als allzu leicht gezogenen misstraute, und es ist geradezu kennzeichnend, dass er, nachdem er in einer Abhandlung die Aufgabe gelöst haben will, sofort einer neuen Lösung eine neue Abhandlung widmet, und dass in den späteren Schriften, trotz der dem Gelingen näheren Versuche, die Sprache eine immer vorsichtigere wird.

Die Ueberschrift der ersten Abhandlung lautet: De transformationibus geometricis. Sie trägt die Widmung: ad Paulum magistri dominici Physicum Florentinum, d. h. an den Florentiner Arzt Paulus den Sohn des Magister Dominicus, worunter der frühere

---

[1]) Am deutlichsten in der Stelle Cusani *Opera* pag. 1110 (*Complementum theologicum* cap. 5): *Quanto autem polygonia aequalium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior circulo; circulus enim si ad polygonias attendas est infinitorum angulorum. Et si ad ipsum circulum tantum respicis nullum angulum in eo reperies, et est interminatus, inangularis: et ita circulus inangularis et interminatus in se complicat omnes angulares terminationes, polygonias datas et dabiles.*

Studiengenosse von Cusanus in Padua Paolo Toscanelli[1]) verstanden ist. Es handle sich, sagt der Verfasser in der Zueignung, um die Verwandlung von Krummem in Gerades und von Geradem in Krummes. Ein rationales Verhältniss sei zwischen beiden nicht möglich. Das Geheimniss müsse in einer gewissen Coincidenz der Extreme verborgen liegen. Die Coincidenz beziehe sich auf das Grösste, das sei eben der unbekannte Kreis, müsse also an dem Kleinsten, welches das Dreieck ist, aufgesucht werden. Cusanus denkt bei diesen Worten offenbar an die Eckenzahl beider Figuren. Drei ist die kleinste, unendlich gross die grösste Zahl der Ecken, mit denen ein Vieleck überhaupt möglich ist. Ist (Figur 31) bcd das gegebene Dreieck, so ist af der Halbmesser des Innenkreises, ab der des Umkreises, die beide dem Dreiecke nicht umfanggleich sein können, da man weiss, dass der Umfang des Innenkreises stets kleiner, der des Umkreises stets grösser ist als der irgend eines regelmässigen Vielecks, zu welchem der betreffende Kreis gehört, und dass der jedesmalige Unterschied der Umfänge der Kreise einerseits, des Vielecks andrerseits beim Dreieck am grössten ist. Der gesuchte Kreis muss folglich einen Halbmesser haben, der grösser als af, kleiner als ab ist.

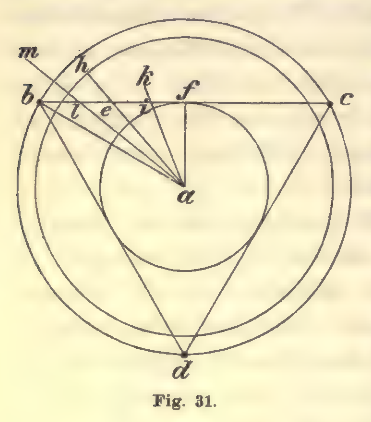


Fig. 31.

Nun wird fb in vier gleiche Stücke zerlegt und die Theilpunkte i, e, l werden gradlinig mit a verbunden, diese Verbindungsgeraden ai, ae, al aber um ik, eh, lm verlängert, so dass die Verlängerte zur Verlängerung sich verhalte wie die bc zur Entfernung von f bis zu dem betreffenden Theilpunkte. Man macht daher $ik = \frac{1}{8} ai$, $eh = \frac{1}{4} ae$, $lm = \frac{3}{8} al$. Nun ist aber i dem Punkte f, l dem Punkte b allzunahe, als dass ak oder am der gesuchte Halbmesser sein könnte, folglich ist ah richtig. Die Mangelhaftigkeit der Schlüsse ist so augenscheinlich, dass es verwundern muss, wie wenig mangelhaft das Ergebniss ausfällt. Sei $bc = 8$, so ist der Dreiecksumfang 24 und dieser getheilt durch $2ah$ giebt π, oder $\pi = \frac{12}{ah}$. Ferner ist

$$af = \frac{1}{2} ab, \quad bf = 4, \quad 3af^2 = 16, \quad af = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad ae^2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3},$$

$$ae = \frac{1}{3}\sqrt{84}, \quad ah = \frac{5}{4} ae = \frac{5}{12}\sqrt{84},$$

---

[1]) Ueber Toscanelli's Familienverhältnisse vergl. Gust. Uzielli im *Bulletino Boncompagni* XVI, 611—618.

und folglich

$$\pi = \frac{144}{5\sqrt{84}} = \sqrt{9 \cdot 87428571428571 \cdots} = 3{,}142337 \cdots,$$

während

$$3\frac{1}{7} = 3{,}142857 \cdots \text{ und } 3\frac{10}{71} = 3{,}140845 \cdots.$$

Der Werth von π, dem die Construction von Cusanus entspricht, ist also dem richtigen Werthe um 0,00052 näher als das archimedische $3\frac{1}{7}$.

In diesem Arcuficationsversuche redet Cusanus von der Coincidenz, benutzt sie aber streng genommen nicht. Desto mehr hat er dieses in anderen Schriften gethan, welche die Titel führen: De mathematicis complementis (Papst Nicolaus V. zugeeignet), De quadratura circuli (Georg von Peurbach gewidmet), De una recti curvique mensura und De mathematica perfectione. Ihnen allen ist ein Gedanke gemeinsam, nämlich folgender. In jedem regelmässigen Vielecke giebt es eine Primlinie und eine Secundlinie, *linea prima* und *linea secunda*. Die erstere ist der Halbmesser des Innenkreises, die zweite der des Umkreises, und bezeichnen wir diese Längen durch p und s, welchen als Stellenzeiger die Seitenzahl n des Vielecks beigegeben werden mag, so ist immer $s_n > p_n$, und der Unterschied $s_n - p_n$ ist das, was die Sagitta genannt wird, d. h. die Mittelsenkrechte einer Vielecksseite in ihrer Ausdehnung von der Vielecksseite an bis zum Durchschnitte mit dem Umkreise. Diese Sagitta ist beim Dreieck ($n = 3$) am grössten, beim Kreise als Unendlichvieleck wird sie Null, und Prim- und Secundlinie fallen bei ihm zusammen. Werden umfanggleiche Vielecke mit einander verglichen, so ist $p_n - p_3$ um so grösser, je kleiner $s_n - p_n$ ist. Mithin ist der grösste Werth von $p_n - p_3$ bei $n = \infty$, d. h. beim Kreise, dessen Sagitta verschwindet, erreicht. Die Primlinien sind aber den Flächeninhalten der Vielecke selbst proportional, und somit übertrifft der Inhalt des Kreises den des umfanggleichen Dreiecks am meisten. Da gleichzeitig, wie wir sahen, die Dreieckssagitta $s_3 - p_3$ die grösstmögliche ist, so wird angenommen, der Unterschied der Kreisfläche über die Dreiecksfläche sei dieser Sagitta proportional. Heisst der Proportionalitätsfactor λ, so schreibt sich diese Annahme:

$$\text{Kreisfläche} - \text{Dreiecksfläche} = \lambda(s_3 - p_3).$$

Es war aber daneben auch $s_\infty - p_\infty = 0$, also ebenfalls

$$\text{Kreisfläche} - \text{Kreisfläche} = 0 = \lambda(s_\infty - p_\infty).$$

Jetzt wird das Princip der Conincidenz zu Hilfe gezogen: was für das Vieleck von der geringsten Seitenzahl 3 und von der grössten Seitenzahl ∞ wahr ist, muss bei jeder Seitenzahl wahr sein. Also muss sein:

$$\text{Kreisfläche} - m\text{-ecksfläche} = \lambda(s_m - p_m),$$
$$\text{Kreisfläche} - n\text{-ecksfläche} = \lambda(s_n - p_n).$$

Bei der Division dieser Gleichungen durch einander fällt dann der unbekannte Proportionalitätsfactor λ heraus, und es entsteht

$$\frac{\text{Kreisfläche} - m\text{-ecksfläche}}{\text{Kreisfläche} - n\text{-ecksfläche}} = \frac{s_m - p_m}{s_n - p_n}.$$

Aber auch diesem ersten Ergebnisse kann man eine wesentlich vortheilhaftere Gestalt geben. Der gemeinschaftliche Umfang aller untersuchten Figuren sei U, und r heisse der Halbmesser des umfanggleichen Kreises, so erkennt man sofort die Richtigkeit der drei Flächenformeln:

$$\text{Kreisfläche} = \frac{1}{2} U \cdot r,$$
$$m\text{-ecksfläche} = \frac{1}{2} U \cdot p_m,$$
$$n\text{-ecksfläche} = \frac{1}{2} U \cdot p_n.$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein und kürzt den Bruch links durch $\frac{1}{2} U$, so entsteht

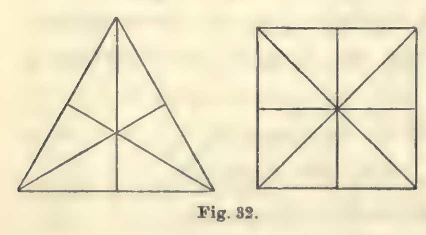
$$\frac{r - p_m}{r - p_n} = \frac{s_m - p_m}{s_n - p_n},$$

und folglich

$$r = \frac{p_n s_m - p_m s_n}{(s_m - p_m) - (s_n - p_n)} = \frac{p_n(s_m - s_n) + s_n(p_n - p_m)}{(s_m - p_m) - (s_n - p_n)}.$$

Wir machen dabei die unter allen Umständen gestattete Annahme, dass $m < n$, damit in dem Werthe von r der Zähler sowohl als der Nenner positiv ausfällt.

Natürlich ist bei Cusanus die Schlussfolge nicht so sehr, wie es hier geschah, unserem heutigen Gedankengange nach Form und Inhalt angepasst, aber der Hauptsache nach darf unser Bericht auf die Bezeichnung als treu Anspruch erheben, und insbesondere geht aus demselben hervor, worin die Mangelhaftigkeit des Verfahrens besteht, nämlich darin, dass der Proportionalitätsfactor λ als ein und derselbe in den beiden auf das m-eck und n-eck bezüglichen Gleichungen, in welchen er vorkommt, betrachtet wird, was nur sehr näherungsweise der Fall ist, wenn m und n wenig von einander verschiedene nicht allzukleine Zahlen sind.


Fig. 32.

Gesetzt es sei $m = 3$, $n = 4$ und der gemeinsame Umfang

$U = 12$, so ist (Figur 32) die Länge der Dreiecksseite 4, die der Vierecksseite 3. Man erkennt leicht, dass alsdann

$$p_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad s_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad p_4 = \frac{3}{2}, \quad s_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

und

$$r = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\right)}.$$

Da aber auch der Umfang $12 = 2\pi r$, so wird

$$\pi = \frac{6}{r} = 4 + \sqrt{8} - \sqrt{13,5} = 3,15419 \cdots$$

gefunden. Dagegen soll $m = 24$, $n = 48$ der Genauigkeit auf 4 Decimalen genügen und $\pi = 3,1415 \cdots$ liefern. Ueber die erstbesprochene Annahme $m = 3$, $n = 4$ hat Cusanus eine sehr einfache Construction des Halbmessers des gesuchten, dem gegebenen Dreiecke wie dem gegebenen Quadrate umfanggleichen Kreises gelehrt[1]). Ueber $af = p_3$ wird (Figur 33) das Quadrat $acef$, über ce das Quadrat $cbde$ gezeichnet, so dass $ab = 2p_3 = s_3$ ist. Von f aus wird gegen a hin $fl = s_4 - p_4$ abgeschnitten und in l eine Senkrechte $lm = p_4$ errichtet. Die Gerade cm schneidet alsdann df in h und $fh = r$ ist der gesuchte Halbmesser. Bezeichnet man (was in der Druckausgabe des Cusanus nicht der Fall) den Durchschnittspunkt der lm mit der ce durch t, so ist

Fig. 33.

$$eh : mt = ec : tc \quad \text{oder} \quad eh = \frac{mt \times ec}{tc} = \frac{(ml - tl)ec}{ec - et} = \frac{(p_4 - p_3)p_3}{p_3 - (s_4 - p_4)}.$$

Addirt man dazu $ef = p_3$, so entsteht

$$fh = \frac{2p_3 p_4 - p_3 s_4}{p_3 - (s_4 - p_4)}.$$

Aber $s_3 = 2p_3$, $p_3 = s_3 - p_3$ und diese Werthe liefern in den für fh gefundenen Ausdruck eingesetzt $\frac{s_3 p_4 - p_3 s_4}{(s_3 - p_3) - (s_4 - p_4)}$, d. h. den Werth von r. Es kann wohl nicht zweifelhaft sein, dass Cusanus, wiewohl er einen Beweis nicht liefert, diese Schlüsse etwa gezogen haben muss, die auf den euklidischen Elementen beruhend, welche er oft anführt, ihm nahe lagen, während nicht anzunehmen ist, dass er eine so einfache Construction erfunden haben sollte, ohne sich bewusst zu sein, dass sie mit seiner Formel in Uebereinstimmung war.

Auch eine eigentliche Quadratur des Kreises mit Hilfe von

[1]) Cusani *Opera* pag. 1014.

Mondchen wird zugesagt[1]). Das Wort lunula, sowie die Bemerkung, die Alten hätten diesen Weg vergebens einzuschlagen versucht, erinnern an die Mondchen des Hippokrates (Bd. I, S. 192—194), allein diese Erinnerung bleibt nicht bestehen, wenn man näher zusieht. Ein Mondchen, d. h. ein durch zwei Kreisbögen begrenztes Flächenstück, benutzt Cusanus überhaupt nicht. Was er so nennt, ist ein Kreisabschnitt. Er zeichnet zu dem Kreise vom Halbmesser 7 die Seiten des Sehnen- und des Tangentenquadrates. Das erstere besitzt die Fläche 98, das zweite die Fläche 196. Nun wählt Cusanus — warum, ist auch nicht leise angedeutet — ein Quadrat von der Fläche 121, bildet $121 - 98 = 23$, dessen Doppeltes 46 er von 196 abzieht, und der Rest 150 soll die gesuchte Kreisfläche sein, von der Cusanus behauptet, sie sei desshalb etwas zu klein gerathen, weil 46 und damit ein zu Grosses abgezogen worden sei; es hätte eigentlich statt $121 = 11^2$ ein etwas kleineres Quadrat gewählt werden müssen, dann wäre ein genaueres Ergebniss erschienen. In der That liefert 150 den Werth $\pi = 3{,}061224$, der beträchtlich zu klein ist. Verfolgt man die Rechnung, indem man statt 7 den Buchstaben r setzt, $11 = \frac{22}{7} \cdot \frac{r}{2}$, $98 = 2r^2$, $196 = 4r^2$, so kommt man zu $150 = r^2\left[8 - \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7}\right)^2\right]$. Wie aber Cusanus zu der weiteren Annahme, es sei $\pi = 8 - \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7}\right)^2$ gelangte, das ist uns unklar geblieben. Jedenfalls halten wir es den geistvollen, wenn auch nicht immer strengen sonstigen Methoden des Cusanus gegenüber für gewagt, die Sache einfach als geometrischen Unsinn bei Seite schieben zu wollen.

Paolo Toscanelli, welchem die Mathematica complementa zugeschickt worden waren, strauchelte offenbar gleichfalls über deren unklare Vorschriften. In einem von Cusanus niedergeschriebenen Gespräche zwischen ihm und dem Jugendfreunde, welches schwerlich ganz freie Erfindung ist[2]), sagt Paulus ausdrücklich, die Mathematica complementa seien ihm ganz und gar dunkel und entbehrten der Gewissheit[3]). Er erbittet sich leichtere Vorschriften, und Cusanus lehrt ihn darauf eine Rectification des Kreises vollziehen, die somit wieder nach neuen Regeln ausgeführt wird. Die Seite des dem zu rectificirenden Kreise eingeschriebenen Quadrates wird zu dessen Halb-

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 1059 flg. *(Mathematica complementa)*: *Volo nunc investigare quomodo per lunulas quadratura circuli investigetur, quam viam veteres frustra attentaverunt.* [2]) Ebenda pag. 1095 flgg.: *Dialogus inter Cardinalem sancti Petri Episcopum Brixinensem et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura.* [3]) *post mihi missos tuos de Mathematicis complementis utique mihi obscuros atque incertos libellos.*

messer gefügt und um diese Linie als Durchmesser ein neuer Kreis beschrieben. Der Umfang des ihm eingezeichneten gleichseitigen Dreiecks soll dem ersten Kreise umfanggleich sein. Ist r der ursprüngliche Halbmesser, so ist die Seite des Sehnenquadrates $r\sqrt{2}$, also $r(1+\sqrt{2})$ der Durchmesser des zweiten Kreises, der für einen Augenblick 2ϱ heissen mag. Die Seite des Sehnendreiecks in dem neuen Kreise ist $\varrho\sqrt{3}$ und dessen Umfang

$$3\varrho\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,r\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2} = r\cdot\frac{\sqrt{27}+\sqrt{54}}{2} = 2\pi r.$$

Diese Annahme liefert demnach $\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{27}+\sqrt{54}) = 3{,}13615\cdots$ mit viel geringerer Genauigkeit, als sie in den Mathematicis complementis erreicht war.

Das Vollkommenste, was Cusanus geleistet hat, ist in seiner letzten Abhandlung enthalten, die er auch in stolzer Selbstzufriedenheit De mathematica perfectione[1]), von der mathematischen Vollkommenheit, betitelte. Sie ist einem Cardinal Antonius zugeeignet und nach der Aussage der Widmung binnen zwei Tagen niedergeschrieben, während ein böser Fuss den Verfasser an seine Wohnung fesselte. Wir begnügen uns damit, aus dieser inhaltreichen Schrift nur ein Ergebniss zu entnehmen, welches über die in den früheren Schriften enthaltenen Dinge weit hinausgeht. Der Gedankengang ist etwa folgender. Es sei (Figur 34) $bc = \frac{a_n}{2}$ die halbe Seite eines regelmässigen Sehnen-n-ecks, dessen Primlinie $ab = p_n$, dessen Secundlinie $ac = s_n$. Heisse $\sphericalangle\, bac = \varphi$, so ist $\varphi = \frac{360^0}{2n}$. Vom Quadrate an ist nun $bc \leqq ab$, wie leicht einzusehen ist, wesshalb auch Cusanus einen Beweis zu führen unterlassen darf. Im rechtwinkligen

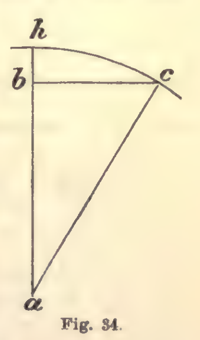


Fig. 34.

Dreiecke abc ist nämlich $\sphericalangle\, acb = 90^0 - \frac{360^0}{2n} \geqq \frac{360^0}{2n}$, sofern $n \geqq 4$. Je mehr das n-eck dem Kreise sich nähert, um so genauer ist $bc = \text{arc.}\,hc$ oder $\frac{a_n}{2} = \text{arc.}\,\varphi = \varphi \times s_n$. In dem gleichen Falle des Unendlichvielecks ist $s_n = p_n$ sowie $s_n + x = p_n + x$, was auch x bedeute. Im Unendlichvielecke ist folglich ebensowohl $\frac{s_n\varphi}{a_n : 2} = 1$ als $\frac{s_n + x}{p_n + x} = 1$, mithin in Proportionsform geschrieben:

---

[1]) Cusani *Opera* pag. 1110—1154.

$$s_n \varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + x) : (p_n + x) \quad \text{bei } n = \infty.$$

Beim Quadrate $\left(n = 4,\ \varphi = 45^0,\ \frac{a_n}{2} = p_n\right)$ wird nun gleichfalls auch ein x vorhanden sein, welches die ganz ähnlich lautende Proportion erfüllt:

$$s_4 \varphi : \frac{a_4}{2} = (s_4 + x) : (p_4 + x).$$

Man erräth schon, dass Cusanus sich wieder auf sein Princip der Coincidenz berufen wird. Die Proportion findet statt bei $n = 4$ sowohl als bei $n = \infty$, also auch bei allen Zwischenmöglichkeiten. Er unterzieht $n = 4$ und $n = 6$ der Rechnung.

Bei $n = 4$ ist

$$s_n \cdot 45^0 : \frac{s_n}{\sqrt{2}} = (s_n + x) : \left(\frac{s_n}{\sqrt{2}} + x\right)$$

oder

$$45^0 : \frac{1}{2}\sqrt{2} = \left(4 + \frac{x}{s_n}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{s_n}\right).$$

Bei $n = 6$ ist

$$s_n \cdot 30^0 : \frac{s_n}{2} = (s_n + x) : \left(\frac{s_n}{2}\sqrt{3} + x\right)$$

oder

$$30^0 : \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{x}{s_n}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{s_n}\right).$$

Die beiden Proportionen werden unter allerdings unstatthafter, zum mindesten ungenauer Voraussetzung, es sei dasselbe $\frac{x}{s_n}$ in beiden vorhanden, durch einander dividirt und liefern so die neue Proportion:

$$\frac{3}{2} : \sqrt{2} = 1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{x}{s_n}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{x}{s_n}}$$

und aus ihr ergiebt sich $\frac{x}{s_n} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{2} - 4} = 1{,}913 \cdots$ Mit wenigstens annähernder Genauigkeit ist demnach $x = 2s_n$ und setzt man dieses x in die allgemeine oben ausgesprochene Proportion ein, so geht sie in folgende über:

$$s_n \varphi : \frac{a_n}{2} = (s_n + 2s_n) : (p_n + 2s_n).$$

Aus dieser aber folgt endlich

$$\varphi = \frac{3\,\frac{a_n}{2s_n}}{2 + \frac{p_n}{s_n}}.$$

Man versteht die ganze Tragweite dieses Ergebnisses besser, wenn man in der Anwendung neuerer Bezeichnungen noch um einen Schritt weitergeht. Heute schreiben wir $\frac{a_n}{2s_n} = \sin\varphi$, $\frac{p_n}{s_n} = \cos\varphi$. Die Cusanische Näherungsformel heisst alsdann $\varphi = \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}$. Das Wort Sinus hätte übrigens auch Cusanus hier in Anwendung bringen können, wie er es sonst verschiedentlich benutzt hat, z. B. in den Mathematischen Complementen[1]), wo er die Kenntniss der zu Bögen von 1, 2, 4 u. s. w. Winkelgraden gehörenden Sehnen als eine Vervollkommnung der Kunst von dem Sinus und Sehnen in Aussicht stellt.

In den Mathematischen Complementen hat eine andere Stelle[2]) die Aufmerksamkeit späterer Leser besonders auf sich zu ziehen gewusst. Zuerst wird gelehrt aus Metall oder Holz, in aere aut ligno, ein Dreieck phq (Fig. 35) herzustellen, welches bei h rechtwinklig

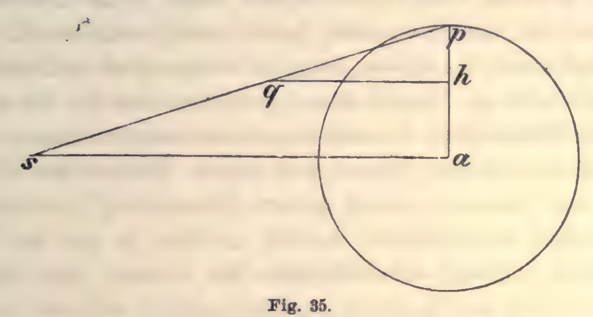


Fig. 35.

sei, und dessen eine Kathete hq die Länge der halben Kreislinie besitze, welche mit der anderen Kathete hp als Halbmesser beschrieben wurde. Ist nun ein beliebiger Kreis zu rectificiren, so zeichnet man zwei im Mittelpunkte a sich senkrecht durchschneidende Durchmesser und legt an den einen das feste Dreieck so an, dass ph auf den Durchmesser, der Punkt p auf die Kreislinie selbst zu liegen kommt. Die verlängerte pq schneidet alsdann den anderen Durchmesser in einem Punkte s, welcher von dem Mittelpunkte a um einen halben Umkreis entfernt ist. Unmittelbar an diese erste vollständig richtige Vorschrift knüpft sich eine zweite nicht minder richtige zur Auffindung der Quadratur des Kreises. Die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Halbmesser und der halben Peripherie des

[1]) Cusani *Opera* pag. 1025: *Ex ante habitis quicquid hactenus in Geomitricis ignotum fuit, inquiri poterit. Fuit autem incognita perfectio artis de sinibus et chordis: nemo unquam scire potuit chordam arcus gradus unius et duorum et quatuor et ita consequenter, quae nunc sic habetur.* [2]) Ebenda pag. 1024.

Kreises solle gesucht werden; diese sei alsdann die Seite des verlangten Quadrates. Dazu ist in der Druckausgabe eine Figur gezeichnet, bei welcher der zu quadrirende Kreis zweimal gezeichnet erscheint, beidemal berührend aufstehend auf einer und derselben graden Linie, während über dieser als Durchmesser noch einmal ein Halbkreis gezeichnet ist. Die genannte grade Linie ist die Summe aus Halbmesser und halbem Umkreis des in Frage stehenden Kreises, und der erwähnte grosse Halbkreis dient zur Ermittelung der geforderten mittleren Proportionale. Nun hat 1697 ein englischer Mathematiker, John Wallis[1]), mit Berufung auf eine ihm zu Gebote stehende Handschrift die Behauptung ausgesprochen, die betreffende Figur sei von dem Herausgeber des Druckes ganz gegen den Sinn des Verfassers, *omnino contra mentem Cusani*, eingefügt. Jener habe eine Cycloide gezeichnet gehabt, deren Endpunkte durch die beiden Bogen des gerollten Kreises bezeichnet seien. Man hat mit vollem Rechte zwar ein abschliessendes Urtheil ausgesetzt, weil die Handschrift, auf welche jene Behauptung sich wesentlich gründete, keinem anderen Gelehrten zu Gesicht kam, trotzdem aber die Unwahrscheinlichkeit der Wallis'schen Behauptung hervortreten lassen. Im Texte ist nämlich mit keinem Worte von einem Wälzen des Kreises die Rede, und wo Cusanus in einer andern Abhandlung[2]) wirklich einmal von dem Wälzen eines Kreises spricht, erwähnt er nur die Thatsache, dass der Kreis während seines Wälzens die Gerade, über die er fortbewegt wird, stets nur in einem Punkte berühre, während einer durch einen Kreispunkt dabei beschriebenen Radlinie nicht entfernt gedacht ist. Wenn gleich Cusanus, wie wir in unserer gedrängten Uebersicht seiner mathematischen Leistungen an mehr als einer Stelle hervortreten lassen mussten, nicht grade als Muster schriftstellerischer Klarheit gerühmt zu werden beanspruchen kann, das ist doch kaum zu denken, dass er ein mechanisch-geometrisches Verfahren wie das Wälzen eines Kreises auf gradliniger Unterlage benutzt, oder gar näher studirt haben sollte, ohne dasselbe zu erwähnen.

Wir haben von Rechenkunst, von Geometrie, von Trigonometrie in Deutschland zu reden gehabt. Noch eine andere Unterabtheilung der Mathematik begann im XV. Jahrhunderte dort bekannt zu werden: die Algebra. Wir erinnern uns, dass im XIII. Jahrhunderte zuerst von

---

[1]) *Philosophical Transactions* Bd. XIX für die Jahre 1695, 1696 und 1697 pag. 561—566. Vergl. S. Günther, War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhunderte bekannt? in Eneström's *Bibliotheca mathem.* 1887 S. 8—14. [2]) Cusani *Opera* pag. 1112 (*Complementum Theologicum* cap. 8): *Sed etiam non praetereundum quomodo si circulus circumvolvitur super lineam rectam non tanget eam nisi in puncto*

einer abendländischen Algebra gesprochen werden konnte, dass sie bei Leonardo von Pisa einestheils, bei Jordanus Nemorarius anderntheils in einem sofort so ausgebildeten Zustände erschien, dass man eine schleunige Weiterentwickelung ihr zu erhoffen sich geneigt fühlen musste. Aber die Zeitgenossen der beiden grossen Männer waren nicht reif, deren Schriften vollständig zu verstehen, geschweige denn sie fortzubilden, und besonders für die eigentlichen Gelehrtenkreise gilt dieses harte Urtheil auch noch im XIV. Jahrhunderte, während damals (S. 159—162) italienische Kaufleute der Algebra so viel Verständniss entgegenbrachten, dass wenigstens versucht wurde, Aufgaben zu lösen, welchen die früheren Schriftsteller ohnmächtig gegenüberstanden. Jetzt im XV. Jahrhunderte, wiederholen wir, beginnt eine deutsche Algebra. Wir müssen gleich in der ersten Hälfte des Jahrhunderts Anfänge derselben als vorhanden annehmen, weil es sonst kaum denkbar wäre, dass plötzlich mit dem Jahre 1450 etwa eine Lehre solche Verbreitung gewann, wie wir es sehen werden, ohne vorher überhaupt geübt worden zu sein. Aber das ist auch Alles, was wir hierüber zu sagen vermögen. Quellen besitzen wir gegenwärtig erst aus der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, und werden daher mit deren Besprechung noch warten müssen.

52. Kapitel.

Italienische Mathematiker.

Der letzte Italiener, von welchem (S. 165—166) die Rede war, Biagio Pelacani von Parma, reichte bereits in's XV. Jahrhundert herüber. Bis 1411 sahen wir ihn in Padua thätig, an jener Universität, deren älteste Satzungen aus dem XIII. Jahrhunderte die Professur der Astrologie schon als die wichtigste, ihren Vertreter als den nothwendigsten Lehrer betrachtete[1]), dessen Unterricht namentlich den Aerzten nicht fehlen durfte. Astrologie war aber damals ein sehr weiter Begriff. Ihr gehörte die Kunst an, aus Sternbeobachtungen Schlüsse auf das Schicksal der Menschen im Allgemeinen und einzelner Menschen im Besonderen zu ziehen, eine Kunst, welche den vermeintlichen Nutzen jener Beobachtungen offenbarte, um dessen willen in erster Linie man sie anzustellen sich übte. Zur Astrologie gehörte aber auch die wissenschaftliche Sternkunde, zu ihr die Rechenkunst, die Geometrie. Der Professor der Astrologie war zunächst

---

[1]) Libri II, 54 Note 1: *quem tanquam necessarissimum habere omnino volumus.*

Astrologe, daneben Professor der gesammten damaligen Mathematik, und ein solcher in allen Theilen der genannten vielseitigen Thätigkeit war jener Pelacani.

Zu den Schülern des Pelacani zählte Prosdocimo de' Beldomandi[1]). Er gehörte einer alten Familie Padua's an. Er studirte in den Jahren 1400 und 1402 an der Universität seiner Vaterstadt[2]). Ob ein Studienaufenthalt in Bologna, wo er die Abschrift einer astronomischen Tabelle anfertigte[3]), früher oder später fällt, ist unbekannt. Jedenfalls wurde er wieder in Padua am 15. Mai 1409 nach abgelegter Prüfung, zu welcher Pelacani und zwei andere Professoren erschienen, zum Magister befördert[4]). Am 15. April 1411 legte Beldomandi gleichfalls in Padua eine medicinische Prüfung ab[5]). Unter den bei letzterer Prüfung genannten Professoren war Jacopo Della Torre aus Forli, ein berühmter Arzt, der aber auch nicht ohne philosophisch-mathematische Kenntnisse gewesen sein muss, da er einen Tractatus de intensione et remissione formarum verfasste, welcher muthmasslich noch im XV. Jahrhunderte im Drucke herauskam[6]). Im Juli 1420 gehörte Beldomandi, der Padua nicht verlassen zu haben scheint, dem dortigen Sacro collegio di arti e medicina an[7]), 1422 erhielt er die Professur der Astrologie[8]), und die gleiche Stellung behielt er bis zu seinem Tode, welcher 1428 im kräftigsten Mannesalter ihn traf[9]). Sein Geburtsjahr ist allerdings nicht bekannt, dürfte aber aus dem Zeitpunkten, in welchen Beldomandi die einzelnen Stufen seiner gelehrten Laufbahn erreichte, nach rückwärts annähernd bestimmt kaum viel früher als 1380 zu setzen sein[10]).

Die schriftstellerische Thätigkeit Beldomandi's war eine mannigfaltige. Zuerst scheint er der Musik sich zugewandt zu haben, was wohl mit der zu seiner Zeit in Padua herrschenden Geistesrichtung zusammenhing, denn Padua war damals der Sitz der gelehrten Theoretiker in der Musik[11]). Schon 1404 schrieb Beldomandi Erläuterungen[12]) zu einem musikalischen Werke des Johannes de Muris, und auch selbständige Schriften werden genannt, so z. B. eine Abhandlung von 1412, die den Titel Contrapunctus completus führt[13]), und in welcher Contrapunkt dahin erklärt ist, man verstehe darunter die

---

[1]) Eine ausführliche Monographie Prosdocimo de' Beldomandi von Ant. Favaro erschien im XII. Bande des *Bulletino Boncompagni* und in einem Sonderabzuge. Wir citiren letzteren als Favaro. Eine Fortsetzung seiner Untersuchungen hat der gleiche Verfasser im *Bulletino Boncompagni* XVIII veröffentlicht. [2]) *Bulletino Boncomp.* XVIII, 420. [3]) Ebenda pag. 407. [4]) Favaro pag. 24. [5]) Ebenda pag. 25. [6]) Ebenda pag. 30. [7]) Ebenda pag. 31. [8]) Ebenda pag. 36. [9]) Ebenda pag. 37 und 40. [10]) Ebenda pag. 18. [11]) Ebenda pag. 186. [12]) Ebenda pag. 201. [13]) Ebenda pag. 191.

Stellung einer einzelnen Note gegen eine andere innerhalb einer Melodie. Es ist begreiflich, dass der Verfasser bei solchen Untersuchungen auf Wohlklänge und Missklänge aufmerksam werden musste, und so wird als Leistung Beldomandi's hervorgehoben[1]), er zuerst habe die kleine Sexte als Consonanz erkannt, der Quarte eine Mittelstellung zwischen Consonanzen und Dissonanzen angewiesen, da sie allerdings einen Missklang gebe, aber keinen so unangenehmen wie etwa die Secunde oder die Septime.

Die nächste Aufgabe, welche Beldomandi 1410 löste[2]), war die Anfertigung eines Algorismus de integris. Diese zweimal, 1483 in Padua und 1540 in Venedig, gedruckte Schrift[3]) ist für uns von spannender Bedeutung. Nicht als ob der Inhalt in irgend einer Weise über das Rechnen mit ganzen Zahlen sich erhöbe, aber es ist der erste italienische Algorithmus, über welchen wir genügend unterrichtet sind, um an seiner Hand eine culturgeschichtlich wichtige Frage beantworten zu können. Wir haben wiederholt des Gegensatzes zwischen gelehrter und kaufmännischer Rechenkunst gedacht. Wir haben Leonardo von Pisa als den Vertreter der letzteren, Jordanus Nemorarius und mit ihm Johannes von Sacrobosco als die Vertreter der ersteren kennen gelernt. Ihre Schüler fanden wir in allen Ländern jenseits der Alpen, wo nur Rechenunterricht nach Büchern gegeben wurde. Auch in Italien fanden wir, und das war (S. 156) die letzte Gelegenheit, bei welcher wir den Gegenstand berührten, eine vereinzelte Handschrift, die es nahe legte zu vermuthen, auch dorthin sei die minderwerthige gelehrte Rechenkunst eingedrungen und habe unter ihrem wuchernden Unkraut den Samen fast vollständig erstickt, den Leonardo eingelegt hatte. Es war nur eine Vermuthung, welche kaum ausgesprochen wurde. Gegenwärtig wird die Vermuthung zur Gewissheit. Die italienische Universität war, möchten wir sagen, mehr Universität als italienisch, und ihre Rechenkunst war die des Sacrobosco, erhob sich über sie nur so weit, als ein Anlehnen an den grösseren Vorgänger Jordanus es möglich machte, und zeigte nur geringe Spuren, welche an Leonardo erinnern. Das lehrt uns eben der Algorismus de integris des Prosdocimo de' Beldomandi von 1410 sowohl in der Druckausgabe, als in Handschriften, welche von der Druckausgabe etwas abweichen. Die Abhängigkeit von Sacrobosco enthüllt sich schon darin, dass Beldomandi ausser der Neunerprobe, von welcher fortwährend Gebrauch gemacht wird, auch auf die Proben durch entgegengesetzte Rechnungsverfahren,

---

[1]) Favaro pag. 211. [2]) Ebenda pag. 60. [3]) Ebenda pag. 43 und 48.

Subtraction durch Addition u. s. w., hinweist[1]), deren Erfinder ausdrücklich genannt ist, damit jeder Zweifel an dem Ursprunge schwinde. Ebenso deutlich erkennt man den Einfluss Sacrobosco's an der Halbirung und Verdoppelung, welche als besondere Rechnungsarten Aufnahme gefunden haben[2]). Dagegen ist aus der Erinnerung an Leonardo zu erklären die Subtraction mit Borgen einer Einheit höheren Ranges im Minuendus, welche sodann im Subtrahendus zurückgezahlt wird[3]), und ebenso die schachbrettartige Multiplication. Wir sagen Leonardo, ohne damit ausdrücklich zu meinen, Beldomandi habe von ihm oder seinen Schriften gewusst; das kann ja der Fall gewesen sein, aber eben so gut kann aus der Schule Leonardo's, d. h. aus kaufmännischen Kreisen, das Eindringen stattgefunden haben. Die Erwähnung der Araber, als der Erfinder des Zahlenschreibens[4]), kann dagegen wieder aus Sacrobosco entnommen sein. Mit eben diesem trifft Beldomandi bei der Kubikwurzelausziehung zusammen[5]), wenn auch die Bildung des Kubus nach der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a(a + b)b + b^3$$

bei Sacrobosco nicht so klar wie bei Beldomandi hervortritt, diesem Letzteren also mehr oder weniger anzugehören scheint. In den Druckausgaben des Beldomandi, auch in der älteren von 1483, sind Beispiele der einzelnen Rechnungsverfahren durch Buchstaben in der Weise dargestellt, dass das jedesmalige Ergebniss durch einen neuen Buchstaben bezeichnet ist[6]). Das erinnert täuschend an Jordanus, und wenn auch den vorhandenen Handschriften diese Buchstabenbeispiele fehlen, so ist einestheils nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Texte vorhanden gewesen sein können, indem Abschreiber das, was sie nicht verstanden und darum für überflüssig hielten, wegliessen, andererntheils ist aber auch das blosse Vorkommen in dem Drucke von 1483 genügender Hinweis auf das, was uns das Wichtigste ist: dass nämlich im XV. Jahrhunderte in der italienischen Gelehrtenwelt Schriften mit Dingen verbrämt waren, welche auf Jordanus zurückführen. Für Beldomandi selbst dürften wahrscheinlich neben der schon erwähnten Gestalt der Kubirungsformel eigenthümliche Summenformeln bei geometrischen Progressionen[7]) in Anspruch zu nehmen sein. Er lehrt nämlich, und zwar in nahezu unverändertem Wortlaute in den Handschriften wie in den Druckausgaben, dass unter der Voraussetzung eines ganzzahligen q

---

[1]) Favaro pag. 102: *oportet uti probationibus positis in algorismo de integris Johannis de sacro buscho.* [2]) Ebenda pag. 94. [3]) Ebenda pag. 96. [4]) Ebenda pag. 93—94. [5]) Ebenda pag. 101. [6]) Ebenda pag. 90. [7]) Ebenda pag. 99—100.

immer $a + qa + q^2a + \cdots + q^{n-1}a = q^{n-1}a + \frac{q^{n-1}a - a}{q-1}$ sei, und dass, falls $q = \frac{p}{p-1}$ sei (eine proportio superparticularis nannte er mit dem seit Boethius gangbaren Namen einen solchen Werth von q), die Formel dahin sich ändere, dass

$$a + \left(\frac{p}{p-1}\right)a + \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} a = p\left(\frac{p}{p-1}\right)^{n-1} a - (p-1)a$$

werde. Allerdings sind beide Formeln, deren Richtigkeit sofort durch Umwandlung der allbekannten Summenformel sich ergiebt, nicht bewiesen. Sie sind auch zunächst nur für die Sonderfälle $q = 2, 3, 4, 5$ und $p = 2, 3, 4$ ausgesprochen, aber daran knüpfen sich beidemal die Worte *et sic ultra*, welche zur Gewissheit erheben, dass es für Beldomandi sich nicht um einzelne Fälle, sondern um allgemeine Gesetze handelte.

Wir bemerkten ausdrücklich, Beldomandi habe nur einen Algorismus de integris verfasst. Die Druckausgaben vereinigen mit demselben den Algorismus de minuciis des Johannes de Lineriis[1]) (S. 126), das war also das Lehrbuch der Bruchrechnung, dessen wenigstens die italienische Universität sich damals neben Beldomandi's ganzzahligem Rechnen zu bedienen pflegte.

An den Algorismus reiht sich dem Inhalte nach eine handschriftlich vorhandene Arbeit des Beldomandi an, ein Canon[2]) in quo docetur modus componendi et operandi tabulam quandam. Es ist eine Einmaleinstafel, welche von 1 mal 1 bis zu 22 mal 22 sich ausdehnt. Sie ist als Tafel doppelten Eingangs gefertigt in quadratischer Gestalt und so, dass am oberen Tafelrande von links nach rechts und an dem linken Tafelrande von oben nach unten die Zahlen 1 bis 22 auf einander folgen. Die Kreuzungsstellen der jedesmaligen Zeilen und Kolumnen enthalten die betreffenden Producte. Die Quadratzahlen, welche in der Diagonale von links oben nach rechts unten erscheinen, heben sich gleich den Randzahlen in rothen Schriftzügen hervor, während alles Uebrige schwarz geschrieben ist. Das Vorhandensein einer Einmaleinstafel war ja nicht neu. Nikomachus (Bd. I, S. 402) hat eine solche in ähnlicher viereckiger Gestalt gegeben. Boethius folgte in seiner Arithmetik (Bd. I, S. 539) dem griechischen Musterwerke, und eine heute noch vorhandene Arithmetik des Boethius war vermuthlich einst Beldomandi's Eigenthum[3]). Auch Bernelinus hat (Bd. I, S. 826) seinen Lesern eine

---

[1]) Favaro pag. 43. [2]) Ebenda pag. 102 und 107—109. [3]) Ebenda pag. 121 und 128.

Einmaleinstafel nicht vorenthalten, bei welcher in ganz besonders auffallender Weise die Quadratzahlen fehlen. Leonardo von Pisa (S. 8) hat nicht minder das Einmaleins, allerdings nicht in quadratischer Anordnung. Auch des mündlichen Einübens des Einmaleins wird wiederholt und zu verschiedenen Zeiten gedacht (Bd. I, S. 796 und 495), aber immer handelt es sich um das kleine Einmaleins, um die Vervielfachungen von 1×1 bis zu 10×10. Bei Beldomandi ist, soweit bekannt, nach Petrus von Dacien (S. 91) und neben Křištan von Prachatic (S. 179), erstmalig eine Ausdehnung zum grossen Einmaleins vorgenommen, denn die Angabe von 11^2 bis 20^2 in der alten französischen Geometrie des XIII. Jahrhunderts (S. 93) ist kaum als grosses Einmaleins zu betrachten. Wesshalb grade 22×22 den Schluss bildet, dafür scheint kaum ein anderer Grund ersichtlich als der, dass die Ausdehnung der Tafel nach der des Papierblattes sich richten musste, auf welches sie geschrieben war. Der Entstehungszeit nach hätten wir diesen Canon schon vor dem Algorismus zu besprechen gehabt, denn er ist laut Angabe der Handschrift bereits 1409 in Padua vollendet. Jetzt, da wir den Algorismus schon kennen, wird uns das Fehlen einer ähnlich gebauten Einmaleinstafel in ihm als absichtliche Lücke nicht entgehen können. Wir werden auch hierin wieder ein Anlehnen an das Althergebrachte, an das gleiche Musterwerk zu erkennen haben, dem Beldomandi's Algorismus sich fortwährend anschliesst.

Wir kommen nun zu einem kurzen geometrischen Bruchstücke[1]) Beldomandi's. Es handelt sich (Fig. 36) darum, ein Parallelogramm $bceg$ zu zeichnen, welches einem Dreiecke abc flächengleich sei. Die Construction wird an drei Figuren ausgeführt, die sich darin unterscheiden, dass der Dreieckswinkel bei c ein stumpfer, ein spitzer, ein rechter Winkel ist.

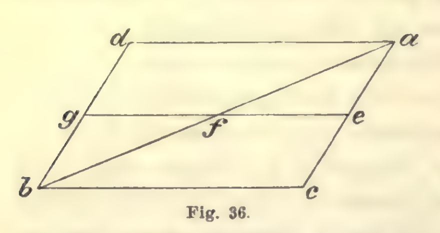


Fig. 36.

Jedesmal wird ad parallel und gleich bc gezogen und d mit b verbunden; wird alsdann ac in e und db in g halbirt und eg gezogen, so ist $bceg$ das verlangte Parallelogramm.

Sonstige geometrische Schriften Beldomandi's sind nicht bekannt, indem eine in einem Handschriftenkataloge ihm zugeschriebene Geometrie sich bei näherer Untersuchung[2]) als eine Abschrift der euklidischen Elemente in der Uebersetzung des Campanus erwiesen hat. Eine Schrift über das Astrolabium[3]) genüge es uns genannt zu haben.

[1]) Favaro pag. 132. [2]) Ebenda pag. 129—131. [3]) *Bibliotheca mathematica* 1890 p. 81—90 und 113—114.

Ein Commentar, welchen Beldomandi 1418 zu der Sphäre des Sacrobosco verfasste, fordert unsere Aufmerksamkeit nur durch eine Stelle[1]) heraus, in welcher die damalige Unkenntniss griechischer Sprache bei den berühmtesten Gelehrten zu Tage tritt. Isoperimetrischer Körper soll nämlich so viel heissen als einer, welcher um einen anderen beschrieben werden kann, denn ysos heisse Figur, peri um und metros das Maass.

Die Zeit nahte mit raschen Schritten, in welcher solche Irrthümer, namentlich in Italien, zu den Unmöglichkeiten gehörten. Schon war Kenntniss des Griechischen zu einer erwünschten Zierde geworden. Sie wurde von Einzelnen gesucht und erworben. Bald war sie Nothwendigkeit, und griechisches Wissen auf allen Gebieten, auf dem der Philosophie wie der Poesie, der Mathematik wie der Astronomie, erhielt einen solchen Ruf des Uebergewichtes, dass Jeder es sich anzueignen bestrebt war, der Eine in der Ursprache, der Andere in Uebersetzungen, welche jetzt ausschliesslich aus der Ursprache und nicht mehr mit Durchgang durch morgenländische Uebertragungen hergestellt wurden. Die Uebersetzer waren theils Italiener, theils nach Italien übergesiedelte Griechen.

Unter den Ersteren haben wir Jacob von Cremona[2]) zu nennen, oder mit seinem heimathlichen Namen und Titel Jacopo da S. Cassiano Cremonese canonico regolare. Er lebte 14 Jahre lang in Mantua, war Schüler des Vittorino und trat um 1446 nach dessen Tode an seine Stelle als Lehrer der Söhne des Markgrafen Lodovico Gonzaga. Im Jahre 1449 wurde er nach Rom berufen. Dort hatte seit März 1447 Nicolaus V. den päpstlichen Stuhl inne, ein geistlicher Fürst von eben so feinem Kunstsinne als grosser Gelehrsamkeit. Den Anstoss zum Neubau der Peterskirche in Rom gegeben, die vaticanische Handschriftensammlung mächtig bereichert, griechische Gelehrte nach Rom berufen oder dort festgehalten zu haben, das sind unvergängliche Ruhmestitel des geistvollen Mannes. Um die vorhin genannte Zeit wurde nun entweder unter Neuanschaffungen oder unter schon vorhandenen Handschriften ein griechischer Archimed entdeckt, und dessen Uebersetzung vollzog Jacob von Cremona im päpstlichen Auftrage. Das war die Bearbeitung, welche Cusanus kennen lernte (S. 192), und welche er in einem Send-

---

1) Favaro pag. 147: *Circa hanc partem notandum primo quod isoperimeter dicitur ab ysos graece quod est figura latine, et peri quod est circa, et metros quod est mensura, unde corpus isoperimetrum id est corpus habens figuram circa aliud mensurantem sive alteri circumscriptibilem quod idem est.* 2) Val. Rose in der deutschen Literaturzeitung V. Jahrgang (1884) S. 292.

schreiben an den Papst diesem zu hoher Ehre anrechnete. Erhalten scheint sich die Uebersetzung nicht zu haben.

Auch zu der Uebersetzung eines anderen griechischen Werkes trat Jacob von Cremona kurze Zeit vor seinem bald nach 1449 eintretenden Tode in Beziehung. Georg von Trapezunt[1]) hatte den Almagest des Ptolemäus und Theon's Erläuterungen zu demselben bearbeitet. Dieser Grieche war 1396 auf der Insel Kreta geboren. Er starb 1486 in Italien. Den Namen, unter welchem er bekannt ist, wählte er nach dem Orte, woher sein väterliches Geschlecht stammte. Er beherrschte die griechische Sprache allerdings, aber mit dem Inhalte des von ihm übersetzten Werkes verhielt es sich keineswegs so, und er scheint durch diesen Mangel zu schlimmen Schnitzern geführt worden zu sein. Wenigstens trat Jacob von Cremona als feindlicher Kritiker gegen die Uebersetzung auf.

Noch einen zweiten Feind hatte Georg von Trapezunt sich zugezogen, den wir hier zu nennen haben, wenn er auf die Geschichte der Mathematik auch nur sehr mittelbar einwirkte: Bessarion. Bekanntlich war seit der Mitte des XI. Jahrhunderts zwischen der griechischen und lateinischen Kirche eine bleibende Trennung eingetreten. Gegen Ende des XIII. Jahrhunderts wurden zwar Versuche angestellt, den Riss wieder zu heilen, aber sie misslangen. Als 1437 das basler Concil auseinanderfiel, wurden neue Versuche gemacht. Die Partei des Concils wie die des Papstes Eugen IV. wetteiferten, wer die Griechen zu versöhnen vermöge, wozu die immer näher rückende Türkengefahr ohnedies mahnte. Cusanus ging im August 1438 als päpstlicher Abgeordneter nach Konstantinopel, und unter denjenigen Würdenträgern, welche er zu bestimmen wusste, ihn nach Italien zu begleiten, war Bessarion der Bischof von Nicäa, der später ganz zur römisch-katholischen Kirche übertrat und zum Cardinal ernannt wurde. Cardinal Bessarion, sagten wir, lebte mit Georg von Trapezunt in Feindschaft. Der Grund war ein ganz wissenschaftlicher. Bessarion war ein begeisterter Bewunderer Plato's, Georg von Trapezunt ein eben solcher von Aristoteles und dagegen ein Verkleinerer Plato's, den er in einer eigenen Schrift heftig tadelte. Das war der Ursprung einer bis zum Hasse sich steigernden Aufregung für Bessarion, das vielleicht der Grund, warum dieser auch die Almagestübersetzung Georgs von Trapezunt von vornherein für verfehlt erklärte, warum er bei einem Aufenthalte in Wien zu Peurbach in Beziehung trat und denselben aufforderte, sich an eine Uebersetzung des Meisterwerkes des griechischen Astronomen zu wagen.

---

[1]) Kästner II, 318.

Wenn wir hiermit den Abschnitt beschliessen und nach unserer Gewohnheit umschauend einen Ruhepunkt für unser Auge suchen, so haftet dasselbe vorzugsweise an Nicolaus von Cusa. Andere Namen kommen ja auch vor. Wir verweilten bei deutschen und italienischen Rechenmeistern niederen und höheren Styles; wir sahen die Universitätswissenschaft ziemlich aller Orten von gleich geringfügiger Art, mit gleich geringen Erhebungen über den tiefstmöglichen Stand; wir sahen auch Johann von Gemunden, Georg von Peurbach zu trigonometrischen Neuerungen einen Anlauf nehmen. Als genialer Kopf mit dem Stempel des Erfinders ausgezeichnet war aber nur Einer, nur Cusanus, und für die Mängel seiner Erfindungen ist vielleicht verantwortlich, dass er nicht ausschliesslicher Mann der Wissenschaft, in erster Linie Mathematiker, sein durfte.



XII. Die Zeit von 1450—1500.



53. Kapitel.

Rechnen auf den Linien. Das Bamberger Rechenbuch.

Die zweite Hälfte des XV. Jahrhunderts beginnt mit einer Erfindung, deren Erwähnung nirgend fehlen darf, wo von den Fortschritten menschlicher Bildung auf was immer für einem Wissensgebiete gesprochen wird. Wir meinen natürlich die Buchdruckerkunst. Deutschland war, wie gegenwärtig wohl keinem Zweifel unterliegt, die Heimath dieser Erfindung, und da wir mit der Geschichte der Mathematik in Deutschland den Anfang unseres neuen Abschnittes machen, so scheint eine doppelte Verpflichtung vorzuliegen, jene Erwähnung nicht zu versäumen. Eine Gegenbemerkung könnte gemacht werden. Die Buchdruckerkunst trat nämlich nicht gleich von Anfang an und nicht in Deutschland zuerst in den Dienst unserer Wissenschaft. Nicht vor 1471 werden wir einem in diesem Buche zu erwähnenden Druckwerke begegnen, und die Presse, aus der es hervorging, stand in Italien. Aber mit 1472 beginnt auch die Zeit deutschen mathematischen Druckes und rechtfertigt einigermassen unser Vorgreifen, zumal es sich auf die einfache Erwähnung beschränkt, dass man nicht mehr auf die Feder der Abschreiber allein angewiesen war.

Noch eine weitere Thatsache ist zu erwähnen. Die zweite Hälfte des XV. Jahrhunderts ist die Zeit, in welcher die Stellungsarithmetik mit ihren zehn Zahlzeichen mehr und mehr in Kreise drang, denen es um nichts weniger als um das Rechnen zu thun war. Wir meinen die Verwendung dieser Zahlzeichen zur Angabe der Blattfolge gedruckter Bücher, zur Ausprägung von mit Jahreszahlen versehenen Münzen, zur Anfertigung von Grabinschriften. Das älteste bekannte Druckwerk mit in der angegebenen Weise gezählten Blättern ist ein 1471 in Köln erschienenes Werk Petrarca's[1]). Dass die Jahreszahlen auf Münzen erst mit dem Ende des XV. Jahrhunderts in Stellungszahlen auftreten, wird von Niemand angezweifelt. Etwas fraglicher könnte die Zeit der Anwendung auf Grabdenkmälern er-

---

[1]) Unger, S. 16.

scheinen. Es werden Pforzheimer und Ulmer Grabdenkmäler aus dem XIV. Jahrhundert erwähnt[1]), von noch älteren ganz zu schweigen. Die Inschriften sind vorhanden, das ist gewiss, aber sind sie immer zu der Zeit eingemeisselt, welche sie angeben? Ist nicht etwa der alte Grabstein auf irgend eine Weise z. B. in den wüsten Bilderstürmereien des XVI. Jahrhunderts zerstört oder so verletzt worden, dass eine Erneuerung nöthig wurde, welche alsdann, ohne dass irgend Absicht vorlag, den Geschichtsforschern ein Kuckucksei in das Nest zu legen, die alte römische Jahreszahl durch die weniger Zeichen erfordernde Ziffernschrift ersetzte? Die Form jener Denkmalsziffern, welche sehr von den in Rechenbüchern der Zeit benutzten Zahlzeichen abweicht, giebt gegründeten Anlass zu dieser Vermuthung, und insbesondere die Pforzheimer Inschrift dürfte nach an Ort und Stelle eingezogenen Erkundigungen kaum früher als im XVI. Jahrhunderte entstanden sein.

Ein Drittes haben wir, beginnend in der ersten, sich verbreitend in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, aus Deutschland zu berichten: das Auftreten von Vorschriften darüber, wie auf den Linien zu rechnen sei. Das Abacusrechnen der Römer und des frühen Mittelalters ist jedem Leser unseres I. Bandes zur Genüge bekannt, bekannt auch wie es zu einem Kolumnenrechnen ward, bei welchem die Rechenpfennige auf den betreffenden senkrecht zum Rechner gebildeten Kolumnen zu einem Zahlzeichen sich verdichteten, während die Kolumnen selbst vor Einbürgerung der Null nicht entbehrt werden konnten. Bekannt ist ferner, wie die Null durch die Algorithmiker eingeführt den Kampf um das Dasein gegen die alten Methoden eröffnete und siegreich durchführte. Jetzt, am Ende des XV. Jahrhunderts und bis tief in das XVI., ja in das XVII. Jahrhundert sich erstreckend erscheint plötzlich eine neue, oder doch eine wesentlich veränderte Rechnung mit Rechenpfennigen, und zwar in Deutschland, Frankreich, England, aber nicht in Italien. Der Name der Unterlage dieser Rechnung ist der der Rechenbank oder der Bankir, auf welcher wagrechte Linien gezogen sind, die den Namen des Rechnens auf den Linien zu einem ebenso berechtigten als leicht verständlichen machen. Die Linien geben den auf ihnen liegenden Marken von unten nach oben je zehnfach höheren Werth; eine zwischen zwei Linien befindliche Marke hat den fünffachen Werth als wenn sie der unteren, den halben als wenn sie der oberen Linie angehörte; das Rechnen, insbesondere das Addiren, als die Grundlage jedes Rechnens, vollzieht sich genau so wie bei dem ältesten Abacus.

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 175.

Die Frage musste aufgeworfen werden, wie man das plötzliche Auftreten dieses Verfahrens zu erklären habe, welches einem schon vollständig überwundenen Standpunkte angehörend geradezu einen Rückschritt bedeute. Man hat besonderes Gewicht auf den Gegensatz der wagrechten Linien zu den früheren senkrechten Kolumnen gelegt und auf ihn gestützt eine Neueinführung behauptet, deren Muster der chinesisch-mongolische Swán pân (Bd. I, S. 622) gewesen sei, der „während des XV. Jahrhunderts durch den Handel in Deutschland in Gebrauch kam“[1]). Gegen diese Meinung ist sehr vieles einzuwenden. Die Nachbildung eines Eingeführten pflegt doch diesem selbst ähnlich zu sein, und da ist nun von vornherein gar nicht richtig, dass der alte Swán pân mit wagrechten Drähten hergestellt gewesen sei[2]). Dann ist mit Recht hervorgehoben worden, dass die Vermittlung des chinesisch-europäischen Handelsverkehrs in den Händen der Italiener lag, und grade diese haben das Rechnen auf den Linien nicht in ihren Rechenbüchern gelehrt[3]). Es ist weiter zu beachten, dass die Schriften über das Rechnen auf den Linien, wo sie überhaupt eines Ursprunges gedenken, niemals auf Asiaten verweisen, sondern auf Appuleius von Madaura (Bd. I, S. 524), und wir dürfen uns wiederholend jene Namensnennung so deuten, dass es schwer halte, des Glaubens sich zu erwehren, dass wer so bestimmt sich ausdrückte wie jene Rechenmeister des XV. und XVI. Jahrhunderts, die Schrift Appuleius' selbst vor Augen hatte, von der freilich keine Handschrift mehr vorhanden ist. Wir geben ferner zu bedenken, dass der Hauptunterschied der Richtung der Kolumnen, die aus senkrechten zu wagrechten wurden, erklärt werden kann, wenn wir an das Aufhängen einer solchen Rechenvorrichtung denken, welches nur ein Verschieben der Kugeln nach rechts und links, nicht nach oben und unten gestattet, ohne behaupten zu wollen, diese Erklärung sei die richtige.

Endlich aber ist, wie uns scheint, eine vollständige Erledigung aller Zweifel dadurch gegeben, dass die zwischen dem XII. und XV. Jahrhunderte vorhandene Lücke, den allmählichen Uebergang von Abacus zur Rechenbank darstellend, nunmehr ausgefüllt ist, zwar

---

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 28—29, Anmerkung 2. [2]) Vergl. z. B. Abbildung und Beschreibung des Swánpân mit gegen den Rechner senkrechten Drähten bei Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der grossen Tartarei (aus dem Französischen), Rostock 1749. Bd. III, S. 350. Kaspar Schott in seinem *Cursus mathematicus* von 1699 beruft sich pag. 21 und 52 ausdrücklich auf einen Missionar Martinius, durch welchen er wisse, dass die Kugeln des chinesischen Rechenbrettes *sursum atque deorsum mobiles* seien, was nur bei gegen den Rechner senkrechter Lage der Drähte möglich ist. [3]) Unger, S. 69.

nicht durch ein Lehrbuch, wie man mit Rechenpfennigen umgehen solle, aber durch die Rechenpfennige selbst[1]). Sie führten in französischer Sprache den Namen *Jetons* von *jeter*, werfen oder auswerfen, mit Bezug auf ihren Gebrauch, bei welchem sie auf die Rechenbank geworfen wurden. Lateinisch heissen sie aus dem gleichen Grunde *projectilia*. Die Engländer sagten *counters*, Zähler, die Deutschen *Rechenpfennig* oder *Raitpfennig*. Es ist gelungen, eine ganze Reihe solcher Marken selbst oder doch deren Erwähnung ausfindig zu machen, welche ein lückenloses Vorhandensein beweisen, wenn auch die Beweisstücke nicht alle dem gleichen Orte entstammen.

In Frankreich ist ein Rechenpfennig der Königin Blanche vorhanden[2]), welche 1252 starb. In Brügge finden sich unter den Ausgabeposten der städtischen Rechnungsämter solche für Anschaffung von Rechenpfennigen[3]) aus den Jahren 1284, 1303, 1331—1332. Der Gebrauch von Rechenpfennigen zur Zeit Philipp VI. von Frankreich († 1350) ist gesichert[4]), gesichert auch für die Zeit von Philipp dem Kühnen von Burgund († 1404), von Anton von Brabant († 1450). In dem alten Cataloge des Musée Cluny in Paris (vor der Uebersiedelung der Sammlung) war unter Nr. 3245 angegeben: Tapisserie de haute lisse aus der Zeit Ludwig XII. (1462—1515). Auf dieser Stickerei gab die Dame Arithmétique Rechenunterricht. Ein Zuhörer hielt einen kleinen Bogen, *à la corde duquel sont suspendus des bâtonnets de longueurs inégales*, und diese verschieden langen Stäbchen müssen doch wohl zu einem instrumentalen Rechnen gedient haben. Aehnlich wie wir es von Brügge aussprechen durften, sind auch in Frankfurt am Main städtische Rechnungen erhalten[5]) mit Ausgabeposten „umb ein hundert Rechenpfennige“. Solche waren daher 1399, 1402, 1431 im Gebrauch. Wieder aus dem XV. Jahrhunderte kennt man eine ganze Anzahl von Nürnberger Rechenpfennigen[6]), die den Anfang eines regen Gewerbes bezeichnen. *Rechenpfennigmacher* heisst ein Hans Laufer[7]) am Anfange des XVII. Jahrhunderts, und auf den heutigen Tag ist ähnliche Nürnberger Waare grade so gut, nur bei verändertem Gebrauche als Spielwerk, weit und breit zu finden, als damals, da der genannte Hans Laufer in den In- und Umschriften nach dem Geschmacke aller Länder sich richtete[8]), wohin seine Erzeugnisse verkauft wurden.

Ein Land fehlt in der Liste der Gegenden, wohin Rechenpfennige

---

[1]) Alfred Nagl, Die Rechenpfennige und die operative Arithmetik in der (Wiener) Numismatischen Zeitschrift. 19. Jahrgang (1887), S. 309—368. [2]) Ebenda S. 317. [3]) Ebenda S. 328. [4]) Ebenda S. 332—333. [5]) Ebenda S. 336. [6]) Ebenda S. 346. [7]) Ebenda S. 344. [8]) Ebenda S. 346.

gingen, und wo mit solchen umgegangen wurde: Italien[1]). Wenn ein spanischer Schriftsteller Juan Martinez Silicius[2]) im Jahre 1514 das Rechnen auf der Linie lehrt, damit ein Nutzen für alle die daraus erwachse, welche der Zahlzeichen unkundig seien; wenn noch Buffon[3]), der berühmte Naturforscher des XVIII. Jahrhunderts, das Rechnen mit Marken rühmt und erzählt, dass Frauen und so und so viele andere Leute, welche nicht schreiben können oder nicht schreiben wollen, es lieben mit Jetons zu hantiren; wenn um 1611 in Shakespeare's Wintermärchen[4]) (Act IV, Scene 2) der junge Schäfer sagt: ich kann es ohne Rechenpfennige nicht herausbringen, *I cannot do't without counters,* so spricht ein italienischer Humanist vom Ende des XV. Jahrhunderts, Ermolao Barbaro[5]) († 1495), sich mit einigem Hochmuthe dahin aus, die Alten hätten beim Rechnen der Steinchen sich bedient, einer Sitte, die heute noch fast bei allen ungebildeten Völkern sich erhalten habe *(qui mos hodie apud barbaros fere omnes servatur).*

Diese Thatsachen und Erwägungen alle zusammengefasst scheinen mit Nothwendigkeit die Sätze zu begründen, dass das einfache Rechnen mit Rechenpfennigen Jahrhunderte lang neben dem wissenschaftlicheren Kolumnenrechnen, wie neben dem Rechnen mit Zahlzeichen mit Stellungswerth und mit der Null sich erhielt, dass es höchst wahrscheinlich in solchen Gesellschaftsschichten erblich war, welche, um das späte Wort Buffon's zu wiederholen, nicht schreiben konnten oder nicht schreiben wollten, dass innerhalb der vielen Jahrhunderte nur eine wesentliche Aenderung, die der senkrechten Linien in wagrechte, auf nicht mit Sicherheit nachzuweisende Art eintrat, dass von jenem sich vererbenden Nothbehelfe grade Italien, das Mutterland des römischen Abacus, sich vollständig reinigte.

Für diese letztere Erscheinung ist es nicht schwer, eine Begründung zu geben. Haben wir doch grade in Italien ein wissenschaftliches Laien- und Kaufmannsrechnen entstehen sehen! Also eben jene Kreise, die in Frankreich, in Deutschland, in England in dem bequemen Schlendrian alter Unwissenheit weiter lebten und ihm dadurch Erhaltung sicherten, sie waren in Italien die Träger eines Fortschrittes, der neben der Welt der Gelehrten seine eigenen Wege ging. Wer hätte also in Italien die Rechenpfennige und ihren Gebrauch zum Range eines ewigen, weil für Viele unentbehrlichen Mittels erheben sollen?

Eine andere letzte Frage haben wir aufzuwerfen. Wenn Jahr-

---

[1]) Alfred Nagl S. 347—348. [2]) Ebenda S. 326. [3]) Ebenda S. 327. [4]) Ebenda S. 333. [5]) Ebenda S. 348.

hunderte lang nördlich von den Alpen mit Rechenpfennigen gerechnet worden ist, wenn wirklich, wie wir oben sagten, dieses Verfahren in Gesellschaftskreisen niedrigerer Bildung erblich war, ohne dass es nothwendig gewesen zu sein scheint, es in Schriften zu lehren, wie kommt es, dass es nun plötzlich seit Ende des XV. Jahrhunderts in zahllosen Werken mit und neben dem Ziffernrechnen empfohlen wird?

Wir könnten auf diese Frage mit einer Gegenfrage antworten: wie kommt es, dass ein so hervorragender Mathematiker, als Poncelet es war, ein Rechenbrett mit an Drähten aufgereihten Kugeln, welches er als Kriegsgefangener in Russland zum Rechnen hatte verwenden sehen, nach seiner Rückkehr nach Frankreich in die Schulen von Metz einführte[1]), wo es den ganz passenden Namen *boullier*, Kugelbrett, erhielt, dass es von da in fast alle Kinderschulen Europas drang? Poncelet erkannte die Vorzüglichkeit einer Vorrichtung, für welche er als Mittel zum eigentlichen Rechnen sich gewiss nie erwärmt hat, als Lehrmittel, und ein Aehnliches nehmen wir für die Zeit des XV. und XVI. Jahrhunderts in Anspruch. Die Buchdruckerkunst war soeben erfunden. „Mit der Entstehung von Druckschriften wurden die Bildungsstätten für's gemeine Volk zum Bedürfniss und zur Möglichkeit, denn aus Handschriften konnten Bauernkinder nicht lesen lernen"[2]). Und die Schule erzeugte wieder Unterrichtsverfahren. Man konnte, man sollte in durch den Druck vervielfältigten Büchern Lehrmittel schaffen, die Jedem zugänglich seien, die der Gesammtbevölkerung oder doch einem weit grösseren Theile derselben, als bisher dem Unterrichte unterworfen werden konnte, zu Gute kämen. Da musste man bei Abfassung solcher Bücher Umfrage halten, wie es denn in jenen Kreisen üblich sei, die bis dahin nur mündlich unterrichtet worden waren, da musste man dazu kommen, auch die dort herrschende Uebung, falls man ihre Lehrzweckdienlichkeit erkannte, mit dem Freibriefe allgemeiner Anwendung zu versehen. So unsere persönliche Meinung, die wir allerdings mit genauen Beweisen zu unterstützen nicht im Stande sind, die aber uns wenigstens erklärt, was erklären zu wollen noch nicht versucht wurde. Wir könnten zum Vergleiche wie zur Unterstützung daran erinnern, dass in China (Bd. I, S. 629) die Lehrbücher der Rechenkunst für die Addition und Subtraction gar keine Regeln aufstellen, offenbar mit Rücksicht darauf, dass diese Rechnungsarten auf dem Swán pân ausgeführt wurden.

Von dem ersten gedruckten deutschen Rechenbuche sind nur geringfügige Ueberbleibsel[3]), 9 kleine Pergamentstreifchen, erhalten,

---

[1]) Chasles in den *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* vom 26. Juni 1843. T. XVI, pag. 1409. [2]) Unger, S. 2. [3]) Ebenda S. 36.

welche der Bamberger Bibliothek angehören. Sie genügen grade, um durch die Schlussworte *Anno dñi 1482 kl' 16 Iunii p. Henr. peczensteiner Babenberge: finit Ulrich wagner Rechēmeister zu Nürnberg* Drucker und Verfasser kennen zu lernen. Ersterer, Heinrich Petzensteiner, druckte in den Jahren 1482—1490 in Bamberg und ist dadurch in der Geschichte der Buchdruckerkunst wohl bekannt. Letzterer, Ulrich Wagner, gehörte als Nürnberger Rechenmeister einer in deutschen Landen und darüber hinaus berühmten Classe von Männern an, welche, wie wir noch im Verlaufe dieses Abschnittes sehen werden, zur Verbreitung mathematischen Wissens viel beitrugen.

Vielleicht war Wagner auch der Verfasser eines zweiten Rechenbuches, das 1483 bei demselben Drucker Heinrich Petzensteiner erschien und mit dem gleichen Schriftsatz gedruckt worden sein muss, der ein Jahr vorher diente. Dieses Rechenbuch, von dem ersten verschieden, wie aus dem erwähnten Ueberbleibsel des älteren Buches durch Vergleichungen entnommen werden konnte, hat den Namen des Bamberger Rechenbuchs von 1483 erhalten[1]). Es ist in mehrfacher Beziehung wichtig genug, um eine etwas eingehendere Schilderung zu erhalten. Es besteht aus 77 Blättern, zu welchen noch ein „*Register*“ kommt, welches gleichsam Vorrede und Einleitung zugleich darstellt. *Hie nach folget dz Register dises Rechenpuchleins nach seinen Capiteln und was in einem yzlichen begriffen. Hierumb den fleissigen merckern das mit gantzen fleys ersucht mit seinen Canonen*[2]) *und Exempeln nachvolgende und ob yndert eyn ciffern oder mer verkert wern. wil ich entschuldigt sein oder zu vil oder zewenig weren was du gar leichtlich durch die abgemalten Canones und ir regel finden magst alle rechnung in diesem puchlin. Auch ein izlicher in teutschem Lesen und in ciffern erfahren mag an alle unterweyſſung vor im selbs soliches gelernen und garvil alsdan in welschen, teutschen und andern landen in allen kauffschlagen oder kauffmanschatz wie die genant seyn not zu wiſsen ist alles ander daſs gleych magst (an allen zweyffel) vinden. und magst auch sollichs allen nach den rechnungen der ciffern der Tolleten. Auch der linien machen also das du fleissig merckest wie du die rechnung mit der feddern oder kreyden machest das du die pfennig in gleycher weiſs legest.* Wir heben zunächst den Schlusssatz hervor, da aus demselben deutlich hervorgeht, wie dem Verfasser das Rechnen

---

[1]) Unger, S. 37. Durch die grosse Freundlichkeit von Dr. Unger durften wir, ausser den von ihm im Druck veröffentlichten Auszügen, eine von ihm gefertigte Abschrift des ganzen Rechenbuches benutzen. [2]) Im Texte steht *Caconen*, was aber offenbar Druckfehler ist.

auf den Linien mit Rechenpfennigen ein durchaus bekanntes war, wenn er es auch nicht zu lehren beabsichtigte. Solches that ein 1490 bei Lotter in Leipzig gedrucktes Buch, welches den Titel Algorithmus linealis führt[1]), vielleicht das gleiche Werk, welches (S. 217) sich auf Appuleius beruft. Der oben abgedruckte Satz aus dem Bamberger Rechenbuche, dessen Sinn erfordert, dass man ihn abweichend von der Art, wie er gedruckt ist, vielmehr so lese: *magst auch sollichs allen nach den rechnungen der ciffern der Tolleten, auch der Linien machen,* enthält das Wort Tollet, welches uns hier zum ersten Male begegnet. Die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt die Erklärung, welche das Wort Tollet aus dem italienischen tavoletta = kleine Tafel herleitet und sich darauf beruft, dass dazu eine im Auslande etwa vollzogene Verketzerung nicht anzunehmen sei, dass vielmehr im venetianischen Dialekte tavola in *tola,* tavoletta in *toleta* übergegangen sei[2]). Es wäre demnach eine vermuthlich bei venetianer Kaufleuten übliche Methode gewesen, welcher wir hier auf süddeutschem Boden begegnen, eine Annahme, die bei dem regen Verkehr, der zwischen Venedig und Nürnberg stattfand, nichts Auffallendes hat. Einige Bestätigung bieten sogar die in dem Register enthaltenen Beziehungen auf *welsche, teutsche und andern Landen* und auf *kauffschlagen oder kauffmanschatz.* Die Tolletrechnung selbst wird in dem Bamberger Rechenbuche wirklich gelehrt, wie wir sogleich bei der Inhaltsangabe sehen werden. Dieser Inhalt, über den wir, weil es um das erste deutsche gedruckte Rechenbuch sich handelt, genaueren Bericht geben zu sollen meinen[3]), gliedert sich in 21 Kapitel, und zwar betreffen diese:

Kapitel 1. Das Numeriren.

Kapitel 2. Das Addiren unbenannter Zahlen nebst Anwendung der Siebenerprobe.

Kapitel 3. a. Das Subtrahiren unbenannter Zahlen; im Falle einer zu grossen Subtrahendenziffer wird deren dekadische Ergänzung zur Minuendenziffer addirt, warauf die nächste Subtrahendenziffer um 1 erhöht wird. b. Das Addiren und Subtrahiren mehrsortiger Zahlen. c. Die Einmaleinstafel[4]).

Kapitel 4. Das Multipliciren unbenannter Zahlen nach fünf Methoden, deren Verschiedenheit sich auf die Beschaffenheit der

---

[1]) Unger, S. VIII. [2]) Günther, Unterr. Mittela. S. 322—323 mit Berufung auf H. E. Gelcich, *Sull' origine della Toleta dei Veneziani* in der *Rivista della marina mercantile* (Triest 1884, pag. 227). [3]) Wesentlich nach Unger, S. 39—40 und der erwähnten Vergleichung des Textes. [4]) Wenn Unger, S. 39 von der pythagoräischen Einmaleinstafel spricht, so ist dieser Name im Bamberger Rechenbuche selbst nicht genannt.

Factoren gründet. a. Beide Factoren bestehen aus je einer bedeutlichen Ziffer mit Nullen. b. Der eine Factor ist einstellig, der andere mehrstellig. c. Beide Factoren liegen zwischen 10 und 20; das Verfahren folgt der Formel $(10 + a) \cdot (10 + b) = ab + 10(a + b) + 100$. d. Beide Factoren bestehen aus je zwei bedeutlichen Ziffern und werden übers Kreuz multiplicirt. e. Zwei vielstellige Factoren multipliciren einander nach der gewöhnlichen Einrückungsmethode der Theilproducte, wobei der Multiplicator längs einer schrägen Linie geschrieben jede seiner Ziffern neben dem zu ihr gehörigen Theilproducte erscheinen lässt. Die Multiplication 705081 mal 640180 sieht z. B. so aus:

```
        640180
        ------
        640180/1
      5121440/8
      000000/0
    3200900/5
    000000/0
  4481260/7
  ------------
  451378754580
```

Genannt wird diese Multiplication *auf dem Schachir* und erinnert durch den Namen an die schachbrettartigen Verfahren der Inder und Araber (Bd. I, S. 571, 739, 764).

Kapitel 5. a. Das Dividiren unbenannter Zahlen, wobei Unterabtheilungen je nach der Grösse des Divisors gebildet sind. b. Die Progressionen, und zwar sind Summenformeln in Worten gegeben, welche für die arithmetische Progression der Regel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = (1 + n)\frac{n}{2},$$

für die geometrische Progression der Regel

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + q^{n-1}$$

entsprechen, welcher letzteren wir (S. 207) bei Beldomandi begegnet sind.

Kapitel 6. Die Multiplication von Brüchen. Die Brüche selbst, welche hier zuerst auftreten, sind ohne Trennung des Zählers von dem unter ihm befindlichen Nenner durch einen Bruchstrich geschrieben. Dagegen sind die Ziffern nur halb so hoch als bei ganzen Zahlen, wodurch eine Verwechslung verhindert ist. a. Bruch mal Bruch. b. Bruch mal ganze Zahl. c. Gemischte mal gemischte Zahl.

Kapitel 7. Das Addiren der Brüche $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Vom Auf-

suchen eines etwa kleineren Gesammtnenners ist keine Rede, dagegen kommt nachträgliche Kürzung vor, z. B. $\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{82}{48} = 1\frac{17}{24}$.

Kapitel 8. Das Subtrahiren der Brüche ist dem Addiren derselben nachgebildet.

Kapitel 9. a. Das Dividiren eines Bruches durch eine ganze Zahl. b. Das Dividiren eines Bruches durch einen Bruch nach der Regel $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Verdoppelung und Halbirung von Brüchen werden als Sonderfälle ihrer Vervielfachung, beziehungsweise Theilung nachträglich behandelt.

Kapitel 10. „*Die gulden Regel*". Diesen Namen führt von nun an sehr häufig die Regeldetri, *die so kospar und nuez ist denn alle ander regel zu gliechen weys als golt vbertrifft alle and metall.* Es sind nicht weniger als 6 Unterfälle unterschieden. a. Das 1. oder 3. Glied ist die Einheit. b. Kein Glied ist gleich 1. c. In einem Gliede steht ein Bruch. d. In zwei Gliedern stehen Brüche. e. Alle drei Glieder sind Brüche. f. Anwendung der Regeldetri in Waareneinkaufsrechnungen. Was wegen Verpackung nicht als Waarengewicht mitzurechnen ist und später Tara genannt wurde, heisst hier einfach *das Minus* und wird subtrahirt.

Kapitel 11. „*Vom Wechsel*", d. h. Umrechnungen von Geldsorten nach der Veränderung unterworfenen Werthverhältnissen. Der Zuschlag von einer Sorte zur anderen heisst *auffwechsel.* Z. B. *Wieviel Ducaten sind* 1578 *Reichsfl. wenn man auffgibt* $25\frac{3}{4}$ *auf* 100 *Duc. Secz also* 125 *fl* $\frac{3}{4}$ *geben* 100 *Duc. was geben* 1578 *fl.*

Kapitel 12. Waarenrechnung mit Gewinn- oder Verlustermittelung.

Kapitel 13. „*Von geselschafft*". a. Verschiedene Einlagen der Gesellschafter auf gleiche Zeit. b. Verschiedene Einlagen auf verschiedene Zeiten. c. Angabe der Einlagen nach Theilen, z. B. A hat 2 Theile, B hat 3 Theile u. s. w. d. Gegebene Bruchtheile z. B. A hat $\frac{1}{3}$, B hat $\frac{1}{4}$, C hat $\frac{2}{5}$ zu fordern, wo es nicht darauf ankommt, ob $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \lesseqgtr 1$. e. Proportionirte Theilzahlen z. B. $A : B = 3 : 1$, $B : C = 4 : 1$. f. Gewinnberechnung, wenn die Einlagen während der Dauer der Gesellschaft durch Vermehrung oder Verminderung sich ändern.

Kapitel 14. Tolletrechnung[1]). Ein deutscher Schriftsteller des

---

[1]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 98—100. — Unger, S. 94—95.

folgenden Zeitabschnittes, Peter Apianus, hat 1532 die Tolletrechnung durch die Worte erklärt: „Leret durch die Rechenpfenning ein Metall aus dem anderen ziehen", und darnach war es ein Verfahren, mittels dessen das Feingold aus einem goldhaltigen Silber berechnet zu werden pflegte. Es „soll uff einen Tisch die form und gestalt der Tolleten auffgezeychnet werden wie hernach volgt", und da diese Form darin besteht, dass drei kolumnenartige gegen den Rechner senkrechte Räume hergestellt werden, welche durch Querlinien in viereckige Felder getheilt werden, und welche den Namen *cambi* führen, so ist damit bestätigt, was weiter oben über das Wort Tollet vermuthungsweise mitgetheilt wurde, denn erstens ist wirklich eine Tafelform gebildet, und zweitens hängt cambi unzweifelhaft mit dem italienischen cambiare = wechseln, tauschen zusammen. Die Felder der Cambi sind geräumig genug, um in der Mitte eine Bezeichnung zu führen und rechts wie links von derselben Rechenpfennige niederlegen zu lassen, rechts solche, die den Werth einer jeweiligen Einheit besitzen, links solche, die je 5 Einheiten bedeuten. Die für die drei Cambi gleichen Bezeichnungen sind der Figur zu entnehmen:

M	*M*	*M*
C	*C*	*C*
X	*X*	*X*
M	*M*	*M*
X	*X*	*X*
lot	lot	lot
halblot	halblot	halblot
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$

Die Bedeutung der Felderbezeichnung von oben nach unten ist 1000 Mark, 100 Mark, 10 Mark, Mark (oder 16 Lot), dann 10 Lot, einfache Lot und durch fortgesetzte Halbirung gewonnene Unterabtheilungen des Lot, nämlich Halblot, Viertellot bis zu $\frac{1}{256}$ lot. In das erste Cambium ist durch Rechenpfennige das *ganz zerfelt Stuck* anzugeben. Z. B. *einer kaufft ein Stuck Sylber wigt marck* 82 *lott* $14\frac{3}{4}\ \frac{3}{16}$. Hier war in die 10-Markabtheilung die Zahl 8 einzulegen, in die Mark 2, in die 10-Lot 1, in die Lot 4 und dann jeweils 1 in die Abtheilungen halblot, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$. Der Feingehalt richtet sich nach der vorgenommenen Probe *und halt die Marck an der Prob* 2 *lot* $\frac{1}{4}\ \frac{3}{16}$ *Goldt.* Nun beginnt der Rechner mit dem Haupttheile des Stückes, d. h. mit 82 Mark, und legt die Einzelergebnisse in das dritte Cambium. Die 82 Mark liefern 82 mal 2 Lot oder 164 Lot, 82 Viertellot oder 20 Lot und 1 Halblot, 82 Achtellot oder 10 Lot und 1 Viertellot, 82 Sechzehntellot oder 5 Lot und 1 Achtellot. Nach dieser ersten Rechnung kämen die 14 Lot des Stückes an die Reihe. Von ihnen betrachtet der Rechner zuerst 8 Lot, die als $\frac{1}{2}$ Mark die Hälfte von 2 Lot $\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$, d. h. 1 Lot $\frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}$ Feingehalt liefern u. s. w. Das Bamberger Rechenbuch sagt selbst, dass die Regeldetri eine weit kürzere Methode sei[1]), und man wird dem beistimmen. Aber gleichwohl ist der Grundgedanke der vollzogenen Zerlegungen von solchem Vortheile für die wirkliche Ausführung, dass er eine Lebensfähigkeit bewies, die nach Jahrtausenden zu bemessen ist. Unzweifelhaft wurzelnd in der Zerlegung eines Bruches in eine Summe von Stammbrüchen, wie sie von Aegypten ausging, hat das Verfahren, freilich unter Abstreifung der Rechenpfennige und unter Annahme neuer Namen von Italien aus über das ganze handeltreibende Europa sich verbreitet und wird uns bald wieder begegnen. Fahren wir zunächst fort mit der Inhaltsangabe des Bamberger Rechenbuchs, so treffen wir auf

Kapitel 15. *Stich*, d. h. Waarentausch.

Kapitel 16. *Goltrechnung*, eine Aufgabe, welche der im 14. Kapitel behandelten nahe verwandt ist. Das Rauhgewicht des eingekauften Metalls ist in Mark, Lot und Quint gegeben, dazu der Feingehalt in Karat und Gran nebst dem Preise für ein Karat Feingold, und daraus soll der zu zahlende Preis ermittelt werden. Anschliessend ist auch die Aufgabe *Vom wandern* behandelt. *Es seyn zwen gesellen die gend*

[1]) Unger, S. 95.

gen Rom. Eyner get alle tag 6 meyl der ander geth an dem ersten tage 1 meyl an dem andern zwun und alle tag eyner meyl mer dan vor. Nu wildu wissen in wiviel tagen eyner als vil hat gangen als der ander. So nim die zal zwir die der gleych geht. Der wirdet 12 und dar von thu die meyl die der an dem ersten tag ging der ungleych get. Also beleybt dem noch 11 meyl so kummen sie gleich gangen an dem 11 tag. Der Verfasser wusste demnach, dass symmetrisch liegende Glieder der arithmetischen Progression gleiche Summen haben, welche jedesmal dem doppelten Durchschnittswerthe gleichkommen. Nimmt er also diesen doppelt und zieht das erste Reihenglied ab, so muss als Rest das letzte bleiben, welches in der natürlichen Zahlenreihe zugleich die Gliederzahl darstellt.

Kapitel 17. *Von rechnūg vb' lant genāt,* das sind Preisberechnungen mittels einfacher Regeldetri.

Kapitel 18. Zurückführen von Brüchen von Geldsorten auf ganze Zahlen kleinerer Münzeinheiten.

Kapitel 19, 20, 21 enthalten Tabellen, mit deren Hilfe die bei Gold- und Silberrechnungen geforderten Multiplicationen umgangen, beziehungsweise durch Addition von ein für alle mal vorberechneten Ergebnissen ersetzt werden. Das sind jedenfalls die Canones (S. 221), welche das Register anmeldet, und welche für das praktische kaufmännische Leben ganz und gar nicht der Wichtigkeit entbehrten zu einer Zeit, in welcher die Münzmannigfaltigkeit und Münzunsicherheit es geradezu unumgänglich machten, als letztes Vergleichungsmittel die Entmünzung, das Umschmelzen in Barren, vorzunehmen, und deren Werth aus der Menge des in ihnen enthaltenen Feinmetalls, bald Gold bald Silber, zu entnehmen.

So wird auch durch das Vorhandensein dieser Tafeln das Bamberger Rechenbuch wieder als das gekennzeichnet, als was wir es wiederholt genannt haben, als ein Buch für Kaufleute und in von Italien aus beeinflussten Kaufmannskreisen entstanden. Genau zu dem gleichen Ergebnisse wären wir gelangt, wenn wir das Bamberger Rechenbuch auf die Merkmale geprüft hätten, welche von uns wiederholt angerufen wurden, wo es um Einreihung eines Werkes in eine von den grossen, scharf getrennten Klassen von Rechenbüchern sich handelte. Verdoppeln und Halbiren als besondere Rechnungsarten ausgezeichnet oder als solche ganz unbekannt, das war das untrügliche Zeichen, ob wir die Schule des Jordanus, ob die des Leonardo zu erkennen haben. Das Bamberger Rechenbuch weiss von jenen Operationen als Sonderfällen, weiss nichts von ihnen als Rechnungsarten, also ist es auf dem Boden des südlichen Deutschlands ein Ausfluss italienischer Lehren.

54. Kapitel.

Johannes Widmann und die Anfänge einer deutschen Algebra.

Vom Bamberger Rechenbuche gelangen wir zu einem anderen, welches sechs Jahre später in Leipzig gedruckt wurde und seine Abhängigkeit von jenem dadurch erweist, dass viele Stellen wörtlich entlehnt sind[1]). Genannt ist die Quelle aber nicht, sondern als benutzt werden nur angegeben[2]): Johannes von Sacrobosco für das eigentliche Rechnen, Euklid, Campanus, Boethius, Jordanus für Proportionen, endlich Julius Frontinus für Feldmesserisches.

Diese genannten Quellen neben jener nicht genannten, aber nachweislich benutzten, geben dem Werke ein besonderes Interesse. Sie lassen erwarten, dass von den beiden am Schlusse des vorigen Kapitels genannten Schulen ein sich mischender Einfluss vorhanden sein müsse, der sich nachträglich werde erkennen lassen. Sie lassen vermuthen, dass der Verfasser zu den eigentlich gelehrten Kreisen gehört habe, weil er sich nur auf solche Vorgänger beruft, deren Namen in solchen Kreisen einen vorzugsweise guten Klang hatten. Alles dieses bestätigt sich bei genauerem Berichte.

Johannes Widmann von Eger[3]) wurde 1480 im Wintersemester in die Matrikelliste der Universität Leipzig eingetragen und zwar als pauper, d. h. mit einem Armuthszeugnisse. Andere Universitätsacten theilen mit, dass Widmann 1482 Baccalaureus, 1485 Magister unter Erlassung der Kosten wurde. Von da an lehrte er muthmasslich an der gleichen Hochschule, welcher er seine eigene Ausbildung verdankte, denn wenn auch nicht nachgewiesen werden kann, dass Widmann eine leipziger Professur inne hatte, so hat sich dafür der Wortlaut von Vorlesungsanzeigen desselben erhalten[4]). Geburts- und Todesjahr Widmann's kennen wir nicht. Das Werk, welches seinen Namen berühmt gemacht hat, heisst Behende und

---

[1]) Unger, S. 41. [2]) Drobisch, *De Joannis Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum* (1840) pag. 21. [3]) Das Verdienst, Joh. Widmann für die Geschichte der Mathematik entdeckt zu haben, gehört Drobisch an. Vergl. die in Anmerkung 2 genannte Programmschrift zur Säcularfeier der Erfindung der Buchdruckerkunst. Wichtige Untersuchungen stellte später Fürst Boncompagni an in *Bulletino Boncompagni* IX, 188—210 und Treutlein in der Abhandlung: Die deutsche Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft, insbesondere S. 62 flgg., 110 flgg., 118 flgg. Zusammenstellungen bei Gerhardt, Math. Deutschl. S. 30—36, Günther, Unterricht Mittela. S. 304 flgg., Unger S. 40 flgg. [4]) Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Zwickauer Gymnasialprogramm (1887) S. 10.

hubsche Rechnung auf allen kauffmannschafft gedruckt in der Furstlichen Stath Leipczick durch Conradum Kacheloffen im 1489 Jare, und die Vorrede beginnt mit den Worten: *Johannes widmann von Eger Meyster in den freyen kunsten zu Leyptzick entbeut Meyster Sigmunden Smidmule beyerischer nacion heyle und unvordrossen willig dienste*, und in dieser Persönlichkeit ist ein Sigmund Altmann aus Schmidtmühlen in der Oberpfalz am Einflusse der Lauterach in die Vils erkannt worden[1]. Ausser der Ausgabe von 1489 sind noch solche von 1508, 1519, 1526 bekannt, die in Pforzheim, Hagenau, Augsburg gedruckt die weite Verbreitung des Buches erkennen lassen.

Es zerfällt in drei Theile. 1. Von kunst und art der zal an yr selbst, 2. von der ordnung der zal, 3. von der art des messen die da geometria genannt ist.

Die erste Abtheilung lehrt das eigentliche Rechnen an ganzen Zahlen und Brüchen. Halbiren und Verdoppeln erscheinen wieder als besondere Rechnungsarten. Beim Subtrahiren wird wie im Bamberger Rechenbuche verfahren (S. 222), d. h. nach italienisch kaufmännischer Art. Eine Einmaleinstafel ist in zweierlei Gestalt aufgezeichnet, als Dreieck und als Quadrat. Wenn wir die letztere Gestalt von Beldomandi (S. 208) her kennen, so sagt Widmann über die erstere: *dz erst ist eyn tafel gformirt vf den triangel gezogen vſs hebreischer zungen oder judscher.* Welchen jüdischen Schriftsteller er aber meint ist nicht gesagt. Keinenfalls ist an Elias Misrachi zu denken[2], dessen Buch der Zahl, Sefer-Hamispar, erst 1534 im Drucke erschien, wie wir im 60. Kapitel sehen werden. Multiplication und Division erinnern gleichfalls an das Bamberger Rechenbuch. Die Neunerprobe wird gelehrt und neben ihr auch die Siebenerprobe. Beim Wurzelausziehen muss der ganzzahlige Theil einer irrationalen Zahl genügen, Näherung mittels Brüchen ist nicht gelehrt.

Die zweite Abtheilung bringt zunächst die Lehre von den Proportionen, und da, wie wir schon erwähnten, auch Jordanus als Quelle für diesen Abschnitt ausdrücklich genannt ist, so bedarf es keiner ausführlicheren Schilderung, was hier gelehrt wird. Auffallend und geschichtlich wichtig ist nur Eines. Wo das Zusammensetzen von Verhältnissen gelehrt ist, beruft Widmann sich neben und vor Jordanus auf einen römischen Schriftsteller, dessen Namen wir hier

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 304 Note 3. [2]) Drobisch, l. c. pag. 22 und die Arithmetik des Elia Misrachi von Gustav Wertheim (Programm der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt am Main 1893; II. Auflage, Braunschweig 1896).

am wenigsten erwarten, auf Julius Frontinus[1]. Welches Werk dieses Schriftstellers mag hier gemeint sein? Den Proportionen folgt die Regeldetri, *die gulden Regel*, deren Name wie in dem Bamberger Rechenbuche damit gerechtfertigt ist, dass sie alle Regeln übertreffe gleichwie das Gold alle Metalle, aber Widmann fügt noch ein weiteres eigenthümliches Lob bei: man benutze sie *gleycher weiſs alſs eyn Hammer in eyner schmit zu vyl hubschern Dingen gebraucht wirt dan er an ym selbst ist.* Es folgen eine Menge einzelner Aufgaben verschiedensten Namens, auf welche noch zurückgekommen werden soll. Die Zeichen + und — erscheinen und werden nicht einmal als neu eingeführt vorgestellt. Es heisst von ihnen nur „was — ist das ist minus und das + das ist mer". Wir müssen aus mehr als einem Grunde mindestens an dem Wortlaute eines, freilich eigens ausgesuchten Beispiels die Anwendung jener Zeichen bei Widmann kennen lernen. *Eyner hat kaufft* 6 *Eyer* — 2 ₰ *pro* 4 ₰ + 1 *ey. Nu ist die frag wie kupt ein ey.* Die Regel dafür lautet so: *Addir die geminderte zal der ₰ zu der furgelegten zal der ₰ Und subtrahir die zal des dingeſs von der andern zal yrſs gleichen Unnd diuidir die vberige zal der ₰ mit der vbrige zal der gekaufften war. vnd der selbige teylung quocient bericht die frag.* Es wäre schwierig, eine unpassendere Aufgabe zu ersinnen als diese, in welcher die gekaufte Waare gemindertes (also negatives) Geld einschliesst und in dem Preise selbst Waare vorkommt; aber es wäre schwierig, eine geeignetere Aufgabe zu ersinnen, wenn Widmann nichts beabsichtigte, als den Beweis zu führen, wie tief er in den Sinn der beiden Zeichen plus und minus eingedrungen war, wie frei er mit ihnen schaltete.

Die Frage nach dem Ursprunge der beiden Zeichen + und — ist oft gestellt, verschieden beantwortet worden. Widmann, der, soweit man bisher weiss, die Zeichen zuerst im Drucke gebrauchte, sagt nichts von ihrer Herkunft. Ein einziger Italiener, bei welchem sie, wie wir später sehen werden, in einer auch kaum viel älteren Handschrift vorkommen, ist eben so schweigsam. Spätere Schriftsteller geben wieder keine Auskunft. Man ist also ausschliesslich auf Vermuthungen hingewiesen, von welchen uns persönlich kaum eine einzige genügt, wenn wir gleich für Pflicht halten, über einige solche Vermuthungen zu berichten. Gewisse Waaren, meinen die Einen, seien in Kisten verkauft worden, deren Gewicht, wenn sie angefüllt

---

[1]) vnd alſso magstu proporcionem dupliren, tripliren vnd quadrupliren, alſs dan klerlichen aufsdrucken Julius frontinus Unnd auch Jordanus yn den sechysten beschliſs seynes rechenbuchs.

waren, etwa 3 oder 4 Centner betrug. Genau stimmte dieses Soll an Gewicht kaum jemals mit dem wirklichen Gewichte, wie es beim Abwägen der vollen Kiste gefunden wurde. Zeigte sich so das wirkliche Gewicht etwa um 5 Pfund niedriger oder höher als die erwarteten 4 Centner, so habe man das Gewicht mit Kreide auf die Kiste gezeichnet, das eine Mal als 4 C — 5 P, das andere Mal als 4 C + 5 P. Weil nämlich der Fall, dass die Kiste leichter war, häufiger eintrat, sei bei ihm das einfachste Beziehungszeichen gewählt worden, ein kleiner wagrechter Strich, das Pluskreuz sei dann dadurch entstanden, dass man über dem wagrechten Striche ein kleines Unterscheidungsmerkmal anbringen wollte. Nun ist ja richtig, dass im Bamberger Rechenbuche (S. 224) das Bruttogewicht zum Nettogewichte gemacht wird, indem man die Verpackung als *„das Minus“* abzieht, aber von einem Zeichen dieses Minus, dem dort ein Plus nicht gegenübersteht, noch gegenüberstehen kann, ist keine Rede. Wenn vollends behauptet wird, + und — seien überhaupt zuerst nur Abkürzungen, keine Operationszeichen gewesen und hätten diese Bedeutung erst sehr allmälig angenommen, so wird man sich zur Bestätigung dieser Aussage nicht auf Widmann berufen dürfen; dafür giebt der Wortlaut der Aufgabe Zeugniss, den wir oben abgedruckt haben, und der das deutliche Bewusstsein vorzunehmender Rechnungsoperationen, welche durch + und — ausgedrückt sind, an den Tag legt. Konnten wir diesem ersten Erklärungsversuche der beiden Zeichen nicht beipflichten, so scheint uns ein zweiter nicht vorzuziehen. Dieser leitet den Minusstrich aus dem Punkte ab, welchen die Inder über die negative Zahl setzten (Bd. I, S. 580) und lässt dann das Pluszeichen durch ein hinzutretendes Unterscheidungsstrichelchen entstehen. Von einer dritten Ableitung soll die Rede sein, wenn wir mit den italienischen Schriftstellern unseres Abschnittes es zu thun haben. Sagten wir oben, Widmann biete kein Zeugniss dafür, dass + und — ursprünglich Abkürzungen gewesen seien, so stehen andere Zeugnisse dafür zu Gebote. In nicht-mathematischen Handschriften vom Anfange des XIV., in einer mathematischen Handschrift vom Anfange des XV. Jahrhunderts findet sich das Wort *et* durch ein t, dessen senkrechter Strich nach links oben gekrümmt war, dargestellt, etwa so ⁊. Blieb das Häkchen oben weg, so war das einfache stehende Kreuz vorhanden[1]. Das Minuszeichen ist vielleicht dem griechischen ὀβελός ver-

[1] Le Paige, *Sur l'origine de certains signes d'opérations (Mémoire lu à la séance de la première lection de la société scientifique de Bruxelles le 28 Janvier 1892.* — Wilh. Schum, *Exempla codicum Amplonianorum Erfurtensium saeculi IX—XIV* (Berlin 1882), insbesondere Tafel XXXVI (vom Anfange des XIV. Jahrhunderts).

wandt[1]), einem Horizontalstrichelchen, dessen alexandrinische Grammatiker sich bedienten, um das Wegfallen des Verses, dem eben der Obelos vorgezeichnet war, anzudeuten. Von den Alexandrinern ging das Zeichen zu den Römern über. Sueton, später Isidorus, haben es beschrieben.

Wir haben der zahlreichen Namen gedacht, die Widmann als Ueberschrift von Aufgaben gebraucht, und die zugleich den Auflösungsregeln ihren Namen geben, mögen diese auch oft nur in beschränktester Weise als besondere Regeln gelten, beziehungsweise nur ein Verfahren für viele Beispiele vorhanden sein, welches nur bald so, bald so heisst, je nach dem Wortlaute der jedesmaligen Aufgabe. Das ist indische Uebung (Bd. I, S. 577), aber auch italienische, wie wir an einzelnen Beispielen bei Leonardo von Pisa gesehen haben, wie wir an solchen in beliebiger Anzahl hätten hervorheben können, wenn wir noch weitschweifiger in der Berichterstattung über seinen Abacus hätten sein dürfen. Gab es auch arabische Vermittlungsschriften, welche mit dem gleichen Namenreichthum prangten? Wir dürfen es vermuthen, wenn uns auch keine bekannt sind. Oder sollten wir auf byzantinischem Boden diese Vermittlung zu suchen haben? Wir streifen nur diese zur Zeit nicht spruchreife Frage. Genug, am Ende des XV. Jahrhunderts waren die mit Namen belegten sogenannten Regeln aus Italien oder über Italien nach Deutschland gedrungen und haben in Widmann's Buche einen breiten Platz sich angeeignet.

Da findet sich die Regula pulchra d. i. diejenige, welche wir oben bei der Eier- und Pfennigaufgabe wörtlich mitgetheilt haben. Da giebt es eine Regel für die Aufgabe vom Löwen, vom Hunde und vom Wolfe, welche gemeinschaftlich ein Schaf verzehren, wozu der Löwe allein 1 Stunde, der Wolf allein 4 Stunden, der Hund allein 6 Stunden brauchen, während gefragt wird, in welcher Zeit sie zusammen fertig werden. Man solle 1 mal 4 mal 6 zu 24 multipliciren, $\frac{1}{1}$ mal 24, $\frac{1}{4}$ mal 24 und $\frac{1}{6}$ mal 24 zu 34 zusammenaddiren und jene 24 durch diese 34 dividiren: $\frac{24}{34}$ Stunden *macht 42 minuten* $\frac{6}{17}$ *und ist die Zeyt*. Wir erwähnen ferner eine Regula inventionis, fusti (Bruttorechnung), Ligar, legis, augmenti et decrementi, sententiarum (unbestimmte Aufgaben, die mehrere Lösungen

---

[1]) So die Meinung von H. Zangemeister. Vergl. C. Suetoni *Tranquilli praeter Caesarum libros Reliquiae* (ed. Aug. Reifferscheid. Leipzig 1860) pag. 137—138.

zulassen), bona, plurima u. s. w. Die Regula pagamenti verdient, dass wir bei ihr etwas verweilen.

Die Aufgabe lautet wie folgt: *Eyner gent zu wyen yn eyn wechſselvanck und hat 30 ₰ Nurmberger alſso sprechen zu dem wechſsler liber wechſsel mir die 30 ₰ vnd gieb mir wiener dafür als vil sy dan wert seyn also weiſs der wechſsler nicht wie vil er ym wiener ſsol geben vnd begert der muncz underrichtung. Also untterweyst yenner de wechſsler vnd spricht 7 wyener gelten 9 linczer and 8 linczer gelten 11 passawer vnd 12 passawer gelten 13 vilſshofer vnd 15 vilſshofer gelten 10 regensperger vnd 8 regensperger gelten 18 neumercker und 5 neumercker gelten 4 nurmberger wie viel kummen wiener umb 30 nurmbr. Wiltu dz wissen vnd alles des gleichen. Secz die Figur gleich wie die do stet*

7 9 12 13 8 18 30

╲ ╳ ╳ ╳ ╳ ╳

8 11 15 10 5 4

Un multiplicir in kreucz durchauſs auf 2 teyl vnd dividir.

Darnach kommt $\frac{7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 30}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 4} = 13\frac{13}{429}$ mittels des genau gleichen Ansatzes, den wir (S. 14 flgg.) bei Leonardo von Pisa aus dem Satze des Menelaos haben entstehen sehen, indem die Anzahl der zu vereinigenden Verhältnisse sich beliebig vermehren durfte. Wie der Text der Aufgabe auf kaufmännische Beziehungen hinweist, ist uns die Auflösung ein sicheres Kennzeichen dafür, dass es italienische Kaufleute waren, von welchen Widmann hier unmittelbar oder mittelbar gelernt hat, denn das Bamberger Rechenbuch war, wie unser Auszug desselben darthut, an dieser Stelle unmöglich der Ort, woher Widmann den Kettensatz bezog.

Widmann lehrt mitunter einer und derselben Gattung von Aufgaben auf zwei Arten beikommen, ohne dass er auf die Uebereinstimmung zwischen den Aufgaben selbst irgend hinweist. Es ist dieses am deutlichsten bei unreinen quadratischen Gleichungen bemerkt worden. *Eyner leycht dem Andern 25 fl. 2 Jar umb gewin. Nu wen die 2 iar vergangen seyn ſso giebt yenner dem wider seyn Hauptsum vnd fur gewin vnd gewinſs gwin giebt er ym 24 fl. Nu ist die frag. Wie viel haben die 25 fl. gewunnen in dem ersten jar.* Heisst x jener Jahreszins, so ist $\frac{25+x}{25}$ mal x der Jahreszins des zweiten Jahres, und es muss sein $x + \frac{(25+x)x}{25} = 24$, $x^2 + 50x = 600$, $x = \sqrt{25 \cdot 24 + 25^2} - 25$. Widmann bildet die Gleichung nicht, sondern giebt die Regula lucri, unter lucrum = Gewinn hier Zins verstehend. *Multiplicir die hauptsum yn den gewin darnach*

multiplicir dy hauptsum in sich selbst quadrate Und addir das product zu dem ersten product Und die wurtzel der ganzen sum so du davon subtrahirest dy hauptsum bericht den gewin der hauptsum Und Ist Recht. Das hindert ihn aber keineswegs, ein anderes Mal für eine Aufgabe, welche wieder die Gleichungsform $x^2 + ax = b$ entstehen lässt, die Regula excessus in Anspruch zu nehmen. *Also soltu procedirn in dieser Regl· Multiplicir der vbertretung das halbe teyl in sich selbst vnd das product addir zu der Hauptsum. Darnach nym radicem quadratam des selbige aggregates vnd davon subtrahir das halbe teyl der vntterscheyd oder vbertretung vnd das vberig ist die kleiner zal. zu welicher so du addirest die vbertretung erwechst auch die groſser.*

Hat Widmann wirklich selbst nicht bemerkt, dass er so zwei Mal unter zwei verschiedenen Namen das gleiche Verfahren lehrte? Man sollte es für undenkbar halten, insbesondere da er gewusst hat, dass es die Regel Algobre oder Cosse genannt gebe, da er ferner von der Regel des doppelten falschen Ansatzes Gebrauch zu machen lehrte, indem er seine Anweisung dazu mit den Worten eröffnete: *Nu soltu wissen das Regula falsi ist eyn Regel durch welche man aller Regel (hint an gesaczt Regulam Cosse) machen mag.* Das Wissen Widmann's wird uns noch bestätigt durch die Thatsache, dass er Vorlesungen über Algebra gehalten hat. Also trotz bessern Wissens scheint er der Neigung der Zeit, sich in recht vielen Regeln zu ergehen und durch Namenreichthum die Gedankenarmuth zn verhüllen, sich gefügt zu haben. Wir kommen auf die Algebra zurück, wollen aber vorher den Bericht über das Widmannsche Buch zu Ende führen, dessen letzte Abtheilung noch unserer Besprechung harrt.

Die dritte Abtheilung handelt von Geometrie und beruft sich, wie schon gesagt worden ist, auf Julius Frontinus. Wir haben wiederholt geometrische Lehren auftreten sehen, wenn auch deren Umfang nicht an den der Schriften über die Rechenkunst heranreicht. Wir haben gesehen, dass es wesentlich um griechisch-arabische Geometrie dabei sich handelte, dass Euklidübersetzungen und Erläuterungen dazu den Grundstock geometrischen Wissens lieferten, neben welchem Einiges über Kreisquadratur in Abhängigkeit von Archimed, daneben Trigonometrisches, in einem Falle auch etwas Feldmessung geübt wurde. Eine Abhängigkeit von römischer Feldmesskunst ist uns seit dem Anfange des XIII. Jahrhunderts nicht wieder begegnet. Bei der gegenwärtig immer noch grossen Lückenhaftigkeit unseres Wissens ist es gewagt, allgemeine Theorien aufzustellen. Neu nutzbar gemachte Handschriften können

die schönsten Begründungen über den Haufen werfen, wenn auch eine deutsche Geometrie von 1477 in der Münchner Bibliothek[1]) sich nur als Uebersetzung der Schrift des Robertus Anglicus herausgestellt hat; aber es will scheinen, als habe man in den etwa zweiundeinhalb Jahrhunderten von 1200 bis nach 1450 so unbedingt unter dem Einflusse griechisch-arabisch-lateinischer Geometrie gestanden, dass man anderes Wissen nicht aufsuchte. Die Zeit des beginnenden Humanismus brachte Aenderung. Wenn Georg von Peurbach in Wien Vorlesungen über lateinische Dichter hielt (S. 180), so musste das erwachte Bewusstsein, dass römische Schriftsteller, gleichwie die griechischen, Dinge hinterlassen hatten, die es verdienten gelesen zu werden, und die vermöge der erhaltenen Kenntniss der Sprache auch verhältnissmässig leicht zu lesen waren, eine Wissbegier erregen, die zur Neugier anwuchs. Jetzt mussten die agrimensorischen Handschriften, wo sich etwa solche vorfinden mochten, gesucht und studirt werden, jetzt musste bei der verhältnissmässig viel geringeren Beschäftigung mit Geometrie als mit den rechnerischen Theilen der Mathematik prüfungslose Aufnahme finden, was bei jenen römischen Feldmessern sich vorfand, mochte es auch Widersprüche gegen aus griechisch-arabischen Quellen Bekanntes darbieten. Gewissenhaft vereinigte man beides, ohne die Widersprüche auch nur zu bemerken.

Wir haben uns die hier entwickelte Meinung zum nicht geringen Theile an dem Widmann'schen Buche gebildet, kein Wunder, wenn es dieselbe lediglich bestätigt. Der Name *Helmuaym* für den Rhombus, *Helmuaripha* für das Trapez lassen sofort den Leser der Euklidausgabe des Campanus erkennen, für das Meiste aber, was im geomemetrischen Abschnitte des Widmann'schen Buches sich der Aufmerksamkeit aufdrängt, ist die römische Quelle verantwortlich zu machen.

Da findet sich die Ausrechnung der Fläche des gleichseitigen Dreiecks als Dreieckszahl, die sonstiger Vielecke als Vieleckszahl. Es findet sich die Fläche des Vierecks als Product der halben Summen einander gegenüberliegender Seiten. Es findet sich aber auch der Durchmesser des Innenkreises eines rechtwinkligen Dreiecks als Unterschied der Kathetensumme und der Hypotenuse, die heronische Formel für die Dreiecksfläche aus den drei Seiten geprüft an dem Dreiecke von den Seiten 13, 14, 15. Es finden sich die Abschnitte, welche die Höhe eines Dreiecks auf der Grundlinie bildet. Es findet sich ausserdem eine Berechnung des Halbmessers des Umkreises des

---

[1]) *Cod. German.* Nr. 328 Blatt 62—73. Auf diese Handschrift hat schon Max. Curtze Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-liter. Abthlg. S. 58 aufmerksam gemacht und sie später näher untersucht.

Dreiecks mittels jener Abschnitte und der Höhe, welche darauf hinauskommt, dass wenn h die Höhe, b die Grundlinie, k deren kleineren Abschnitt bedeutet,

$$r = \sqrt{\left(\left[\frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h}\right)^2 + \frac{b^2}{4}\right]}$$

sein muss. Diese Formel kennen wir bei keinem einzigen anderen Schriftsteller! Entweder war sie in dem Werke des Frontinus enthalten, welches, nachdem Widmann es benutzt hatte, spurlos verloren gegangen ist, oder sie war Eigenthum Widmann's, was man nicht als ein Ding der Unmöglichkeit betrachten darf, nachdem es gelungen ist[1], die Formel genau in der von Widmann benutzten Gestalt so abzuleiten, dass nur einfachste Vorkenntnisse vorausgesetzt werden.

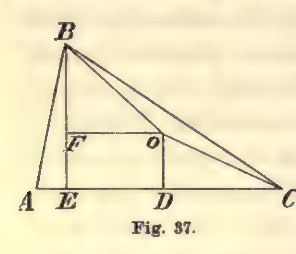


Fig. 37.

Sei (Fig. 37) $AC = b$, $AD = \frac{b}{2}$, $AE = k$, $BE = h$, $OC = OB = r$. Aus $\triangle OCD$ ergiebt sich sofort $r = \sqrt{OD^2 + \frac{b^2}{4}}$, mithin ist nur noch OD zu finden, welches kürzer s heissen mag. Neben $r^2 - s^2 = \frac{b^2}{4}$ ist aber noch eine Gleichung bekannt. $FE = OD = s$, $BF = h - s$, $OF = DE = \frac{b}{2} - k$, mithin im $\triangle BFO$ auch

$$r^2 = (h - s)^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2$$

beziehungsweise $r^2 - s^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - 2hs$ und durch Gleichsetzung der beiden Werthe für $r^2 - s^2$ endlich

$$s = \frac{h^2 + \left(\frac{b}{2} - k\right)^2 - \frac{b^2}{4}}{2h},$$

was zu finden war.

Gleichfalls neu, mithin den Zweifel anregend, ob Römisches oder von Widmann Beigefügtes vorliege, sind die Aufgaben, die Seiten eines Quadrates und eines gleichseitigen Dreiecks aufzufinden, welche beide in einen Halbkreis eingezeichnet sind. Was die geometrischen Kunstausdrücke betrifft, so ist immerhin bemerkenswerth, dass das römische *coraustus* (Bd. I, S. 516) bei Widmann nicht vorkommt[2]. *Punctus ist ein klein Ding, das nit zu theilen ist. — Angulus ist ein*

---

[1]) Die Herleitung rührt von H. Ad. Lorsch, einem früheren Zuhörer unserer Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, her. [2]) Drobisch, l. c. pag. 30 Note **.

Winkel der da gemacht ist von zweien Linien. Man unterscheidet *gescherffte* (spitze) und *weyte* (stumpfe) Winkel. *Das centrum das ist die zall die do ist von centruz bifs in winckel* u. s. w. Das sind einige von den vorkommenden Erklärungen. Das wichtigste geschichtliche Ergebniss der dritten Abtheilung wird unbedingt darin bestehen, dass sie so gut wie ausser Zweifel setzt, dass das feldmesserische Werk des Frontinus, welches im XII. und XIII. Jahrhunderte benutzt wurde (Bd. I, S. 512—513), auch am Ende des XV. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen sein muss, um von Widmann als Quelle genannt werden zu können.

Ungefähr um die Zeit Widmann's ist ferner das Vorhandensein des ersten Visierbüchleins nachweisbar, gedruckt 1487 unter dem Titel[1] *ein Fisierbüchlein auf allerhand Eich* verfasst von Hanns Briefmaler aus Nürnberg, der 1487 seinen Wohnsitz und eine Druckerwerkstätte nach Bamberg, noch später nach Erfurt verlegte. Als Namen des Verfassers wird neben Briefmaler auch Hanns Buchdrucker und Hanns Sporer angegeben, welche demnach alle drei die gleiche Persönlichkeit bezeichnen. Visierkunst heisst von dieser Zeit an die Lösung der Aufgabe, den Rauminhalt eines Fasses zu finden, welches entweder ganz oder theilweise mit Flüssigkeit angefüllt ist. Man bediente sich dazu der Visierruthe, welche durch das Spundloch des Fasses eingeführt wurde und die Tiefe zu messen gestattete, bei welcher der Flüssigkeitsspiegel sich befand, worauf man nach erfahrungsmässig hergestellten, oder aus einfachsten Annahmen über die als Cylinder betrachtete Fassgestalt abgeleiteten Regeln den Inhalt bestimmte.

Vielleicht gehören der gleichen Zeit Schriften an, welche sich in Münchner Handschriften des XV. Jahrhunderts erhalten haben: der Liber theoreumacie in Cod. lat. Mon. 14684 und die Geometria arithmeticalis in Cod. lat. Mon. 14783, welche letztere allerdings nur in einer Ineinanderschiebung des erstgenannten Buches und der Gerbert'schen Geometrie besteht[2]. Der Liber theoreumacie[3] lässt auf einen kurz gefassten Algorismus geometrische Lehren folgen: Theilung einer Strecke nach vorgeschriebenem Verhältnisse, gleichseitiges Dreieck, Peripheriewinkel im Halbkreise, Bestimmung eines verloren gegangenen Kreismittelpunktes, Berechnung des Rechtecks und des Kreisinhaltes, Kubatur der Kugel, Fassberechnung, einfache stereometrische Formen. An diese geometrische Abtheilung schliesst sich Weniges über Musik und Astronomie.

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S 329. [2]) Curtze brieflich. [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 128—129.

Wir haben (S. 234) auch zugesagt, auf das algebraische Wissen zurückzukommen, welches, wenn auch im geringen Maasse, in Widmann's Rechenbuche sich verrieth. Wie stand es in Deutschland um diesen Wissenszweig? Zwei Quellen waren ja auch hier, genau so wie bei der Rechenkunst, vorhanden, aus welchen die Kenntniss der Gleichungen und ihrer Auflösung nach Deutschland abfliessen konnten. Die Schrift des Jordanus De numeris datis ist heute noch in deutschen Handschriftensammlungen vorhanden; sie hat gewiss nie gänzlich aufgehört gelesen zu werden, so selten sie auch verstanden worden sein mag. Am Ersten dürfte das noch innerhalb des Dominicanerordens der Fall gewesen sein, wo es gewiss nahe lag, die Erinnerung an eines der berühmtesten Mitglieder wach zu erhalten, und so ist es gewiss kein Zufall, wenn schon vor 1471 ein Bruder Aquinus oder Aquinas vom Predigerorden genannt wird[1]), der in Deutschland reiste und bald da bald dort für Geld lehrte, wie man Gleichungen auflöse. Dieser Mönch wird bald als Däne (Dacus), bald als Schwabe bezeichnet. Er lebte 1489 in Bayern. Ein damals dorthin an Aquinus gerichteter Brief aus Mailand ist noch vorhanden. Der Inhalt verräth dieses Schreiben als eines unter zahlreichen, in welchen die Briefsteller sich gegenseitig mathematische Aufgaben vorlegten. In dem erhaltenen Briefe sollen die Aufgaben ausschliesslich der Geometrie angehören. Noch aus dem Jahre 1494 wird in einer Ordensquelle über Bruder Aquinus berichtet, dass er damals bei Otto von Bayern gelebt habe und sich durch Geist und feine Bildung sowie durch Wissenschaftlichkeit auszeichnete. Dass aber, um zu der anderen Quelle überzugehen, der italienische Kaufmann das algebraische Erbtheil des Leonardo bewahrte, wissen wir nicht minder. Dass durch ihn Theile davon nach Deutschland, nach Frankreich, nach England, überallhin wo italienische Handelsniederlassungen waren, oder von wo man regelmässig um des Handels willen nach Italien zog, gelangen konnten, das steht nicht minder ausser allem Zweifel. Es fragt sich nur, wann und von welcher Seite her das Wissen einiger Wenigen sich zu verallgemeinern begann, und ob man im Stande ist, eine oder die andere Persönlichkeit zu nennen, welcher hier hervorragende Verdienste zukommen.

Die älteste Spur deutscher Algebra aus dem Jahre 1461 ist in einer münchener Handschrift enthalten. Es ist ein Sammelband[2]), welcher theils in lateinischer, theils in deutscher Sprache die

---

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 48 Note 1. [2]) Die münchner Handschrift Nr. 14908 aus St. Emmeran ist durch Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1870 S. 141—143 beschrieben. C. J. Gerhardt hat

Summe des damals in Deutschland vorhandenen mathematischen Wissens enthält. Der Algorismus proportionum des Oresme fehlt darin so wenig als die Geometrie des Bradwardinus. Die geometrischen Schriften des Nicolaus Cusanus sind mit der Geometria practica cum figuris des Dominicus de Clavasio vereinigt. In lateinischer Sprache ist eine, wie es scheint, vollständige Bruchrechnung (Addition, Subtraction, Verdoppelung, Halbirung, Multiplication, Division, Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln) gelehrt. Wir dürfen wohl, ohne Zweifel zu begegnen, annehmen, diese Schriften insgesammt stammen aus eigentlichen Gelehrtenkreisen. Nun kommt aber die höchst auffallende Erscheinung, dass zwischen jene Schriften hinein Abhandlungen in deutscher Sprache fallen, wenn auch selbst wieder lateinisch untermischt. Der Schreiber, vielleicht der Verfasser der Abhandlungen nennt sich Frater Fridericus Ordinis S. Benedicti professus Monasterii St. Emmerani Ratisponensis, und die Jahreszahlen, durch welche er die Vollendung einzelner Abschnitte bezeugt, reichen von 1455 bis 1464. Der Inhalt stimmt einigermassen mit Widmann's Rechenbuche überein. Arithmetisches von graden und ungraden sowie von vollkommenen Zahlen macht den Anfang. Daran schliessen sich Progressionen, die Regula falsi, eine Menge einzelbenannter Regeln, wie die aurea Regula vel de tre mit theils deutschen, theils lateinischen Beispielen, die Regula ligar, die Conversa regula de tre, De societatibus aenigmata u. s. w.

In diesem Zusammenhange erscheint das vorerwähnte deutsche Stück Algebra mit der Jahreszahl 1461, welches im Abdrucke 33 Zeilen lang ist. Der Anfang lautet: *Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet diese Wort census, radix, numerus. Census ist ain yede zal die in sich selb multiplicirt wirt, das ist numerus quadratus. Radix ist die wurtz der zal oder des zins. Numerus ist ain zal für sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurtz ist.* Diese ersten Sätze zeigen deutlich, dass ein Auszug aus der Algebra des Alchwarizmî vorliegt, und die sechs Gleichungsformen, welche dann nachfolgend beschrieben sind, das Zahlenbeispiel

$$x^2 + 10x = 39$$

(Bd. I, S. 676—678) bestätigen den Ursprung. Eines leider lässt sich

überhaupt sehr erfolgreiche Forschungen über die Verbreitung der Algebra in Deutschland angestellt. Berl. Monatsber. Akad. 1867, S. 38 flgg. und 1870 S. 141 flgg. Kaum minder wichtig ist Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhundert (Zwickauer Gymnasialprogramm von 1887). Abschliessend ist die Abhandlung: Curtze, Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im XV. Jahrhunderte. Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 31—74.

dem Bruchstücke nicht entnehmen, was grade das Wichtigste wäre: auf welche Weise der Verfasser selbst zu seinem Wissen kam. Hat er nur ein arabisches Original vor sich gehabt? Schwerlich; denn wie hätte er sonst genau zu den gleichen Wortformen census, radix, numerus kommen wollen, welche von nichtdeutschen Bearbeitern gebraucht wurden. Hat er eine lateinische Uebersetzung, etwa die des Gerhard von Cremona (Bd. I, S. 854) benutzt, oder hat er unmittelbar oder mittelbar Leonardo's Abacus gekannt, welchem er (S. 34) genau das Gleiche entnehmen konnte? Darauf kommt es uns an Auskunft zu erhalten, und darauf bleibt die münchner Handschrift die Antwort schuldig. Aber nicht genug der Räthsel! Nur vier Seiten weiter folgt, aber nicht von Frater Fridericus geschrieben, *Regule delacose secundum 6 capitula*, Algebraisches von unzweifelhaft italienischem Ursprunge, wie die vorkommenden Kunstausdrücke numerus, cosa, censo, cubo, censo di censo, cubo di cubo beweisen, deren beide erste deutsch durch zal und ding übersetzt sind. Entsprechend der Verbindung das Ding heisst die Unbekannte manchmal auch das cosa. *Censo di censo* ist die 4., *cubo di cubo* die 6. Potenz der Unbekannten, deren Exponent $6 = 3 + 3$ durch Addition der beiden in ihrer Wortbezeichnung vorkommenden Bestandtheile gebildet ist. Von dem anonymen Schreiber oder Verfasser der Regule delacose sind in dem Sammelbande auch zwei Abhandlungen über den doppelten falschen Ansatz vorhanden. In einem Beispiele zu der Algebra des Frater Fridericus, welches auf $43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31u + 17$ hinausläuft, ist die Regel Ta yen angewandt[1]).

Eine wiener Handschrift[2]) besitzt die Ueberschrift Regule Cose vel Algobre und weist durch den ersteren Namen nach Italien hinüber. Es ist nur bedauerlich, dass auch dieser Handschrift, weil erst dem XVI. Jahrhunderte entstammend, eine Beweiskraft nicht innewohnt, und so dürfte die Widmann'sche Stelle von der *Regel Algebre oder Cosse* (S. 234) die älteste sein, welche als Zeugniss dafür betrachtet werden kann, dass der Verfasser wusste, dass in Italien, wohin allein das Wort Cosse verweisen kann, die Kunst der Algebra in Uebung war.

---

[1]) Curtze l. c. S. 64—66 in den Fussnoten. [2]) Die Handschrift findet sich in einem Bande Nr. 5277 und ist von Gerhardt Berl. Monatsber. Akad. 1867 S. 46 und 1870 S. 143 dem XV. Jahrhundert zugeschrieben. In dem 1870 gedruckten Kataloge der Wiener Handschriften ist sie dagegen für das XVI. Jahrhundert in Anspruch genommen, und Wappler hat (l. c. S. 3 Note 2) dieses bestätigt.

Widmann selbst benutzte, wie nachgewiesen worden ist[1]), einen Band Handschriften, welcher auf den heutigen Tag in der Dresdener Bibliothek vorhanden ist, und in welchem verschiedene algebraische Abhandlungen vereinigt sind. Eine derselben ist deutsch und beginnt mit den Worten[2]): *Meysterliche kunst, daſs ist meysterlich zu wissen rechnung zu machen von Den meysteren, Dy do gezogen sind aus Czebreyen.* Was ist unter diesen Worten zu verstehen? Jedenfalls scheint die Meinung dahin zu gehen, die Quelle der algebraischen Lehren sei *Czebreyn*, aber was bedeutet dieser Ausdruck? Ist es der Name eines vermutheten Erfinders, oder der eines Werkes? Sollte etwa der Doppelname der Algebra „Aldschebr walmukâbala" (Bd. I, S. 676) durch den ersten allein ersetzt sein, der dafür die Dualform annahm, was arabischem Sprachgebrauche ganz angemessen ist[3]), so dass alsdann unter Verlust des Artikels dschebrain zu Czebreyn wurde?

So zweifelhaft die Erklärung der ersten Worte ist, so unzweifelhaft ist die Bedeutung des sich daran Anschliessenden. *Denn synt 6 capitell geformet, auſs den 6 capitelen dy 24 capittell, mag man machen alle gemeyen rechnung, sint durch eyn capittell zu machen gewiſslich.* D. h. man hat 6 Fälle, beziehungsweise 6 Gleichungsformen zu unterscheiden, welche sich zu 24 Formen erweitern lassen, und in eine dieser Formen, der 6 ursprünglichen oder der 18 hinzutretenden, passt jede auflösbare Gleichung. Die 24 Kapitel oder Fälle, welche von nun an geraume Zeit in allen algebraischen Schriften erscheinen, zerfallen somit von selbst in 2 Gruppen von 6 und 18 und in der Handschrift sind es folgende, wenn wir sie in die heute übliche Form kleiden.

I.

1. $ax = b$	2. $ax^2 = b$
3. $ax^2 = bx$	4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$	6. $ax^2 = bx + c$.

II.

1. $ax^4 = bx^3$	2. $ax^4 = bx^2$
3. $ax^4 = bx$	4. $ax^4 = b$
5. $ax^3 = bx^2$	6. $ax^3 = bx$

---

[1]) Wappler l. c. S. 9—10. Der Handschriftenband Widmann's ist in der Dresdener Bibliothek mit C 80 bezeichnet. [2]) Wappler l. c. S. 4. Wir haben beim Abdrucke die Rechtschreibung unverändert gelassen, aber zur Erleichterung des Verständnisses Satzzeichen eingeschoben. [3]) So die Meinung unseres verehrten, der Wissenschaft allzufrüh entrissenen Freundes H. Thorbecke.

7. $ax^3 = b$	8. $ax^3 + bx^2 = cx$
9. $ax^3 = bx^2 + cx$	10. $ax^3 + cx = bx^2$
11. $ax^4 = bx^3 + cx^2$	12. $ax^4 + bx^3 = cx^2$
13. $ax^4 + cx^2 = bx^3$	14. $ax^2 = b\sqrt{x^2}$
15. $ax^2 = \sqrt{bx}$	16. $ax^4 + bx^2 = c$
17. $ax^4 + c = bx^2$	18. $ax^4 = bx^2 + c.$

Wir erkennen darin Folgendes: Man war im Stande Gleichungen 1. und 2. Grades unbedingt aufzulösen, Gleichungen 3. und 4. Grades, sofern sie reine Gleichungen waren, oder durch Divisionen auf quadratische Gleichungen sich zurückführen liessen, oder endlich diese Zurückführung dadurch gestatteten, dass man das Quadrat der Unbekannten als neue Unbekannte betrachtete.

Es versteht sich von selbst, dass die 24 Gleichungsformen durch Worte dargestellt werden, in welchen gewisse Kunstausdrücke eine wesentliche Rolle spielen: zall, dingk, zensi, chubi, wurzell von der wurzell bedeuten der Reihe nach die Gleichungsconstante und die 1., 2., 3., 4. Potenz der Unbekannten. Nachträglich sind dann für diese fünf Ausdrücke ebensoviele Zeichen eingeführt:

𝔯, ϑ, ʒ, chu, ꝛ von ꝛ.

Die Multiplications- und Divisionsregeln für diese Grössen sind gelehrt, in welchen das Vervielfältigungswort „mal“ regelmässig stund heisst. Ein Additionszeichen kommt nicht vor; statt dessen ist immer vnnd gesagt. Dagegen erscheint der Subtractionsstrich mit der Aussprache minner. Die Bedeutung des höchst überraschenden „wurzell von der wurzell“, wo man etwa zensizensi erwarten sollte, ist durch die Multiplications- und Divisionsregeln sicher gestellt.

Einige wenige Beispiele mögen diese Angaben bestätigen: „4 ϑ minner 5 𝔯 stund 2 ϑ minner 3 𝔯 so sprich 4 ϑ stund 2 ϑ macht 8 ʒ. Nu mach 3 𝔯 stund 4 ϑ daz ist 12 ϑ minner und mach 5 𝔯 stund 2 ϑ daz ist 10 ϑ minner also macht es alz sammet 8 ʒ und 15 𝔯 minner 22 ϑ“. Ferner „ϑ stund chu macht ꝛ von ꝛ“ sowie „teyl mir ꝛ von ꝛ durch ʒ so kumpt ʒ“.

Was den Ursprung der Zeichen betrifft, so sind die Anfangslaute der Wörter Dingk, Zensi, Chubi unverkennbar, wozu es keinerlei Gegensatz bildet, dass das hier Dingk ausgesprochene Zeichen in anderen Handschriften als regelmässige Abkürzung von Denarius auftritt. Dagegen erscheint das Zeichen für Zall und das für Wurzell von der wurzell räthselhaft. Soll das erste ein *r* sein? das würde aber als Anfangsbuchstabe von res weit eher für die Unbekannte, als für die Gleichungsconstante passen. Und nun vollends das letzte

Zeichen der Verdoppelung des ersten ähnelnd, aber doch von ihm unterscheidbar, soll es auch mit *r* als Anfangsbuchstabe von radix in Verbindung zu setzen sein? Wir wissen nicht Bescheid darüber. Nur soviel geht aus einer Aufgabe hervor, dass das einfach geschriebene 𝔯 die Bedeutung Quadratwurzel besitzt. Die Unbekannte soll nämlich daraus gefunden werden, dass $\frac{2}{3}$ derselben mal $\frac{3}{4}$ derselben oder $\frac{1}{2}$ ihres Quadrates 20 betrage. Das Quadrat ist demnach 40, und „𝔯 von 40“ ist die Unbekannte.

Wie wenig Sicherheit übrigens in der Zeit, als die Handschrift entstand, noch in der Benutzung der Zeichen obwaltete, mag daraus entnommen werden, dass der gleiche Sammelband eine andere lateinische Schrift enthält, welche wesentlich andere Zeichen benutzt, während der übrige Inhalt sich nur durch grössere Ausführlichkeit von dem der deutschen Algebra unterscheidet[1].

ø, 𝔯, 𝔷, 𝔠, 𝔷𝔷

sind in dieser lateinischen Algebra die Vertreter der oben angeführten Zeichen. Das Zeichen der Unbekannten und ihrer 3. Potenz mag sich als d und c deuten lassen, das für die 2. und 4. Potenz der Unbekannten ist unzweifelhaft ein einmaliges und doppeltes z; aber das Zeichen für die Constante macht wieder Schwierigkeit. Sollte die durchstrichene Null andeuten wollen, es sei ein Zeichen keiner Unbekannten? Ausserdem sind in der lateinischen Algebra Zeichen für Wurzelausziehung[2]) hinzugekommen, und zwar Pünktchen, welche dem Radicanden vorgesetzt werden. Ein Pünktchen bedeutet die Quadratwurzel, zwei die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, drei die Kubikwurzel, vier die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel in offenbar ziemlich wenig folgerichtiger Anwendung. Man hat den Versuch gemacht[3]) für diese Wurzelausziehungspünktchen einen arabischen Ursprung wahrscheinlich zu machen. Wir wissen, dass bei Westarabern, insbesondere bei einem annähernden Zeitgenossen der Schriftsteller, die uns hier beschäftigen, bei Alkalsâdî (Bd. I, S. 765—766) gleichfalls ein Quadratwurzelzeichen vorkam, nämlich der über dem Radicanden stehende Buchstabe dschim (Anfang von Dschidr = Wurzel). Bei der praktischen Ausziehung der Quadratwurzel benutzte alsdann Alkalsâdî Pünktchen, die jeweils über die grade in Betracht kommende Radicandenstelle gesetzt wurden, mithin viele Pünktchen nach einander bei derselben Quadratwurzelausziehung[4]). Es erscheint

---

[1]) Wappler l. c. S. 11—30. [2]) Ebenda S. 13 Note 1. [3]) Gerhardt in den Berl. Monatsber. Akad. 1870, 150—151. [4]) Woepke, *Traduction du traité d'arithmétique d'Abul Hasan Ali ben Mohammed Alcalsadi* in den *Atti dell' Accademia pontificia de' nuovi Lincei* XII, 400—402.

mindestens sehr gewagt aus diesen Hilfspünktchen über dem Radicanden die als Wurzelzeichen dienenden Pünktchen vor dem Radicanden ableiten zu wollen, deren Anzahl nicht von der Ziffernzahl des Radicanden, sondern von dem Wurzelexponenten abhängt. Eine uns befriedigende Vermuthung an die Stelle der zurückgewiesenen zu setzen, sind wir nicht im Stande, sondern müssen uns begnügen, wie leider nur zu oft, auf die Möglichkeit zu vertrösten, dass neue Entdeckungen diese Lücke einmal ausfüllen können.

Der Verfasser dieser lateinischen Algebra muss eine in mancher Beziehung vorzügliche Vorlage besessen haben. Er behandelt wenigstens Alles von einem viel höheren Standpunkte aus und zeigt gleich zu Anfang, wie und wann Gleichungen höherer Grade sich auf solche niedrigeren Grades zurückführen und auflösen lassen. Die einzelnen Potenzen der Unbekannten nennt er Zeichen, *signa*, jedenfalls im Gedanken an die statt derselben zu schreibenden Zeichen. Diese bekannten signa sollen nun von ø beginnend der Reihe nach hingeschrieben werden. Man könnte fast an die nullte Potenz der Unbekannten bei dieser Vorschrift denken, wenn unsere oben ausgesprochene Vermuthung über die mögliche Entstehung des Zeichens ø richtig sein sollte. Hat man die Zeichenreihe hergestellt, so ordnet man die Glieder einer vorgelegten Gleichung ebenfalls dem Range nach und setzt ihre Zeichen über die erwähnte Zeichenreihe, das niederste über ø, das andere, beziehungsweise die anderen, wenn die Gleichung dreigliedrig ist, über die folgenden in Entfernungen, die mit denen der hingeschriebenen Zeichen übereinstimmen. Benutzen wir zur leichteren Uebersicht die heutigen Zeichen, so verlangt der Verfasser Folgendes. Es soll die Grundreihe

$$x^0,\quad x^1,\quad x^2,\quad x^3\ldots$$

hingeschrieben werden. In der vorgelegten Gleichung kommen $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ vor, wo $\alpha < \beta < \gamma$ und $\beta - \alpha = m$, $\gamma - \alpha = n$ ist. Dann ist x^α über x^0, x^β über x^m, x^γ über x^n zu schreiben, beziehungsweise innerhalb der Gleichung durch das „Zeichen“, über welchem es sich befindet, zu ersetzen, so ist die frühere Gleichung vom Grade γ auf eine solche vom Grade n zurückgeführt, indem eine vielleicht nicht ganz vollbewusst vorgenommene Division durch x^α erfolgte. Dass die Gliederzahl dabei auf 2 oder 3, der Grad der höchstvorkommenden Potenz in den Beispielen auf 4 beschränkt ist, müssen wir mit in den Kauf nehmen. Erstere Beschränkung war zuverlässig eine beabsichtigte. Man konnte nur mit 2- und 3-gliedrigen Gleichungen umgehen. Ob die zweite Beschränkung nur in dem Mangel an passenden Zeichen begründet war, oder ob wirklich der Potenzbegriff

der Zeit mit x^4 zu Ende war, lassen wir dahingestellt. Uns persönlich scheint die erstere Annahme die richtigere, und wir finden eine Bestätigung dafür in der nun nachfolgenden Regel[1]) von ganz allgemeiner Fassung: Bei dreigliedrigen Gleichungen muss das mittlere Glied gleich weit von den beiden äussersten entfernt sein, sonst fällt die Aufgabe nicht unter die der Algebra. Das heisst doch nur, es müsse $\gamma - \beta = \beta - \alpha$ sein, oder die Gleichung müsse sich, um der Auflösung fähig zu sein, auf die Glieder x^0, x^n, x^{2n} zurückführen lassen, ohne dass von der Beschränkung auf $n = 1$ und $n = 2$ die Rede wäre. Das Wort ἀπόρισμα, welches wir mit Aufgabe wiedergegeben haben, heisst genauer Schwierigkeit; bei Aristoteles findet es sich meist in der Form ἀπόρημα.

Hierauf wird noch in 7 Regeln genauer ausgesprochen, was erst allgemein vorausgeschickt war. Sind, sagt die erste Regel[2]), nächstbenachbarte Zeichen einander gleich, so theile das niedrigere durch das höhere, und die Sache ist gefunden. Das bedeutet: aus $ax^\alpha = bx^{\alpha+1}$ finde man $\frac{a}{b} = x$. Wir erwähnen weiter, dass in der fünften Regel von einem Sprunge, *saltus*, der Zeichen die Rede ist, wo die Glieder von der Form x^α, $x^{\alpha+\beta}$, $x^{\alpha+2\beta}$ sind. In Formelgestalt heissen sämmtliche 7 Regeln folgendermassen:

$$\text{I. } ax^\alpha = bx^{\alpha+1} \quad \text{giebt} \quad x = \frac{a}{b}$$

$$\text{II. } ax^\alpha = bx^{\alpha+2} \quad - \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\text{III. } ax^\alpha = bx^{\alpha+3} \quad - \quad x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{IV. } ax^\alpha = bx^{\alpha+4} \quad - \quad x = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{V. } ax^\alpha = bx^{\alpha+\beta} + cx^{\alpha+2\beta} \quad - \quad x^\beta = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}} - \frac{b}{2c}$$

$$\text{VI. } bx^{\alpha+\beta} = ax^\alpha + cx^{\alpha+2\beta} \quad - \quad x^\beta = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}} + \frac{b}{2c}$$

$$\text{VII. } cx^{\alpha+2\beta} = ax^\alpha + bx^{\alpha+\beta} \quad - \quad x^\beta = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}} + \frac{b}{2c}.$$

Allerdings haben wir dabei die Regeln V., VI., VII. so gefasst, wie sie lauten müssten, nicht wie sie in der Handschrift lauten, wo zwar der mit einem Wurzelzeichen versehene Theil der Auflösung sinnentsprechend beschrieben ist, das Glied ohne Wurzelzeichen da-

---

[1]) *Notandum eciam, quod in equacione trium signorum semper medium debet elongari equaliter ab extremis; quod si sic non fuerit, non intrat apporismata algobre.* [2]) *Quando signa sibi invicem proxima adequantur sibi invicem tunc dividatur signum minus per signum maius et patebit valor rei.*

gegen in keinem der drei Fälle irgend erwähnt ist. Sämmtliche Zahlenbeispiele lassen einigermassen Zweifel zu, ob der Verfasser sich nur undeutlich, ob er sich irrig ausgedrückt hat. Auch letzteres dürfen wir einem Manne zutrauen, der später, wo er die 24 Gleichungsformen mittheilt[1]), bei der 5. Form (welche der VI. Regel entspricht) die Möglichkeit die Wurzelgrösse additiv oder subtractiv zu nehmen dahin missversteht, dass unter dem Wurzelzeichen $\frac{a}{c}$ zugezählt werden müsse, wenn es nicht abgezogen werden könne, und überdies die Wurzelgrösse selbst nur subtractiv benutzt, also von zwei möglichen Lösungen überhaupt nichts zu wissen scheint. Oder sollte in diesem Unsinne selbst wieder eine Abhängigkeit von einem Vorgänger zu erkennen sein? Der Herausgeber des Abdruckes, der unserer Darstellung zu Grunde liegt, hat in der Dresdner Bibliothek eine andere Handschrift aus dem XV. Jahrhunderte entdeckt, welche sich selbst als Uebersetzung der Algebra des Alchwarizmî bezeichnet, und welche in buchstäblicher Uebereinstimmung die gleichen Verkehrtheiten enthält. Wir kehren zu dem Handschriftenbande, der einst Johannes Widmann angehörte, zurück. Wir sagten, die lateinische Algebra, von der zuletzt die Rede war, enthalte die 24 Gleichungsformen. Sie stimmen mit denjenigen der deutsch geschriebenen Algebra dem Inhalte nach und in der ersten Gruppe auch der Reihenfolge nach überein. Die Formen der zweiten Gruppe dagegen erscheinen in der eigentlich weit folgerichtigeren Anordnung 5. 6. 7. 8. 10. 9. 1. 2. 3. 12. 13. 11. 15. 14. 4. 16. 17. 18. Der Angabe der sämmtlichen 24 Gleichungsformen folgen unter der Ueberschrift *Compendium de* ʒ *et re*, welche den Ausdruck res als Name der Unbekannten sichert, Zahlenbeispiele zu 16 von den Gleichungsformen, in welchen es an Rechenfehlern nicht mangelt. Aber auch damit ist das Werk noch nicht zu Ende, es kommt vielmehr noch die Hauptsache, wenigstens das was den meisten Raum einnimmt[2]), die in 24 Kapitel eingetheilten Textaufgaben zu den 24 Gleichungsformen, die sogenannten *Aporismata*, wie sie mit einem uns schon bekannt gewordenen Kunstausdrucke heissen. Wir entnehmen ihnen drei geschichtlich bemerkenswerthe Dinge.

Erstens wird von dem 1. Beispiele des 5. Kapitels gesagt, es sei gebildet *iuxta 29 proposicionem dati*[3]). Das ist aber nichts anderes als die 29. Aufgabe von der Schrift De numeris datis des Jordanus, welche, was wir bisher noch zu sagen vermieden haben,

---

[1]) Wappler l. c. S. 13—15. [2]) Ebenda S. 16—30. [3]) Ebenda S. 23 und in Note 2 der gleichen Seite die Beziehung zu Jordanus.

gleichfalls in dem betreffenden Sammelbande und zwar vor der lateinischen Algebra enthalten ist. Von unserem unbekannten Algebraiker können wir mit Bezug hierauf das Gleiche aussprechen, was in noch verstärktem Maasse von Widmann gilt. Er gehörte zu den gelehrten Kreisen, er hat Jordanus studirt, wenn auch zuverlässig nicht diesen Schriftsteller allein, da aus ihm nicht der ganze Inhalt des Werkes zu rechtfertigen, beziehungsweise bis zur Quelle zurückzuverfolgen ist.

Zweitens ist am Schlusse desselben 5. Kapitels ein Zusatz[1]) beigefügt, in den Beispielen dieser Form sei die Wurzelgrösse zu addiren, wenn man sie nicht abziehen könne. Was also in der Darstellung der Regel für die 5. Gleichungsform dem Verfasser, wie wir oben sahen, noch nicht bekannt schien, das ist ihm jetzt in der Aufgabensammlung klar geworden.

Drittens ist am Schlusse des 6. Kapitels, also da, wo die erste Gruppe der Gleichungsformen abschliesst (die ursprünglichen Formen könnte man sie im Gegensatze zu den 18 abgeleiteten Formen der zweiten Gruppe nennen) bemerkt[2]), man könne Alles, was mit ℞ ausgeführt werde, auch ohne dasselbe machen und habe es, allerdings mit Hilfe von vielerlei Mitteln und Schlussfolgerungen, multis mediis et conclusionibus, ohne diese Gleichungsformen gemacht, bevor die Algebra erfunden war. Eine dieser früheren Methoden wird sodann besonders hervorgehoben als *Aporisma conversum.* Sie sei, wie in der Geometrie ausgesprochen sei, die Erfindung des Ysac Sohn Salomonis. Die Beschreibung der Methode stimmt genau zu dem Umkehrungsverfahren (Bd. I, S. 689), welches ein Abraham, in welchem Abraham ibn Esra vermuthet wird, unter dem Namen *regula sermonis* gelehrt hat. Wer dieser Isaak Sohn Salomo's sei, wird sich schwerlich ermitteln lassen, da die Bezeichnung auf allzuviele Persönlichkeiten passen kann. Schon so weit unsere Hilfsmittel reichen, sind wir auf zwei Persönlichkeiten gestossen, welche beide berechtigt waren, sich so zu nennen, beide Juden, beide Gelehrte, welche auch mit Mathematik sich beschäftigten: Isaak ben Salomo Israeli[3]) aus Kairwan, einem im Mittelalter berühmten Handelsplatze, heute dem ärmlichen Städtchen Kairavan in Tunis[4]), von der Mitte des X. bis zur Mitte des XI. Jahrhunderts, und ein Castilianer Isaak ben Salomo ben Zadik Ibn Alchadib[5]), als dessen Blüthezeit 1370 bis 1380 angegeben ist.

---

[1]) Wappler l. c. S. 26: *Nota quinta regula habet pro ceteris hoc privilegium, quando radix subtrahi non potest, debet ipsa addi.* [2]) Ebenda S. 27. [3]) Jost, Geschichte des Judenthums II, 397. [4]) S. Günther in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 25. Januar 1892. [5]) Steinschneider in seinem Artikel „Jüdische

Ausser diesen Bemerkungen, zu welchen einzelne bestimmte Stellen uns Veranlassung geben, muss noch eine etwas allgemeinere beigefügt werden. Am Rande der lateinischen Algebra sind von einer anderen Hand als der des Schreibers des Textes weitere Aufgaben in lateinischer Sprache in nicht unbeträchtlicher Zahl hingeschrieben. Wir werden später an diese Aufgaben zu erinnern haben und wollen sie dann kurzweg die Randaufgaben der Dresdner Algebra nennen.

Wir haben (S. 234) die Thatsache erwähnt, dass Johannes Widmann in Leipzig Vorlesungen über Algebra hielt[1]). Gleich auf dem ersten Vorsetzblatte des Dresdner Handschriftenbandes, der in Widmann's Besitz war, sind zwei Vorlesungsanzeigen desselben niedergeschrieben. Die erste bezieht sich auf das Linienrechnen. Diese Kunst sei durch Appuleius, den in jeder Lehre hocherfahrenen Mann überliefert. Zuerst habe man auf den Sand zwischen die Linien Pünktchen gemacht, dann habe man sich kleiner Steine (calculi) bedient, woraus der Name des Calcüls entstanden sei, später sei man zu Rechenpfennigen von Metall (proiectilia erea) übergegangen. Dieser Theil der Wissenschaft sei um so höher gehalten worden, weil er leichter sei und jedem Geiste angemessen, so dass auch die, welche keine Gelehrsamkeit (litteratura) besitzen, nicht wenig tüchtig darin werden können, dann auch weil er deutlicher ist und mehr zu den Sinnen spricht. Magister Jo. W. de Eg. wird heute um 4 Uhr einige sogen. Kaufmannsregeln angewandt auf die Linien mit Rechenpfennigen einzuüben beginnen (regulas quasdam Mercatorum dictas ad lineas cum proiectilibus applicatis resumere incipiet). Das Wort resumere in dieser Anzeige, welches wir mit „einüben“ verdeutscht haben, gehört dem Sprachgebrauche der deutschen Universitäten des XV. Jahrhunderts an. Eigentlich ist es ein rhetorischer Kunstausdruck ebenso wie resumptio, und die entsprechenden griechischen Kunstausdrücke sind *ἐπαναλαμβάνειν*, *ἐπανάληψις*, italienisch riassumere. Die Meinung ist die, dass ein und dasselbe Wort zur Verstärkung des Sinnes wiederholt werde. Später hat man die Wiederholung im Allgemeinen und damit die Einübung durch resumere bezeichnet[2]). Die zweite Anzeige beginnt mit einem Lobe der Arithmetik, in welches die Namen des Pythagoras und des Boethius eingeflochten sind. M. J. W. de eg.

Literatur in Ersch und Gruber's Allg. Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, Section 2, Bd. 27, S. 439, Spalte 1, Z. 5.

[1]) Wappler l. c. S. 9—10 hat diese Thatsache mit ihren Belegstücken zuerst mitgetheilt. [2]) Diese Auseinandersetzung verdanken wir H. Zangemeister, welcher sich dafür auf J. Ch. Th. Ernesti, *Lexicon rhetoricum* pag. 321 und H. Sauppe, *Opuscula critica* pag. 163 stützt.

wird heute um 2 Uhr nach der Disputation der Baccalaureen anfangen, ein kleines kurzgefasstes und sehr nützliches Buch, welches wohl die Grundlagen dieser ganzen Kunst umfasst, einzuüben.

Es liegt auf der Hand, dass diese beiden Vorlesungen den beiden Rechnungsweisen der Zeit gewidmet waren, die erste dem Rechnen auf den Linien, die zweite dem Ziffernrechnen, für welches ein bestimmter Name, der es von jenem anderen unterscheide, noch nicht vorkommt, aber bald entstehen wird. Das Büchelchen, welches der zweiten Vorlesung zu Grunde lag, kann kaum ein anderes gewesen sein, als Widmann's „Behende und hubsche Rechnung auff allen kauffmannschafft", denn darüber, wer Magister Jo. W. de Eg. gewesen sein muss, ist doch ein Zweifel nicht möglich. Beschäftigung mit einem bestimmten Fache, gelehrter Titel, Vorname, Anfangsbuchstaben des Familiennamens und des Heimathsortes in tadelloser Uebereinstimmung müssen als unwiderlegliche Beweise der Uebereinstimmung der Persönlichkeiten gelten. Wer aber sollte das Vorsetzblatt eines Handschriftenbandes benutzt haben, um die Anzeige zweier Vorlesungen darauf niederzuschreiben als der Ankündiger selbst, der vielleicht wiederholt in aufeinander folgenden Jahren von jenen Ankündigungen öffentlichen Gebrauch zu machen wünschte? So dienen die Anzeigen selbst als Beleg dafür, dass jener Handschriftenband sich im Besitze Widmann's befand.

Und nun findet sich eine dritte Vorlesungsanzeige von derselben Hand geschrieben auf der Rückseite des 349. Blattes des Bandes unmittelbar vor der lateinischen Algebra. Mit Arithmetik allein sei es nicht gethan. Schwierigeren Aufgaben komme man nur mit jenen Methoden bei, welche ein Algobre von hellstem und nahezu göttlichem Geiste uns in wenigen Aporismen, um seines Wortes mich zu bedienen, überliefert hat[1]). Heute um 2 Uhr wird Magister Jo. W. de Eg. nach der Predigt und nach der Disputation der Baccalaureen mit den Zuhörern Vereinbarungen über Stunde und Ort treffen, um die Aporismata et Regulas Algobre einzuüben. Dieser dritten Anzeige dürfen wir die Bestätigung dessen entnehmen, was wir aus den beiden früheren folgerten, und wofür wir uns auch darauf berufen könnten[2]), dass zwei Aufgaben der lateinischen Algebra in Widmann's Rechenbuch Aufnahme gefunden haben. Aber wir entnehmen ihr noch weitere Dinge, welche hervorzuheben sind.

Wir sehen hier einmal die erste nachgewiesene Anzeige einer

---

[1]) *quas praeclarissimi quondam ac prope divini ingenij Algobre paucis admodum Aporismatibus, ut suo vocabulo utar, nobis tradidit.* [2]) Wappler l. c. S. 22, Note 1.

algebraischen Vorlesung an einer Universität. Wir sehen eine andere Fassung als bei den offenbar eingebürgerten Vorlesungen über das Rechnen. Ort und Stunde sollen erst vereinbart werden! Auch heute noch kann man ähnlichen Wortlaut mitunter auf Ankündigungen an den schwarzen Brettern unserer deutschen Hochschulen finden. Sie bedeuten etwa so viel als: der Unterzeichnete möchte über den betreffenden Gegenstand lesen, vorausgesetzt, dass sich Zuhörer dazu melden. Wir werden nicht irre gehen, wenn wir im XV. Jahrhunderte der Klausel denselben Sinn beilegen. Es war eine ungewohnte, eine neue Vorlesung. Sie kam zu Stande. In dem Codex 1470 der Leipziger Universitätsbibliothek wird berichtet, im Sommer 1486 habe Johann von Eger (und das kann doch nur Widmann sein) in seiner Behausung Algebra vorgetragen[1]). Als weitere Bestätigung dürfen wir es ansehen, dass Widmann der lateinischen Algebra, die er augenscheinlich der Vorlesung zu Grunde legte, an einer Stelle einige Aufgaben zufügte[2]).

Und das Andere, was wir hervorzuheben haben, besteht darin, dass für Widmann Algobre ein Mann, der Erfinder der Kunst war. Ob er ihn auch Geber nennen zu dürfen glaubte, wie jener Canacci im XV. Jahrhunderte (S. 165), ob damit wieder der Name Czebreyn der deutschen Algebra des Dresdner Bandes (S. 241) sich deckt? Möglich ist so ziemlich Alles, was an Namensverketzerungen nur erdacht werden kann.

Wir müssen aus dem weitläufiger Auseinandergesetzten die Ergebnisse kurz zusammenstellen. Sie gehen dahin, dass Widmann algebraischer Schriften sich bediente, welche nach wesentlichen Merkmalen in gelehrten Kreisen entstanden sein müssen, und welche mittelbar, stellenweise unmittelbar auf Jordanus zurückweisen. Andrerseits war es Widmann auch bekannt, dass die algebraische Kunst Regula cosse (S. 234) hiess. Er hat überdies, wovon wir bisher geschwiegen haben, in seinem Rechenbuche ziemlich viele Aufgaben, welche auch in Leonardo's Abacus vorkommen[3]), sei es, dass die Uebereinstimmung sich auf Text und Zahlen beziehe, sei es, dass bei gleichem Texte andere Zahlen gewählt sind. Wir können daraus keine anderen Folgerungen ziehen, als die, dass Algebra gelehrten Ursprunges in der Mitte des XV. Jahrhunderts in Deutschland bekannt war, dass mit ihr Algebra italienisch-kaufmännischen Ursprunges gegen Ende des Jahrhunderts sich vereinigt hatte, dass von Schrift-

---

[1]) Curtze brieflich. [2]) Wappler l. c. S. 21, Note 1. [3]) Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft, S. 119, Anmerkung.

stellern, deren Namen wir kennen, Johannes Widmann der erste war, bei welchem jene Vereinigung sich nachweisen lässt, wie er auch der erste war, der algebraische Vorlesungen an einer Universität, und zwar in Leipzig, anzukündigen wagte.

55. Kapitel.

Deutsche Universitäten. Regiomontanus.

Wie stand es, können wir, anknüpfend an die letzten Worte des soeben beendigten Kapitels, hier gelegentlich fragen, um die Mathematik der deutschen Universitäten in der Zeit, welche uns gegenwärtig beschäftigt?

Leipzig[1]) haben wir bereits wegen der dort stattgefundenen Ankündigung einer Vorlesung über Algebra genannt. Im Uebrigen beschränkte sich die Auswahl der Vorlesungen, die gehalten werden mussten, auf Euklid, Arithmetik, Musik nach De Muris, Perspective d. h. Optik und zwei astronomische Fächer. Dem Euklid waren allerdings 20 bis 30 Wochen, der Perspective 12 bis 14 Wochen gewidmet, während die Vorlesung über Arithmetik in 4 bis 7 Wochen vollendet sein musste.

Aus Erfurt ist uns bekannt, dass dort der Kreis der Vorlesungen, welche den Artisten geboten wurden, ein umfassender war. Volle 38 verschiedene Gegenstände wurden vorgetragen[2]), also fast doppelt so viele als in Wien, wo es nur 21 solcher Vorlesungen gab; aber wie viel Mathematisches sich darunter befand, wissen wir nicht. Es könnte recht viel gewesen sein, wenn es gestattet ist, aus der Persönlichkeit eines Lehrers einen Schluss zu ziehen, des Magisters Christian Roder[3]) aus Hamburg, der 1463 Decan der Erfurter Artistenfacultät war, und unter welchem 80 Magister ihre Prüfung bestanden, denn dieser Gelehrte erfreute sich unter den ersten Fachmännern des glänzendsten Rufes. Christianus Rueder de Hamborch, der im Wintersemester 1471 auf 1472 Rector in Erfurt war[4]), dürfte die gleiche Persönlichkeit bezeichnen.

Basel[5]), Universität seit 1459, erkannte im Jahre 1465 nur

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 215. [2]) Ebenda S. 213. [3]) Doppelmayr, Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern (1730), S. 6, Note hh. Dieses Werk citiren wir künftig schlechtweg als Doppelmayr. [4]) Weissenborn, Acten der Erfurter Universität I, 345 (Geschichtsquellen der Provinz Sachsen und der angrenzenden Gebiete Bd. VIII). [5]) Günther, Unterricht Mittela. S. 216.

Euklid und Sacrobosco als die Schriftsteller an, welche erklärt werden müssen; 1492 ist die Sache wenigstens insofern besser geworden, als die Vorlesungszeit über Sacrobosco von 6 Wochen auf 12 Wochen sich erhöht hat.

Ingolstadt[1]) war 1472 nach dem Wiener Vorbilde eingerichtet worden, aber ihm keineswegs ähnlich geblieben. Während zu Anfang die Baccalaureatsprüfung die sechs ersten Bücher des Euklid, den Algorismus, die Sphaera voraussetzte, während die Magisterprüfung auch noch Planetentheorie erforderte, während Latitudines, Perspective, Optik doch noch in den Satzungen vorkommen, wenn auch nur um sie als nicht verbindliche Lehrgegenstände zu erklären, gehen die Forderungen bald so weit zurück, dass nur 2 Wochen dem Algorismus, 2 Wochen dem ersten Buche Euklids, 6 Wochen der Sphaera gewidmet werden müssen.

In dem 1477 gegründeten Tübingen[2]) lag die Sache durch die Persönlichkeit eines Lehrers etwas besser. Dort wirkte Paul Scriptoris, der als Erklärer des Duns Scotus seine akademische Thätigkeit begann, aber um 1494 auch über zwei mathematische Schriftsteller las, über Euklid und über Ptolemäus; der letzteren Vorlesung, einer Neuheit in Tübingen und auch einer Neuheit für Leute, die von vielen anderen Universitäten nach Tübingen kamen, sollen deshalb auch fast sämmtliche übrige Professoren beigewohnt haben.

Krakau[3]) muss in dieser Aufzählung deutscher Universitäten auch genannt werden. Das „Krokaw“ des XV. Jahrhunderts ist wenig mit dem heutigen Krakau zu vergleichen. Hatten auch ursprünglich Polen die Stadt gegründet, so waren doch seit dem XII. und XIII. Jahrhunderte deutsche Ansiedler hingezogen worden, welche mit deutscher Sprache, mit deutschem d. h. in diesem Falle mit Breslau-Magdeburgischem Rechte eine eigene Gemeinschaft bildeten. In deutschen Händen befand sich der ganze Grosshandel, und nur so ist eine Zugehörigkeit Krakaus zum Hansabunde zu verstehen. Ein Sprosse einer in Krakau angesiedelten deutschen Grosshandelsfamilie hat in der Geschichte der Astronomie eine umwälzende Rolle gespielt. Die städtischen Urkunden, soweit sie nicht in lateinischer Sprache abgefasst sind, sind bis in's XVI. Jahrhundert hinein ausschliesslich deutsch, obwohl die polnische Sprache als Schriftsprache vorhanden war und polnische Gerichtsacten insbesondere aus dem Jahre 1400 nachzuweisen sind. In dieser Stadt Krakau hatte 1364 König Kasimir der Grosse von Polen so ziemlich nach dem Vorbilde von Prag eine

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 216—217. [2]) Ebenda S. 218. [3]) Prowe, Nicolaus Coppernicus (1883) *passim*. — Günther, Unterricht Mittela. S. 229—230.

Universität gegründet, welche bald in Flor kam und insbesondere, ebenso wie Leipzig, einen grossen Nutzen daraus zog, dass Prag in Folge kleinlicher Nörgeleien gegen Fremde wie auch durch die Hussitenstreitigkeiten mehr und mehr auf den Rang einer Landesschule herabsank. Auch in Krakau galt ähnlich wie einst in Wien die Verlosung der Vorlesungen unter den Lehrern der Universität, aber daneben waren frühzeitig einzelne bestimmte Lehrstühle gegründet, so ein Lehrstuhl der Astronomie, welchen zuerst Johannes Stobner aus Krakau innehatte, der 1379 in Prag das Baccalaureat erworben hatte. Satzungen von 1449 geben Auskunft darüber, welcherlei Vorlesungen der Professor der Astronomie zu Krakau zu halten verpflichtet war: Euklid, Perspective, Arithmetik, Algorismus minutiarum, Musik und astronomische Gegenstände werden genannt, unter letzteren seit 1475 auch eine Vorlesung über Schriften eines Gelehrten, mit welchem wir uns im Verlaufe dieses Kapitels sehr eingehend zu beschäftigen haben werden, des Regiomontanus. Ein weiterer Lehrstuhl wurde 1450 gegründet für Astrologie. Sein erster Inhaber war Martin Król de Premislia. Der weitesten Berühmtheit erfreute sich am Ende des XV. Jahrhunderts Albert Blar von Brudzewo, gewöhnlich Brudzewski genannt. Im Jahre 1445 geboren, gehört er mit seiner ganzen gelehrten Laufbahn der Universität Krakau an. An ihr wurde er 1470 Baccalaureus, 1474 Magister. An ihr stieg er in der Artistenfacultät zu immer höherem Range, bis er 1485 Decan dieser Facultät wurde. Gleich vielen anderen Gelehrten hat Brudzewski die Zeit, während welcher er der niedersten Facultät bereits als geachteter, von nah und fern gesuchter Lehrer angehörte, dazu benutzt, sich einer höheren Facultät noch als Schüler anzuschliessen. So wurde er 1490 Baccalaureus der Theologie, eine Würde, welche ihm das Recht verlieh, auch theologische Vorlesungen zu halten, von welchem er aber nicht Gebrauch gemacht zu haben scheint. Er wurde der Universität untreu und trat 1494 als Secretär in die Dienste des Fürsten Alexander von Littauen. Als solcher starb er 1497 in Wilna. Von 1484 bis 1489 sind aus den erhaltenen Vorlesungsverzeichnissen der Universität Krakau die mathematischen Lehrgegenstände bekannt, welche Brudzewski vortrug. Arithmetik ist die erste, Perspective die letzte dieser Vorlesungen, die übrigen gehören der Astronomie, nicht der reinen Mathematik an. Als Brudzewski die Mathematik als öffentlichen Lehrgegenstand aufgab und sich nach übereinstimmenden Ueberlieferungen damit begnügte, befähigten Schülern besondere Vorlesungen zu halten, von denen die Verzeichnisse nichts wissen, da war unsere Wissenschaft durch nicht weniger als 16 Lehrer vertreten, die allein in den Jahren 1491 bis 1495 mathe-

matische und astronomische Gegenstände vortrugen. Allerdings waren es ausnahmslos die uns mehr als zur Genüge bekannten elementaren Dinge: Euklid, Arithmetik, Musik, Optik u. s. w. Von Latitudines z. B. ist keine Rede, von Algebra ebensowenig. Wir möchten aber aus diesem Schweigen der Vorlesungsverzeichnisse keinen allzu zuversichtlichen Schluss dahin ziehen, solche höhere Gegenstände seien nie gelehrt worden. Grade was ein glücklicher Zufall uns über die Lehrthätigkeit Widmann's in Leipzig aufbewahrt hat, könnte der Vermuthung Bahn brechen, auch anderwärts sei die Lehrthätigkeit mitunter über die breitgetretenen Wege des Alltäglichen hinausgegangen, freilich ohne dass die Vorlesungsverzeichnisse von solchen Ausnahmen berichten könnten.

Wien hatte uns als mathematische Musteruniversität gegolten. Was war aus ihr geworden? Wir haben (S. 176) in Johann von Gemunden einen Lehrer dort auftreten sehen, der als Professor der Mathematik gelten durfte, ohne dass es einen solchen gab. Mit seinem Tode hörte dieses Verhältniss — man wäre versucht, es das naturgemässe Herausbilden eines Fachlehrerthums durch Zuchtwahl zu nennen — wieder auf. Vielleicht 50 Lehrer[1]) von mathematischen Dingen sind in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts in Wien aufgetreten, deren Namen vergessen sind. Georg von Peurbach (S. 180) widmete seine Lehrthätigkeit vorzugsweise humanistischen Gegenständen, und der Mann, welchem wir uns jetzt zuzuwenden haben, der ganz dazu angethan war, ein neues Zeitalter der Mathematik in Wien zu eröffnen, gehörte der Universität nur ganz kurze Zeit an. Es war Regiomontanus.

Johannes Müller[2]) ist als Sohn eines Müllers am 6. Juni 1436 in dem Städtchen Königsberg bei Hassfurt (Herzogthum Coburg) oder in dem unweit davon gelegenen Dörfchen Unfind geboren. Den Namen Regiomontanus gab man ihm von dieser Heimath. Er selbst nannte sich Joannes de Monte Regio, Johannes Germanus, Johannes Francus, Kunisperger u. s. w. Schon im Alter von 12 Jahren bezog er die Universität Leipzig, und zwei oder drei Jahre später erschien er in Wien bei Georg von Peurbach mit der auf keinerlei

---

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 249. [2]) Ueber das Leben Regiomontanus ist eine grosse Zahl von längeren und kürzeren guten Schriften vorhanden. Gassendi, *Tychonis Brahei vita, accessit Nicolai Copernici, Georgii Purbachii et Ioannis Regiomontani astronomorum celebrium vita* (1555). — Doppelmayr, S. 1—23. — M. A. Stern, *Ioannes de Monteregio* in Ersch und Gruber's Encyklopädie, II. Section, 22. Theil, S. 205—213. — Die letzte Zusammenstellung von S. Günther in der Allgem. deutschen Biographie XXII, 564—581 unter Müller, Johannes.

Empfehlung sich stützenden Bitte, ihn als Schüler annehmen zu wollen. Mag das den Männern, die damals in Leipzig Mathematik lehrten, kein so glänzendes Zeugniss ausstellen, als unsere Leser es etwa erwarten zu dürfen glauben, so ist nicht zu vergessen, dass wir durch den Gang unserer Berichterstattung innerhalb dieses unseres XII. Abschnittes gegen die genaue Zeitfolge uns verstiessen. Die verschiedenen Druckschriften und auch Handschriften aus der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts, von denen im 54. Kapitel die Rede war, sind sämmtlich nach, zum Theil recht lange nach der Abreise Regiomontans von Leipzig entstanden, und wenn wir sie vorwegnahmen, so war der Grund, wie wir jetzt sagen wollen, ein doppelter. Der eine Grund liegt in dem durchaus elementaren Standpunkte, welchen jene Schriften festhalten, die überdies herzlich wenig enthalten, was nicht nachweislich von Anderen anderwärts längst gelehrt worden war. Der andere Grund aber ist, dass bei dieser unserer Anordnung deutlicher hervortritt, in wie gewaltiger Riesengrösse Regiomontanus aus seiner Zeit hervorragt, mag man ihn mit denen vergleichen, die unmittelbar vor ihm, oder mit denen, die unmittelbar nach ihm wirkten.

Genug, Peurbach nahm den kaum dem Kindesalter entwachsenen Schüler an und behielt ihn in seiner nächsten Umgebung so lange er lebte. Wegen zu grosser Jugend soll Regiomontanus nicht vor 1457 zum Magister ernannt worden sein, während er früher schon mit Vorlesungen betraut war, und darin liegt wohl die Veranlassung dafür, dass ein naher Freund seines Lehrers schon 1452 von ihm als Magister Johannes schrieb, noch bevor er diesen Titel führen durfte[1]. So hatte ihn Peurbach sich frühzeitig in jeder Beziehung zum Gehilfen herangebildet, und so setzte er ihn später zum Erben seiner Arbeiten ein. Schon zweimal (S. 185 und 210) hatten wir Gelegenheit von der Almagest-Uebersetzung zu reden, welche Peurbach, vom Cardinal Bessarion angeeifert, sich als wichtige Aufgabe gesetzt hatte. Die letzten Worte des sterbenden Peurbach an Regiomontanus sind von diesem der Nachwelt überliefert worden[2]. In rührend schöner Weise mahnt er ihn an jene Uebersetzung. Er hinterlasse ihm als heiliges Vermächtniss das Werk zu vollenden, und so Bessarion's Wünschen Genüge zu leisten.

Regiomontan trat die Erbschaft an. Das erste Ziel, welches er anstreben musste, war, sich die griechische Sprache vollständig zu eigen zu machen, und zu diesem Zwecke begab er sich wahrscheinlich noch 1461 nach Rom, wohin Bessarion ihn schon früher, aller-

---

[1] Czerny im Archiv für österreichische Geschichte LXXII, 288, Note 3.
[2] Doppelmayr, S. 2 Note h.

dings als vermuthlichen Begleiter Peurbach's eingeladen hatte. Dem Studium der griechischen Sprache widmete sich der junge Deutsche anfangs unter Leitung von Georg von Trapezunt, später selbständig, indem er theils als Mittel zur Aneignung der Sprache, theils als Selbstzweck eine grosse Menge älterer griechischer Handschriften, die in Rom vorhanden waren, abschrieb. Es waren meistens Mathematiker, welche abgeschrieben wurden, aber auch Bücher anderen Inhaltes, z. B. ein griechisches neues Testament. Eine Abschrift des Almagestes zu machen war unnöthig, da eine von Bessarion selbst angefertigte zu Uebersetzungszwecken zur Verfügung stand. Bessarion, der fortwährend vom Papste zu wichtigen kirchlich-diplomatischen Geschäften in Anspruch genommen wurde, musste etwa im Mai 1463 Rom verlassen, um nach Griechenland zu reisen. Regiomontan begleitete ihn bis Venedig. Dann wechselte sein Aufenthalt, wie er vorher gewechselt hatte. Wir kennen eine ganze Reihe von Städten, in welchen Regiomontanus sich aufgehalten hat: Rom zu wiederholten Malen, Viterbo, Ferrara, Padua, Venedig, aber die Reihenfolge, in welcher der Wohnungswechsel stattfand, ist nicht vollständig gesichert. Von Regiomontanus Aufenthalt in Viterbo kennen wir einige astronomische Beobachtungen vom Sommer und Herbst 1462. In Ferrara verkehrte er mit dem Astronomen Bianchini, aber auch mit den der dortigen Universität zur Zierde gereichenden Humanisten Theodor von Gaza und Guarini. Unter Theodor von Gaza's Anleitung brachte er es dahin, griechische Verse machen zu können, und in Ferrara war es auch, dass er die Textreinigung des Almagestes vollzog, ohne welche an eine richtige Uebersetzung nicht zu denken war. Ob er in Ferrara auch mathematische Vorträge in griechischer Sprache gehalten hat, wie ein Bericht meldet[1], sei dahingestellt. Das Auffallendste daran wäre, dass für eine solche Vorlesung sich Zuhörer gefunden hätten. Von Ferrara scheint Regiomontan sich nach Venedig begeben zu haben, von wo er vielleicht im März und April 1464 einen Abstecher nach Padua machte. Jedenfalls sind Briefe aus Venedig vom 27. Juli 1463, Februar, 27. Juni und 6. Juli 1464 vorhanden, sowie eine Mondfinsternissbeobachtung in Padua vom 2. April 1464. In Padua hielt Regiomontan lateinische Vorträge über den arabischen Astronomen Alfraganus und begann dieselbe mit einer Einleitung, welche als erste abendländische Leistung auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen wird. Eine noch weit umfassendere Thätigkeit übte Regiomontanus in Venedig aus. Dort

wurde das in Rom begonnene Werk De triangulis omnimodis vollendet, dort entstand eine Streitschrift gegen Cusanus. In Venedig beabsichtigte Regiomontan die Rückkehr seines Gönners Bessarion aus Griechenland abzuwarten, aber sie verzögerte sich weit über alles Erwarten, und so kehrte Regiomontan nach Rom zurück, wo er jedenfalls am 6. October 1464 wieder beobachtet hat. In die Zeit dieses zweiten römischen Aufenthaltes fällt eine Niederschrift einer Kritik der Arbeiten Georgs von Trapezunt über Ptolemäus und Theon. *Impudentissime atque perversissime blatorator* — unverschämtestes und verkehrtestes Plappermaul — ist die Anrede, mit welcher jene Kritik schliesst, indem Regiomontan sich persönlich an seinen Gegner wendet. Solche Ausdrücke liefen zwar der an Höflichkeit zwischen wissenschaftlichen Gegnern nicht gewöhnten Sitte der Zeit keineswegs zuwider, bargen aber bei der anderweitigen Sitte, es bei Worten nicht bewenden zu lassen, sondern Dolch oder Gift entscheiden zu lassen, wer der Unterliegende sei, manche Gefahr in sich. Regiomontan mag sich dem nicht verschlossen haben, was ihm bei längerem Aufenthalte in Rom bei überdies fortdauernder Abwesenheit seines Beschützers Bessarion drohte, und so verliess er 1468 den gefährlichen Boden. Er kehrte nach Wien zurück, und wie er schon als Baccalaureus, in Vertretung Peurbach's als junger Magister ebendort 1458 über Perspective, 1460 über Euklid gelesen hatte, begann er neuerdings eine Lehrthätigkeit auszuüben, wenn auch nicht als Inhaber einer mathematischen Professur, die es auch jetzt in Wien noch nicht gab[1]). Vor Jahresfrist erfolgte ein neuer Wohnungswechsel. Der Ungarkönig Mathias Corvinus berief Regiomontan mit dem sehr stattlichen Jahresgehalte von 200 Goldgulden nach Ofen zur Ordnung und Beaufsichtigung einer unter Aufwendung reicher Mittel angelegten Büchersammlung. Ofen wurde der Entstehungsort eines abermaligen neuen Werkes von Regiomontanus, der *Tabulae Directionum*. Sei es dass Regiomontanus jetzt mehr und mehr das Bedürfniss empfand, einmal eine Zeit lang ausschliesslich den eigenen Studien zu leben, sei es dass Kriegshändel des Königs Mathias eine Aenderung des Aufenthaltes wünschenswerth machten, im Sommer 1471 ist Regiomontan weit von Ofen entfernt in der Reichsstadt Nürnberg, deren Rath ihm sodann durch Beschluss vom 29. November jenes Jahres die Erlaubniss zu längerem Verweilen gewährte. Ob mit jener Erlaubniss ein bestimmter Auftrag zu öffentlichen Lehrvorträgen verbunden war, wie es von einer Seite berichtet wird, steht actenmässig noch nicht fest. Regiomontan's Hauptab-

[1]) Günther, Unterricht Mittela. S. 242 gegen Doppelmayr S. 5.

sicht war, gute zum Theil neu erfundene oder verbesserte Vorrichtungen zur Durchforschung des Himmels zu beschaffen, sie im Verein mit Gelehrten jeder Herkunft anzuwenden. Beides erhoffte Regiomontan von dem Gewerbfleiss und dem unermesslichen Fremdenverkehr der ersten Handelsstadt in Süddeutschland, und grade darum hatte er sie, gleichsam den Mittelpunkt von Europa, zur ewigen Wohnstätte sich auserlesen[1]). Aber die Ziele steckten sich bald noch weiter. In Nürnberg waren Druckerwerkstätten entstanden. Ihre Thätigkeit sollte in den Dienst der mathematischen und astronomischen Wissenschaft gestellt werden, wie man es auch in Italien soeben zu thun begann. Ein reicher Nürnberger, Bernhard Walther, trat zu Regiomontan in freundschaftlichste Beziehungen und richtete für ihn drei Räumlichkeiten her, eine Sternwarte, eine Werkstätte zur Anfertigung von Beobachtungsvorrichtungen, eine Druckerei. Schon war der Plan entworfen, welche Werke grosser Mathematiker vervielfältigt werden sollten, schon erschienen zwischen 1471 und 1475 unter Regiomontan's Leitung die nachgelassenen Planetentheorieen seines geliebten Lehrers Peurbach[2]), die Astronomica des Manilius, ein Verzeichniss der zum Drucke bestimmten Schriften[3]), ein Tabellenwerk Regiomontan's selbst, da war es mit der auserlesenen ewigen Wohnstätte schon wieder zu Ende. Papst Sixtus IV. stellte die niemals als erledigt erachtete Aufgabe der Kalenderverbesserung auf die Tagesordnung. Regiomontanus sollte die Aufgabe lösen, und ihn um so geneigter zu machen, den päpstlichen Wunsch zu erfüllen, verband Sixtus IV. mit der Berufung nach Rom die Ernennung zum Bischof von Regensburg. Einer in solche Form sich kleidenden Aufforderung war nicht zu widerstehen. Im Herbste 1475 reiste Regiomontan nach Italien, um nicht wiederzukehren. Der 6. Juni 1476 war sein Todestag. Er starb in Rom und wurde im Pantheon bestattet. Als Todesursache wird die Pest angegeben, eine dunkle Sage spricht von Gift und nennt die Söhne Georgs von Trapezunt als die Schuldigen[4]). Wir haben der Erzählung der Lebensgeschichte Regiomontan's eine unverhältnissmässige Länge gegeben. Wir haben es desshalb gethan, um die Unstetigkeit seines fast heimathslosen Umherwanderns der Grösse seiner Leistungen als Hintergrund dienen zu lassen, und um ermessen zu können, was die Wissen-

---

[1]) *Eam enim mihi delegi domum perpetvam* schrieb Regiomontanus unter dem 4. Juli 1471. [2]) *Theoricae planetarum novae s. l. et a.* [3]) Ein Abdruck nach dem Original bei Ch. G. Schwarz, *De origine typographie* Pars. III, p. 54. [4]) Diese Todesursache nannte schon Melanchthon in einer 1549 gehaltenen Lobrede auf Regiomontanus. *Fama est venenum ei datum esse a Trapezontii filiis.* Vergl. *Corpus Reformatorum* Vol. XI, p. 825 (1843).

schaft an dem bei seinem Tode erst 40jährigen Gelehrten verloren hat, der nebenbei auch sogar als Dichter gekrönt war, wenn der als Cod. 367 G. 27 bezeichneten Handschrift des Klosters Melk Glaube geschenkt werden darf, in welcher eine Ueberschrift: Compositio quadrantis Reverend. Mg̃r. Johannis de Kunisperg, astronomi et poete laureati [1]) lautet.

Wir müssen nun seine einzelnen mathematischen Leistungen besprechen, wie sie theils in besonderen Schriften, theils in Briefen von seiner Hand sich erhalten haben. Wir beginnen mit der Angabe der wichtigsten Druckveröffentlichungen, welche Regiomontanus, wie wir sagten, selbst vorbereitete. Das Meiste davon wird er handschriftlich sich erworben und geistig sich angeeignet haben, als er 1461 bis 1462 zuerst in Rom war. Es bildet also den wissenschaftlichen Grundstock, welchen Regiomontanus besass, und den zu kennen auch für uns nothwendig ist, wenn wir darüber uns klar werden wollen, wie viel eigne Zuthat in den verschiedenen nachher zu besprechenden Werken enthalten ist [2]). Die Cosmographie, der Almagest und das Quadripartitum des Ptolemäus stehen an der Spitze. Die Erläuterungen Theons von Alexandria zum Almagest fehlen nicht. Euklid's Elemente mit dem Anaphorikos des Hypsikles waren zum Drucke bestimmt, zwar nach der Ausgabe des Campanus, aber frei von den Fehlern, die dieser verschuldet hatte. Eine verbesserte Uebersetzung des Archimed unter Zugrundelegung der von Jacob von Cremona ausgeführten war vorgesehen, ebenso die Kegelschnitte des Apollonius, die Sphärik des Menelaus, die Sphärik des Theodosius. Der Cylinderschnitt des Serenus und die mechanischen Probleme des Aristoteles standen gleichfalls auf der Liste. Von diesen allen sollten wohlverstanden keine griechischen Textausgaben, sondern lateinische Uebersetzungen gedruckt werden, welche Regiomontanus, wenn auch unter Benutzung schon vorhandener Uebersetzungen, neu zu schaffen gesonnen war, vielleicht zum Theile schon angefertigt hatte. Dazu kam der beabsichtigte Druck einiger in lateinischer Sprache geschriebenen Werke, der Arithmetik des Jordanus, dessen arithmetischer Data (die Schrift De numeris datis wird damit gemeint sein?) und des Quadripartitum (vermuthlich des so betitelten Werkes von De Muris). Durch andere Quellen können wir die Liste noch um zwei Werke vergrössern, welche Regiomontan genau kannte, vielleicht im Drucke herausgeben wollte: den Algorithmus demonstratus hat er in

---

[1]) Curtze, brieflich. [2]) H. Petz, Urkundliche Nachrichten über den literarischen Nachlass Regiomontan's und B. Walther's in den Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg VII, 237—262 (1888).

Wien sich abgeschrieben, und seine noch manches Andere, z. B. die bei Jordanus vorhandene allgemeine indische Regel zur Auffindung der Seite des regelmässigen Sehnenvielecks (S. 83) enthaltende Handschrift befindet sich in Wien[1]). Er hat den Diophant in Venedig entdeckt. Das Programm der beabsichtigten Druckgebungen wäre aber auch jetzt noch nicht vollständig, wenn wir nicht einige von den eigenen Schriften Regiomontan's nennten, die gleichfalls der Presse übergeben werden sollten. Die fünf Bücher über Dreiecke, Erläuterungen zu den von Eutokius nicht mit solchen versehenen Büchern des Archimed, geometrische Aufgaben jeder Art, astronomische Aufgaben mit Beziehungen zum Almagest, Gedanken über die Neuordnung des Kirchenkalenders, so lauten die Aufschriften selbständiger Werke, zu welchen noch eine ganze Anzahl von Streitschriften kam. Gegen Georg von Trapezunt sollte Theon von Alexandria in Schutz genommen, gegen Nicolaus von Cusa das Unzutreffende seiner Quadraturversuche nachgewiesen werden. Längst verstorbene Schriftsteller blieben aber auch nicht mit Angriffen verschont, wenn wir als Beispiel nur etwa eine Schrift gegen Campanus nennen wollen, in welcher beabsichtigt war nachzuweisen, wie nothwendig es sei, dessen persönliche Meinungsäusserungen aus der Euklidausgabe zu entfernen.

Besässen wir von Regiomontanus nichts als diese Verzeichnisse fremder und eigener zum Drucke mehr oder weniger vorbereiteter Werke, so würden sie genügen, uns mit Staunen über den Umfang der Gelehrsamkeit und über die Vielseitigkeit des Wissens des seltenen Mannes zu erfüllen, der die Vollendung des 40. Lebensjahres grade erreichte. In Bezug auf einige der genannten Schriften geht unser Wissen leider über die Kenntniss der Titel nicht hinaus. Sicherlich ist es tief zu beklagen, dass von den geometrischen Aufgaben, von der Arbeit über Kalenderverbesserung, von den Erläuterungen zu Archimed nichts sich erhalten zu haben scheint.

Von den Schriften, welche nach und nach im Drucke veröffentlicht worden sind, müssen wir wohl zuerst die Einleitungsrede zu den in Padua gehaltenen Vorträgen über Alfraganus[2])

[1]) M. Curtze, Die Quadratwurzelformel des Heron bei den Arabern und bei Regiomontan und damit Zusammenhängendes. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Hist.-liter. Abthlg. S. 145 bis 152. [2]) Der Titel des seltenen 1537 in Nürnberg gedruckten Bandes, der diese Rede enthält, lautet: *Continentur in hoc libro. Rudimenta astronomica Alfragani. Item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum, ex observationibus tum propriis, tum Ptolemaei, omnia cum demonstrationibus Geometricis et Additionibus Ioannis de Regiomonte. Item oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas Joannis de Regiomonte, Patavii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eiusdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola Philippi Melanthonis nuncupatoria,*

besprechen. Ihre Wichtigkeit liegt insbesondere darin, dass sie auf das mathematische Wissen Regiomontan's und die damals verbreiteten geschichtlichen Meinungen ein helles Licht wirft. Seit zwei Jahren und mehr, so beginnt Regiomontanus, habe er keine Vorlesung gehalten, der ihm gegenwärtig gewordenen Aufforderung könne er trotz gerechten Bangens nicht widerstehen. Um die Zuhörer zu dem eigentlichen Gegenstande, der Erörterung der Lehren des Alfraganus, vorzubereiten, wolle er einen raschen Blick über die Gesammtwissenschaft der Mathematik werfen. Sie sei die Wissenschaft von den Grössen und zerfalle in zwei Theile, Geometrie und Arithmetik, je nachdem die behandelte Grösse eine stetige oder eine Zahlengrösse sei. Die Geometrie entstand in Aegypten, hervorgerufen durch die Nothwendigkeit, die bei den regelmässigen Nilüberschwemmungen sich verwischenden Ackergrenzen wieder herzustellen. Viele haben ihre Lehren niedergeschrieben. Euklid von Megara sammelte dieselben und vereinigte in 13 Büchern, was er da und dort auflas[1]). Hypsikles fügte zwei Bücher bei. Boethius übersetzte alle 15 Bücher ins Lateinische, gab aber den Text nicht, wie er im Griechischen vorliegt[2]). Später haben Atelhard und Alfred und endlich Campanus die 15 Bücher unter dem einen Namen Euklid's neu bearbeitet, die Ersten elegant und sehr kurz, der Letzte mit grosser Klarheit. Nun folgen Apollonius mit seinen noch nicht übersetzten Kegelschnitten und Archimed, dessen Schriften unter Papst Nicolaus V. durch Jacob von Cremona übersetzt wurden. In dessen Schrift über Spirallinien ist versucht die Kreislinie als gerade Linie darzustellen, um die Quadratur des Kreises zu erhalten, womit viele alte Gelehrte sich beschäftigten, ohne dass bis zu Aristoteles etwas erreicht worden sei, und in unserer Zeit warten einige hochberühmte Männer auf diesen Ruhm[3]). Archimed hat auch selbst eine Kreismessung u. s. w. verfasst. Apollonius wird, wenn er erst einmal aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt ist, die allgemeine Bewunderung erregen. Um nicht ins Unermessliche zu schweifen, wolle er nur Eutokius, den Erklärer des Archimed, Theodosius, Menelaus als Schriftsteller über Sphärik nennen, sehr viele andere Geometer, die in verschiedenen Sprachen schrieben, verschweigen. Nun zur Arithmetik. Wo dieselbe entstanden, sei

---

ad Senatum Norimbergensem. Ausserdem ist die Rede aber auch irrthümlich in Melanchthon's Werken abgedruckt worden. *Corpus Reformatorum* (ed. C. G. Bretschneider) XI, 531—544 (1843).

[1]) *coepit in tredecim libros, quos juste vocavit Elementa, quod ex eis omnes disciplinae pendeant, conclusiones passim lectas conscribere.* [2]) *quamvis commentum non, ut in Graeco jacet, expresserit.* [3]) *cuius rei gloriam nonnulli nostra tempestate viri clarissimi praestolantur.*

kaum zu sagen, Pythagoras habe zwar durch sein Wissen von den Zahlen Unsterblichkeit erlangt, nachdem er dasselbe von Aegyptern und Arabern sich erwarb, aber würdigere Grundlagen schuf Euklid in seinem 7., 8., 9. Buche, aus welchen Jordanus zehn Bücher Elemente entnahm. Von da an verfasste derselbe auch drei sehr schöne Bücher De numeris datis. Diophant's 13 ungemein feine Bücher hat bisher noch Niemand aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt. In ihnen ist die Blüthe der ganzen Arithmetik verborgen, nämlich die ars rei et census, welche man heute mit arabischem Namen Algebra nennt[1]). Als einen in diesen Dingen gelehrten Mann unter den lateinischen Völkern finde ich Bianchini. Bei uns hat man das Quadripartitum numerorum, ein ausgezeichnetes Buch, den Algorithmus demonstratus und die Arithmetik des Boethius, die aus Nikomachus geschöpft ist. Barlaam hat in sechs Büchern die Rechenkunst griechisch dargestellt. Hierauf geht Regiomontan zur Geschichte der Astronomie über. Wir dürfen rasch darüber hinweggehen und führen nur an, dass ein *gewisser Plato von Tivoli* den Albategnius, ein *gewisser Gerard von Cremona* den Spanier Gebar übersetzt habe, Ausdrucksweisen, welche in uns Zweifel rege machen könnten, ob Regiomontan diese Uebersetzungen wohl genauer gekannt habe, wenn sich nicht, wie wir weiter unten sehen werden, die Bekanntschaft mit der zweitgenannten Uebersetzung beweisen liesse. Noch kürzer berühren wir, dass Regiomontan auch sonstiger Zweige der angewandten Mathematik gedenkt, dass er mit wohlthuender Wärme das Lob seines Lehrers und Freundes Peurbach verkündet, dass er nach dem geschichtlichen Ueberblicke auch noch in den üblichen Redensarten über den mannigfachen Nutzen der Mathematik sich ergeht.

Aus dem, was hier etwas weitläufiger aus dem geschichtlichen Theile ausgezogen ist, wird man die schon althergebrachte Verwechslung des Mathematikers Euklid mit Euklid von Megara kaum hervorzuheben haben. Scheint doch Regiomontan von Euklid's Persönlichkeit eine sehr geringe Kenntniss gehabt zu haben. Jener Druck von 1537, in welchem die geschichtliche Einleitung zur Alfraganvorlesung veröffentlicht ist, enthält auch eine Introductio in elementa Euclidis von Regiomontanus. Sie sollte wahrscheinlich die Einleitung zu der beabsichtigten Euklidausgabe bilden, und die in Nürnberg noch vorhandene Originalhandschrift steht auf den ersten Seiten der

---

[1]) *Diophanti autem tredecim libros subtilissimos nemo usque hac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census quam hodie vocant Algebram arabico nomine.*

durch Regiomontan abgeschriebenen Euklidübersetzung des Atelhard[1]). Darin findet sich die Ungeheuerlichkeit, die Geometrie sei von Euklid arabisch verfasst, von Atelhard ins Lateinische übersetzt worden![2]) So vorsichtig uns dergleichen allen Aussagen gegenüber machen muss, die mit Euklid zusammenhängen, können wir doch nicht umhin, bei dem Berichte der paduaner Rede von einer Alfred'schen Euklidbearbeitung zu verweilen. Ist damit eine Uebersetzung gemeint, die zur Zeit König Alfred des Grossen von England, mithin in der zweiten Hälfte des IX. Jahrhunderts entstanden sei? Steht damit in halbem Einklange jener englische Bericht von einer Euklidübersetzung zur Zeit Königs Athelstane (S. 102), der als zweiter Nachfolger Alfreds 924—941 regierte? Wir können nur die Frage anregen, nicht beantworten.

Die Bedeutung der griechischen Mathematiker schildert Regiomontan so überzeugt, dass man annehmen darf, er habe, als er die Rede in Padua hielt, dieselben genau gekannt. Für Euklid, für Archimed und Apollonius, für Hypsikles, Menelaus, Theodosius, Eutokius steht dem auch gewiss kein Zweifel gegenüber. Aber wie verhält es sich mit den 13 Büchern des Diophant? Regiomontan kennt ihre Zahl, hat er aber wirklich 13 Bücher selbst gekannt? Sein Briefwechsel giebt uns darauf Antwort und gestattet zugleich eine angenäherte Zeitbestimmung jener Vorlesung in Padua, welche mit anderen Zeitbestimmungsgründen im Einklange steht. Regiomontan sagt am Anfange der Rede, er habe seit zwei Jahren und mehr keine Vorlesung gehalten. Seine erste wiener Lehrthätigkeit endete 1461, die Rede in Padua muss demnach etwa in den ersten Monaten von 1464 gehalten worden sein. Nun besitzen wir einen Brief[3]), welchen Regiomontanus aus Venedig an Bianchini schrieb. Der Brief ist nicht datirt, aber er ist die Antwort auf einen Brief Bianchini's vom 5. Februar 1464, der als am 11. dieses Monats Februar, undecima huius mensis Februarii, in Venedig angekommen bezeichnet wird. Regiomontan's Brief ist also auch aus dem Monate Februar 1464. Hier erzählt Regiomontan dem Freunde im Vertrauen, er habe jetzt in Venedig den griechischen, noch nicht ins Lateinische übersetzten Arithmetiker Diophant gefunden. Derselbe verspreche in der Vorrede 13 Bücher, aber die aufgefundene Handschrift enthalte deren

---

[1]) M. Curtze im Literarischen Centralblatt vom 30. Juli 1892, S. 1092. [2]) Kästner II, 507: *Incipit ars Geometriae continens 364 propositiones ab Euclide in Arabico compositae et ab Atelhardo Gothico in latinum assumpta* In der Originalhandschrift steht nicht *Gothico* sondern *Goth.* [3]) Christ. Theoph. De Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae*, Pars I, p. 135 (1786).

nur sechs. Würde ein vollständiges Exemplar sich auftreiben lassen, so wollte er wegen dessen Schönheit und Schwierigkeit eine Uebersetzung besorgen, so viel Griechisch, als dieses erfordere, habe er im Hause Bessarion's gelernt. Doch fragt er auch Bianchini's Rath, ob dieser meine, man solle schon die sechs Bücher übersetzen, damit die lateinische Literatur dieses neuen überaus werthvollen Geschenkes nicht entbehre. Von späterer Auffindung einer ergänzenden Handschrift ist nirgend die Rede, wie wir ja auch wissen (Bd. I, S. 437), dass auch im XIII. Jahrhunderte schon nicht mehr als sechs Bücher aufzutreiben waren. Die paduaner Rede berichtet offenbar mit gleicher Begeisterung wie der Brief an Bianchini von dem gleichen Funde, und nehmen wir an, Rede und Brief seien annähernd gleichzeitig, die Rede natürlich etwas später, so kommen wir wieder dazu, sie (S. 256) in den Monat März oder April 1464 zu verlegen.

Damals war ein anderes Werk Regiomontan's schon sehr weit gediehen. Wir haben zwei Briefe Bianchini's vom 21. November 1463 und vom 5. Februar 1464. Zwischen diese fällt ein Brief Regiomontan's, der wieder kein Datum trägt, aber durch seine Stellung zwischen jenen Briefen hinlänglich bestimmt ist. Er muss um Neujahr 1464 geschrieben sein. Damals sagte Regiomontan, er werde Bianchini nächstens die Bücher von den Dreiecken schicken, welche er geschrieben, aber gegenwärtig nicht bei sich habe; er lasse sie aus Rom kommen[1]). Offenbar handelt es sich hier um die hochbedeutende Schrift De triangulis omnimodis libri quinque, welche 1533 im Drucke herauskam. Wenn auch Griechen und Araber, um nur die Völker zu nennen, deren Leistungen Regiomontan bekannt werden konnten, der Trigonometrie zu einer hervorragenden Entwickelung verholfen hatten, wenn auch die Sehnentafeln der Einen, die Sinustafeln und Schatten der Anderen ein rechnendes Verfahren in geometrischen Aufgaben mit Einbeziehung von Winkelgrössen ermöglicht hatten, darüber war doch noch Niemand hinausgegangen. Die Trigonometrie anders behandeln zu sollen als in Gestalt einer Einleitung zur Astronomie war noch Niemand eingefallen, und diesen grossartigen Fortschritt von einem einleitenden Kapitel zum selbständigen Wissenschaftstheil vollzog Regiomontan. Den Gedanken freilich führt er in der von ihm verfassten Vorrede pietätsvoll auf den geliebten Lehrer zurück. Peurbach habe bereits beschlossen eine Kunst der Dreiecke, *triangulorum artem*, zu schreiben, welche in den ersten sechs Büchern des Almagest als Bedürfniss sich erweise. Der Tod hatte die Ausführung dieses Vorhabens verhindert. Weniger genau berichtete Regio-

---

[1]) Murr, l. c. p. 90—91.

montan über andere Vorarbeiten. Wir haben (S. 262) gesagt, er habe die Uebersetzung des Dschâbir ibn Aflah durch Gerhard von Cremona gekannt. Genaue Vergleichung mit den Büchern De triangulis hat dieses sichergestellt[1]), aber genannt ist diese Quelle nirgend. Freilich war Regiomontan's Arbeit erst bis zur Niederschrift einer Vorrede und dem Druckfertigmachen des ersten Buches gediehen, als auch er starb. An die vier weiteren Bücher hatte er die letzte Hand noch zu legen. Man sieht das daran, dass in den vier späteren Büchern in Regiomontan's Handschrift die Nummern der Sätze fehlen, auf welche rückbeziehend die Beweise gegründet sind. Man hätte auch die Ungleichmässigkeit der Bezeichnung als Zeichen der Unfertigkeit erwähnen können. Im ersten Buche heissen die Dreiecke, von denen gehandelt ist, immer abc, in den Folgebüchern meistens abg, während das fünfte Buch zu der lateinischen Buchstabenfolge abc zurückkehrt. Auch in diesem Zustande war die Veröffentlichung der nachgelassenen Handschrift eine Nothwendigkeit, welcher aber der erste Besitzer sich nicht fügte. Walther war von Regiomontan, als er die zweite und letzte Römerreise antrat, die Aufbewahrung seiner Handschriften u. s. w. anvertraut worden, und als nun der Freund in der Ferne starb, nahm Walther es nur zu genau mit dem Worte der Aufbewahrung. Er hielt Alles, was er von Regiomontan's Hand besass, ängstlich verschlossen, ohne es nur Jemand sehen zu lassen. Walther selbst starb 1504 im Alter von 74 Jahren, und nun hätte die Sorglosigkeit der Erben leicht die gleiche Folge haben können wie die übertriebene Sorgfalt Walther's selbst, dass die werthvollen Handschriften nutzlos geblieben wären. Sie wurden da und dorthin zerstreut, Manches scheint dabei zu Grunde gegangen zu sein. Die fünf Bücher über Dreiecke kaufte Willibald Pirckheimer, von welchem später noch die Rede sein wird, und er übergab sie einem gleichfalls später noch zu nennenden Johannes Schöner zur Herausgabe, die 1533 erfolgte.

Das I. Buch mit 57 Sätzen ist zunächst nur einleitender Natur. Das Quadrat einer gegebenen Seite ist bekannt. Die Seite eines gegebenen Quadrates ist bekannt. Die Summe gegebener Grössen ist bekannt. Der Unterschied gegebener Grössen ist bekannt. Zwei gegebene Grössen stehen in dem Verhältnisse ihrer Maasszahlen u. s. w., u. s. w. Der 19. dieser einleitenden Sätze behauptet, dass die Kenntniss dreier von vier in Proportion stehenden Grössen genüge, damit auch die

---

[1]) Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan von A. von Braunmühl (Abhandlungen der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 71 Nr 2. Halle 1897).

vierte bekannt sei. Alle diese Sätze, so einfach sie sind, werden in euklidischer Art bewiesen, wobei jedesmal die Grössen durch ihre Maasszahlen ersetzt sind. Euklid freilich unterliess es in einem solchen Falle nie eine Vorfrage zu stellen, zu untersuchen, ob gegebenen Grössen gegebene Zahlen wirklich entsprechen, ob Rationales vorliege oder nicht. Bei Regiomontanus ist nichts dergleichen zu finden. Nicht als ob er in ungründlicher Weise an der Unterscheidung zwischen Rationalem und Irrationalem vorüberginge, er macht vielmehr, möchte man sagen, diese Unterscheidung dadurch entbehrlich, dass er den Begriff des Bekanntseins anders fasst[1]. Bekannt will er mit einem und demselben Worte jede Grösse genannt wissen, die entweder genau bekannt, oder einer gegebenen Grösse beinahe gleich ist. Der 20. Satz eröffnet die eigentliche Trigonometrie. An der beigefügten Figur (Fig. 38) wird erörtert, dass um den Eckpunkt a des bei c rechtwinkligen Dreiecks abc mit der Hypotenuse ab, als der grössten Dreiecksseite, als Halbmesser ein Kreis beschrieben und ac bis zum Durchschnitte e mit der Kreislinie verlängert werden solle, dann sei bc der Sinus des Bogens be, und die dritte Dreiecksseite ac sei gleich dem Sinus des Complementes[2] des Bogens be. Regiomontan wendet sich aber von diesen Definitionen gleich wieder ab zu den Dreiecksstücken, deren Kenntniss zu erlangen ist, ohne die eben eingeführten Längen weiter zu benutzen. Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke seien beide Winkel gleich. In demjenigen rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse doppelt so lang als eine Kathete ist, sei der von diesen beiden Linien gebildete spitze Winkel doppelt so gross als der andere. Der dritte Dreieckswinkel ergebe sich aus den beiden anderen. Die dritte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks sei durch die beiden anderen gegeben. Der 28. Satz führt zu dem Sinus zurück, indem er ausspricht, die Winkel (Fig. 39) eines bei c rechtwinkligen Dreiecks seien bekannt, wenn das Verhältniss zweier Seiten des Dreiecks bekannt sei. So sei z. B. $ab : ac = 9 : 7$. Nun sei der Halbmesser, welchen Regiomontan sinus rectus totus nennt, 60000 [Peurbach nahm ihn (S. 185) in der Länge von 600000 an], der Sinus

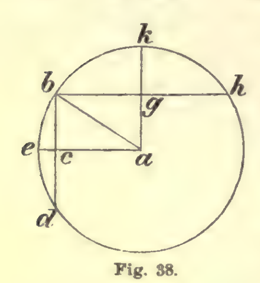


Fig. 38.

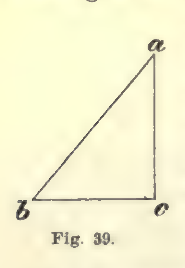


Fig. 39.

[1]) *Quantitatem igitur omnem quae aut nota praecise fuerit aut notae quantitati ferme aequalis univoce notam appellabimus* heisst es bei dem Satze, dass die Seite eines gegebenen Quadrates bekannt sei, der die Ausziehung einer Quadratwurzel einschliesst. [2]) *aequale est sinui recto complementi arcus be.*

des $\sphericalangle\, abc$ ist also $\frac{7 \cdot 60000}{9}$ oder ungefähr (fere) 46667, und diesem Sinus entspricht ungefähr der Winkel von 51° 3′. Ist ferner

$$ac : cb = 12 : 5,$$

so folgt wegen $12^2 + 5^2 = 13^2$, dass $ab : ac = 13 : 12$, und damit ist wie vorher der Weg zur Kenntniss des Winkels abc eröffnet[1]). Umkehrungen dieser Aufgaben am rechtwinkligen Dreiecke folgen, und dann kehrt die Darstellung wieder zu nicht trigonometrischen Betrachtungen zurück. Die Lage der Höhe eines Dreiecks wird besprochen und dabei des gemeinsamen Durchschnittes der drei Höhen erwähnt, welchen Regiomontan anderwärts bewiesen habe[2]). Der Satz selbst war übrigens schon Proklus bekannt[3]). Im 43. Satze führen die beiden Abschnitte, welche die Höhe auf der Grundlinie hervorbringt, den Namen *casus*, welcher uns bei Leonardo von Pisa (S. 37) und bei Jordanus (S. 83) schon auffiel. Im 51. Satze ist der zweideutige Fall besprochen, dass zwei Dreiecksseiten und ein spitzer der einen Seite gegenüberliegender Winkel gegeben seien, der aber vollständig bestimmt werde, sobald man erfahre, ob die vom Schnittpunkte der gegebenen Seiten auf die dritte gefällte Senkrechte diese selbst oder ihre Verlängerung treffe.

Das II. Buch von 33 Sätzen beginnt mit dem Satze von der Proportionalität zweier Dreiecksseiten zu den Sinussen der gegenüberliegenden Winkel[4]). Er soll (Fig. 40) am Dreiecke abg bewiesen werden, und zwar dass $ab : ag = \sin g : \sin b$. Ist $b = 90^0$, so bedarf der Satz ebensowenig eines weiteren Beweises, als wenn $b = g$. Sei also $b > g$, mithin von den gegenüberliegenden Seiten $ag > ab$. Aus b wird mit $bd = ag$ als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, ebenso aus g mit dem gleichen Halbmesser. So zeigt sich $dh = \sin b$, $ak = \sin g$, ferner

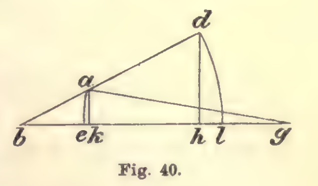


Fig. 40.

$$ak : dh = ba : bd,$$

womit der Satz bewiesen ist. Aus ihm ergeben sich die Auflösungen mannigfaltiger Aufgaben. Z. B. ein Dreieck zu finden, wenn folgende drei Stücke bekannt sind: zwei Winkel und die Summe der ihnen gegenüberliegenden Seiten (II, 2); zwei Winkel und der Umfang des

[1]) *unde ut prius angulo abc cognoscendo via parata est.* [2]) *Tres autem perpendiculares illae in eodem puncto se intersecabunt, quod alio in loco demonstratum tradidimus.* [3]) Proklos Commentar zu Euklid (ed. Friedlein) p. 72, Z. 17—19. [4]) *In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est tanquam sinus recti anguli alterum eorum respicientis ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.*

Dreiecks (II, 7); das gegenseitige Verhältniss der drei Seiten und die Länge einer Höhe (II, 8); das gegenseitige Verhältniss der drei Seiten und der Flächeninhalt (II, 10). Wir erwähnen noch den Fall II, 15, in welchem die Grundlinie, die Summe der beiden anderen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man halbirt (Fig. 41) den Winkel bei a durch ad, so muss sein

$$bd : dg = ab : ag$$

oder $ab : bd = ag : dg$, also auch

$$(ab + ag) : (bd + dg) = ab : bd = \sin adb : \sin \frac{bag}{2}.$$

Hier ist $ab + ag$ die gegebene Seitensumme, $bd + dg$ die Grundlinie, der Winkel $\frac{bag}{2}$ gleichfalls gegeben; mithin ist auch der Winkel adb und mit ihm der abg sowie agb gegeben, und der Fall des Satzes II, 2 ist wieder hergestellt. Eine weitere Aufgabe II, 24 sucht

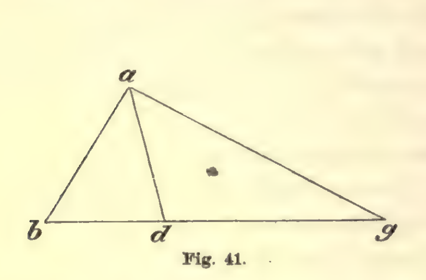


Fig. 41.

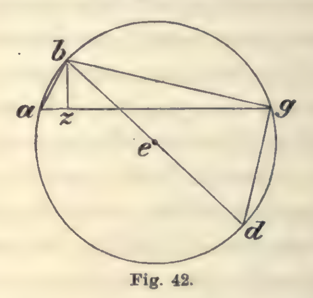


Fig. 42.

aus den drei Dreiecksseiten den Durchmesser des Umkreises. Seien (Fig. 42) ab, bg die beiden kleinsten Dreiecksseiten, so sind die Winkel bei g und a spitz, und die Senkrechte bz trifft die ag zwischen ihren beiden Endpunkten. Das Dreieck abz ist alsdann winkelgleich mit dem dbg und $bz : ba = bg : bd$. Die Höhe bz mit Hilfe der drei Dreiecksseiten zu finden, ist schon in I, 46 gelehrt, somit sind in der eben angeschriebenen Proportion bz, ba, bg gegeben und dadurch bd bekannt. Der Satz II, 5 ist durch einen (in der Druckausgabe allerdings durch einen Fehler entstellten) Vorschlag bemerkenswerth, welchen Regiomontan macht, indem er ihn freilich selbst zur praktischen Anwendung nicht empfiehlt[1]). Sind in einem Dreiecke die beiden Seiten ab, ag (im Drucke steht irrthümlich bg) und der von ihnen eingeschlossene Winkel bag gegeben, so ist damit zugleich auch die Summe der beiden anderen Winkel $abg + agb$ und das Verhältniss ihrer Sinus gegeben $\sin abg : \sin agb = ag : ab$. Dann bleibe aus den letzteren beiden Angaben die Winkel einzeln

---

[1]) *Non tamen per hanc viam operandum suadeo.*

zu finden, und das sei im III. Buche gezeigt. Vermuthlich ist diese letztere Verweisung selbst wieder ein Druckfehler, da der betreffende Satz, wie wir weiter unten sehen werden, als IV, 23 sich vorfindet. Zwei Aufgaben des zweiten Buches II, 12 und II, 23 haben regelmässig die Aufmerksamkeit der Leser dadurch gefesselt, dass sie algebraisch behandelt sind. In II, 12 ist eine Seite und die zu ihr gehörende Höhe gegeben. Ausserdem ist gegeben das Verhältniss der beiden anderen Seiten, die dann einzeln gesucht werden. Die Schlüsse Regiomontan's sind folgende, wobei wir nur die Wörter res, census durch x, x^2 ersetzen[1]). Es sei (Fig. 43) $ab:ag = 3:5$, also $ab < ag$, so liegt d näher bei b als bei g und man mache $de = bd$. Man wählt eg als doppelte Unbekannte $= 2x$, $be = bg - 2x = 20 - 2x$ in dem vorliegenden Falle, wo $bg = 20$. Daher ist $bd = 10 - x$ und dessen Quadrat $= 100 + x^2 - 20x$. Bei $ad = 5$ wird $ad^2 = 25$, mithin

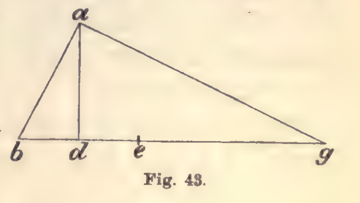


Fig. 43.

$$ab^2 = bd^2 + ad^2 = x^2 + 125 - 20x.$$

Ebenso ist

$$dg = de + eg = 10 - x + 2x = 10 + x,$$

$$dg^2 = x^2 + 20x + 100, \quad ag^2 = dg^2 + ad^2 = x^2 + 125 + 20x,$$

mithin $$(x^2 + 125 - 20x) : (x^2 + 125 + 20x) = 9 : 25,$$

woraus $$16x^2 + 2000 = 680x$$

und was noch erübrigt, darüber werden die Vorschriften der Kunst belehren[2]). Die andere Aufgabe II, 23 nimmt als gegeben an den Unterschied zweier Seiten $= 3$, die von ihrem Durchschnittspunkte aus gefällte Höhe $= 10$ und den Unterschied der Abschnitte der Grundlinie $= 12$. Weil (Fig. 44) $eg = 12$ das vierfache von $gh = 3$ ist, muss die Summe $ab + ag$ das vierfache von bg sein. Regiomontan begründet diese Behauptung nicht, von ihrer Richtigkeit kann man sich, wie folgt, überzeugen. Es ist

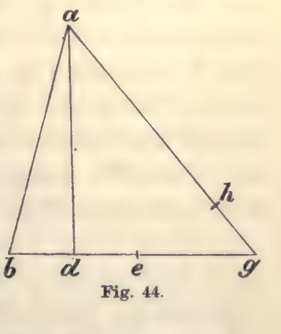


Fig. 44.

$$ad^2 = ab^2 - bd^2 = ag^2 - dg^2 = (ah + hg)^2 - (de + eg)^2$$
$$= (ab + hg)^2 - (bd + eg)^2.$$

Daraus folgt $$2ab \cdot hg + hg^2 = 2bd \cdot eg + eg^2$$

---

[1]) *Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus, sed per artem rei et census id efficere conabimur.* [2]) *quod restat praecepta artis edocebunt.*

oder $(2ab + hg) : (2bd + eg) = eg : hg$

beziehungsweise $(ab + ag) : bg = eg : hg$.

Heisst nun die Grundlinie x, so ist also $ab + ag = 4x$. Weiter ist $bd = \frac{x}{2} - 6$, $ab = 2x - \frac{3}{2}$, folglich geht $ab^2 = bd^2 + ad^2$ über in $\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - 6\right)^2 + 100$, d. h.

$$4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{x^2}{4} - 6x + 36 + 100$$

oder ein Vielfaches von x^2 gleich einer Zahl[1]).

Das III. Buch von 56 Sätzen führt den Verfasser zur Geometrie der Kugel. Von Ausrechnungen von Winkeln oder Seiten ist dabei keine Rede. Da erscheinen Sätze über Grösstekreise und deren Parallelkreise auf der Kugel, über die *Pole* solcher Kreise, die zwar nicht definirt werden, unter welchen jedoch nur sphärische Mittelpunkte verstanden sein können. Da heisst es III, 35, dass bei sphärischen, d. h. aus Bögen von Grösstenkreisen derselben Kugel gebildeten Dreiecken Gleichheit aller Seiten (*latera*) auch die Gleichheit der einander entsprechenden Winkel nach sich ziehe, ferner III, 36, dass die Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels von der Uebereinstimmung der beiden sphärischen Dreiecke auch in den übrigen Stücken begleitet sei. Da lehrt III, 39 den Satz, dass die drei Seiten eines Dreiecks zusammen kleiner als ein Grössterkreis und III, 49, dass die drei Winkel zusammen grösser als zwei Rechte sein müssen. Als Muster für dieses Buch scheint unmittelbar oder mittelbar die Sphärik des Menelaus (Bd. I, S. 386) gedient zu haben.

Das IV. Buch von 34 Sätzen setzt in den 14 ersten Sätzen den Gegenstand des III. Buches fort. In IV, 15 kommt zuerst wieder das Wort Sinus vor, und IV, 16 spricht für das rechtwinklige sphärische Dreieck den in IV, 17 auf alle sphärischen Dreiecke überhaupt ausgedehnten Satz von der Proportionalität der Sinusse von Seiten zu denen der gegenüberliegenden Winkel aus. Nun kommen die beiden übrigen Sätze der sphärischen Trigonometrie für das rechtwinklige Dreieck. Um sie kürzer schreiben zu können, mögen (Fig. 45) c die Hypotenuse, a, b die Katheten, C, A, B die gegenüberliegenden Winkel ($C = 90^0$) bedeuten, so ist IV, 18 der Satz $\sin A \cdot \cos b = \cos B$ und IV, 19 der Satz $\cos c = \cos a \cdot \cos b$. In IV, 21, 22, 23 sind Sätze eingeschaltet, welche wieder der Ebene angehören, und auf deren letzten in II, 5 hingewiesen worden war, welche aber Regiomontan

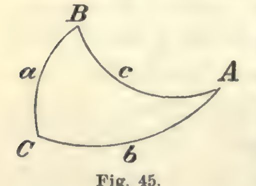


Fig. 45.

[1]) *habebimus census aliquot aequales numero.*

offenbar in vollbewusster Absicht bis zum IV. Buche aufsparte, weil sie hier ihre wichtigste Anwendung finden sollten. Es sind die Sätze, welche aussprechen, zwei Bögen seien einzeln bekannt, wenn das Verhältniss ihrer Sinus und ausserdem ihre Summe, beziehungsweise ihre Differenz gegeben, die Summe überdies kleiner als der Halbkreis sei, eine Bedingung, von welcher IV, 23 wieder Abstand nimmt. Sind (Fig. 46) ag und gb die beiden Bögen, deren Summe ab gegeben ist, und ist $ae = \sin ag$, $bh = \sin gb$, also $ae : bh = r : s$ gegeben[1]), so ist entweder $r = s$ und dann auch arc. $ag = gb = \frac{1}{2} ab$ oder die Zahlen r, s sind ungleich, etwa $r > s$. Wegen $\triangle aed \sim bhd$ ist $ae : bh = ad : bd = r : s$ und $(ad + bd) : bd = (r + s) : s$, $bd = \frac{s}{r+s} ab$, folglich bekannt durch eine Sehnen- oder Sinustafel, in welcher man die zum Bogen ab zugehörige Sehne ab aufsuchen kann. Ist bd und $bk = \frac{1}{2} ab$ bekannt, so kennt man auch dk. Würde man die Rechnung ausführen, welche Regiomontan nur anzudeuten sich begnügt, so käme

$$dk = \frac{r-s}{r+s} \cdot \sin\left(\text{arc.} \frac{ag+bg}{2}\right).$$

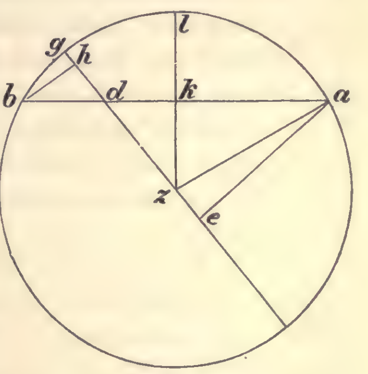


Fig. 46.

Ferner ist im rechtwinkligen Dreiecke zak sowohl za als ak bekannt, also auch zk. Im rechtwinkligen Dreiecke zkd kennt man jetzt zk und dk d. h. zwei Seiten, somit auch den Winkel dzk oder arc. gl, und arc. la ist die Hälfte von arc. ab, mithin ist arc. ag und arc. bg = arc. ab — arc. ag gefunden. Durch Anwendung dieser drei Sätze IV, 21, 22, 23, an welche noch einige Folgerungen sich anschliessen, kommt Regiomontan zu den beiden merkwürdigsten Sätzen IV, 33 und 34 seines ganzen Werkes, aus den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks könne man die drei Seiten, aus den drei Seiten die drei Winkel erhalten. Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass eine Ableitung einer geschmeidigen Formel nicht von Regiomontan erwartet werden darf. Ihm genügt es zu zeigen, dass Rechnung zum Ziele führt, gleichwie in dem Hilfssatze IV, 23, über den wir berichtet haben, sein Bestreben auch nicht weiter ging. Aber auch in dieser Einschränkung des Erreichten, des zu erreichen Versuchten ist der Satz IV, 33 ein unbedingt neuer, und dessen ganze Bedeutung tritt bei der Erwägung

[1]) *ut sit proportio sinus ae ad sinum bh sicut r ad s.*

hervor, wie schwer es einem in ebener Geometrie geschulten Geiste werden musste, sich in den Gedanken zu finden, es könnten drei Winkel zur Bestimmung eines Dreiecks ausreichen. Regiomontan's Satz IV, 33 ist sein unbestrittenes Eigenthum. Der Satz IV, 34 tritt zwar schon bei Albattânî auf (Bd. I, S. 694), doch ist aller Grund anzunehmen, Regiomontan habe bei Bearbeitung seiner Bücher von den Dreiecken die Schriften jenes arabischen Astronomen auch in der Uebersetzung durch Plato von Tivoli nicht gekannt, oder erst seit sehr kurzer Zeit gekannt. Dieser Annahme widerspricht nicht die Art und Weise, in der er in Padua von einem gewissen Plato von Tivoli (S. 262) als Uebersetzer sprach; ihr widerspricht nicht die Anwendung des Wortes Sinus, welches aus jener Uebersetzung in allgemeine Benutzung längst eingedrungen war, und unterstützt wird sie durch den Umstand, dass er sonst in jener Uebersetzung doch wohl auch auf die Cotangenten aufmerksam geworden wäre, die ihm bei Fertigstellung des ersten Buches der Trianguli noch fremd waren. Wir können diesen Schluss aus I, 27 ziehen, wo die Herleitung der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus den beiden Katheten auf dem Umwege erfolgt, dass zuvor mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes die Hypotenuse ermittelt wird, anders könne man den Winkel nicht finden[1]).

Das V. Buch ist das kürzeste und schliesst nur 15 Sätze und Aufgaben in sich, die meistens der sphärischen Trigonometrie angehören. Es sind zum Theil zum zweiten Male auftretende Aufgaben, wie z. B. IV, 34 als V, 3 und als V, 4 sich wiederholt, nur mit anderen Auflösungsmethoden, bei welchen der Sinus versus eine Rolle spielt. Das Wort ist uns bei Leonardo von Pisa (S. 38) begegnet. Seine Bedeutung ist der Unterschied zwischen dem Sinus totus und dem Sinus des Complementwinkels: $\sin \text{vers.}\, \alpha = 1 - \cos \alpha$. Der Sinus versus tritt schon in V, 2 auf, wo er Bestandttheil einer ausserordentlich verwickelten Proportion ist, welche in neuerer Bezeichnung immerhin etwas übersichtlicher als in dem schleppenden Wortlaute Regiomontan's

$$\sin \text{vers.}\, C : (\sin \text{vers.}\, c - \sin \text{vers.}\, (a - b)) = \text{sinus totus} : \sin a \cdot \sin b$$

aussieht. Erst im XV. Abschnitte werden wir einen Schriftsteller kennen lernen, der die Bedeutung dieses ohne grössere Schwierigkeit in $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$ umzuwandelnden Satzes zu würdigen wusste. Wir erwähnen weiter den Satz V, 7, dass in einem sphärischen Dreiecke, dessen einer Winkel halbirt ist, die Sinusse der durch die Winkelhalbirende auf der Grundlinie hervor-

[1]) *nam absque eo propositum attingendi non erit potestas.*

gebrachten Abschnitte sich wie die Sinusse der anliegenden Seiten verhalten. Endlich ist etwa über die Winkelbezeichnung zu bemerken, dass dieselbe in den einzelnen Büchern wechselt. In den drei ersten Büchern sind Grade und Minuten als Worte ausgesprochen, z. B. gradus 36 et minuta 52 in II, 27. Im IV. Buche bezeichnet ein Horizontalstrich über der Zahl die Grade, neben welchen durch ein Pünktchen getrennt, aber sonst nicht ausgezeichnet die Minuten erscheinen, etwa $\overline{36}$. 52. Beispiele sind häufig IV, 21, 22, 25, 26, 27, 34. Im V. Buche kommen Zahlenbeispiele überhaupt nicht vor.

Zur Bestimmung des Zeitpunktes, zu welchem die fünf Bücher von den Dreiecken wenigstens in erster Bearbeitung vollendet gewesen sein müssen, diente uns (S. 264) ein um Neujahr 1464 von Regiomontan an Bianchini gerichteter Brief. In dem gleichen Briefe ist auch von einer anderen Arbeit die Rede, welche Regiomontan damals beschäftigte[1]). Es war ein Tabellenwerk, welches unter dem Namen Tabula primi mobilis im Jahre 1514 bei den berühmten wiener Buchdruckern, den Gebrüdern Alantsee, vereinigt mit anderen Tafeln im Drucke erschien. Regiomontan selbst nennt sie eine Tafel doppelten Einganges — *usus tabulae est intrare cum duobus numeris* — und vielleicht dürfte dieses die erste Anwendung der später landläufig gewordenen Ausdrucksweise sein. Bedeutet wieder (wie S. 270) C den rechten Winkel eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks, c die gegenüberliegende Hypotenuse, a, b die beiden Katheten und A, B die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so ist $\sin a = \sin c \cdot \sin A$. Die c wachsen von Grad zu Grad und je eine solche Grössenbestimmung eines c steht unter dem Namen numerus transversalis oben auf einer Folioseite. Den zweiten Eingang in die Tabellen gestatten die gleichfalls um ganze Grade sich verändernden Winkel A. Sie heissen numeri laterales, weil sie an der Seite der Tafel auftreten. Daneben findet sich alsdann die gegenüberliegende Kathete a ausgerechnet in Graden, Minuten und Secunden. Ihr Name ist der der numeri areales. Die Anwendbarkeit der Tafel wäre bei den grossen Zwischenräumen, in welchen die in der Tafel unmittelbar stehenden Eingangsgrössen von einander abstehen, eine sehr beschränkte, wenn Regiomontan nicht Sorge dafür getragen hätte, dass Proportionaltheile berechnet werden können. Das geschieht, wie folgt. Ist $c = 67^0$, $A = 75^0$, so ist

---

[1]) Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Pars I, pag. 85 und 94—98. Vergleiche insbesondere Pfleiderer S. 130 Note c und die Beschreibung der *Tabula primi mobilis* bei Kästner, II, 526—535.

$a = 62^0\,45'\,55''$ angegeben. Ist wieder bei $c = 67^0$, $A = 76^0$, so ist $a = 63^0\,16'\,24''$ angegeben, um $30'\,29''$ grösser als vorher, und diese differentia descendens oder subiectitia steht unter dem obigen a. Wäre A weiter 75^0 geblieben, aber c zu 68^0 angewachsen, so ist tafelmässig $a = 63^0\,35'\,4''$ angegeben, d. h. $49'\,9''$ mehr als vorher, und diese differentia lateralis ist nun seitlich von dem numerus arealis abgedruckt, so dass also ein kleines Theilchen des mit der Transversalzahl 67^0 überschriebenen Blattes folgendermassen aussieht:

laterales	areales	diff. lateralis
75	62. 45. 55	
	30. 29	49. 9
76	63. 16. 24	
	28. 54	50. 15

In dem wiederholt genannten Briefe von der Jahreswende 1463 auf 1464 sind 40 Aufgaben der praktischen Astronomie gestellt, die alle mittels der Tafel, wenn sie fertig sei, eine leichte Lösung finden würden. Von den 40 Aufgaben sind 36, vermehrt um 27 andere, also insgesammt 63 Aufgaben der Druckausgabe der Tabula primi mobilis als Einleitung vorausgeschickt. Schon aus dieser nicht unwesentlichen Aenderung kann man schliessen, dass die Tabula primi mobilis zu Anfang 1464 noch nicht vollständig druckreif war. Das Gleiche folgt mit noch grösserer Bestimmtheit aus der 43., 44. und 60. Aufgabe der gedruckten Einleitung, in welchen der Name eines anderen Tafelwerkes vorkommt, an welches Regiomontan 1464 noch nicht dachte.

Wir meinen die Tabula directionum. Nach einer Angabe des Geschichtsschreiber Thuanus soll Regiomontan 1475 in Nürnberg, bevor er seine zweite Römerreise antrat, die Drucklegung besorgt haben[1]. Diese Ausgabe, die allerdings nirgend genauer beschrieben ist und darum vielfach angezweifelt wird, soll die Ueberschrift geführt haben: *Ludus Pannoniensis quem alias vocare libuit tabulas directionum*, welche zu erkennen gäbe, dass sie in Ungarn berechnet wurde. Eine zweite durchaus gesicherte Druckausgabe fertigte Erhardt Ratdolt 1490 in Augsburg. Ihr Titel lautet nur *Opus tabularum directionum profectionumque*, und die Zeit der Berechnung wird mit den Worten *Anno Dei 1467 explicit feliciter* angegeben. Im Jahre 1467 war aber Regiomontan noch nicht in Ungarn. Der Widerspruch

[1]) Doppelmayr S. 10 Note p.

ist nicht anders zu beseitigen, als indem man annimmt, die Tafeln seien zwar 1467 in Rom berechnet, aber erst einige Jahre später in Ungarn zum Drucke bestimmt worden. Ihre wesentlich astrologische Bestimmung würde uns gestatten schweigend an der Tabula directionum vorüberzugehen, fesselte nicht eine bestimmte Abtheilung derselben, die Tabula foecunda, in hohem Grade unsere Aufmerksamkeit. Sie bietet uns von Grad zu Grad die trigonometrischen Tangenten der Winkel. Wir haben (S. 185) gesehen, dass Peurbach sich eine Art von Arcustangenstafel anlegte, ferner (S. 272) dass Regiomontan, trotz dieses freilich nur bedingten Vorganges seines Lehrers und trotz des sicheren Vorganges Albattânîs, bei Niederschrift der fünf Bücher von den Dreiecken eine Tangentenanwendung noch nicht kannte. Jetzt war dieser Fortschritt erfolgt, war zugleich ein weiterer Fortschritt eingetreten, der nicht sowohl der Trigonometrie als dem Zahlenrechnen angehört. Die Tangenten, welche aber diesen Namen noch nicht führen, sondern einfach numeri heissen[1]), sind als ganzzahlige Längen berechnet, welche naturgemäss nach einer zum voraus angenommenen Länge des Kreishalbmessers sich bemessen. Die Tangente von 45° muss als dem Halbmesser gleich jene Zahl uns erkennen lassen, und bei ihr findet sich[2]) die Zahl 100000. Zum ersten Male ist also hier reine Decimaltheilung eingetreten, während Peurbach (S. 182) den Halbmesser zu 600000, Regiomontan selbst (S. 266) ihn zu 60000 annahm, und darin noch eine Vermengung der alten Theilung nach Sechzigsteln mit der dem Stellungswerthe der Ziffern entsprechenden Zehntheilung benutzte. Regiomontan ist sich — und das stellen wir fast noch höher als den Fortschritt selbst — klar bewusst gewesen, dass er einen solchen vollzog. In der 10. der Tabula directionum vorausgeschickten Aufgabe heisst es ausdrücklich[3]), die Rechnung werde leichter, wenn man den Sinus totus zu 100000 wähle.

Noch grössere Genauigkeit suchte Regiomontanus in zwei Sinustafeln zu erreichen, welche er ursprünglich den Büchern über die Dreiecke als Anhang beizufügen gedachte[4]). Bei der spätern Herausgabe durch Schöner 1533 unterblieb dieses aber. Statt der Tafeln wurde ein ganz anderer Anhang gedruckt, von welchem wir gleich zu reden haben, und die Tafeln erschienen erst 1541, wenn auch durch denselben Herausgeber Johannes Schöner und in derselben nürnberger

[1]) Kästner, I, 559 bei Gelegenheit einer Beschreibung einer Druckausgabe der *Tabula directionum* von 1606. [2]) Ebenda I, 557. [3]) Pfleiderer S. 29: *Facilius tamen idem efficies si tabula tua maximum sinum habeat 100000.* [4]) In der Vorrede zu *De triangulis* heisst es: *Ad haec demum accedit Tabulae sinum non minus utilis quam nova compilatio.*

Druckerei bei Johann Petreius (oder Hans Peterlein) zum Drucke befördert[1]) wie die Bücher De triangulis. Diese Sinustafeln gehen in den Winkeln von Minute zu Minute und nehmen den Halbmesser in der einen Tafel zu 6000000, in der anderen zu 10000000, auch hier also mit bewusster, aber wahrscheinlich späterer Neuerung, denn in Regiomontan's Compositio tabularum sinuum, dem Vorberichte zu den Tafeln, ist von der Tafel decimalen Halbmessers gar nicht die Rede. Was die Tafel für den Halbmesser 6000000 betrifft, so sagt Regiomontan ausdrücklich, er habe einige der Sinusse sogar auf den Halbmesser 600000000 berechnet, aber die Tafeln im Ganzen bei dem Maassstabe 6000000 belassen. Ein Halbmesser von 6000000, sagt er überdies, genüge um in den Winkeln eine Genauigkeit von Secunden zu erzielen, während man mit dem Halbmesser 60000 auskomme, falls man es bei Winkelminuten bewenden lasse.

Johannes Schöner, sagten wir soeben, habe den Büchern De Triangulis statt der grossen Sinustafeln einen anderen Anhang beigefügt. Es ist die Streitschrift gegen die Kreisquadraturen von Cusanus. Sie besteht aus verschiedenen Rechnungen, welche mit Ort und Tagesangabe versehen sind, wo und wann Regiomontan sie anstellte, und welche dadurch sichern, dass dieser vom 26. Juni bis zum 9. Juli 1464 in Venedig sich aufhielt (S. 257), in angestrengtester Thätigkeit mit verschiedenen Arbeiten wechselnd. Damals also, einen Monat etwa vor dem Tode des Cardinals, studirte Regiomontan dessen Schriften, welche Peurbach bereits, zuerst vertrauend, dann mit wachsendem Misstrauen gelesen hatte[2]). Regiomontan schlug dabei denjenigen Weg ein, der immer einzuschlagen ist, wenn eine sogenannte Kreisquadratur auch nur auf ihre angenäherte Richtigkeit geprüft werden will. Er ging aus von der durch Archimed in strengster Weise begründeten fortlaufenden Ungleichung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ und suchte alsdann den aus den vorgeschlagenen Constructionen sich ergebenden Werth der Verhältnisszahl des Kreisumfangs zum Durchmesser mittels Rechnung zu bestimmen. Sobald dieser Werth ausserhalb der archimedischen Grenzen liegt, und das war bei allen Versuchen

---

[1]) Kästner, I, 540 flgg.: *Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis, idem compositio tabularum sinuum per Joannem de Regiomonte. Adiectae sunt Tabulae sinuum duplices per eundem Regiomontanum.* [2]) *De triangulis* etc. (1533) Anhang pag. 51: *Georgius ille doctissimus Mathematicorum praeceptor olim meus quandam curvi rectificationem brevem admodum mihi obiecit ac factu expeditissimam, cui principio quidem plurimum fidei habuit autoritate inventoris persuadente, ubi vero pro acumine ingenii sui inventum huiusmodi examinare coepit, nam demonstrationem nusquam comperit, longe aliter quam ratus erat accidere didicit.*

von Cusanus der Fall, muss die Construction falsch sein. Der Ton der Streitschrift ist ein ungemein milder, und das Schärfste, was in dem einleitenden Gespräche zwischen einem Aristophilus und einem Critias vorkommt, ist die nicht einmal gradezu als Vorwurf auftretende Behauptung, Cusanus habe sich eines philosophischen, aber keines mathematischen Beweises bedient[1]). Das sticht sehr gegen andere Streitschriften Regiomontan's ab, am vortheilhaftesten gegen die, mit welcher er Georg von Trapezunt (S. 257) bedachte.

Die übrigen im Drucke erschienenen Werke Regiomontan's dürfen wir übergehen, weil wir die Geschichte der Astronomie grundsätzlich ausser Acht zu lassen fortfahren. Dagegen haben wir uns noch mit Zusätzen zu einer Euklidhandschrift, die einst Regiomontan's Eigenthum war, dann auch mit seinem Briefwechsel zu beschäftigen. Die genannte Handschrift enthält die Atelhard'sche Euklidübersetzung und ist entweder ganz oder jedenfalls zum Theile von Regiomontan geschrieben. Man hat dieses aus der Uebereinstimmung der Schriftzüge des Textes, einiger wichtigen Anmerkungen und einer Vorrede, die sich selbst als *Elementa Euclidis, praefatio. Joh. de Regiomonte αὐτοῦ* bezeichnet, erkannt[2]). Das Manuscript selbst befindet sich auf der Stadtbibliothek zu Nürnberg[3]). Zu dem 32. Satze des I. Buches, mithin an der genau gleichen Stelle, zu welcher einst Campanus (S. 104) die Winkelsumme des Sternfünfecks herleitete, hat auch Regiomontan eine Anmerkung von ziemlichem Umfange. Sie beginnt mit dem Satze, jedes Vieleck besitze als Winkelsumme so viel mal zwei Rechte, als seine Rangordnung unter den möglichen Vielecken sei. Es sei nämlich das Dreieck das erste Vieleck, das Viereck das zweite, das Fünfeck das dritte u. s. w., kurzum die um 2 verringerte Anzahl der Ecken bestimme die Rangordnung[4]). In ebensoviele Dreiecke lasse sich das vorgelegte Vieleck von einem Eckpunkte aus zerlegen, und da die Winkel eines jeden dieser Dreiecke zwei Rechte betragen, so folge der ausgesprochene Satz. Dessen Beweis könne übrigens auch so geführt werden, dass man von einem Innenpunkte des Vielecks nach allen Endpunkten Linien ziehe, welche genau so viele Dreiecke hervorbringen, als das Vieleck Seiten besitze, und deren Winkelsumme müsse dann um die vier Rechte verkleinert werden, welche die Winkel um jenen Innenpunkt betragen. Daraus folgt als weiterer

---

[1]) *De Triangulis* etc. (1533) Anhang pag. 25: *Critias. Potere recordari quo demonstrationis genere usus fuerit ille philosophus, mathematico videlicet, an alio quopiam? Aristophilus: Mathematicum haud videtur.* [2]) S. Günther im *Bulletino Boncompagni* VI, 332—338 und Unterricht Mittela. S. 247 Note 1. [3]) Die Signatur der Handschrift ist VI, 13. [4]) *breviter quotus est numerus angulorum, inde demto binario, tota ipsa est a prima.*

Satz, dass wenn (Fig. 47) sämmtliche Vielecksseiten nach einer Richtung hin verlängert werden, die entstehenden Aussenwinkel auch vier Rechte betragen müssen, als Unterschied beim Abziehen der Summen der Vieleckswinkel von doppelt soviel Rechten als Ecken vorhanden sind. Nun schliesst sich der Satz von der Winkelsumme des Sternfünfecks an, welcher in gleicher Weise wie von Campanus bewiesen wird. Nur darin findet sich ein Unterschied, dass Regiomontan das Sternfünfeck als ein solches beschreibt, in welchem jede Seite zwei von den übrigen schneide [1]), eine Beschreibung, welche auch von der durch Bradwardinus gebrauchten (S. 115) im Wortlaute abweicht. Diese Abweichungen erscheinen uns um so bewusster, je sicherer bei Regiomontan's hoher Gelehrsamkeit anzunehmen ist, dass er mit den Leistungen von Campanus und Bradwardinus, seinen Vorgängern in der Lehre von den Sternvielecken, bekannt gewesen sein muss. Die Winkelsumme jedes derartigen Vielecks, in welchem jede Seite zwei von den übrigen schneidet, ist um acht Rechte kleiner als ihre doppelte Eckenzahl. Diese Sternvieleckswinkel gehören nämlich (Fig. 48) eben so vielen kleinen Dreieckchen an als es Seiten, beziehungsweise Ecken gab, und von deren doppelter Anzahl (als Summe sämmtlicher Dreieckswinkelchen in Rechten ausgedrückt) ist die Summe der Winkel an der jedesmaligen Grundlinie abzuziehen. Letztere aber ist, vermöge zweimaliger Anwendung des früheren Satzes von den Vieleckaussenwinkeln, stets acht Rechte. Lässt man weitere Sternvielecke so entstehen, dass jede Seite vier andere schneide, oder dass jede Seite sechs andere schneide, so ist die Winkelsumme in Rechten dahin zu bemessen, dass von der doppelten Eckenzahl das eine Mal 12, das andere Mal 20 abgezogen werden müssen. Hier ist offenbar ein Irrthum, da im letzteren Falle nur 16 abzuziehen sind, im Allgemeinen das Vierfache der von jeder Seite des Sternvielecks geschnittenen anderen Seiten. Zum Beweise wird einfach auf das Vorhergegangene verwiesen [2]). Regiomontan meint offenbar die Sache folgendermassen,

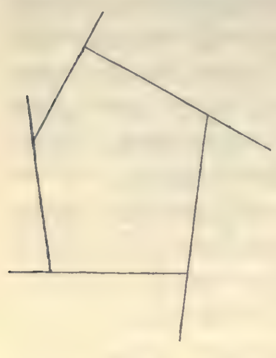


Fig. 47.

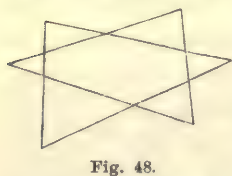


Fig. 48.

---

[1]) *Penthagonus cuius unumquodque latus duos secat ex reliquis.* Die Schreibart *penthagonus* mit th kann bei einem so guten Hellenisten, als Regiomontan es war, Wunder nehmen, ist aber in der ganzen Anmerkung streng festgehalten.
[2]) *Hae omnes et similes ex praemissis ostenduntur.*

wobei wir uns zur Abkürzung der Benennung Sternvielecke verschiedener Ordnung bedienen, die wir früher (S. 115) benutzt haben. Im gewöhnlichen n-eck ist die Winkelsumme (immer in Rechten ausgedrückt) $2n - 4$, also die Summe der Aussenwinkel nach einer Richtung $2n - (2n - 4) = 4$. Im Sternvieleck erster Ordnung ist desshalb die Winkelsumme $2n - 2 \cdot 4 = 2n - 8$, also die Summe der Aussenwinkel nach einer Richtung $2n - (2n - 8) = 8$. Beim Uebergange zum Sternvielecke zweiter Ordnung erscheinen (Fig. 49), wie aus der Zeichnung zu erkennen ist (welche übrigens ebensowenig wie Fig. 50 in der Originalhandschrift gezeichnet vorkommt), nicht neun kleine Dreieckchen, sondern Viereckchen in der Anzahl der Ecken, also mit der Winkelsumme $4n$. Von ihr ist abzuziehen zweimal die Summe von Aussenwinkeln von Sternvielecken erster Ordnung und einmal die Summe der ursprünglichen Vieleckswinkel oder $8 + 8 + (2n - 4) = 2n + 12$, und es bleibt $4n - (2n + 12) = 2n - 12$. Die neuen Aussenwinkel nach einer Richtung haben die Winkelsumme $2n - (2n - 12) = 12$. Beim Uebergange zum Sternvielecke dritter Ordnung, sofern er ausführbar ist, und Regiomontan weiss, dass solches erstmalig beim Neunecke (Fig. 50) der Fall ist, erscheinen neue Viereckchen. Von ihrer Winkelsumme $4n$ ist abzuziehen $12 + 12 + (2n - 8) = 2n + 16$ als zweimalige Summe von Aussenwinkeln von Sternvielecken zweiter Ordnung und einmaliger Summe von Winkeln von einem Sternvielecke erster Ordnung. Es bleibt folglich $4n - (2n + 16) = 2n - 16$. Die letzteren Beweisführungen sind weder bequem auszusprechen, noch sind deren Figuren leicht zu zeichnen, und so kann man schon von dieser Rücksicht aus begreifen, warum Regiomontan darüber wegeilte. Er verstand seine kurze Andeutung, und kam er dazu den Euklid (S. 259) im Drucke herauszugeben, wozu wir jedenfalls in dieser mit Anmerkungen versehenen nürnberger Handschrift eine Vorarbeit zu sehen haben, so war es noch immer Zeit, sich ausführlicher und deutlicher auszudrücken. Einen weiteren Zusatz hatte Regiomontan

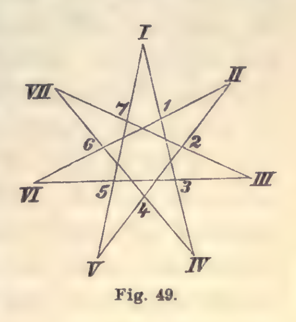


Fig. 49.

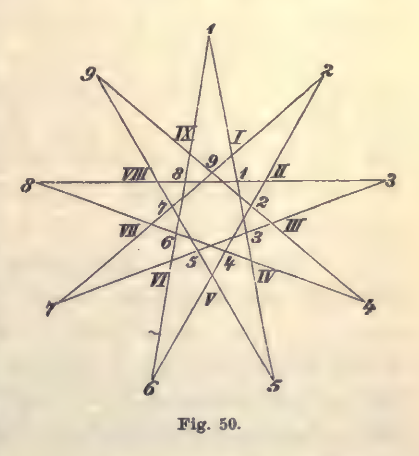


Fig. 50.

zu dem euklidischen Satze III, 30 gemacht[1]) d. h. zu dem Satze, dass der Winkel im Halbkreise ein Rechter sei. Man könne, sagt Regiomontan, auf diesen Satz gestützt eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben errichten (Fig. 51). Von einem beliebigen Punkte b ausserhalb der Geraden als Mittelpunkt und mit der Entfernung dieses Mittelpunktes b von dem Punkte a, in welchem die Senkrechte gewünscht wird, als Halbmesser beschreibt man einen Kreis, der die gegebene Gerade ausser in a noch in einem zweiten Punkte d schneidet. Letzteren verbindet man mit dem Kreismittelpunkte und verlängert diese Verbindungslinie bis zum abermaligen Durchschnitte mit dem Kreise in e, alsdann ist ea die gewünschte Senkrechte.

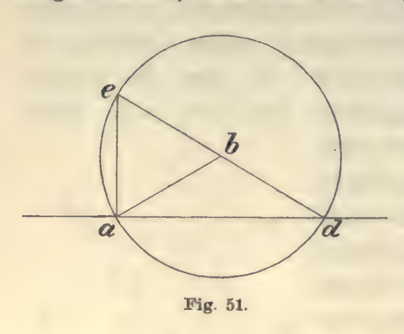


Fig. 51.

Wir wenden uns schliesslich zu dem im Drucke veröffentlichten Briefwechsel[2]). Es sind im Ganzen sechs Briefe Regiomontan's, wovon drei an Bianchini, zwei an Jacob von Speier, einer an Magister Christian Roder von Hamburg gerichtet. Der Letztgenannte ist uns bekannt als Professor der Universität Erfurt (S. 251). Bianchini gehört der Geschichte der Astronomie an. Wir haben nur zu berichten, dass er hochbetagt in Ferrara lebte, dass er schon mit Peurbach bei dessen italienischer Reise in freundschaftlicher Verbindung stand, und dass ganz ähnliche Beziehungen zu Regiomontan sich bei des letzteren früher (S. 256) erwähntem Aufenthalte in Ferrara von selbst ergaben. Jacob von Speier endlich war ein deutscher Astronom oder Astrolog, der im Dienste des Grafen Friedrich von Urbino stand. Mit Regiomontan's Briefen sind auch zwei Antwortschreiben des Bianchini, eines des Jacob von Speier veröffentlicht, zusammen also neun Briefe. Wir beabsichtigen keineswegs diese Briefe, so merkwürdigen Inhaltes sie sind, ausführlich zu besprechen. Nur einiges Geometrische, Einiges aus der Lehre von den bestimmten und unbestimmten Gleichungen heben wir noch hervor, während Einzelnes schon früher, wo gerade die Gelegenheit es mit sich brachte, beigezogen werden musste.

---

[1]) Die Kenntniss dieses Zusatzes verdanken wir freundlicher Privatmittheilung von H. Max. Curtze vom 1. März 1889. [2]) Die Briefe sind gedruckt in Christ. Theoph. de Murr, *Memorabilia Bibliothecarum publicarum Norimbergensium et universitatis Altdorfinae.* Pars I (1786) S. 74—205.

Ganz eigenthümlich ist das Verhalten Regiomontan's in seinen Briefen Campanus gegenüber. Wenn zwischen einem Lebenden und einem mehr als anderthalb Jahrhunderte früher Verstorbenen eine Feindschaft vorhanden sein könnte, müsste man geradezu an eine solche denken. Wir wissen, dass unter den von Regiomontan geplanten Arbeiten eine Euklidausgabe sich befand unter Zugrundelegung der von Campanus herrührenden, aber frei von den durch diesen verschuldeten Fehlern[1]). Er kannte also zuverlässig die Uebersetzung, welcher er Fehler vorwarf, und in dem Briefe vom 4. Juli 1471, den er aus Nürnberg an Christian Roder schrieb, hebt er in den heftigsten Worten einen Fehler des Campanus hervor, dessen Bemerkungen zu den Definitionen des V. Buches (S. 105), gleich als wenn dieser des Fehlers sich schuldig gemacht hätte, den er umgekehrt Euklid vorwarf, Dinge durch sich selbst zu erklären[2]). Soll man vermuthen, Regiomontan habe nur die Fehler des Campanus bemerkt, aber dessen am Schlusse des IV. Buches vorgeschlagene Winkeldreitheilung übersehen, oder soll man annehmen, Regiomontan habe jene Dreitheilung nirgend gefunden (S. 105) und sei unabhängig von Campanus genau auf die gleiche Winkeldreitheilung verfallen? Zu einer dieser Annahmen oder zu der einer wenig redlichen Gehässigkeit gegen Campanus wird man gedrängt, wenn man die 1464 mit Bianchini gewechselten Briefe durchliest. Was diese Briefe, was mathematische Briefwechsel überhaupt so wichtig macht, das ist eine Fülle von Aufgaben der allerverschiedensten Natur, welche die Briefsteller einander vorzulegen lieben, das sind die Auflösungsversuche, welche in den Antwortschreiben sich vorfinden. So stellte Bianchini unter dem 5. Februar 1464 die Aufgabe[3]), aus der Sehne des Centriwinkels von 60^0 die des Centriwinkels von 20^0 zu finden, Regiomontan antwortet darauf ebenfalls im Februar 1464, es gebe verschiedene Verfahren, die Winkeldreitheilung auszuführen, eine davon sei folgende[4]), und nun erklärt er eben die Construction, welche Campanus am erwähnten Orte lehrt, ohne dessen Namen auch nur zu nennen.

Eine Aufgabe, welche in der Geschichte der Mathematik eine gewisse Rolle zu spielen bestimmt war, stellte Regiomontan in dem Briefe, welchen er um Neujahr 1464 an Bianchini richtete[5]): Den

---

[1]) Doppelmayr, S. 13. Der beabsichtigte Titel war: *Euclidis Elementa cum Anaphoricis Hypsiclis editione Campani, evulsis tamen plerisque mendis, quae proprio etiam indicabuntur commentariolo.* [2]) Murr l. c. pag. 191—192: *Pudet profecto recensere labores Campani, quibus frustra stabilire tentat principia quinti elementarum* etc [3]) Ebenda pag. 105, Nr. 7. [4]) Ebenda pag. 138: *Iubetur septimo angulum qui est tertia pars duorum rectorum dividi in tres aequales; sunt certi modi id faciendi quorum unum adduco.* [5]) Ebenda pag. 98—99.

Inhalt des Sehnenvierecks im Kreise vom Durchmesser 60 zu finden, dessen Seiten sich wie die Zahlen 4, 7, 13, 17 verhalten. Bianchini hielt die Aufgabe für unlösbar[1]), worauf Regiomontan in dem mehrerwähnten Februarbriefe 1464 näher auf den Gegenstand einging, der allerdings seine Schwierigkeiten habe[2]). Die vier Strecken, aus denen ein Sehnenviereck gebildet werden soll, und die etwa a, b, c, d heissen, wovon a am kleinsten sein soll, müssen dem Gesetze gehorchen, dass je drei zusammen grösser als die vierte seien. In den Kreis mit dem Durchmesser a kann freilich das Sehnenviereck nicht eingezeichnet werden, ebensowenig in den Kreis mit dem Durchmesser $a + b + c + d$, weil ersterer zu klein, letzterer zu gross ist; folglich muss es einen Zwischenkreis geben, der die Einzeichnung zulässt. Es ist beiläufig bemerkt ersichtlich, dass diese Schlussfolgerung derjenigen des Campanus wie des Cusanus nachgebildet ist, in welcher der stetige Uebergang von einem Kleineren zu einem Grösseren vorgenommen wird. Ist das Sehnenviereck einmal gebildet, so muss die Summe zweier gegenüberstehender Winkel zwei Rechte betragen. Man kann dann immer dessen Diagonalen berechnen, weil, meint Regiomontan, deren Product sowohl als deren Quotient gegeben ist. Das Product ist allerdings nach dem ptolemäischen Lehrsatze gegeben, aber über die Möglichkeit den Quotienten zu finden, geht Regiomontan sehr flüchtig hinweg. Er begnügt sich, ähnlich wie er es in seinen Büchern vom Dreiecke that, mit der Behauptung, dieses oder jenes Verhältniss sei gegeben, ohne es wirklich aufzustellen, und in einem Briefe vollends mag er es für noch weniger nothwendig gehalten haben, eine leicht verständliche Ableitung einer Formel zu geben. Regiomontan liess übrigens die Lehre vom Sehnenviereck nicht mehr aus den Augen. Unter den Aufgaben, welche er am 4. Juli 1471 an Magister Roder einschickte, ist auch die enthalten[3]), Fläche und Schwerpunkt des in den Kreis von 100 Fuss Durchmesser eingezeichneten Sehnenvierecks zu suchen, dessen Seiten sich wie die Zahlen 4, 7, 13, 19 verhalten. Man bemerkt sofort, dass gegen die ältere Fassung nur zwei Zahlen sich geändert haben und die Forderung des Schwerpunktes hinzugetreten ist. Auch diese letztere neue Forderung stellt einen wesentlichen Fortschritt dar. Schwerpunktsbestimmungen gehören bald zu ernsthaft betriebenen Forschungsgegenständen.

In dem gleichen Briefe an Bianchini verfiel übrigens Regiomontan in einen ganz unbegreiflichen Fehler. Er, der gegen Cusanus so richtig hervorhob, das Kennzeichen eines annehmbaren Werthes des

---

[1]) Murr l. c. pag. 101. [2]) Ebenda pag. 119—126. [3]) Ebenda pag. 197, Nr. 3.

Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser bestehe darin, dass er zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ oder zwischen $\frac{1562}{497}$ und $\frac{1561}{497}$ liege, benutzt den Werth $\frac{1554}{497}$ und schreibt ihm noch obendrein die geforderte Eigenschaft zu[1]).

Wir reden nur noch von einer wesentlich geometrischen Aufgabe aus dem Briefe an Roder: Eine 10 Fuss lange Stange ist senkrecht aufgehängt, so dass ihr unteres Ende noch 4 Fuss vom Boden absteht. Man sucht den Punkt auf dem Boden, von welchem aus die Stange am längsten, d. h. unter grösstem Sehwinkel erscheint, beziehungsweise, da es unendlich viele solcher Punkte giebt, die alle auf einer Kreislinie liegen, sucht man den Abstand derselben vom unteren Ende der aufgehängten Stange[2]). Diese Aufgabe ist die erste Maximalaufgabe, welche seit Apollonius und Zenodorus bekannt geworden ist, und es dürfte von Wichtigkeit erscheinen, zu versuchen, ob nicht ein Weg gefunden werden könnte, der zur Lösung führt und Regiomontan zugänglich war. Ein solcher Weg ist folgender[3]): Man denke sich (Figur 52) den gesuchten Punkt K auf CD bereits gefunden, welcher $\sphericalangle AKB$ zum grösstmöglichen macht und lege durch die drei Punkte A, B, K einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten EG von AB liegt. Dieser Kreis muss CD in K berühren. Hätte er nämlich einen zweiten Punkt L mit CD gemein, und läge auf CD ein dritter Punkt M zwischen K und L, so wäre $\sphericalangle AMB > AKB$ als Winkel, dessen Spitze innerhalb des Kreises liegt, während er auf demselben Bogen aufsteht wie der

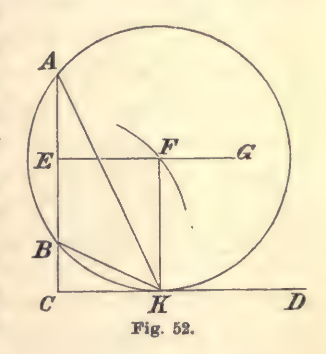


Fig. 52.

Peripheriewinkel AKB. Diese Schlussfolgerung scheint Regiomontan so angemessen, dass wir kaum zweifeln, sein Gedankengang sei damit richtig errathen. Auch wie er die Aufgabe praktisch gelöst haben kann, ist leicht zu errathen. Der Mittelpunkt F des gesuchten Kreises muss, sagten wir, auf EG liegen, und gleich weit, fügen wir hinzu, von A, B und K entfernt sein. Dabei ist $CEFK$ ein Rechteck, also $FK = CE$. Man hat daher nur mit CE im Halbmesser

[1]) Murr l. c. pag. 137—138: *Usus sum proportione circumferentie ad diametrum sicut* 1554 *ad* 497. *hec enim est minor tripla sesquiseptima, maior autem tripla superpartiente decem septuagesimas primas non tamen hec est vera proportio sed veritati propinqua satis.* [2]) Ebenda pag. 201 oben. [3]) Ad. Lorsch, Ueber eine Maximalaufgabe. Zeitschr. Math. Phys. XXIII, Hist.-litter. Abthlg. S. 120.

von B als Mittelpunkt aus einen Kreisbogen zu schlagen, welcher EG in F schneiden muss. Von diesem Punkte F aus als Mittelpunkt beschreibt man dann mit der eben benutzten Zirkelweite den Kreis ABK und hat damit K gewonnen. Den Abstand BK endlich liefert einmalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Fast noch auffallender sind die algebraischen Aufgaben, welche überall den geometrischen zugesellt sind, und welche Bianchini die Worte in die Feder gaben[1]), dass Regiomontan in den Regeln der Algebra hoch gelehrt sei, während er selbst nur in seiner Jugend, während er in kaufmännischen Rechenübungen sich abackerte, einiges zu seinem Vergnügen getrieben habe; beiläufig wieder ein neues Zeugniss, wenn wir dessen bedürften, dafür, dass in Italien die Algebra kaufmännische Uebung war. Regiomontan wechselt zwischen bestimmten und unbestimmten Aufgaben. Kenntniss der ersteren, wenn auch muthmasslich in beschränkterem Maasse, als er sie später besass, brachte Regiomontan gewiss schon aus Deutschland mit. Dass in Deutschland ein Bruder Aquinas in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts sich mit Gleichungen viel beschäftigte, haben wir (S. 238) gesehen. Mit ihm verkehrte auch Regiomontan[2]), und zwar bevor er bei König Mathias in Ungarn war, also muthmasslich noch weit früher, nämlich vor der ersten italienischen Reise. In Italien dürften ihm dann Aufgaben zu Gesicht gekommen sein, die zu kubischen Gleichungen führten (S. 160). Zu eben solchen führt eine Aufgabe, welche Regiomontan Bianchini zu lösen vorschlägt[3]), wenn auch die Fassung dafür zu sprechen scheint, dass Regiomontan hier von Bianchini forderte, was er selbst zu leisten nicht im Stande war.

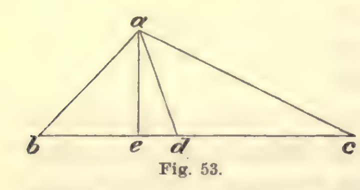


Fig. 53.

In einem Dreiecke abc (Fig. 53), dessen Seiten $ab = 18$, $ac = 25$, $bc = 29$ sind, zog ich, sagte er, von a zur Basis eine ad, so dass das Quadrat von db mit dem Producte von da in ab das Quadrat von ab gab. Wie gross ist bd? Sei $ad = y$, $bd = x$, so ist die Bedingung der Aufgabe $x^2 + 18y = 18^2$. Es sei nun die Senkrechte ae gezogen und $be = z$, so ist

$$ae^2 = ab^2 - be^2 = ac^2 - ce^2, \text{ d. h. } 18^2 - z^2 = 25^2 - (29 - z)^2,$$

$$z = \frac{18^2 + 29^2 - 25^2}{58} = \frac{270}{29}, \quad ae^2 = 18^2 - \left(\frac{270}{29}\right)^2,$$

---

[1]) Murr l. c. pag. 105—106: *Et haec volo sufficiant quantum ad regulas algebre de quibus comprehendo vos doctissimum esse, ego quidem in iuventute dum operationes mercantiarum exararem aliquantulum in hoc me delectavi.* [2]) Ebenda pag. 186. [3]) Ebenda pag. 144, Nr. 17. Am Schlusse der Aufgabe die Worte: *Si dabitis lineam bd dabo cordam unius gradus.*

$$de^2 = (bd - be)^2 = (x - z)^2 = x^2 - \frac{540}{29}x + \left(\frac{270}{29}\right)^2,$$

$$ad^2 = ae^2 + de^2,$$

d. h.

$$y^2 = 18^2 - \left(\frac{270}{29}\right)^2 + x^2 - \frac{540}{29}x + \left(\frac{270}{29}\right)^2 = x^2 - \frac{540}{29}x + 18^2.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe ist $y = 18 - \frac{x^2}{18}$, $y^2 = 18^2 - 2x^2 + \frac{x^4}{324}$, also schliesslich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von y^2 und Weglassung von 18^2 auf beiden Seiten, sowie durch Einrichtung in eine Form, bei welcher auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nur Positives erscheint,

$$\frac{x^4}{324} + \frac{540}{29}x = 3x^2.$$

Division durch x liefert endlich die kubische Gleichung:

$$\frac{x^3}{324} + \frac{540}{29} = 3x.$$

Ist denn, könnte man hier fragen, Regiomontan in der Lage gewesen eine solche Ableitung vorzunehmen, welche in seinem Briefe ebensowenig vorkommt, als die Schlussgleichung, zu welcher wir ihn gelangen liessen? Die Frage ist entschieden zu bejahen. Den Abschnitt *be*, casus, wie Regiomontan (S. 267) ihn nannte, mit ihm zugleich die Höhe *ae* zu berechnen, war eine geradezu einfache Aufgabe für den Verfasser der Bücher De triangulis omnimodis, und was dann noch übrig blieb, war eine einmalige Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf das Dreieck *ade* in Verbindung mit dem Wortlaute der Aufgabe. Zweifelhaft könnte nur Eines erscheinen: ob Regiomontan die Division durch x vollzog und so die Gleichung 4. Grades auf eine solche 3. Grades zurückführte. Aber gerade diesen Zweifel lösen uns die Zusatzworte Regiomontan's: Gebt Ihr mir die Linie *bd*, so gebe ich Euch die Sehne, welche zu dem Bogen von 1^0 gehört. Der Zusammenhang zwischen der Sehne von 3^0, welche unter Anwendung von Quadratwurzelausziehungen gefunden werden kann, mit der von 1^0 liegt in der Gleichung:

$$(\text{chorda } 1^0)^3 + \text{chorda } 3^0 = 3 \text{ chorda } 1^0.$$

Die Worte Regiomontan's geben uns mithin dreierlei zu erkennen: Erstlich, dass er wusste, dass die Ermittelung von chorda 3^0 mit Hilfe von quadratischen Gleichungen möglich war, dass aber dann eine kubische Gleichung gelöst werden musste, um chorda 1^0 zu finden. Zweitens, dass die Lösung dieser Aufgabe seine Kräfte überstieg. Drittens, dass er das Eingeständniss seines Nichtkönnens in die ge-

heimnissvollere Maske kleidete, dass er eine andere kubische Gleichung gleicher Form zur Auflösung aufgab. Die gleichen Mittel, so verstehen wir jetzt seine Schlussworte, welche gestatten, die eben ausgesprochene Aufgabe durch Rechnung zu beantworten, führen auch zur rechnenden Dreitheilung des Winkels.

Wir sprachen von unbestimmten Aufgaben, welche Regiomontanus zu stellen liebte. Wir machen deren 10 namhaft, die wir etwas übersichtlicher ordnen, als sie in Regiomontan's Briefen erscheinen[1]), und die wir zudem in der heute üblichen Schreibweise mittheilen:

1. $x + y + z = 240.$ $97x + 56y + 3z = 16047.$
2. $17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3.$
3. $23x + 12 = 17y + 7 = 10z + 3.$
4. $x + y + z = 116.$ $x^2 + y^2 + z^2 = 4624.$
5. Drei in harmonischer Progression stehende Zahlen zu finden, deren kleinste > 500000 ist.
6. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in harmonischer Progression stehen.
7. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in arithmetischer Progression stehen und deren kleinste > 20000 ist.
8. Drei Quadratzahlen zu finden, welche in arithmetischer Progression stehen, und deren ganzzahlige Wurzeln die Summe 214 besitzen.
9. Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.
10. Zwanzig Quadratzahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl und > 300000 ist.

Diese Aufgaben beziehen sich auf theilweise ziemlich schwierige Gegenstände, welche auch einem heutigen Zahlentheoretiker Kopfbrechen zu veranlassen im Stande sind, so dass ebensowohl die Frage berechtigt erscheint, wodurch Regiomontan veranlasst wurde, gerade solche Aufgaben zu stellen, wie auch die andere Frage, ob er selbst die zugehörigen Auflösungen besessen haben mag?

In ersterer Beziehung darf gewiss darauf hingewiesen werden, dass Regiomontan so glücklich war (S. 263), eine Handschrift der Diophantischen Arithmetik zu entdecken, und dass er den unschätzbaren Werth des Aufgefundenen alsbald erkannte[2]). Aber fragen wir

---

[1]) Die Aufgaben finden sich folgendermassen vertheilt: Murr l. c. pag. 99 steht Aufgabe 2; ebenda pag. 144—145 Aufgabe 1, 4, 8; ebenda pag. 159—160 Aufgabe 3, 9, 6; ebenda pag. 201 Aufgabe 5, 7, 10. [2]) Ebenda pag. 135—136.

weiter, könnte solches selbst einem Regiomontan zugetraut werden, wäre er im Stande gewesen, das Werk sofort als in Wahrheit wunderschön und von grosser Schwierigkeit zu bezeichnen, wenn er ganz unvorbereitet an den ihm ganz neuen Gegenstand herangetreten wäre? Ist nicht weit eher anzunehmen, Regiomontan sei mit Aehnlichem schon vertraut gewesen, er sei in Deutschland in der dort bekannten Regel Ta yen (S. 240) geübt gewesen, er sei dann in Italien noch näher der Zahlentheorie zugeführt worden durch Umgang mit dortigen Gelehrten, welche den Lieblingsforschungen Leonardo's von Pisa nie ganz untreu geworden waren? Erinnert doch schon die 7. wie die 8. der obigen Aufgaben noch deutlicher an die Untersuchungen Leonardo's als an die des Diophant. Und auch eine weitere Berechtigung zu unserer Annahme glauben wir in der Thatsache zu finden, dass nicht bloss die 10 Fragen des Regiomontan, dass auch drei richtige Antworten erhalten sind. Bianchini weiss [1]), dass 2. durch 1103 auch durch 3313 und durch viele andere Zahlen erfüllt wird. Jacob von Speyer nennt [2]) als Auflösung von 1. die drei Werthe 114, 87, 39, als Auflösung von 9. die beiden Summen

$$1 + 4 + 16 + 100 = 121 \quad \text{und} \quad 4 + 16 + 49 + 100 = 169.$$

Und wenn auch Bianchini durch die nachfolgenden Worte, er wolle sich die Mühe nicht geben, weitere Lösungen zu suchen, zu erkennen giebt, dass er die allgemeine Auflösung $2210n + 1103$ nicht besass, so ist doch keineswegs anzunehmen, dass solche Fragen durch blosses Herumtasten ihre Beantwortung finden konnten, ohne dass den Bearbeitern jemals vorher ähnliche Gegenstände vorgelegen hätten.

Die zweite von uns aufgeworfene Frage können wir nur dahin beantworten, dass Regiomontam mindestens glaubte, zu seinen Aufgaben auch entsprechende Lösungen zu besitzen, mochten sie nun richtig sein oder nicht. Antwortet er doch z. B. dem Jacob von Speier [3]) bezüglich dessen Auflösungen von 9.: „Du giebst 4 Quadratzahlen von der Art, wie ich sie verlangte. Es möchte aber schwer halten, zehn solcher Gruppen von Quadratzahlen aufzufinden, ich meine 40 unter einander verschiedene Quadratzahlen, die vierweise vereinigt wieder ein Quadrat geben, wenn man nicht die Uebung eines Kunstgriffes diese zu beschaffen besitzt, und diesen Kunstgriff gerade verlangte ich.“ Es fällt schwer, sich der Meinung zu verschliessen, dass Regiomontan, während er so schrieb, sich im Besitze eines derartigen Kunstgriffes fühlte; es fällt bei der Art, wie er von dem Kunstgriffe spricht, fast noch schwerer anzunehmen, derselbe habe nur darin bestanden, aus einer bekannten Auflösung

---

[1]) Murr l. c. pag. 103. [2]) Ebenda pag. 167—168. [3]) Ebenda pag. 175.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2$ beliebig viele andere durch Vervielfachung mit irgend einem n^2 abzuleiten, wenn wir uns auch versucht fühlen, bei den Aufgaben 7. und 10. an derartige Vervielfachungen zu denken.

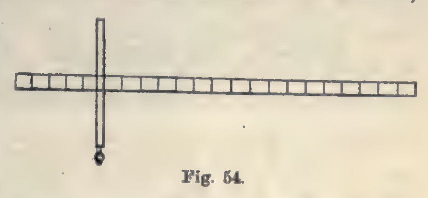
Als wir von Regiomontan's wissenschaftlichen Leistungen zu reden uns anschickten, sagten wir zum voraus, die Unstetigkeit seines Lebens bilde den Hintergrund, von welchem die Grösse seiner Leistungen sich abhebe. Wir liessen damit ahnen, es sei ein grosser Verlust gewesen, den die Wissenschaft durch den Tod des erst 40jährigen Mannes erlitt. Wir dürfen nicht von Regiomontan Abschied nehmen, ohne das damals Vorausgesandte zu wiederholen. Wir haben in Regiomontanus einen Mathematiker allerersten Ranges kennen gelernt, ebenbürtig einem Leonardo von Pisa, einem Jordanus Nemorarius, einem Oresme, um nur die drei Namen zu nennen, die bisher den besten Klang hatten von allen in diesem Bande zur Rede gekommenen. Erster abendländischer Bearbeiter einer wirklichen Trigonometrie hat er ihr eine Vollendung gegeben, welche bis in das XVIII. Jahrhundert hinein nur Ergänzungen, aber keine veränderte Behandlungsweise zuliess. Scharfsinniger Geometer, geübter Algebraiker, geistreicher Zahlentheoretiker hat er auf allen diesen Gebieten gezeigt, dass er auf der vollen Höhe der Zeit stand, und wäre es ihm beschieden gewesen, mehr als in kurzen Andeutungen sich zu ergehen, hätte er Musse gefunden, wie er es hoffte, sich eingehend mit anderen und anderen Theilen der Mathematik zu beschäftigen, so ist nicht zu ermessen, wie gewaltige Neuerungen er gewagt hätte. Ist doch der Regiomontan, den wir zu schildern hatten, selbst nur ein Bruchstück, wenn wir so sagen dürfen, des ganzen Regiomontan, während die Geschichtsschreiber der theoretischen und der praktischen Sternkunde sich mit andern grossen Leistungen des so früh Verstorbenen abfinden müssen.

Ohne in ihr Bereich überzugreifen, sei hier eine Vorrichtung kurz erwähnt, die zu irdisch messenden Zwecken nicht minder anwendbar, als sie sich bei Sternbeobachtungen als einfaches Messwerkzeug bewährte, lange Zeit hindurch fälschlich für eine Erfindung Regiomontan's galt. Wir meinen den Jacobsstab[1]). Nicht als ob Regiomontan's Name gar nicht mit dem Jacobsstab in Verbindung zu

---

[1]) Günther in der *Bibliotheca mathematica* 1885, S. 137—140 und 1890, S. 73—80. Ebenderselbe, Unterricht Mittela. S. 247, Note 3. Ebenderselbe, Martin Behaim (Bayrische Bibliothek Band XIII, Bamberg 1890), S. 22 flgg. — M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* 1889, S. 36—37 und 1890, S. 107. — A. Breusing, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten (1890), S. 36 flgg.

setzen wäre, aber es handelt sich bei ihm um eine wesentlich astronomische Abart. Die einfachste Gestalt des Jacobsstabes ist die (Figur 54) eines senkrechten Querstabes von unveränderlicher Länge, der auf einem in viele gleiche Theile getheilten Längsstabe verschiebbar ist und daran verschohen wird, bis das am Ende des Längsstabes befindliche Auge des Beobachters an dem oberen Ende des Querstabes vorbei einen Höhepunkt einvisirt; ein kleines Bleiloth am unteren Ende des Querstabes regelt die senkrechte Stellung. So kann der Höhenwinkel des einvisirten Punktes leicht bestimmt werden. Die Vorrichtung hiess baculus, genauer baculus geometricus, auch baculus Jacobi, wie man vermuthet von dem gesprenkelten Aussehen des eingetheilten Längsstabes, der ihn jenen Stäben vergleichbar macht, welcher nach biblischer Sage sich Jacob einst zu ganz anderen Zwecken[1]) bediente. Diesen geometrischen Stab hat schon Levi ben Gerson (S. 112), dessen Todesjahr auf 1344 bestimmt worden ist, beschrieben und hat dabei einen verjüngten Maassstab eingerichtet, der ihm gestattete, an seinem Stabe einzelne Winkelminuten abzulesen[2]). Der hebräische Name seiner Abhandlung entspricht dem in einer wiener Uebersetzung[3]) enthaltenen Titel *secretorum revelator.* Der Name des Instrumentes ist baculus Jacobi. Der gleiche Name findet sich in einem Münchener Codex[4]), welchen ein gewisser Theodorich Ruffi 1445—1450 niederschrieb. Regiomontan bediente sich zur Messung des scheinbaren Durchmessers von Kometen eines ähnlichen aber immerhin verschieden gehandhabten Jacobsstabes. Er visirte längs dem Längsstabe auf den Mittelpunkt des Sternes und verschob den Querstab, bis derselbe in ganzer Länge den Stern genau verdeckte. Darum hiess der Stab auch baculus astronomicus und kommt hier eben so wenig genauer in Betracht, als die nautische Bedeutung der bei den Schiffern unter dem Namen Gradstock in Uebung gekommenen Vorrichtung, welche Regiomontan's Schüler Martin Behaim den Portugiesen bekannt machte.


Fig. 54.

[1]) Genesis Kap. 30, Vers 37 flgg. [2]) Curtze brieflich. [3]) Lateinische Handschrift 5072. [4]) Cod. lat. 11067.

56. Kapitel.

Ratdolt's Euklidausgabe. Alberti. Lionardo da Vinci. Die Arithmetik von Treviso.

Schon unsere Untersuchungen über Regiomontan haben uns veranlasst, mit ihm den Boden Deutschlands zu verlassen und in Italien uns umzuschauen. Wir hätten in Regiomontan's Briefwechsel den Namen manches gelehrten Astronomen finden können. Wir unterliessen es, auch nur darnach zu suchen. Einzig Bianchini musste im Vorübergehen genannt werden, neben ihm Jacob von Speier, ein Deutscher, der, wie wir wissen, in Italien lebte.

Noch einen anderen Deutschen haben wir in Italien zu erwähnen, der, ohne Mathematiker zu sein, der Mathematik nicht hoch genug anzuschlagende Dienste geleistet hat. Erhard Ratdolt[1]) gehörte einer Augsburger Künstlerfamilie an und soll etwa 1443 geboren sein. Nachdem er schon in der Heimath das Buchdruckergewerbe geübt hatte, ging er 1475 nach Venedig und gründete daselbst eine berühmte Druckerei, welcher er 11 Jahre vorstand. Dann kehrte er 1486 nach Augsburg zurück, wo er sein Geschäft mit nicht geringerer Auszeichnung bis in sein hohes Alter weiter betrieb. Er soll um 1528 gestorben sein. Wir nennen ihn hier wegen seiner Euklidausgabe[2]) von 1482. Er hat, was gewiss nicht ohne Wichtigkeit ist, in diesem Drucke mathematische Figuren vervielfältigt und hat in seiner Widmung an den Fürsten Mocenigo von Venedig, die selbst eine Neuerung, nämlich die erste Anwendung von Goldschrift im Drucke, aufzeigt, auf jene Erfindung Gewicht gelegt. Die Seltenheit mathematischer Drucke, sagt er, beruhe auf der seitherigen Unmöglichkeit der Figurenherstellung; er habe nach langer Arbeit es dahin gebracht, dass eben so leicht wie die Theile der Buchstaben auch geometrische Figuren gefertigt würden[3]). Nun ist freilich unrichtig, was von der Unmöglichkeit der Figurenherstellung gesagt ist, denn in der um 1472 durch Regiomontan besorgten Druckausgabe von Peurbach's Theorica Planetarum finden sich bereits vortreffliche mathematische Holzschnitte. Anderntheils sind darüber, wie die Schlussworte des angeführten Satzes zu verstehen seien, die Kenner des Druckgewerbes selbst im Zweifel. Vielleicht handelt es sich um

---

[1]) Allgem. deutsche Biogr. XXVII, 341—343. [2]) Kästner, I, 289—302. — Weissenborn, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti (1882), S. 4—12. [3]) *ut qua facilitate litterarum elementa imprimantur ea etiam geometrice figure conficerentur.*

Herstellung von Figuren aus einzelnen gradlinigen oder krummlinigen Figurentheilen, welche, ähnlich wie Buchstaben zu Worten aneinandergesetzt werden, sich vereinigen liessen. War Ratdolt wirklich einer der Ersten, welche Figuren druckten, so hatte er noch im gleichen Jahre 1482 einen Nacheiferer. Mattheus Cordonis von Windischgrätz hat damals mathematische Figuren in Holzschnitt bei einer in Padua von ihm gedruckten Ausgabe von Oresme's latitudinibus in Anwendung gebracht[1]).

Ungleich wichtiger als die Vorgängerschaft auf dem Gebiete des Figurendrucks ist die seit 1482 erst ermöglichte Verbreitung geometrischen Wissens an der Hand des im Drucke nunmehr käuflichen Elementarwerkes. Wie sehr es einem Bedürfnisse entgegenkam, ist aus der Häufigkeit der Nachdrucke zu ermessen. Gleich im ersten Jahre 1482 sind zweierlei Ausgaben vorhanden, beide bei Ratdolt in Venedig gedruckt, unterschieden in dem ersten Bogen, späterhin übereinstimmend. Es ist natürlich ganz unmöglich, zu entscheiden, ob man hier wirklich von zwei Ausgaben zu reden hat, oder ob nur die erste Lage noch einmal gedruckt worden ist[2]), wofür wir allerdings einen Grund nicht abzusehen vermögen. Eine weitere Druckgebung hat 1486 bei Reger in Ulm stattgefunden, eine weitere 1491 bei einem Magister Leonardo von Basel, aber ohne die Widmung an den inzwischen 1485 verstorbenen Fürsten Mocenigo. Und mit dem Jahre 1500 beginnen erst recht neue Auflagen, die wir nur desshalb an dieser Stelle noch nicht anführen, weil sie einen anderen Text enthalten als die Drucke vor 1500. Letztere geben, wie nicht anders zu erwarten, den aus dem Arabischen übersetzten Euklid in der handschriftlich schon verhältnissmässig stark verbreiteten Ausgabe des Campanus, welchen auch die Ueberschrift des selteneren von den beiden Abdrücken von 1482 nennt[3]). Die Zusätze des Campanus sind mit den Beweisen vereinigt in kleineren Buchstaben gedruckt als die Lehrsätze, und Ueberschriften von der Art, wie man sie später findet, *Euclides ex Campano* oder *Campanus* oder *Campani additio* oder *Campani annotatio* fehlen durchaus. Wer aber den Druck in dieser Richtung leitete, darüber sind uns persönlich keine Zweifel, das war Ratdolt selbst. Der Buchdrucker war in der Wiegenzeit jener Kunst meistens ein feingebildeter Mann, oftmals Herausgeber der bei

---

[1]) Max. Curtze in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-liter. Abthlg. S. 58. [2]) Diese Meinung ist, gestützt auf eine genaue Beschreibung beider Drucke, von G. Valentin in der *Biblioth. mathem.* 1893 S. 33—38 vertreten. [3]) *Praeclarissimum opus elementorum. Euclidis megarensis una cum commentis Campani perspicacissimi in artem geometriam incipit feliciter.*

ihm erscheinenden Werke, und wo er es nicht war, pflegte man den Namen des Herausgebers nicht zu unterdrücken.

Es wird auffallen, dass auch derjenige Theil der 1482er Ausgabe, welcher die Zusätze des Campanus hervorhebt, die Bemerkung vermissen lässt, Euklid's Elemente selbst seien dabei aus dem Arabischen übersetzt. Man hat sehr richtig hervorgehoben [1], ein solches Schweigen könne doppelt gedeutet werden. Man schweigt über Dinge, die man nicht weiss, man schweigt auch wohl über Dinge, die Jeder weiss. Hier sei wohl die letztere Deutung richtig. Jeder wusste, dass der Euklid, zu welchem Campanus Erläuterungen verfasste, dem Arabischen entstammte, und wie wollte man zu einer anderen Meinung kommen, wenn man im Texte den Wörtern *helmuaym* und *helmuariphe* begegnete, deren Heimath nicht zweifelhaft sein konnte, mochte auch die eigentliche Bedeutung nicht bekannt sein. Waren doch vielleicht grade diese Namen mitschuldig, wenn, wie wir (S. 263) gesehen haben, ein so guter Kenner des Griechischen wie Regiomontan dem Irrthume, der Mathematiker Euklid sei der von Megara gewesen, den viel unverzeihlicheren zugesellte, dieser Megarenser habe arabisch geschrieben. Ratdolt, den wir hiermit verlassen wollen, hat übrigens auch zu Regiomontan in buchhändlerischer Verbindung gestanden. Er druckte für ihn 1476 ein Calendarium, in welchem besonders hübsche Zierleisten angebracht waren. Die Vereinbarung über diese Veröffentlichung muss wohl unmittelbar vor Regiomontan's Tode getroffen worden sein.

Regiomontan hat in seinem Briefe vom Februar 1464 zwei Männer als besonders zuverlässige Beobachter genannt, Toscanelli und Alberti [2]. Toscanelli ist uns beiläufig als der Jugendfreund des Cusanus bekannt geworden. Wir müssen jetzt Alberti's gedenken, wiewohl er als Baumeister fast nur in mittelbarer Beziehung zur Geschichte der Mathematik steht. Leone Battista Alberti (1404 bis 1472), ein auf den verschiedensten Wissensgebieten mit Erfolg thätiger Schriftsteller [3], hat allerdings eine kleine Schrift *Piccolezze Matematiche* verfasst [4], in welcher die Vorschrift enthalten ist, einen rechten Winkel durch Seilspannung zu erhalten, indem man Stricke von den Längen 3, 4, 5 mit einander vereinige; weniger genau werde der rechte Winkel, wenn man die Längen 4, 5, 6 anwende. Aber

[1]) Weissenborn l. c. S. 12. [2]) Murr, l. c. pag. 148. In der Anmerkung zur gleichen Seite hat Murr die Verse von Ugolino Verius zum Abdrucke gebracht, welche wir im Texte anführen. [3]) G. Loria, Per Leon Battista Alberti in der *Biblioth. mathemat.* 1895, S. 9—12. [4]) Rossi, *Groma e sguadro* (1877), pag. 105.

diese dem grauesten Alterthum angehörende Vorschrift und ähnliche Kleinigkeiten hätten doch nicht ausgereicht, Alberti das Lob zu verdienen, mit welchem ein Florentiner Dichter ihn, den Florentiner Baumeister, bedenkt:

> *Nec minor Euclide est Albertus, vincit et ipsum*
> *Vitruvium. Quisquis celsas attolere moles*
> *Affectat, nostri relegat monumenta Batistae.*

> Kleiner nicht ist als Euklid Albertus, als Sieger besteht er
> Neben Vitruv. Wer immer mit grossen Massen zu thun hat,
> Lese und lese von Neuem, was unser Battista zurückliess.

Wahrscheinlich ist als das zurückgelassene Werk die Architectura gemeint, welche 1485 in Florenz gedruckt wurde, und von welcher schon vor der Drucklegung Lorenzo Ghiberti in seiner Chronik von Florenz rühmte, sie sei unvergleichlich[1]. „Eine Erfindung, so fährt Ghiberti fort, die Alberti machte, ist wahrlich der Buchdruckerkunst an Nützlichkeit gleich zu achten. Er verfertigte nämlich ein Instrument, wodurch es möglich ist, allerlei Zeichnungen auf beliebige Weise zu vergrössern und zu verkleinern.“ Die betreffende Vorrichtung ist in einer kleineren Schrift Alberti's über Malerei, welche er am 7. September 1435 vollendete, beschrieben[2]. Er nennt sie Schleier, velo. „Man nimmt einen ganz feinen, dünn gewebten Schleier von beliebiger Farbe, welcher durch stärkere Fäden in eine beliebige Anzahl von Parallelogrammen getheilt ist. Diesen Schleier bringe ich nun zwischen das Auge und die gegebene Sache, so dass die Sehpyramide in Folge der Dünnheit des Gewebes hindurchzudringen vermag. Sicherlich gewährt Dir dieser Schleier nicht geringe Vortheile.“ Derselbe Alberti hat nach 1464 noch eine weitere Abhandlung De statua geschrieben[3]. In ihr ergänzte er, möchten wir sagen, für die Phantasie, was sein Schleier für das sehende Auge leistete. War es doch für den Künstler, der nicht fortwährend den abzubildenden Gegenstand vor sich hatte und ihn immer vergleichen konnte, geradezu nothwendig, hergebrachte Verhältnisszahlen zu kennen, welche ihn bei der Arbeit unterstützten, insbesondere, wenn es um ein bildhauerisches Kunstwerk sich handelte. Der erste Schriftsteller, von welchem Angaben über die Grössenverhältnisse einzelner Gliedmaassen der Menschen uns erhalten sind, war Vitruvius (Bd. I, S. 508). Dann fanden wir Aehnliches bei den lauteren Brüdern (Bd. I, S. 697). Letztere verbanden damit, wie wir uns erinnern,

---

[1] Aug. Hagen, Künstlergeschichten, 2. Auflage (1861) I, 176. [2] Quellenschriften für Kunstgeschichte XI, 100. Vergl. auch Libri II, 274, Note 2. [3] Quellenschriften für Kunstgeschichte. XI, 200 flgg.

Vorschriften über die Grösse der einzelnen Striche, aus welchen Buchstaben sich zusammensetzen, und wenn wir nicht anstehen, Alles, was über Körpermaasse gesagt ist, in letzter Linie auf das Künstlervolk des Alterthums, auf die Griechen zurückzuführen, so scheint die nach Regeln geübte Ausführung von Buchstaben uns eher arabisch zu sein. Kein Volk hat wenigstens so viel Gewicht auf Schönschrift gelegt, als das arabische, bei welchem derselben nahezu gottesdienstliche Bedeutung innewohnte. Eine vereinzelte Spur [1]) von der Erhaltung der Regeln über Körperverhältnisse ist bei dem Schreiber eines um 1200 etwa entstandenen Bruchstückes anzutreffen, der als Gewährsmann für Verhältnisszahlen von Gliedmaassen einen Egesippus oder Eugippus nennt, vermuthlich einem Griechen, indem doch schwerlich an den sogenannten Hegesippus des Mittelalters, d. h. an den Uebersetzer des jüdischen Krieges von Flavius Josephus in's Lateinische zu denken sein wird. Des Weiteren soll Giotto (1276—1336), der Neubegründer der Malerei in Italien, über die Verhältnisse des menschlichen Körpers geschrieben haben, und Gleiches wird auch von anderen Künstlern, von Piero della Francesca, von Ghirlandajo gerühmt. Piero della Francesca soll daneben auch über regelmässige Vielflächner geschrieben haben [2]). Alberti's Schrift De statua ist die erste selbständige Abhandlung über den Gegenstand, welche der Oeffentlichkeit übergeben ist. Er behauptet darin, die angegebenen Maasse einzelner Körpertheile nach Länge, Breite und Dicke beruhten auf vielfachen Messungen. Die Grundlage aller seiner Zahlen ist ein in 600 Theile eingetheilter, *Exempeda* [3]) genannter Maassstab von Menschenlänge. Bei der Verschiedenheit der Einzelgrösse von einem Menschen zum anderen wird naturgemäss die Grösse des Exempeda und seiner Theile von einem Menschen zum anderen wechseln, aber die Verhältnissmässigkeit vom Ganzen zu seinen Theilen, von der Körperlänge zu der der Gliedmaassen, bleibt unverändert und nöthigt beim Riesen wie beim Zwerge die gleichen Zahlen anzunehmen.

Alberti war keineswegs der einzige Künstler seiner Zeit, welcher mathematische Neigung an den Tag legte und als Schriftsteller von uns genannt zu werden hat. Der grösste italienische Maler des XV. Jahrhunderts Lionardo da Vinci (1452—1519) steht nicht minder gross als Mann der Wissenschaft, insbesondere der Natur-

[1]) Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst (1875), S. 157 und 223. [2]) Staigmüller in der Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, Hist.-liter. Abthlg. S. 125—127. [3]) ἐξεμπεδόω = treulich halten, beobachten. Einer Herleitung von *Exempeda*, welche das Wort sechs Fuss bedeuten lässt, können wir uns nicht recht befreunden, da uns sechs Fuss als regelmässige, also mittlere Menschenlänge zu gross erscheint.

wissenschaft da. Die Geschichte der Physik ermangelt nicht, sich seiner zu rühmen[1]) und die Verdienste hervorzuheben, um derenwillen man Lionardo da Vinci namentlich als einen der Begründer der Optik preist. Die meisten wissenschaftlichen Arbeiten Lionardo's werden in der Zeit von 1482—1499 entstanden sein. Damals stand er in Mailand an der Spitze einer Anstalt, welche nach dem Namen des Vorstehers kurzweg die Akademie des Lionardo da Vinci hiess, und in welcher das Können wie das Wissen der zahlreichen Schüler gleichmässige Anregung erhielt. Vielleicht zu Zwecken von Vorträgen in der Akademie, vielleicht als Vorarbeiten zur Herausgabe von Werken, welche Lionardo plante, aber kaum bis zur Reife des schriftlichen Entwurfs förderte, entstanden Hefte, welche theilweise noch heute vorhanden uns einen bewundernden Einblick in den reichsten Geist gestatten, den das Ende des XV. Jahrhunderts in Italien hervorgebracht hat. Eine Anzahl solcher Hefte voll von feinen in Spiegelschrift von rechts nach links verlaufenden Schriftzügen ist nachweislich abhanden gekommen, wahrscheinlich zu Grunde gegangen. Nur 13 Hefte haben sich erhalten, von welchen 12 mit den Buchstaben *A* bis *M* bezeichnet in den Bibliotheksräumen der Pariser Akademie der Wissenschaften stehen, eines früher als *N* bezeichnet, jetzt den Namen *Codice Atlantico* von seiner einem Atlas ähnlichen Gestalt führend in der Ambrosianischen Bibliothek in Mailand sich befindet. Eine photographische Nachbildung desselben wird vorbereitet, eine solche der Pariser Hefte hat stattgefunden und hat sie dem allgemeinen Studium unterbreitet[2]), so weit der Zustand der Aufzeichnungen ein Studium gestattet. Leider sind es nur zusammenhanglos hingeworfene Bemerkungen, oft einander widersprechend, mitunter durch ein beigeschriebenes falsch *falso* die Unzufriedenheit des Verfassers selbst bezeugend und in keiner Weise ihre Zeitfolge beglaubigend, so dass man nicht weiss, was Lionardo's frühere, was seine spätere Meinung war. Auszüge[3]), welche grösstentheils dem Codice Atlantico entnommen sind, lassen einen auch für die Geschichte der Mathematik nicht unwichtigen Inhalt jenes stattlichen Heftes vermuthen, wenn auch bedauerlicher Weise die Belegstellen nicht abgedruckt sind. Betrachtungen über Sternvielecke, Unterscheidung von Curven einfacher und doppelter Krümmung, Entdeckung der Brenn-

---

[1]) Heller, Geschichte der Physik I, 222—248 (1882). [2]) Charles Ravaisson-Mollien, *Les Manuscrits de Leonard de Vinci.* Tome I *Manuscrit A* (1881). Tome II *Manuscrits B, D* (1883). Tome III *Manuscrits C, E, K* (1888). Tome IV *Manuscrits F, I* (1889) Tome V *Manuscrits G, L, M* (1890). Tome VI *Manuscrit H* und *Ashb. 2038, 2037* (1891). [3]) Chasles, *Aperçu hist.* 530—532 (deutsch S. 625—627). — Libri IV, 42, Note 4; 46, Note 1 und 2.

linien, Leugnung der Möglichkeit einer Quadratur des Kreises, Erfindung der Zeichen + und — sind Dinge, die eine genauere und dadurch glaubwürdigere Besprechung verlangt hätten. Die Ausbeute der bisher veröffentlichten Hefte zeigt uns Lionardo da Vinci nicht als grossen Mathematiker. Sie giebt zu erkennen, dass er, der Mann der praktischen Anwendung, auch auf die Geometrie sein Augenmerk vorzugsweise nach der Richtung hinwandte, ob und wie sie etwa den Zwecken des Künstlers dienstbar gemacht werden könnte. Weitaus am häufigsten kommen Zeichnungen regelmässiger Vielecke vor[1]), bald so, dass eine gegebene Kreislinie in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, bald so, dass über einer gegebenen Strecke als Grundlinie das betreffende Vieleck verlangt wird, und dass diese Aufgabe alsdann durch Auffindung des Mittelpunktes des Umkreises des Vielecks als gelöst betrachtet wird. Dabei ist häufig die Bedingung gestellt, es solle die Zeichnung unter Festhaltung einer einzigen Zirkelweite vollzogen werden[2]). Wir wissen, dass Abû 'l Wafâ (Bd. I, S. 700) die gleiche Bedingung bei einer grossen Anzahl von Aufgaben beobachtete. Von jetzt an ist sie dem Abendlande, insbesondere Italien erworben. Betrachten wir nun einige der Vorschriften Lionardo's da Vinci. Um d (Figur 55) beschreibt man einen Kreis, um b wenigstens einen Kreisbogen, um a einen zweiten, um c einen dritten Kreisbogen immer mit derselben Zirkelöffnung. Dann zieht man die Geraden bc und def, so ist

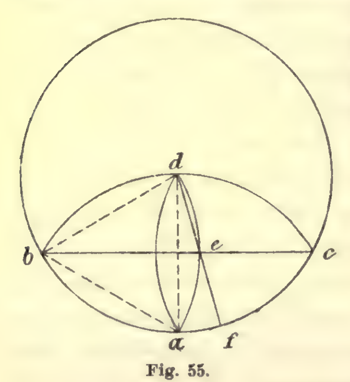


Fig. 55.

$$\text{arc. } ba = \frac{1}{6} \text{ des Kreises,}$$

$$\text{arc. } bc = \frac{1}{3} \text{ desselben,}$$

$$\text{arc. } cf = \frac{1}{8}, \quad \text{arc. } af = \frac{1}{24},$$

wie man leicht erkennt, wenn man die Figur ergänzend die Hilfslinien ab, bd, da zieht[3]). Ein anderes Mal[4]) wird (Figur 56) um e ein Kreis beschrieben, um a ein Kreisbogen, um c ein weiterer, um d ein letzter, wieder alle mit gleicher Zirkelöffnung. Die Gerade ad liefert jetzt den Punkt n, die Gerade

[1]) Cantor, Ueber einige Constructionen von Lionardo da Vinci in der Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. [2]) Z. B. A fol. 15 verso: *Affare una linia curva divisua in parte dispari e equali come apare in abc con un solo aprire di seste* und häufiger. [3]) B fol. 40 recto. [4]) B. fol. 27 verso.

bnm den Punkt *m*, dann soll arc. $am = \frac{1}{5}$ Kreislinie sein. Dabei sind auf *ac* vier Pünktchen angegeben, welche die Fünftheilung dieses Bogens vollenden und je ein Theilchen als $\frac{1}{30}$ Kreislinie auftreten lassen; arc. *cm* ist ungefähr ebensogross, arc. *am* also $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. Unter Benutzung der auf der Figur angedeuteten Hilfslinien hat sich heraus-

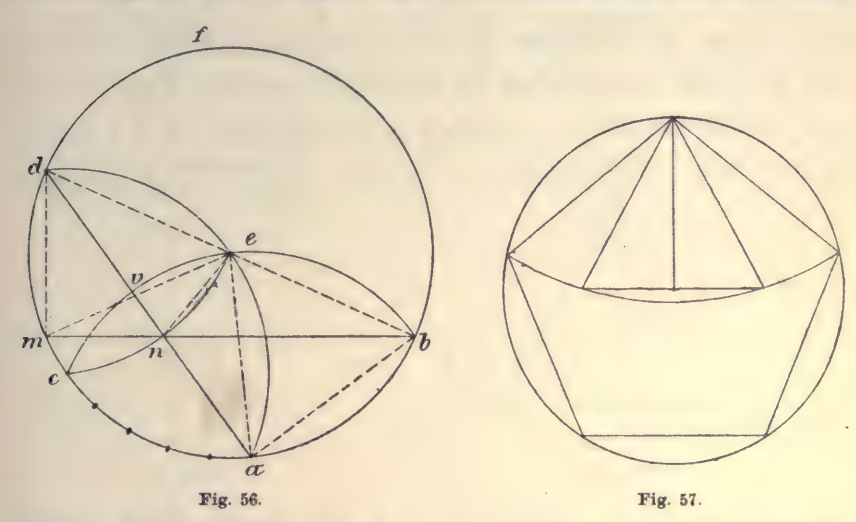


Fig. 56. Fig. 57.

gestellt, dass arc. *cm* statt 12°, die er messen sollte, etwa 12° 25′ beträgt. Noch falscher ist (Figur 57) die Zeichnung eines regelmässigen Fünfecks[1]). Ein gleichseitiges Dreieck ist beschrieben, dessen Höhe ist gezogen und dient als Halbmesser dazu, um von dem Fusspunkte der Höhe als Mittelpunkt aus einen Kreis zu beschreiben. Von der Spitze des Dreiecks aus wird mit der Dreiecksseite als Halbmesser ein Bogen beschrieben, und dessen Durchschnittspunkte mit dem vorhergezeichneten Kreise nebst der Spitze des Dreiecks sollen drei Eckpunkte des verlangten Fünfecks sein. Lionardo hat selbst falso an die Figur geschrieben. Gleichwohl hat er den zu Grunde liegenden Gedanken nicht fallen lassen. Vom Eckpunkte *m* (Figur 58) des gleichseitigen Dreiecks *mnc* hat er[2]) die Senkrechte *mb* nach der Mitte der Seite *nc* gezogen und durch den um *m* als Mittelpunkt beschriebenen Kreisbogen *ba* auf der Höhe des Dreiecks den Punkt *a* gefunden, der ihm Mittelpunkt des durch *m* und *n* gelegten Kreises wird, in welchen *mn* als Fünfecksseite passt. Diese Zeichnung ist rechnungsmässig geprüft dahin zu deuten, dass $\sin 36^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$

[1]) A fol. 13 verso. [2]) A fol. 17 verso.

angenommen ist, während $\sin 36^0 = 0{,}58778$ sein muss. Ein dritter Versuch[1]) liefert $\sin 36^0 = \frac{5}{\sqrt{73}} = 0{,}58520$. Er besteht in Folgendem (Figur 59). Von *a* und *d* mit *ad* im Halbmesser beschriebene Kreisbögen *bc* und *ef* schneiden einander in *p* und *r*, durch welche Punkte die *mrsph* grad-

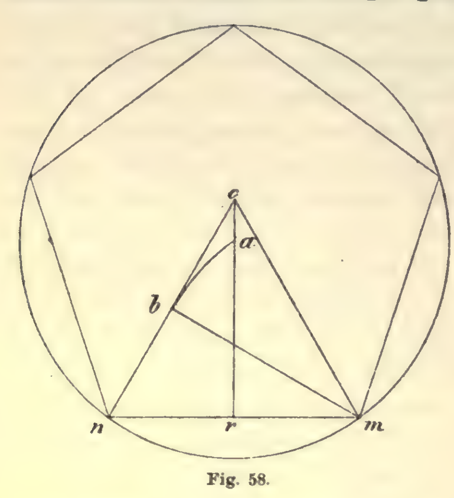


Fig. 58.

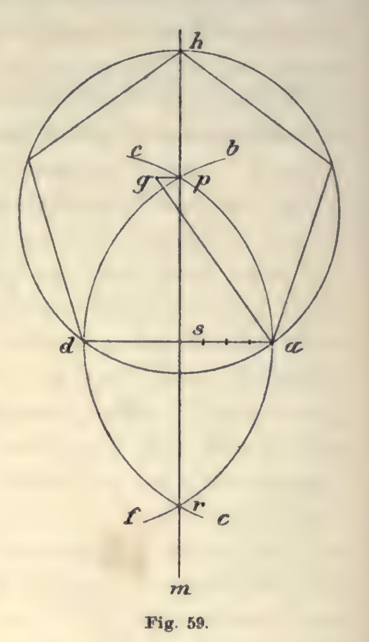


Fig. 59.

linig gezogen wird. Dann wird *as* in vier gleiche Theile getheilt und $pg = \frac{as}{4}$ parallel zu *as* gezogen. Die *ga* schneidet die *mh* im Mittelpunkte des durch *a* und *d* hindurchgehenden Kreises, in welchen *ad* als Fünfecksseite passt.

Will ein regelmässiges Siebeneck in einem Kreise von gegebenem Halbmesser erhalten werden, so verfährt Lionardo da Vinci folgendermassen[2]) (Figur 60). Aus einem Punkte *c* des Kreisumfanges wird der Bogen *ad*, aus *d* der Bogen *ac* beschrieben, *cd* und senkrecht dazu *ab* gezogen, so ist *ab* genau die Siebenecksseite[3]). Man erkennt hier sofort diejenige Methode, deren sich Abû 'l Wafâ (Bd. I, S. 702) bediente und welche Jordanus Nemorarius (S. 83) unter der Bezeichnung als indische Regel lehrte.

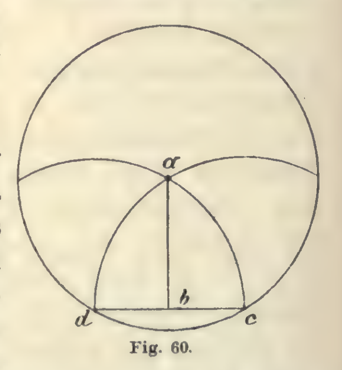


Fig. 60.

Das Achteck hat Lionardo, wie wir oben sahen, ganz richtig

[1]) B fol. 13 verso. [2]) B fol. 28 recto. [3]) *e la linia ab e che in sopra del meza dela linea cd sara apunto $\frac{1}{7}$ da tutto il circulo.*

construirt. In demselben Hefte, in welchem die richtige Zeichnung gelehrt ist, nur 23 Blätter früher, ist in näherungsweiser Zeichnung der Mittelpunkt[1]) des Umkreises zu einer gegebenen Achtecksseite gesucht (Figur 61). Die mit am als Halbmesser von a und m aus beschriebenen Bögen schneiden sich in p und gestatten die Mittelsenkrechte zu am zu ziehen. Nimmt man auf dieser von p aus nach oben $\frac{ap}{3}$ hinzu, so erscheint der Mittelpunkt C des Kreises. Der Grund für die Annahme von $pC = \frac{ap}{3}$ mag darin zu suchen sein, dass am im Kreise vom Halbmesser ap Sechsecksseite wäre, und dass $8 : 6 = 1\frac{1}{3} : 1$. Von ähnlichem Gedanken aus dürfte die Viertheilung einer Strecke in der letzten Fünfecksconstruction sich erklären.

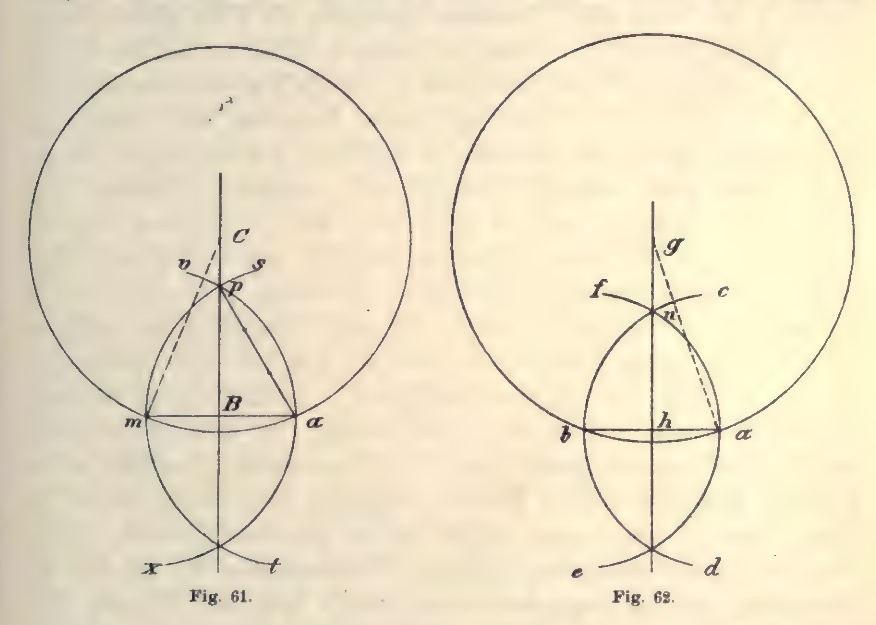


Fig. 61. Fig. 62.

In dem hier erhaltenen Kreise ist arc. am etwa $45^0\ 15'\ 41''$ statt 45^0 Unsere Vermuthung, wie die Achtecksconstruction entstanden sein könnte, wird durch eine Neuneckseonstruction[2]) gerechtfertigt. Da $9 : 6 = 1\frac{1}{2} : 1$, so müsste der Mittelpunkt des Neunecks von dem des Sechsecks um die Hälfte des früheren Halbmessers abstehen, und darauf kommt Lionardo's Vorschrift auch hinaus, denn es wird (Figur 62) von n aus $ng = hb = \frac{ab}{2}$ aufgetragen. Das Ergebniss ist arc. $ab = 40^0\ 12'\ 25''$ statt 40^0, aber Lionardo glaubte eine genaue Zeichnung zu besitzen[3]). Endlich hat sich Lionardo (Figur 63) noch

[1]) B fol. 17 recto. [2]) B fol. 29 recto. [3]) *e tera in se apunto 9 delle date linie.*

an einer Construction eines Achtzehnecks unter Beibehaltung einer festen Zirkelweite versucht[1]), welche er nachträglich selbst durch ein beigeschriebenes falso verurtheilt hat. Die Figur ist bei Lionardo mit Buchstaben versehen, aber nicht erläutert. Sie erklärt sich indessen von selbst und liefert

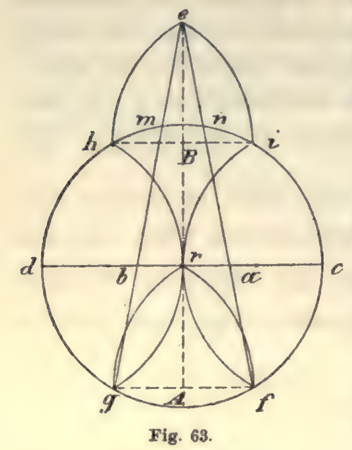


Fig. 63.

$$\text{arc. } mn = 16^0\ 25'\ 36''$$

anstatt 20^0, mithin das schlechteste Ergebniss unter allen.

Die Frage, deren Beantwortung unzweifelhaft von verhältnissmässig grösster Bedeutung wäre, ist die nach dem Werthe, welchen Lionardo da Vinci diesen Zeichnungen beilegte. Hielt er sie für richtig, oder hat er nur als Künstler dem Künstler einige leichte Methoden zur Herstellung von Figuren, wie sie als Zierrath da und dort sich anbringen liessen, an die Hand geben wollen? War er ferner selbst der Erfinder aller dieser Constructionen, war er es nicht? Wir glauben auf folgende Dinge hinweisen zu müssen. Erstens sind für eine und dieselbe Aufgabe der Fünfeckszeichnung mehrfache Vorschläge gemacht. Das ist nur dadurch zu erklären, dass die früheren Vorschläge den späteren gegenüber als mangelhaft erkannt wurden. Zweitens steht bei einigen Figuren ein *falso*, bei anderen ein *apunto*. Lionardo hielt demnach erstere für falsch, letztere für genau richtig. Es will uns scheinen, als sei darin eingeschlossen, dass er die Zeichnungen, welchen weder das eine noch das andere Beiwort beigefügt war, auch weder für falsch, noch für genau hielt, mithin für nur annäherungsweise richtig. Von den beiden als richtig belobten Constructionen ist uns die des Siebenecks, wie wir angegeben haben, längst bekannt. Sie mag wohl Lionardo auf irgend eine Weise zur Kenntniss gebracht worden sein, und er hielt sie für genau, wie sie ihm als genau mitgetheilt worden war. Vielleicht ist auch die Neuneckszeichnung von anderswoher zu ihm gedrungen, wenn wir sie gleich weder vorher noch später irgendwo haben auftreten sehen. Vielleicht müssen wir aber auch die Neuneckszeichnung als Lionardo's Eigenthum anerkennen und dann freilich gereicht jenes *apunto* nicht zu seinem Ruhme als Mathematiker. Alle übrigen Vorschriften, die gleichfalls ausschliesslich in den Heften Lionardi's da Vinci gefunden worden sind, schreiben wir ohne weiteres ihm zu, es dahin gestellt sein lassend, was seine eigentliche Absicht war.

---

[1]) B fol. 13 recto.

In den Heften, welche man, trotzdem ihr Format von dem eines Foliobogens bis zum kleinsten Sedez wechselt, insgesammt als Notizbücher zu bezeichnen das Recht hat, deren Inhalt mitunter eine recht kunterbunte Mannigfaltigkeit aufweist, kommen auch mathematische Dinge ausser jenen Vieleckscontructionen noch vor. In den veröffentlichten Heften ist mehr Geometrisches als Rechnungen zu finden. Letztere erscheinen vorzugsweise im Hefte E. Es sind Uebungen in Rechnungen mit Proportionen. Ein Text ist denselben nicht beigefügt. Auch im Hefte I sind mancherlei Rechnungen, welche aber sämmtlich Lionardo's Bedeutung auf diesem Gebiete als eine recht dürftige erscheinen lassen. Namentlich besass er vor Bruchrechnungen eine heilige Scheu [1]). Unter dem Geometrischen mögen noch folgende Dinge erwähnt werden: die uralte Höhenmessung durch den Schatten, welche gerühmt wird [2]), eine Methode, die Flussbreite zu messen [3]), welche genau mit derjenigen übereinstimmt, die einst Sextus Julius Africanus lehrte (Bd. I, S. 410), das Dreieck [4]) mit den Seiten 13, 14, 15, welches zu dem unverwüstlichen Bestande der Geometrie fast aller Himmelsstriche gehört, und welches aus den beiden aneinanderhängenden rechtwinkligen Dreiecken 5, 12, 13 und 9, 12, 15 entstanden ebenso leicht wiederholt gebildet als übertragen worden sein kann. Eine Figur [5]) mit den beigeschriebenen Zahlen der Längenmaasse versinnlicht den Satz der Proportionalität einer Kreistangente und den beiden Abschnitten einer von einem Punkte der Tangente ausgehenden Secante. Die Quadratur eines Kreisausschnittes [6]) erfolgt, man sollte sagen, nach indischem Vorbilde (Bd. I, S. 614) durch Zerschneiden in kleinere, aber dem Ganzen ähnliche Theile, welche beim Geradmachen des gebogenen Theiles der Figur eine kammartige Gestalt annehmen, so dass zwei solcher Figuren vermöge eines Ineinanderschiebens ein Rechteck hervorbringen. Ein anderer Versuch, die Kreisquadratur zu verdeutlichen, besteht darin [7]), dass (Figur 64) ein Kreisausschnitt durch Geradbiegen seiner Wölbung unmittelbar in ein gradliniges Dreieck übergeführt wird, wobei das Dreieck mit ebensovielem Flächenraume aus dem Kreisausschnitte heraustritt, als es im Innern des Ausschnittes freilässt. Ein dritter Versuch ist höchst bemerkenswerth, weil er die Quadratur mittels des Rollens eines Rades her-

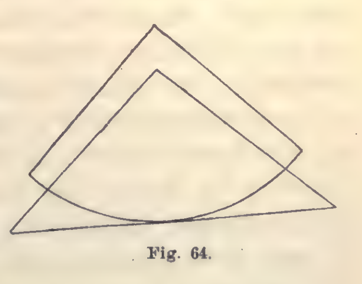
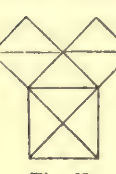


Fig. 64.

---

[1]) I fol. 135 (87) verso. [2]) A fol. 6 recto: *e bona regola.* [3]) E fol. 51 verso. [4]) E fol. 73 (25) verso. [5]) E fol. 72 (24) recto. [6]) E fol. 25 recto. [7]) E fol. 25 verso

stellt. Dabei ist zwar ein grober Schreibfehler untergelaufen, aber der Sinn ist nicht misszuverstehen. Man soll ein Rad[1]), dessen Dicke dem halben Radius gleich ist (irrthümlich ist dafür der halbe Durchmesser gesagt), ganz umrollen, so lässt es eine Spur zurück, welche dem Kreise des Rades flächengleich ist. In einem anderen Hefte[2]) ist der Schwerpunkt der Pyramide von dreieckiger Grundfläche richtig bestimmt, indem behauptet wird, er liege auf der Axe der Pyramide und zwar so, dass die Entfernungen zur Spitze und zur Grundfläche sich wie 3 zu 1 verhalten. Fehlerhaft und mehr als ein Schreibfehler ist es dagegen, wenn in dem gleichen Hefte behauptet wird[3]), das doppelte Diametralviereck eines Würfels sei so gross wie das Diametralviereck des doppelten Würfels. Das Diametralviereck des Würfels von der Seite a (b) ist $a^2\sqrt{2}$ ($b^2\sqrt{2}$). Soll $b^2\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{2}$ sein, so folgt $b = a\sqrt{2}$, während die Verdoppelung des Würfels $b = a\sqrt[3]{2}$ erfordert. Wieder in einem anderen Hefte (dem Hefte I) sind ziemlich viele geometrische Figuren gezeichnet, aber meistens ohne begleitenden Text. Eine ganze Anzahl derselben ist augenscheinlich dem pythagoräischen Lehrsatze gewidmet, so die bekannte Figur zum euklidischen Beweise des Satzes, aber auch eine andere (Figur 65), welche den Sonderfall des gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks erläutert. Wir begnügen uns mit diesen Auszügen, die immerhin gestatten, den weiteren Veröffentlichungen mit einiger Spannung entgegenzusehen, ob also der Codice atlantico wirklich das enthält, was frühere Untersucher behauptet haben.


Fig. 65.

Eigentliche Mathematiker waren die italienischen Künstler, von denen hier die Rede sein musste, nicht. An solchen fehlte es aber keineswegs. Namen, Schriften haben sich erhalten, auch der Druck hat ihre Schriften, mitunter sogar in wiederholten Ausgaben, vervielfältigt. Die älteste derartige Druckschrift, von der man gegenwärtig Kenntniss besitzt[4]), besteht aus 62 Blättern von je 32 Zeilen auf der Seite. Die Typen sind gothisch. Das Buch hatte seinen Ursprung in Treviso in der Druckerei eines bekannten dortigen Meisters Michiel Manzolo oder Manzolino im Jahre 1478. Der Drucker ist zwar nicht genannt, aber die vorhandene Angabe des Druckortes

[1]) E fol. 25 verso: *La intera revolutione della rota della quale la grossezza sia equale al suo semidiamitro lasscia di se vesstigio equale alla quadratura del suo cierchio.* [2]) F fol. 51 recto. [3]) F fol. 59 recto. [4]) Vergl. Bald. Boncompagni in seiner sehr umfassenden Abhandlung in den *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei* (1862—1863), T. XVI pag. 1—64, 101—228, 301—364, 389—452, 503—630, 683—842, 909—1044. Ein Exemplar der Arithmetik von Treviso ist im Besitze der Abtei Gottweih.

und des Jahres verbunden mit den Typen haben durch sorgsame Vergleichung zu jenem kaum anzuzweifelnden Ergebnisse geführt. Wer dagegen der Verfasser der Arithmetik von Treviso, wie sie künftig bei uns heissen mag, war, hat nicht ermittelt werden können. Nur den Zweck seines Werkes giebt er kund, indem er sagt, er sei von jungen Leuten, die dem Kaufmannsstande sich widmen wollten, inständig gebeten worden, die Rechnungsregeln zusammenzustellen. Ueber einige dieser Rechnungsregeln giebt der Auszug, dessen wir uns bedienen konnten, Auskunft, und sie erinnern vollständig an das, was uns als Kaufmannsarithmetik bekannt ist.

Die Multiplication wird nach sehr mannigfaltigen Methoden gelehrt. Die erste Methode heisst *moltiplicare per colona*[1]). Sie wird geübt, wenn man es nur mit einem einziffrigen Multiplicator zu thun hat und lässt das Product einfach unter den Multiplicandus setzen. Sind beide Factoren zweiziffrig, so wird die kreuzweise Multiplication angewandt[2]), welche den Namen des *moltiplicare per croxetta* führt. Die dritte Methode heisst *moltiplicare per scachiero*[3]). Um sie ausführen zu können, bedürfe man nur der Uebung in der ersten Methode per colona, deren wiederholte Anwendung sie sei. Als Beipiel ist abgedruckt:

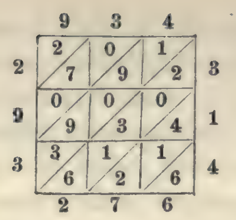
829	1
24	6
3316	
1658	
19896	6

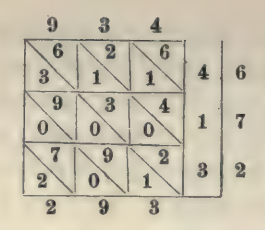
wobei die am Rande mitgeführten Zahlen die der Neunerprobe sind. Wird an diesem Beispiele nicht recht klar, woher der Name der schachbrettartigen Multiplication rühre, so erkennt man solches um so deutlicher an einem Beispiele, welches auf dem folgenden Blatte in vier verschiedenen Formen abgedruckt ist[4]). Es handelt sich um 314 mal 934, und die Musterrechnungen sehen folgendermassen aus:

934	
3736	/4
934	/1
2802	/3
293276	

		9	3	4	
	3	7	3	6	4
		9	3	4	1
	2	8	0	2	3
29	3	2	7	6	

[1]) Boncompagni, l. c. pag. 60. [2]) Ebenda pag. 101. [3]) Ebenda pag. 102—103. [4]) Ebenda pag. 330.





Der Gedanke ist offenbar immer der gleiche und auch die Benennung der Methode die gleiche, trotzdem werden fünf Unterarten derselben unterschieden, die darauf beruhen, ob der Multiplicator gleich unter dem Multiplicandus oder seitlich von den Theilproducten steht, ob senkrecht einander kreuzende Striche ein Schachbrett bilden, ob auch noch Diagonalen der einzelnen Schachfelder vorhanden sind, die von rechts oben nach links unten, die aber auch von links oben nach rechts unten gezogen sein können.

Beim Dividiren wird zuerst[1]) der *modo de partire per colona* gelehrt. Es ist die Division durch einen einziffrigen Divisor, der links vom Dividenden geschrieben wird, während der Quotient unter dem Dividenden zu stehen kommt. Die Zwischenrechnungen (Bildung von Producten einzelner Quotientenstellen in den Divisor und Subtraction vom Dividenden) werden im Kopfe ausgeführt, genau so wie es bei der Multiplication gleichen Namens geschah. Hat der Divisor mehr als nur eine Ziffer, so tritt das *partire per batello*[2]) in sein Recht, d. h. das Uebersichdividiren mit den vielfachen Durchstreichungen von Zahlen, welche dem Beispiele die Umrisse eines Segelschiffes verleihen.

An die beiden wichtigsten Rechnungsarten schliessen sich Anwendungen an und zwar zuerst die *regula de le tre cose*[3]), womit selbstverständlich die Regeldetri gemeint ist; dann kommt die Mischungsrechnung[4]), bei welcher Legirungen feinen Metalls mit geringwerthigem vorgenommen werden. Die Beimischung von Kupfer heisst *consolare.* Den Ursprung des Namens hat man[5]) sehr scharfsinnig mit astrologischen Träumereien in Verbindung gebracht. Die Sonne bringt nämlich nach der Meinung der Astrologen Gold hervor, ist also auch im Stande, geringe Metalle in Gold zu verwandeln, und wenn auch keine Umwandlung des Kupfers bei der Vermischung mit Edelmetallen erzielt wird, so vermehrte sich doch die Gewichtsmenge der allerdings jetzt geringerwerthigen Legirung. Das vorgenommene

---

[1]) Boncompagni l. c. pag. 554. [2]) Ebenda pag. 559—560. [3]) Ebenda pag. 562. [4]) Ebenda pag. 565. [5]) Peacock in der *Encyclopedia metropolitana* Vol. I, pag. 466 s. v. *Arithmetic.*

Geschäft selbst führt den kaum verständlichen Namen *la diredana impromissa*[1]) (die unversprochene Enterbung?). Von anderen Anwendungen nennen wir *la regula de le do cose che se conzongeno*[2]), d. h. die Kurieraufgabe und *la regula de le do cose che se cazano*[3]), d. h. die Aufgabe von dem Hunde, der einen Hasen jagt. Gegen Schluss des Werkes ging der Verfasser zu Fragen über, welche bei der Anfertigung von Kalendern von Wichtigkeit waren. So lehrt er *trovare lo aureo numero*[4]), die Auffindung der goldenen Zahl, d. h. des um 1 vergrösserten Restes der Jahreszahl bei Division derselben durch 19. So giebt er die Dauer eines Monats[5]) zu 29 Tagen 12 Stunden und 793 Punkten an, von welchen 1080 auf eine Stunde gehen. In dieser letzten Angabe liegt ein Beweis dafür, dass der Verfasser in der Kalenderkunde der Schüler jüdischer Astronomen war, denn diese haben seit dem XI. Jahrhundert mindestens und bis in das XVII. Jahrhundert hinein die Stunde in 1080 Gelachim eingetheilt.

Ausser und nach der Arithmetik von Treviso sind noch viele andere ihr verwandte Bücher am Ende des XV. Jahrhunderts geschrieben und die einen etwas früher, die anderen etwas später gedruckt worden[6]). Der Nizzarde Pellos, der Parmesaner Giovanni Tedaldo, die Venetianer Girolamo Tagliente und Piero Borgi (oder Borgo oder Borghi) sind von ihren Zeitgenossen hochgeschätzte Schriftsteller gewesen. Besonders der *Thesoro universale* des Tagliente[7]) wurde wiederholt gedruckt. In ihm findet sich bestimmt ausgesprochen, die Ziffern seien indischen Ursprunges und seien im Jahre 1200 nach Italien gebracht worden. Die *Arithmetica* des Borgi[8]) von 1484 zeichnet sich gleichfalls durch manche Neuerungen aus. Borgi kennt die Wörter nulla und millione, welche er eingehend erklärt. Er lehrt an sechs Beispielen, wie man durch $a \cdot 10^n$ dividire, indem man vom Dividenden n Stellen rechts abschneide und die links verbleibende Zahl durch a dividire. Ein solches Beispiel, in welchem die letztere Division nicht aufgeht, ist $\frac{2345678}{3000}$. Borgi beschreibt im Texte ganz genau, man solle 2345 durch 3 teilen, wobei 781 als Quotient und 2 als Rest erscheine, man solle an diese 2 die abgeschnittenen Stellen 678 anhängen und erhalte dadurch als

---

[1]) Boncompagni l. c. pag. 565. [2]) Ebenda pag. 570. [3]) Ebenda pag. 575. [4]) Ebenda pag. 581. [5]) Ebenda pag. 688 und 1040. [6]) Vergl. Libri III, 147 mit Boncompagni l. c. pag. 141, 146, 162, 332, 554, 581 u. s. w. [7]) Von Libri unrichtigerweise einem Lucas Antonio de Uberti zugeschrieben. Vergl. Boncompagni l. c. pag. 160—162. [8]) Wir verdanken diese Angaben gleich vielen anderen Herrn G. Wertheim, dessen Bibliothek an mathematischen Seltenheiten reich ist. Wir werden, wo wir künftig auf seine Mittheilungen uns stützen „Wertheim brieflich" citiren.

endgiltiges Eregebniss der Division $781\frac{2678}{3000}$. Am Rande steht ausserdem das Bild der Rechnung, nämlich

$$\begin{array}{r|l} \underline{\text{p.}} & 3000 \\ 2345 & 678 \\ 781 & \underline{2\quad\quad} \end{array}$$

$$781 \frac{2678}{3000}$$

Aber keines dieser Werke übte einen so nachhaltigen Eindruck, einen so weit über die Grenzen Italiens hinaus sich erstreckenden Einfluss, als die Schriften des Luca Paciuolo, mit denen wir uns in entsprechend ausführlicher Darstellung zu beschäftigen haben.

57. Kapitel.

Luca Paciuolo.

Luca Paciuolo[1]) dürfte am richtigsten in dieser Namensform geschrieben werden. In einer italienischen Eingabe an den Dogen von Venedig nennt er sich zwar de Pacioli, anderwärts Pacciuolus und Paciolus, sein Biograph Baldi (1553—1615) sagt aber ausdrücklich *fu de la famiglia de' Paciuoli.* Paciuolo also ist etwa 1445 in Borgo San Sepolcro im oberen Tiberthale geboren zu einer Zeit als dort der Maler Piero della Francesca lebte, der wenigstens den Namen eines tüchtigen Geometers (S. 294) hinterlassen hat. Ob Paciuolo dessen Unterricht empfing, ob er, was wahrscheinlicher ist, da ein Bildniss Paciuolo's von Piero nach 1494 gemalt im Besitze des Fürsten von Urbino sich befand, erst in späteren Lebensjahren in freundschaftlichem Verkehr zu ihm seine Einwirkung empfand, steht dahin. Im Jahre 1464 kam Paciuolo nach Venedig in das Haus eines Kaufherrn Antonio de Rompiasi[2]), das in der Judenstadt (la Giudecca) lag. Er wurde, selbst kaum 20 Jahre alt, der Erzieher von dessen drei Söhnen und erhielt gemeinschaftlich mit ihnen den mathematischen Unterricht eines Domenico Bragadino, dessen Name durch Paciuolo auf uns gekommen ist. Jedenfalls verweilte Paciuolo mehrere Jahre bei dem Rompiasi, und dort legte er wohl

---

[1]) Die Biographie des Luca Paciuolo ist am gründlichsten behandelt von H. Staigmüller, Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Histor.-liter. Abthlg. S. 81—102 und 121—128. [2]) In der Ausgabe der Summa des Paciuolo von 1494 steht Rompiasi, in der Ausgabe von 1523 Ropiansi. Nachforschungen, welche Carl Peter Kheil (Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungstractates von Luca Pacioli S. 68—69) in Venedig veranlasste, haben den Namen Rompiasi actenmässig bestätigt.

auch den Grund zu kaufmännischen Kenntnissen, von denen seine Schriften Zeugniss ablegen. Jedenfalls schrieb Paciuolo 1470 sein erstes mathematisches Lehrbuch für die mehrgenannten Schüler, war aber 1471 in Rom im Hause des uns bekannten Leon Battista Alberti, der damals von Florenz dorthin zog. Zwischen 1470 und 1476 trat Paciuolo dem Franziscanerorden bei, und seit dieser Zeit führte er ziemlich ausschliesslich den Namen Fra Luca di Borgo Sancti Sepulchri. Seine Ordensobern verschafften ihm meistens Verwendung als Professor der Mathematik an verschiedenen Orten. In Perugia, in Rom, in Neapel, in Venedig, in Mailand, in Florenz, in Bologna hat er gelehrt, an mehreren dieser Orte zu wiederholten Malen nach kürzerer oder längerer Abwesenheit. Man darf ihn daher fast einen Wanderlehrer der mathematischen Wissenschaften nennen. Nach 1514 wird er aber in den Acten keiner Universität mehr erwähnt. Um diese Zeit also muss er gestorben sein. Seiner Beziehungen zu den beiden Künstlergelehrten Piero della Francesca und Alberti ist gedacht worden. Auch der dritten von uns in dieser Eigenschaft weitläufiger besprochenen Persönlichkeit stand er nahe. In Mailand waren Paciuolo und Lionardo da Vinci eng befreundet. Ersterer berechnete für letzteren, der, wie wir wissen, kein grosser Rechenkünstler war, die Gewichtsmenge Erz, welche zur Herstellung eines Reiterstandbildes erforderlich war, das errichtet werden sollte. Letzterer beeinflusste den ersteren bei der Abfassung eines Buches, von welchem wir noch zu reden haben, und zeichnete die Figuren zu demselben. Man findet in einer selbstbiographischen Stelle des Hauptwerkes von Paciuolo den Satz[1]): „Seit wir als Unwürdige das Kleid des seraphischen heiligen Franziscus nach einem Gelübde anlegten, kam es uns zu, durch verschiedene Länder zu wandern.“ So schrieb er 1487, und man hat sonst den Satz so aufgefasst, dass eine Reise ins Morgenland damit gemeint sei, welche seinem Ordenseintritte unmittelbar folgend in die Jahre 1470—1476 fallen müsste; auf dieser Reise habe er arabische Mathematik kennen gelernt. Gewiss mit Recht hat man dagegen gesagt[2]), Paciuolo würde einer solchen Reise, von der auch sein ältester Biograph, Baldi, schweigt, in anderen Worten gedacht haben, als in so allgemeinen, die ohne jeden Zwang auf seine an den verschiedensten Orten Italiens wechselnde Lehrthätigkeit gedeutet werden können. Man hat hinzugefügt, dass Paciuolo jedenfalls damals bei Arabern nicht viel Mathematik mehr

[1]) Staigmüller l. c. S. 86 hat die ganze Stelle aus der *Summa* fol. 67 verso im Urtexte und in deutscher Uebersetzung abgedruckt. [2]) Ebenda S. 98—99.

lernen konnte, selbst wenn er der Sprache durchaus mächtig gewesen wäre. Der Ulûg Beg'sche Gelehrtenkreis, die letzte Vereinigung von tüchtigen Mathematikern im Morgenlande (Bd. I, S. 735) war 20 Jahre nach der Ermordung jenes Fürsten wohl schon zerstreut. Endlich ist auch die Kenntniss der arabischen Sprache Paciuolo abgesprochen worden, denn würde ein des Arabischen Kundiger gesagt haben: *certa regola ditta El cataym quale secundo alcuni e vocabolo arabo*[1]), würde er an anderer[2]) Stelle den Zweifel geäussert haben: *Algebra et almucabula in lingua arabica over caldea secondo alcuni?*

Wir müssen nun zur Uebersicht über die Werke des Paciuolo uns wenden. Wir haben oben gesagt, dass er 1470 ein Lehrbuch der Mathematik seinen Schülern, den Brüdern Rompiasi, widmete. Ein zweites Lehrbuch kürzerer Fassung schrieb er 1476 in Perugia für seine dortigen Schüler, ein drittes über feinere Gegenstände 1481 in Zara. Alle drei sind verschollen und sind verschmolzen zu der 1487 wieder in Perugia niedergeschriebenen, 1494 in Venedig gedruckten *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita,* welche gemeiniglich kurzweg die Summa des Paciuolo genannt wird und auch von uns so genannt werden soll. Ein neuer Abdruck ist 1523 erfolgt. Wieder in Venedig und zwar 1509 erschien eine Euklidausgabe des Paciuolo, im gleichen Jahre am gleichen Druckorte seine Divina proportione, welche zwar schon 1497 in Mailand vollendet war, aber erst 1509 vermehrt durch eine damals fertig gestellte Abhandlung über die Baukunst in Druck gegeben wurde. Ein viertes Werk Paciuolo's De viribus quantitatis befindet sich handschriftlich in der Universitätsbibliothek zu Bologna[3]); über dessen Inhalt ist Genaues nicht veröffentlicht. Fünftens hat Ebenderselbe eine Abhandlung über das Schachspiel[4]) verfasst, von welcher er an zwei Orten redet, welche aber sonst keine Spur hinterlassen hat. Sie war eine der ersten, wenn nicht die erste über diesen Gegenstand, dessen Literatur zu verfolgen unseren Zwecken natürlich ganz fremd ist. Eine sechste Schrift endlich wollte Paciuolo noch veröffentlichen[5]), scheint aber die Zeit dazu nicht mehr gefunden zu haben. Er leitet nämlich die Abhandlung über Baukunst von 1509 mit einem Briefe ein, in welchem er verspricht dieser Kunst ein grösseres Werk zu widmen und damit eine Lehre von der Perspective vereinigen zu wollen, welche sich auf die Schriften von Piero della Francesca stützen werde, von denen er einen Auszug sich bereits gemacht habe.

---

[1]) *Summa* fol. 98 verso. [2]) Ebenda fol. 144 recto. [3]) Staigmüller l. c. S. 99. [4]) Ebenda S. 100. [5]) Ebenda S. 127.

Die **Summa**[1]) besteht der Inhaltsübersicht, Summario, zufolge aus fünf Haupttheilen, parte principale prima bis quinta, deren Inhalt freilich in nicht sehr deutlicher Weise sich gliedert. Der erste Haupttheil, welcher ungefähr mit dem sich deckt, was die früheren Schriftsteller als Arithmetik und was sie als Algorismus bezeichneten, sondert sich verhältnissmässig leicht ab, ebenso der fünfte geometrische Haupttheil; dagegen ist bei den drei zwischenliegenden Haupttheilen kaufmännischer Rechnungsaufgaben nicht gut einzusehen, warum überhaupt eine Scheidung in Haupttheile bei ihnen versucht wurde. Der gleichen Meinung scheint im Grunde Paciuolo auch gewesen zu sein, da im Werke selbst die eben auseinandergesetzte, in der Vorrede angekündigte Scheidung nicht festgehalten wird. Hier sind nur zwei getrennte Haupttheile, ein arithmetischer und ein geometrischer, vorhanden, jeder mit besonderer von 1 anfangender, nicht selten fehlerhafter Blattbezeichnung, während die Rückseiten der Blätter unbezeichnet sind. Jeder dieser beiden thatsächlich vorhandenen Haupttheile zerfällt in *Distinctiones*, jede Distinctio in *Tractatus*, jeder Tractat in *Articuli*. Wir gedenken der Druckfolge nach Einzelheiten hervorzuheben, ohne einem bestimmten geistigen Zusammenhange nachspüren zu wollen, wo kein solcher vorhanden ist.

Die vollkommenen Zahlen endigen abwechselnd mit 6 und 8 und können eine andere Randziffer nicht haben, denn die Traurigen leben ordnungslos, die Guten und Vollkommenen bewahren immer die vorgeschriebene Ordnung[2]).

Regelmässige Vielflächner kann es nur fünferlei geben[3]). Zur Ecke gehören mindestens drei Winkel, deren Summe 360° nicht übersteigen darf; drei Sechseckswinkel sind aber schon zusammen 360° und bilden daher keine Ecke. Folglich sind die einzigen Möglichkeiten der Eckenbildung die aus drei Fünfeckswinkeln, aus drei Viereckswinkeln, aus drei, vier oder fünf Dreieckswinkeln.

Der 4. Artikel des 2. Tractates der 1. Distinctio kehrt zu den vollkommenen Zahlen zurück[4]) und giebt für deren Bildung die euklidische Regel (Bd. I, S. 253—254) unter Nennung seiner Quelle.

Der 7. Artikel des 4. Tractates der 1. Distinctio wendet sich zu den *Numeri congrui*. Schon im vorhergehenden Artikel ist Leonardo von Pisa mit seiner Schrift über die Quadratzahlen als massgebend bezeichnet, und ihm folgt Paciuolo auch hier, noch gegenauer allerdings im 6. Tractate der 2. Distinctio, wo die allgemeine

---

[1]) Kästner I, 65—82. — Chasles, *Aperçu hist.* 533—539 (deutsch 629—636). — Libri III, 137—143. [2]) *Summa* fol. 3 recto. [3]) Ebenda fol. 4 recto. [4]) Ebenda fol. 6 verso.

Formel $(\alpha^2 + \beta^2) \pm 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$ als nur Quadratzahlen enthaltend angegeben ist, während an der erstgenannten Stelle ausschliesslich von dem Sonderfalle $\beta = \alpha + 1$ die Rede ist[1]).

Die Einleitung[2]) zum 1. Tractat der 2. Distinctio nennt die verschiedenen Rechnungsverfahren, deren man sich bediene: 1. Numeratio, 2. Additio, 3. Subtractio, 4. Multiplicatio, 5. Divisio, 6. Progressio, 7. Extractio. Die früheren Schriftsteller wie *Giovanne de sacro busco* und *Prodocimo de beldomandis da Padua* nahmen allerdings neun *spetie della pratica numerale* an. Da aber Duplation und Mediation in der Multiplication und Division enthalten sind, so kann man sie entbehren. An diese Einleitung schliesst sich unmittelbar die Numeration an, die mancherlei zu erwähnen gebietet: die alten Ausdrücke digitus und articulus sammt ihrer Erklärung; das Vorkommen der Wörter *nulla* oder *çero* und des Wortes *millione*, welches dann auch weiter in Zusammensetzungen gebraucht wird, z. B. *millione de millioni*; Punkte, welche an Anzahl zunehmend unter die jeweils 4. Ziffer gesetzt das Aussprechen der Zahlen erleichtern sollen z. B.

8 659 421 635 894676.

Die Zahlen werden von rechts nach links geschrieben nach Art der Araber, welche nach Einigen die Erfinder der Kunst sind, die alsdann aus Unwissenheit statt *modo arabico* fälschlich *Abaco* genannt wurde; Andere leiten dagegen Abaco von einem griechischen Worte ab; und nun folgt ein leerer Platz, der vermuthlich dazu bestimmt war, das Wort ἄβαξ oder ein ähnliches zu enthalten, welches aber nicht gedruckt werden konnte.

Beim Addiren[3]) bedienen sich die Kaufleute der Umkehrung der Reihenfolge als Probe, indem sie einmal hinauf- und einmal hin unteraddiren. Gelehrte bedienen sich der Neuner- und der Siebenerprobe. Die Siebenerprobe ist die zuverlässigere[4]), weil die Neunerprobe zwei grosse Mängel hat: man kann bei ihr nicht erkennen, ob Nullen ausgelassen wurden, oder Ziffern in verkehrter Reihenfolge geschrieben worden sind.

Der 2. Tractat der 2. Distinction wendet sich zu der Subtraction und behandelt sie in verschiedenen Artikeln, namentlich den Fall berücksichtigend, dass eine Subtrahendenziffer grösser ist als die

---

[1]) *Summa* fol. 13 verso (statt 13 ist 15 gedruckt) und fol. 46 recto. [2]) Ebenda fol. 19 recto. [3]) Ebenda fol. 20 recto und verso (gedruckt ist 10 für 20). [4]) Ebenda fol. 22 recto.

Minuendenziffer gleichen Ranges[1]). Ist 6432 von 8621 mit dem Reste 2189 abzuziehen, so sagt man: 2 von 1 geht nicht, aber 2 von 10 ist 8 und 8 und 1 ist 9; dann ist 3 und 1 zusammen 4, aber 4 von 2 geht nicht, dagegen 4 von 10 ist 6 und 6 und 2 ist 8; 4 und 1 ist 5 von 6 bleibt 1; 6 von 8 bleibt 2. Eine zweite Methode borgt von der nächsten Minuendenziffer, wenn nöthig, eine 1 in Gestalt von 10 und sagt 2 von 11 bleibt 9, 3 von 11 bleibt 8, 4 von 5 bleibt 1, 6 von 8 bleibt 2. Eine dritte Methode endlich borgt 10, ersetzt sie aber durch Erhöhung der nächsten Subtrahendenziffer um 1; sie sagt 2 von 11 bleibt 9, 4 von 12 bleibt 8, 5 von 6 bleibt 1, 6 von 8 bleibt 2.

Der 3. Tractat der 2. Distinction hat die Multiplication zur Aufgabe, die in nicht weniger als acht Methoden gelehrt wird[2]). Die erste Methode heisst in Venedig *scacherii*, in Florenz *bericocoli*. Das Musterbeispiel ist:

9876
6789

			8	8	8	8	4
		7	9	0	0	8	
	6	9	1	3	2		
5	9	2	5	6			

6 7 0 4 8 1 6 4

Der venetianer Name ist uns aus der Arithmetik von Treviso bekannt, der florentiner stammt von einer dort üblichen aus Aprikosenteig geformten und mit Viereckchen bedruckten Leckerei. Die zweite Methode heisst *castellucio* und setzt in Theilmultiplicationen 9000 mal 6789, dann 800 mal, dann 70 mal, endlich 6 mal die gleiche Zahl 6789:

```
    9876
    6789
--------
61101000
 5431200
  475230
   40734
--------
67048164
```

Die dritte Methode *a colonna* oder *per tavoletta* kennen wir gleichfalls. Hier ist ein Fortschritt insofern, als auch ein kleiner zweiziffriger Multiplicator wie 13 zur gleichzeitigen Vervielfachung be-

[1]) *Summa* fol. 24 verso und 25 recto. [2]) Ebenda fol. 26 recto bis 29 recto.

nutzt wird. Die vierte Methode *per crocetta* oder *per casella* bedarf, sagt Paciuolo, etwas mehr Einbildungskraft und Gehirn als die anderen, *vole alquanto piu fantasia e cervello che alcuno degli altri*, was freilich bei dem kreuzweisen Verfahren nicht in Abrede gestellt werden kann. Verschiedene Musterbeispiele wie

```
         4 5 6
         4 5 6
   ------------
   2 0 7 9 3 6
```

aber auch solche mit vierziffrigen Factoren dienen zur Erläuterung. Die fünfte Methode heisst *per quadrilatero*, offenbar weil die schachbrettartige Figur zum Rechtecke geordnet erscheint, wie es auch in der Arithmetik von Treviso bei einem Verfahren der Fall war:

```
      5432
      5432
 1 0 8 6 4   4
 1 6 2 9 6   2
 2 1 7 2 8   6
 2 7 1 6 0   6
 2 9 5 0
```

Sind auch noch die Diagonalen der einzelnen Feldchen gezeichnet, sei es von links oben nach rechts unten, sei es umgekehrt, so entsteht dadurch die sechste Methode *gelosia* oder *per graticula*. Die Namen rechtfertigt der Verfasser, indem er das Aussehen der Rechnung einem Gitterwerke, graticula, vergleicht, welches auch gelosia genannt werde, weil man die Fenster derjenigen Räume, in welchen Frauenzimmer wohnen, eifersüchtigerweise vergittere, um den Verkehr mit Männern zu hindern[1]), und ähnlich sei es bei Klöstern, an denen Venedig einen Ueberfluss besitze. Die siebente Methode ist die *per repiego*, wo unter repiego[2]) verstanden sei, dass man eine Zahl als Product zweier anderen betrachte. Wolle man also 24 mal 29 rechnen, so zerlege man 24 in 4 mal 6, nehme 4 mal 29 oder 116 und dann 6 mal 116 und finde 696. Die achte Methode heisst *a scapeçço* oder das Verfahren mit Köpfen. Der eine Factor wird geköpft, d. h. in beliebige Summanden zerlegt, mit welchen leicht multipliciren ist. Statt 24 mal 42 setzt man $4 + 6 + 5 + 9$ mal 42, rechnet die ein-

[1]) Bekanntlich heissen auch in Frankreich sowie in manchen Gegenden Deutschlands die Fensterläden Jalousien. [2]) *ripiego* = Ausweg.

zelnen Theilprodukte 168, 252, 210, 378 und vereinigt sie durch Addition zu 1008.

Der 4. Tractat der 2. Distinction ist der Division gewidmet[1]). Neben der Division *a tavoletta* bei einziffrigem Divisor, neben der *a repiego* durch Factorenzerlegung des Divisors erscheint unter dem Namen *danda*, dessen die Praktiker sich bedienen, das Dividiren unterwärts. Das Beispiel dafür (97535376 : 9876 = 9876) benutzt den Namen Divisor im gleichen Sinne, wie wir ihn gebrauchen; statt des Wortes Quotient dient Proveniens. Die Gestalt ist folgende:

```
Divisor            Proveniens
 9876                 9876

          97535376
          88884
          ------
           86513
           79008
           -----
            75057
            69132
            -----
             59256
```

Nach dieser Methode danda, deren Name sich dadurch rechtfertigt, dass bei Auffindung jeder neuen Ziffer des Proveniens der Divisor so oft gegeben werden müsse, als es möglich sei, kommt erst das Dividiren überwärts, welches mit einem uns ähnlich schon bekannten Ausdrucke *a galea* heisst. Sie war offenbar noch immer die häufigere, da sie an weitaus den meisten Beispielen gelehrt wird, und da ihr Name nicht nur mit dem segelschiffartigen Aussehen der Beispiele gerechtfertigt wird, sondern auch damit, dass sie die schnellste sei, wie die Galeere das schnellste Schiff. Eine Bestätigung der Behauptung, die Methode danda sei die der Praktiker gewesen, hat sich in einer Krakauer Handschrift des XV. Jahrhunderts gefunden[2]). Dort übt ein gewisser Magister Matheus Moretus de Brixia das Dividiren unter sich an 2482 : 165. Das Beispiel sieht dort so aus:

```
2482 | 165
 165 |
---- |      7
 832 | 15 |---
 825 |     165
---- |
```

Ausser allem Zusammenhange mit dem Uebrigen erscheint eine Seite voll Zeichnungen[3]) verschieden gekrümmter Hände, durch welche die Zahlen 1—9, 10—90, 100—900, 1000—9000 in Zeichen dargestellt werden sollen, dann geht der 5. Tractat der 2. Distinction

[1]) *Summa* fol. 31 verso bis 34 recto. [2]) Curtze brieflich unter Berufung auf Codex Cracoviensis 601. [3]) *Summa* fol. 36 verso.

zu den Progressionen über, mit denen die verschiedenartigsten Dinge vermengt sind. Da erscheinen Summationen von Quadratzahlen[1]), von Kubikzahlen[2]); da ist die Anzahl der Versetzungen von zehn Personen berechnet[3]); dazwischen treten Kurieraufgaben[4]) auf und dann wieder die Aufgabe von der Belegung der 64 Felder des Schachbrettes mit Weizenkörnern in fortwährend verdoppelter Anzahl[5]). Beweise oder Ableitungen von Regeln, nach welchen verfahren wird, sind grade bei den etwas schwierigeren Aufgaben nicht vorhanden, dagegen ist aber einmal auf L. P. (natürlich Leonardo Pisano) verwiesen, der in seiner Schrift De numeris quadratis genaue Beweise geliefert habe[6]). Für mancherlei Kenntnisse mögen ja da und dort ältere Quellen zu entdecken sein. Eine Münchener Handschrift des XIII. Jahrhunderts[7]) enthält z. B. die allgemeine Regel, dass aus n Elementen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Versetzungen gebildet werden können.

Der 6. Tractat der 2. Distinction ist der Wurzelausziehung gewidmet, und dabei ist besonders auf die angenäherte Berechnung irrationaler Quadratwurzeln[8]) geachtet, welche *surdi* genannt werden und bei welchen das Zeichen ℞ der Quadratwurzel in Anwendung tritt. Sei $\sqrt{A}$ eine irrationale Quadratwurzel mit dem ersten Näherungswerthe a, so ist $a + \frac{A - a^2}{2a} = a_1$ ein zweiter, $a_1 + \frac{A - a_1^2}{2a_1} = a_2$ ein dritter Näherungswerth u. s. w. So allgemein stellt zwar natürlich Paciuolo die Sache nicht dar, aber das Verfahren an bestimmten Beispielen ist deutlich genug. So setzt er

$$\sqrt{6} \sim 2 + \frac{6-4}{4} = 2\frac{1}{2}; \quad \sqrt{6} \sim 2\frac{1}{2} + \frac{6 - 6\frac{1}{4}}{5} = 2\frac{9}{20};$$

$$\sqrt{6} \sim 2\frac{9}{20} + \frac{6 - 6\frac{1}{400}}{4\frac{9}{10}} = 2\frac{881}{1960},$$

und dieser Werth genüge, weil dessen Quadrat 6 nur um $\frac{1}{3841600}$ übersteige. Ist die Quadratwurzel aus einem Bruche verlangt[9]), so muss die Wurzel aus Zähler und Nenner einzeln gezogen werden, um dann die Division auszuführen, was sehr misslich sei, wenn eine oder gar beide Zahlen sich irrational erweisen; von einem Rationalmachen der Brüche ist somit nicht die Rede. Die Kubikwurzelausziehung[10])

---

[1]) *Summa* fol. 38 verso. [2]) Ebenda fol. 44 recto. [3]) Ebenda fol. 43 verso. [4]) Ebenda fol. 42 recto. [5]) Ebenda fol. 43 recto. [6]) Ebenda fol. 39 recto. [7]) Curtze brieflich unter Berufung auf Cod. lat. Mon. 234. [8]) *Summa* fol. 45: *De approximatione radicum in surdis.* [9]) Ebenda fol. 45 verso. [10]) Ebenda fol. 46 verso und 47 recto.

beschränkt sich auf den Fall einer genauen Kubikzahl ohne Ausdehnung auf Irrationalwerthe und deren nur angenäherte Berechnung.

Jetzt erst folgt, wiewohl Brüche schon vorkamen, die 3. und 4. Distinction von den Brüchen[1]). Sie werden mit einem Bruchstriche, *riga*, geschrieben, unter welchem der Nenner, *denominatore*, über welchem der Zähler, *numeratore* oder *denominato*, steht. Ihre Kenntniss muss noch nicht sehr verbreitet gewesen sein, wenn Paciuolo erzählen kann[2]), in einer gewissen italienischen Stadt, in der er selbst gelebt habe, hätten Kaufleute bei Handelsgeschäften die Brüche durch die nächsthöhere ganze Zahl ersetzt, unter der Redensart, die Casse wolle nicht verlieren. Die Aufsuchung des grössten Gemeintheilers, *schisatore*, von Zähler und Nenner kann in verschiedener Weise erfolgen[3]). Man kann die Division durch alle Primzahlen, welche kleiner sind als die kleinere der zu prüfenden Zahlen durchprobiren, wozu auch Tabellen ausgerechnet worden sind; man kann besser die Methode anwenden, welche Euklid lehrte, und sei es auch nur in der Gestalt, wie sie bei Boethius auftrete, wo statt der Division wiederholte Subtraction gelehrt werde. Bei der Auseinandersetzung des Rechnens mit Brüchen geht die Multiplication der Addition voraus[4]), denn Brüche und Ganze sind so durchaus verschieden, dass bei dem Einen als leichter zuerst abzuhandeln ist, was bei dem Andern als schwieriger nachfolgt. Nachdem beide Rechnungsarten und auch die Subtraction besprochen sind, kommt Paciuolo zu einem Zweifel, den wir als kennzeichnend erörtern wollen. Ist es, fragt er in der 4. Distinction[5]), nicht ein Widerspruch, wenn Brüche bei der Multiplication mit einander sich gegenseitig kleiner machen, während multipliciren, vervielfachen, auf das Grösserwerden hinweise, wie auch gesagt sei: Wachset und vervielfältigt euch und füllet die Erde! Eine der Spitzfindigkeiten, mit welchen Paciuolo sich über diese Schwierigkeit — für ihn ist es eine solche — hinweghilft, besteht darin, dass er meint, grösser werden heisse sich mehr von der Einheit entfernen, und das könne nach der Richtung der Ganzen wie nach der der Brüche geschehen, und in diesem Sinne sei wirklich $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ grösser als jeder der Factoren. Das Einreihen, *infilçare*, von Brüchen ist nichts anderes als das Bilden aufsteigender Kettenbrüche, wie es Leonardo von Pisa (S. 10) schon übte. Nur der neue

---

1) *Summa* fol. 47 verso bis 56 verso. 2) Ebenda fol. 47 verso: *E quando hauo a scotere li rotti tali costumano farli sani dicendo la cassa non vol perdere sicommo in certa degne citta ditalia dove personalmente mi son trovato e questa mala observantia atesa.* 3) Ebenda fol. 49 recto bis 50 recto. 4) Ebenda fol. 50 recto. 5) Ebenda fol. 53 verso.

Name ist inzwischen dazugekommen, der aber, wie wir wissen, nicht von Paciuolo herrührt, sondern seit Paolo Dagomari dall' Abaco (S. 165) weit verbreitet war[1]). Die Aufgaben sind doppelter Natur. Einmal soll $\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot$ der Infilzation unterworfen werden. Wir würden dafür sagen, man sucht den Werth von

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$=\frac{9\cdot 5+2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{47\cdot 6+5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{287}{360}.$$

Das andere Mal soll aus $\frac{287}{360}$ eine Bruchreihe nach den Nennern 3, 4, 5, 6 gebildet werden. Man dividirt 287 durch 6; der Quotient ist 47, der anzuschreibende Rest 5. Dann dividirt man 47 durch 5; der Quotient ist 9, der anzuschreibende Rest 2. Die weitere Division von 9 durch 4 giebt den Quotient 2 mit dem anzuschreibenden Reste 1. Endlich liefert die Division von 2 durch 3 den Quotient 0 mit dem anzuschreibenden Reste 2. Mithin ist

$$\frac{287}{360}=\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot$$

wiederhergestellt, wobei auf die einzelnen Pünktchen, welche einen wesentlichen Bestandtheil der Schreibweise bilden, zu achten ist.

Die 5. Distinction macht ausführlich mit der Regeldetri bekannt[2]). Am Ende dieses Abschnittes sind die Abkürzungen angegeben, deren man sich bediene, und zwar ebensowohl Abkürzungen des gewöhnlichen Rechnens, als solche, die *caratteri algebraici* genannt werden, und die man in der *regula della cosa* oder der Algebra und Almucabala anwende. An dieser Stelle ist es, dass Paciuolo von seinen früheren Schriften spricht, und jenen kurzen Bericht über seine Lebensschicksale giebt, der (S. 306—307) die Grundlage unseres Wissens davon bildete. Unter den algebraischen Zeichen sind die Wurzelzeichen, nämlich ℞ mit nachfolgendem Wurzelexponenten, zu bemerken. Für ℞2 steht auch ℞ allein. Dann folgt ℞3 oder ℞ cu., ℞,4 oder ℞℞ und dann nur mit Zahlenzeiger weiter bis ℞30 für die dreissigste Wurzel. Ferner sind Namen und Zeichen der bekannten Zahl und der verschiedenen Potenzen der Unbekannten mit positiv ganzzahligen Exponenten vorhanden. Die bekannte Zahl heisst *numero* und wird n^0 geschrieben, Namen und Zeichen der Potenzen der Unbekannten sind:

---

[1]) *Summa* fol. 56 recto: *Un altro acto se recerca nel travagliare degli rotti detto dal vulgo infilçare.* [2]) Ebenda fol. 57 recto bis 67 recto.

cosa = co. censo = ce. cubo = cu. censocenso = ce ce.
primo relato = p°r°. censo de cubo = cubo de censo = ce cu. secundo relato = 2°r°.
censo de censo de censo = ce ce ce. cubo de cubo = cu cu.
censo de primo relato = ce p°r°.

Die Reihe der Potenzen der Unbekannten setzt sich bis zur 29. fort. Die Zusammensetzungen der Wörter haben stets multiplicative Bedeutung, und da es die Exponenten sind, welche einander multipliciren, so ist die wiederholte Potenzirung gemeint, z. B. censo de cubo $= (x^3)^2 = x^6$. Daraus folgt die Nothwendigkeit neuer Namen der Potenzen, so oft eine Primzahl als Exponent auftritt. Primo relato und secondo relato für x^5 und x^7 haben wir angegeben; terço relato $= x^{11}$ folgt u. s. w. bis septimo relato $= x^{23}$. Nun tritt aber eine Unregelmässigkeit ein: $x^{25} = (x^5)^5$ sollte primo relato de primo relato heissen, und heisst statt dessen octavo relato und x^{29} sodann nono relato. Die Verwandtschaft der Wörter primo relato, secundo relato mit dem *ἄλογος πρῶτος*, *ἄλογος δεύτερος*, deren Michael Psellus (Bd. I, S. 473) sich bediente, ist unabweisbar. Schwieriger ist es, eine Erklärung dafür zu geben, wie *ἄλογος* zu *relato* werden konnte? Man hat wohl versucht[1]) als arabische Uebersetzung des *ἄλογος* 'aʿmâ = unvernünftig zu vermuthen, dann wäre die fünfte Potenz durch ein *ἄλογος* verwandt = per 'aʿmâ relato und falsch gelesen primo relato. Die Geschichte der Wortverunstaltungen wäre dann um ein schlagendes Beispiel reicher. Aber wo bleibt secundo relato u. s. w., wo die radice relata (S. 158)?

In der 6. Distinction werden Proportionen behandelt[2]). Paciuolo giebt hier gelegentlich eine Liste von solchen Schriftstellern, welche früher schon mit dem Gegenstande sich beschäftigt hätten: Euklid, Boethius, Thebit, Ameto Sohn Josephs, Giordano, Thomas beduardin, Blasius de Parma, Albertutius de Saxonia, Plato, Aristoteles, Archimed werden genannt. Bei Thebit wird ein auffallender Zusatz gemacht: *Thebit ancora degno philosopho (del quale molto Boetio exponendo Euclide fa mentione, maxime nel quinto)*, das klingt, als wenn Paciuolo eine Euklidausgabe gekannt hätte, welche Boethius zugeschrieben war, und in deren fünftem Buche Thebit mehrfach erwähnt wurde. In Bezug auf Archimed ist beigefügt, er habe $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{1}{8}$ als Grenzen für das Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser erkannt, während die untere Grenze Archimed's in Wahrheit $3\frac{10}{71}$ war und $3\frac{1}{8}$ nur bei Vitruvius einmal (Bd. I, S. 508) als Näherungswerth

---

[1]) Briefliche Mittheilung von H. Armin Wittstein. [2]) *Summa* fol. 67 verso bis 98 verso.

der Zahl π erscheint. Woher mag Paciuolo diese untere Grenze gekannt haben, die allerdings der Ungleichung $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ genügt? Wir sehen keinerlei Antwort auf diese nicht unwichtige Frage. Den eigentlichen Inhalt der 6. Distinction brauchen wir nicht näher zu erörtern. Es sind lauter längst bekannte Dinge, für die Folgezeit wenig erheblich.

Die 7. Distinction kommt zu den Regeln des falschen Ansatzes[1]) und zwar des einfachen wie des doppelten. Paciuolo weiss in beiden sehr gut Bescheid. Ihm ist z. B. die Bedeutung des Wortes Elchatayn, die zwei Fehler (Bd. I, S. 689), bekannt gewesen: *El cataym quale (secondo alcuni) e vocabulo arabo e in nostra lengua sona quanto che a dire regola delle doi false positioni*, und die Rechnung selbst wusste er auf's deutlichste auseinanderzusetzen. Das erste Beispiel für den doppelten falschen Ansatz verlangt 44 Ducaten unter 3 Personen theilen zu lassen, sodass die zweite doppelt so viel als die erste und noch 4, die dritte soviel als die beiden ersten zusammen und noch 6 erhalte. Hat der erste 8, so hat der zweite 20, der dritte 34, alle drei haben 62 statt 44, also 18 zu viel. Hat der erste 6, so hat der zweite 16, der dritte 28, alle drei haben 50 statt 44, also 6 zu viel. Der Unterschied der beiden Annahmen für den Besitz des ersten ist $8 - 6 = 2$, der der Fehler $18 - 6 = 12$; 12 als Fehlerunterschied stammt aus 2 als Annahmeunterschied, also würden 6 weitere Fehlerunterschiede aus einem weiteren Annahmeunterschiede um 1 sich herleiten und es muss der erste 5, der zweite 14, der dritte 25 erhalten. Nach dieser Begründung folgt erst die mechanische Regel geknüpft an das Schema:



Man soll links die Zahlen der einen, rechts die der anderen Annahme schreiben, darunter die Fehler, darüber die jeweiligen Producte der Annahme in den gegenüberstehenden Fehler. Zwischen diesen Producten und ebenso zwischen den Fehlern stehen die Unterschiede derselben. Der Quotient der beiden Unterschiede giebt die Wahrheit, vorausgesetzt dass beide Annahmen in dem Sinne irrig waren, dass

[1]) *Summa* fol. 98 verso bis 111 verso.

beidemal zu viel entstand. Die anderen Möglichkeiten des doppelten falschen Ansatzes, dass beidemal zu wenig oder einmal zu wenig, einmal zu viel entsteht, sind dann gleichfalls, natürlich an anderen Zahlen, durchaus genügend erörtert.

In der umfangreichen 8. Distinction geht Paciuolo zur Algebra über[1]). Er beginnt mit der Erklärung der Zeichen p̃ und m̃, welche *plus* und *minus* oder *piu* und *meno* heissen, und deren Nothwendigkeit am deutlichsten sich erweise, wo Grössen verschiedener Art in Verbindung treten. So könne man 4 co. (cosa) und 3 co. zu 7 co. ohne weiteres vereinigen, aber wenn co. (cosa) und ce. (censo) vereinigt oder von einander abgezogen werden sollen, könne man nur 4 ce. p̃ 3 co. oder 3 co. m̃ 4 ce. und dergleichen schreiben. Dabei sei besonders zu beachten, dass die Stellung rechts und links von p̃ gleichgültig sei, nicht aber so bei m̃, d. h. 3 co. p̃ 4 ce. und 4 ce. p̃ 3 co. seien gleichwerthig, nicht aber 3 co. m̃ 4 ce. und 4 ce. m̃ 3 co. Bei der Multiplication finden vier Regeln statt[2]):

plus mal plus macht immer plus,
minus mal minus macht immer plus,
plus mal minus macht immer minus,
minus mal plus macht immer minus.

Dass minus mal minus als Product plus liefere, sei anscheinend Unsinn, da klarerweise minus 4 weniger als Null sei (peroche chiaro e che m̃ 4 e manco che nulla), allein man könne die Richtigkeit beweisen. Es sei 10 m̃ 2 soviel als 8, also 10 m̃ 2 mal 10 m̃ 2 gewiss 64. Nun sei bei zweitheiligen Factoren eine Multiplication anzuwenden, derjenigen vergleichbar, die man kreuzweise nenne, z. B. a p̃ b vervielfache sich mit a p̃ b so, dass erst a mal a, dann a mal b zweimal, dann b mal b genommen werde. So erhält man bei 10 m̃ 2 mal 10 m̃ 2 erst 10 mal 10 oder 100, dann 2 mal 10 mal m̃ 2 oder m̃ 40, welche mit dem 100 zu 60 sich vereinigen, und endlich m̃ 2 mal m̃ 2, die p̃ 4 geben müssen, damit 64 als Endergebniss erscheine[3]). Den vier Multiplicationsregeln entsprechen ebensoviele Divisionsregeln, welche gleichfalls ausgesprochen sind. Dann kommen die vier Additionsregeln[4]):

plus zu plus addirt giebt immer plus,
minus zu minus addirt giebt immer minus,
plus zu minus addirt zieht immer ab (abatte) und giebt den Namen des Grösseren,
minus zu plus addirt zieht immer ab und giebt den Namen des Grösseren.

---

[1]) *Summa* fol. 111 verso bis 150 recto. [2]) Ebenda fol. 112 verso. [3]) Ebenda fol. 113 recto. [4]) Ebenda fol. 114 recto.

Die Subtractionsregeln ähnlich zusammengestellt[1]) beschliessen den 1. Tractat der 8. Distinction. Vorher sind aber zahlreiche Subtractionsbeispiele durchgerechnet und ist als maassgebend ausgesprochen, dass bei gutem Subtrahiren eine Grösse übrig bleiben müsse, welche zu dem Abgezogenen addirt das wieder hervorbringe, wovon man subtrahirt habe[2]). Was die benutzten Anfangsbuchstaben p, m betrifft, deren Ursprung keiner Rechtfertigung bedarf, so sind Manche geneigt, aus ihnen + und — abzuleiten. Man habe bei sehr raschem Schreiben nur die allerallgemeinste Gestaltung der Buchstaben beibehalten, die dann als Striche sich kundgaben. Ohne für diesen Erklärungsversuch einzutreten, bemerken wir, dass er immerhin dem Verticalstriche im Pluszeichen eine Bedeutung giebt, und sich nicht damit begnügt, ihn als blosses Unterscheidungsmerkmal zu dem Horizontalstriche hinzutreten zu lassen. Wir persönlich ziehen die S. 231 angegebene Herleitung vor.

Die drei folgenden Tractate derselben 8. Distinction sind dem Rechnen mit Wurzelgrössen gewidmet[3]), einem Gegenstande, der an Schwierigkeiten überreich war und sein musste, so lange eine allgemeine Potenzenrechnung nicht vorhanden war, und diese fehlte noch geraume Zeit trotz Oresme's Vorgange. Das Multipliciren und Dividiren einfacher Wurzelgrössen geht noch leidlich genug, aber schon deren Addition wird mittels eines Kunstgriffes bewerkstelligt, der an dem Beispiele[4]) $\sqrt{10} + \sqrt{40} = \sqrt{90}$ gelehrt auf

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

hinausläuft, d. h. die Rationalität von $\sqrt{ab}$ voraussetzt. Ist $\sqrt{ab}$ irrational, so entsteht eine *radice universale* oder *radice legata*[5]), d. h. die Wurzel aus einer Grösse, welche selbst aus theilweise oder ganz irrationalen Bestandtheilen durch Addition oder Subtraction zusammengesetzt ist, z. B. $\sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Das Zeichen der vereinigten Wurzel[6]) ist ℞V, also z. B. ℞V 40 m̃ ℞ 320 bedeutet $\sqrt{40 - \sqrt{320}}$. Paciuolo bewegt sich, wie er selbst ausdrücklich erklärt, auf dem Boden des X. Buches der euklidischen Elemente, und wo er diesen Boden verlässt und Allgemeines selbst zu leisten versucht, so etwa wo er dreitheilige Grössen unter einem Wurzelzeichen behandeln will, verfällt er in Irrthum[7]).

---

[1]) Ebenda fol. 115 recto. [2]) Ebenda fol. 114 verso: *a voler ben sottrare bisogna che remanga tal quantita de ditto sottramento che gionta alla quantita che l'omo cava refacia la quantita da laqual si cavo.* [3]) Ebenda fol. 115 verso bis 144 recto. [4]) Ebenda fol. 116 verso. [5]) Ebenda fol. 117 verso. [6]) Ebenda fol. 122 verso. [7]) Ebenda fol. 142 verso.

Der 5. Tractat führt zu der eigentlichen Algebra. „Angelangt sind wir, rief Paciuolo wahrhaft begeistert[1]), an dem vielbegehrten Orte, bei dem Ursprunge aller Fälle, bei der Regula de la cosa, wie die Leute sie nennen, oder bei der Arte maggiore [die grössere Kunst, vermuthlich im Gegensatze zur kleineren Rechenkunst] d. h. dem speculativen Verfahren, welches in arabischer oder, wie Andere wollen, in chaldäischer Mundart Algebra und Almucabala genannt wird. In unserer Sprache würde es klingen wie Herstellung und Gegenüberstellung, Algebra nämlich ist Herstellung und Almucabala ist Gegenüberstellung.“ Die richtige Uebersetzung der beiden Fremdwörter geht bei Paciuolo Hand in Hand mit richtigem Verständniss dessen, was nun eigentlich Herstellung, was Gegenüberstellung sei, denn man solle, sagt er später[2]), aufpassen, dass man die Gleichungen dadurch wiederherstelle, dass man die beiderseitigen Glieder (*li extremi de la equatione*) richtig einander gleichsetze und dann Ueberflüssiges beseitige (*levando li superflui*), wie die beiden Wörter des Namens es vorschreiben (Bd. I, S. 676).

Drei einfache und drei zusammengesetzte Fälle sind zu unterscheiden. Jene kommen auf

$$ax^2 = bx, \qquad ax^2 = c, \qquad bx = c$$

hinaus, diese auf

$$ax^2 + bx = c, \qquad bx + c = ax^2, \qquad ax^2 + c = bx.$$

Die Auflösung der zusammengesetzten Fälle ist in je vier Hexametern gelehrt[3]):

Primi canonis versus.

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumpto censum producere debes
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Secundi canonis versus.

Et si cum rebus dragme quadrato pares sint,
Adde sicut primo numerum producto quadrato
Ex rebus mediis, eiusque radice recepta
Si rebus mediis addes, census patefiet.

---

[1]) *Summa* fol. 144 recto: *Gionti con l'aiuto de dio al luogo molto desiderato: cioe ala madre de tutti li casi detta dal vulgo la regola della cosa over Arte magiore cioe pratica speculativa, altramente chiamata Algebra et almucabala in lingua arabica over caldea secondo alcuni che in la nostra sona quanto che a dire restaurationis et oppositionis. Algebra id est Restauratio. Almucabala id est Oppositio.* [2]) Ebenda fol. 148 recto: *Secondum essentiale notandum.* [3]) Ebenda fol. 145 recto.

Tertii canonis versus.

At si cum numero census radices equabit,
Dragmas a quadrato deme rerum medietarum,
Cuiusque supererit radicem adde traheve
A rebus mediis, sic census costa notescet.

Erlernen wird aus diesen Versen sehr zweifelhafter Güte Niemand die Auflösung der quadratischen Gleichungen; wer dieselbe aber kennt, wird sie in den Beschreibungen wiederfinden mit Einschluss der zweifachen Möglichkeit der Auflösung des dritten Falles.

Zunächst werden nun Beispiele der einfachen Fälle behandelt und dabei die Frage aufgeworfen, ob nicht auch die zwei Fälle zu unterscheiden seien, in welchen $ax = bx$ oder $ax^2 = bx^2$ vorgelegt wäre; von einem Falle $a = b$ könne an sich keine Rede sein. Aber auch jene beiden Fälle sind nicht als solche vorhanden. Ist nämlich in $ax = bx$ eine Uebereinstimmung zwischen a und b, so ist die Frage unbestimmt oder, wie Paciuolo sagt, *el quesito sarebe concluso*, die Frage wäre damit abgeschlossen. Ist dagegen a von b verschieden, so ist die Aufgabe unmöglich, weil ein Mehr einem Weniger nicht gleich sein kann; ganz ähnlich verhält es sich mit $ax^2 = bx^2$. An die Auflösung $x = 0$ denkt mithin Paciuolo nicht. Bei den zusammengesetzten Fällen kommt es bei Handhabung der Regeln darauf an, die Gleichung vorher so umzuformen, dass das quadratische Glied nur mit 1 vervielfacht auftrete, und unsere Leser werden auch bemerkt haben, dass die oben abgedruckten Verse diese Umformung bereits als vorgenommen voraussetzen. Man solle sich merken, dass alle vorgelegten Aufgaben, sofern sie der Auflösung fähig sind, sich auf einen der sechs Fälle oder auf einen denselben proportionalen Fall, *at alcun altro a quelli proportionato*, zurückführen lassen[1]). Man solle sich ferner merken, dass im dritten zusammengesetzten Falle nach richtiger Umwandlung in die Form $x^2 + c = bx$ die Ungleichung $\frac{b^2}{4} \geqq c$ stattfinden müsse, weil sonst eine Auflösung nicht möglich sei[2]).

Auch von Gleichungen mit zwei Unbekannten ist gelegentlich die Rede[3]). Die älteren Handbücher hätten gewöhnlich erste und zweite Cosa dafür gesagt. Die neueren sagten lieber *cosa* für die eine Unbekannte, *quantita* für die andere.

Nun zu den Fällen, welche Paciuolo proportionale genannt hatte. Sie sind[4]), wenn der Uebersichtlichkeit wegen wieder die heutige Schreibweise benutzt wird, folgende acht:

---

[1]) *Summa* fol. 145 verso. [2]) Ebenda fol. 147 recto. [3]) Ebenda fol. 148 verso: *Quartum essentiale notandum.* [4]) Ebenda fol. 149 recto.

$$1.\ ax^4 = e. \quad 2.\ ax^4 = dx. \quad 3.\ ax^4 = cx^2. \quad 4.\ ax^4 + cx^2 = dx.$$
$$5.\ ax^4 + dx = cx^2. \quad 6.\ ax^4 + e = cx^2. \quad 7.\ ax^4 + cx^2 = e.$$
$$8.\ ax^4 = cx^2 + e.$$

Neben 4. sowohl als neben 5. ist das Wort Impossibile gedruckt.

Es scheint uns keinem Zweifel unterworfen, dass Paciuolo sich vollbewusst war, dass Gleichungen zwischen ax^4, cx^2, e von wesentlich übereinstimmender Art mit solchen zwischen ax^{2n}, cx^n, e sind, die dem entsprechend aufgelöst werden können. Einen anderen Sinn vermögen wir dem Ausspruche[1]) nicht beizulegen, was vom vierten Grade gesagt sei, gelte für jeden anderen, sofern die Verhältnissmässigkeit gewahrt bleibe. Ebensowenig dürfen wir zweifeln, dass die doppelte Betonung der Unmöglichkeit der Formen $ax^4 + cx^2 = dx$, $ax^4 + dx = cx^2$ auch auf die kubischen Gleichungen $ax^3 + cx = d$, $ax^3 + d = cx$ sich beziehe. Sagt der Verfasser doch in der Weitschweifigkeit, welche ihn kennzeichnet, man habe bisher bei Gleichungen zwischen bx^3, cx^2, e oder ax^4, bx^3, e u. s. w. noch keine guten Regeln aufstellen können, und schliesst er doch die Auseinandersetzung mit den Worten[2]): wo die einzelnen Glieder nicht verhältnissmässige Gradunterschiede zeigen, sei die Kunst bis jetzt ihrer Aufgabe noch nicht gewachsen, gerade so wie eine Quadratur des Kreises noch nicht gefunden sei. *Impossibile* heisst demnach für Paciuolo die kubische Gleichung nicht in dem Sinne, als ob ihre Auflösung überhaupt unmöglich wäre, sondern weil man sie noch nicht vollziehen konnte. Mit diesem Wechsel auf die Zukunft, möchten wir beinahe sagen, schliesst die 8. Distinction. Aber bevor wir den Gegenstand verlassen, müssen wir zurückgreifen auf eine Gleichung vierten Grades, welche schon in der 2. Distinction vorgekommen war. Wir haben (S. 314) die Summenformel für Kubikzahlen angeführt, welche in der 2. Distinction enthalten sei. Sie ist auch in der That dort vorhanden[3]), aber nicht ohne weiteres. Sie ist eingeführt durch eine Aufgabe, welche in heutiger Gestalt als die Gleichung erschiene

$$(1 + 2 + \cdots + x) + (1^3 + 2^3 + \cdots + x^3) = 20400.$$

Die Summirung beider eingeklammerter Reihen

---

[1]) *Summa* fol. 149 verso: *E quello che habiamo dedutto di censo de censo se habi a intendere di qualunca altra dignita over quantita proportionabiliter.*
[2]) Ebenda fol. 150 recto: *Quando in li toi aguaglimanti te ritrovi termini de diversi intervalli fra loro disproportionati dirai che l'arte ancora a tal caso non a dato modo si commo ancora non e dato modo al quadrare del cerchio.*
[3]) Ebenda fol. 44 recto.

$$1 + 2 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$$

gestattet die Umformung in $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$ und durch beiderseitige Addition von 1 entsteht $(x^2 + x + 1)^2 = 81601$. Daraus folgt $x^2 + x + 1 = \sqrt{81601}$, $x = \sqrt{\sqrt{81601} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$. Ob Paciuolo das Gefühl hatte, dass nur die eigenthümliche Gestaltung der Zahlencoefficienten (noch deutlicher hervortretend, wenn man $\frac{x(x+1)}{2} = y$ setzen würde) dort eine Auflösung zuliess, und er desshalb von der Aufgabe schwieg, wo sie in der 8. Distinction recht eigentlich hätte erwähnt werden müssen, ob sein Grund zum Schweigen vielmehr der war, dass in der 8. Distinction nur zwei- und dreigliedrige Gleichungen vorgeführt wurden, das dürfte kaum zu entscheiden sein. Die Stärke des Einwandes aber, dass jene Formeln für $1 + 2 + \cdots + x$ und für $1^3 + 2^3 + \cdots + x^3$ nur unter der Annahme ganzzahliger Werthe von x Geltung haben, dass sie also in dem hier in Frage kommenden Beispiele gar nicht benutzt werden dürfen, hat Paciuolo nicht einmal geahnt.

Die 9. und letzte Distinction der ersten Abtheilung der Summa[1]) ist eine ungemein reichhaltige. Ihr 1. Tractat benennt sich von den Gesellschaftsrechnungen, *de societatibus*. Unter einer Menge von Aufgaben ist auch die bekannte Testamentgeschichte[2]) von der Wittwe, welche nach dem Tode des Mannes Zwillinge verschiedenen Geschlechtes zur Welt bringt und doppelt so viel als das Mädchen, halb so viel als der Sohn erhalten soll (Bd. I, S. 523). Paciuolo scheint an dieser Aufgabe besonderes Gefallen gefunden zu haben, denn er erzählt ausdrücklich, sie sei ihm am 16. December 1486 in dem Tuchladen des Giuliano Salviati in Pisa von einem würdigen florentiner Kaufmann Nofrio Dini mitgetheilt worden. Der 2. Tractat benennt sich nach Viehpacht um halbe Nutzung, *soccita*, und Wohnungsmiethe, der 3. nach Tauschgeschäften, *de barattis*, von Waaren verschiedener Gattung und verschiedener Werthe gegen einander, der 4. Tractat führt Wechselgeschäfte, *de cambiis*, als Ueberschrift und belehrt ebensowohl über die Form des Wechsels, als über die Art wie die verschiedenen Münzen, welche da und dort in Uebung sind, in gegenseitiges Verhältniss zu bringen seien, damit Niemand übervortheilt werde. Im 5. Tractate handelt es sich um Zinsrechnung, *de meritis*, und zwar zuerst um einfachen Zins, dann um Zinseszins, im 6. um Legirung edler Metalle, *del modo a legare e consolare le monete*. Die Geschichte des italienischen Handels wie des Handels

[1]) *Summa* fol. 150 recto bis 224 verso. [2]) Ebenda fol. 158 recto.

überhaupt darf die sechs ersten Tractate dieser 9. Distinction als reiche Fundgrube erkennen, welche vielleicht noch nicht zur Genüge ausgebeutet ist. Der Geschichte der Mathematik geben dieselben kaum Anlass zum längeren Verweilen. Wir nehmen höchstens davon Vermerk, dass die Ueberschrift *del modo a sapere componere le tavole de merito* uns zeigt, dass damals bereits Zinstafeln in Gebrauch waren, und dass in Paciuolo's Zinszinsrechnungen, worauf wir bei späterer Gelegenheit zurückzukommen haben, einige Irrthümer mit unterlaufen, die freilich selbst nicht eigentlich mathematische Fehlschlüsse sind.

Wichtiger ist uns der 7. Tractat von den Reisen, *de viagiis*[1]). Die sieben ersten Aufgaben dieser Gattung, bei welcher es sich immer darum handelt, dass Jemand mehrere Reisen macht, mit dem mitgenommenen Gelde bald Gewinn, bald Verluste erzielt, die dem Kapitale proportional sind, während dieses durch die Ergebnisse der früheren Reisen sich fortwährend ändert, führen zu quadratischen Gleichungen. Die achte Aufgabe dagegen führt zu einer Exponentialgleichung. Es hat einer so viele Reisen gemacht, als er am Anfange Ducaten hatte; bei jeder Reise verdoppelte er sein Geld und hatte schliesslich 30 Ducaten; wie viele Reisen waren es? Hatte er x Ducaten, so wurden sie durch fortwährende Verdoppelung nach $1, 2, \cdots x$ Reisen zu $x \cdot 2$, $x \cdot 2^2, \cdots x \cdot 2^x$, also soll sein $x \cdot 2^x = 30$, eine Gleichungsform, welche, wie wir kaum zu sagen brauchen, Paciuolo in Zeichen zu kleiden nicht verstand. Sein Verfahren ist folgendes. Er versucht aus der Bedingung der Aufgabe Folgerungen zu ziehen, indem er bestimmte Annahmen macht. Wären es zwei Reisen gewesen, in welchen 2 Ducaten sich zwei mal verdoppelt hätten, so hätte der Reisende zuletzt 8 Ducaten, mithin zu wenig. Wären es vier Reisen gewesen, in welchen 4 Ducaten sich vier mal hätten verdoppeln müssen, so wären schon am Schlusse der dritten Reise 32 Ducaten erzielt gewesen, mithin zu viel. Da 2 eine zu kleine, 4 eine zu grosse Annahme ist, so wird 3 versucht. Dessen dreimalige Verdoppelung giebt 24, wieder zu wenig, also liegt die gesuchte Zahl zwischen 3 und 4, und es war überhaupt keine ganze Anzahl von Reisen, sondern 3 und dann noch eine Bruchreise, welche gemacht wurden. Sei in unseren heutigen Zeichen x jener Bruch, das Anfangscapital folglich $3 + x$. Nach drei Reisen wurde es zu $24 + 8x$. So weit ist Alles in Ordnung. Nun schliesst aber Paciuolo, man sieht nicht warum, der Gewinn der noch zu machenden x Reisen müsse

[1]) *Summa* fol. 186 recto bis 188 recto. Die wichtigsten Aufgaben sind auch abgedruckt bei Libri III, 286—294.

$$x(24 + 8x)$$

sein, und so erhält er

$$24 + 8x + x(24 + 8x) = 30, \quad x^2 + 4x = \frac{3}{4}, \quad x = \sqrt{4\frac{3}{4}} - 2$$

und $3 + x$ oder die Zahl der Reisen, beziehungsweise der Ducaten, welche zuerst mitgenommen wurden, $1 + \sqrt{4\frac{3}{4}} = 3{,}17944947$. Wollte man die Annäherung prüfen, bis zu welcher diese Auflösung reicht, so bekäme man:

$$3{,}17944947 \cdot 2^{3{,}17944947} = 28{,}80458.$$

Paciuolo ist, was wir wiederum kaum zu sagen brauchen, zu einer derartigen Prüfung nicht im Stande, aber für ihn bedarf es keiner Prüfung. Er ist von der Richtigkeit seines Verfahrens so fest überzeugt, dass er es in wiederholten Beispielen an immer krauser aussehenden Zahlan übt, bis er gar in der elften Aufgabe[1]) zu einer Auflösung $3\frac{24733}{63308} + \sqrt{7\frac{1643489177}{4007902864}}$ gelangt!

Die Uebergänge der einzelnen Tractate der letzteren Distinction in einander scheint beim Drucke etwas in Verwirrung gerathen zu sein. Muthmasslich soll die Aufgabe, welche als 14. im 7. Tractate bezeichnet ist, schon die erste des 8. Tractates sein. Sie lautet etwa folgendermassen[2]): Das Quadrat einer Zahl ist dem Producte zweier anderen gleich. Wird die erste auf Kosten der zweiten um den sovielten Theil derselben vermehrt, als 3 ein Theil der ersten ist, so wird die gewonnene Summe das fünffache des Restes. Wird die erste auf Kosten der dritten um ihren sovielten Theil vermehrt, als 5 ein Theil der ersten ist, so wird die jetzt hervorgebrachte Summe das siebenfache des neuen Restes. *Cosa* und *quanti* nennt dabei Paciuolo die erste und zweite Zahl. Nennen wir sie x und y, so verhält sich $x : 3 = y : \frac{3y}{x}$, und die erste Veränderung der Zahlen bedingt

$$x + \frac{3y}{x} = 5\left(y - \frac{3y}{x}\right) \quad \text{d. h.} \quad y = \frac{x^2}{5x - 18}.$$

Ist z die dritte Zahl, so verhält sich $x : 5 = z : \frac{5z}{x}$, die zweite Veränderung der Zahlen bedingt also

$$x + \frac{5z}{x} = 7\left(z - \frac{5z}{x}\right) \quad \text{d. h.} \quad z = \frac{x^2}{7x - 40}.$$

Da aber von vorn herein $x^2 = yz$ bekannt war, so muss

$$x^2 = \frac{x^2}{5x - 18} \cdot \frac{x^2}{7x - 40}$$

---

[1]) *Summa* fol. 187 verso. [2]) Ebenda fol. 188 recto.

sein und daraus folgt alsdann

$$x^2 + 21\frac{3}{17} = 9\frac{10}{17}x, \quad x = 4\frac{27}{34} + \sqrt{1\frac{933}{1156}}.$$

Trotzdem drei Unbekannte (unsere x, y, z) in der Aufgabe vorkommen, kann man sie im Grunde doch nur als quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten bezeichnen, indem bei der Besprechung der Beziehungen zwischen x und y kein z vorkam und ebenso kein y, wo die Beziehungen zwischen x und z in Rede kamen. Den gleichen Charakter tragen sämmtliche Aufgaben des Tractates bis zu derjenigen, welche die Nummer 22 führt. Immer sind zwei Unbekannte aus Gleichungen bald des ersten, bald des zweiten Grades zu ermitteln. Die 23. Aufgabe dürfte die 1. des 9. Tractates darstellen. Mit ihr beginnt eine neue Gruppe von Aufgaben, in deren jeder drei Unbekannte vorkommen.

Der 10. Tractat[1]) ist wieder mit bestimmtem Namen abgesondert. Er heisst: Von den aussergewöhnlichen Aufgaben, *de straordinariis*. Auch hier sind es meistens Textgleichungen ersten und zweiten Grades, welche gelöst werden sollen; mitunter bedarf es dazu keiner Algebra, sondern nur der Rechnung mit Proportionen. Ganz überraschend erscheint dazwischen folgende Aufgabe[2]): Ein Spiel, welches auf 6 gewonnene Punkte gespielt wird, muss in einem Augenblicke unterbrochen werden, in welchem der eine Spieler auf 5, der andere auf 2 steht; wie ist der Einsatz zwischen ihnen zu theilen? Paciuolo meint, die Theilung habe im Verhältnisse der schon gewonnenen Punkte, also im Verhältnisse von 5 zu 2 zu erfolgen. Aehnlicherweise will er den Einsatz zwischen 3 Schützen, die auf 6 Treffer gewettet haben, aber zu schiessen aufhören, nachdem der erste 4 mal, der zweite 3 mal, der dritte 2 mal getroffen hat, im Verhältnisse von 4 : 3 : 2 getheilt wissen. Beide Aufgaben sind unrichtig gelöst, verdienen aber darum nicht weniger Beachtung, da sie das erste bekannte Vorkommen von W a h r s c h e i n l i c h k e i t s a u f g a b e n in einem Lehrbuche der Rechenkunst darstellen.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne ist, wie hier einschaltend bemerkt werden soll, allerdings älter. Ein im Jahre 1477 in Venedig gedruckter Commentar zu Dante's Divina Commedia spricht sich über die Häufigkeit gewisser Würfe aus[3]), welche mit drei Würfeln geworfen werden können. Der niederste Wurf sei 3 und könne nur auf eine Weise entstehen, nämlich durch 1 auf jedem Würfel. Auch 4 könne nur auf eine Weise entstehen,

---

[1]) *Summa* fol. 194 recto bis 197 verso. [2]) Ebenda fol. 197 recto. [3]) Libri II, 188 Note.

durch 1 auf zwei Würfeln und 2 auf dem dritten. Aehnlich verhalte es sich mit den beiden höchsten Würfen 18 und 17, für die es gleicherweise nur je eine Möglichkeit gebe. Alle anderen Würfe seien in mehrfacher Weise zu bilden, z. B. $5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$ u. s. w. Die nur in einer Art möglichen Würfe heissen *azari*. Der Ursprung dieses Wortes ist das arabische *asar*, schwierig, und von ihm ist das spätere *hasard* abgeleitet. Man sieht, dass auch hier die Gleichstellung des Wurfes 3 mit dem 3 mal wahrscheinlicheren Wurfe 4 mangelhaft war, und mangelhaft blieb die Behandlung von Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch geraume Zeit, auch nachdem die Mathematiker begonnen hatten, sich mit ihnen zu beschäftigen.

Wir kehren zur Berichterstattung über die Summa zurück und zwar zum 11. Tractate der 9. Distinction, *de scripturis*[1]). In ihm ist eine gedrängte, aber scharf und klar gefasste Anweisung zur doppelten Buchhaltung gegeben, die erste derartige Lehre in einem Werke über Rechenkunst. Erfinder der doppelten Buchhaltung war Paciuolo wohl gewiss nicht. Es dürfte fraglich sein, ob diese Art die Geschäftsbücher einzurichten und zu führen überhaupt abendländischen Ursprunges war, oder ob sie sei es von Arabern, sei es von Juden herrührt. Es ist auch keineswegs unmöglich, dass in Venedig, wo die doppelte Buchhaltung jedenfalls ihre zweite, wenn nicht ihre erste Heimath hatte, schon vor der Summa Lehrgänge dieser Kunst vorhanden waren; aber jedenfalls besitzen wir sie nicht gedruckt und haben sie gewiss nicht entfernt so viel zur Verallgemeinerung der doppelten Buchführung beigetragen als die Summa, welche durch die Vollständigkeit, in welcher sie erschien, ihren Einfluss ungemein hob.

Dieser beabsichtigten Vollständigkeit sollte zuversichtlich auch der 12. und letzte Tractat, der sogenannte Tarif[2]), *la tariffa de tutti costumi*, dienen. Unter Tarif ist genau dasselbe verstanden, was man heute Münz-, Maass- und Gewichtsvergleichungstafeln nennt, damals nur um so umfangreicher und nothwendiger, als jedes der kleinen und kleinsten Staatswesen Italiens eifersüchtig an seinen Sondergewohnheiten festhielt, die von denen der Nachbarn abwichen, mochte man auch im engsten Handelsverkehr mit ihnen stehen. Von dem Tarife wissen wir, was wir von der Anweisung zur doppelten Buchhaltung nur für nicht ausgeschlossen halten: es gab einen

---

[1]) *Summa* fol. 197 verso bis fol. 211 recto. Eine deutsche Uebersetzung mit zahlreichen Anmerkungen bei E. L. Jäger, Luca Paccioli und Simon Stevin nebst einigen jüngeren Schriftstellern über Buchhaltung (Stuttgart 1876.
[2]) Ebenda fol. 211 verso bis 224 verso.

solchen[1]) vor Erscheinen der Summa. Er ist 1481 in Florenz gedruckt und führt den Namen *Libro di mercatantie et usance dei Paesi*. Ein gewisser Chiarini soll ihn verfasst haben, wenn eine solche Zusammenstellung überhaupt einem Verfasser zugeschrieben werden kann. Sie pflegt allmälig zusammengetragen, allmälig vervollständigt zu werden und gelangt zum Drucke, wenn sie unentbehrlich wird. Wir stimmen daher durchaus der Ansicht bei, Paciuolo habe sich durch die Aufnahme von Chiarini's Tafeln, auch wenn sie, wie der Fall zu sein scheint, ganz unverändert erfolgte, keines Eingriffes in fremdes geistiges Eigenthum schuldig gemacht, ganz abgesehen davon, dass das Zeitalter des kaum ein halbes Jahrhundert alten Buchdruckes geneigt war, geistiges Eigenthumsrecht, auch wo es unzweifelhaft vorhanden war, wenig zu achten. Man druckte ein Buch in einer Stadt, man sicherte sich in dieser Stadt durch ein Privilegium für eine gewisse Zeit gegen Nachdruck, aber den Drucker einer anderen Stadt unter anderem Landesherrn hinderte dieses nicht im geringsten, seine Presse in Bewegung zu setzen, wie er es für gut, d. h. für nutzbringend fand.

Wir haben (S. 309) gesagt, die Summa bestehe aus zwei Haupttheilen, einem arithmetischen und einem geometrischen, deren Blätter im Drucke je einer besonderen Zählung unterworfen sind. Ueber die 224 Blätter des I. Theiles haben wir berichtet, wir kommen zu den 76 Blättern des II. Theiles[2]). Er zerfällt in acht Unterabtheilungen, weil es acht Glückseligkeiten giebt[3]), und der wesentliche Inhalt wird angekündigt als 1. Viereckige und dreieckige Figuren zu messen. 2. Von Linien, welche von einem Punkte innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks ausgehend dasselbe schneiden. 3. Fläche der Figuren von vier und mehr Seiten. 4. Kreismessung und von den Oberflächen von Bergen. 5. Theilung von Oberflächen. 6. Körperliche Inhaltsbestimmungen. 7. Messen durch blosses Anschauen. 8. Schöne und artige Aufgaben der Geometrie. Die Aehnlichkeit mit dem geometrischen Werke Leonardo's von Pisa liegt für jeden Kenner dieses letzteren schon aus der mageren Ankündigung zu Tage. Paciuolo sucht sie so wenig zu verbergen, dass er geradezu sagt[4]), er folge meistentheils dem Leonardo und erkläre zum voraus ihn für den Urheber jedes Satzes, der keinem Andern zugewiesen sei. Was Pa-

---

[1]) Libri III, 143 Note 2. [2]) Um Verwechslungen zu vermeiden, citiren wir diesen II. Theil, der durchweg geometrisch ist, als *Summa* (*Geom.*). [3]) *Summa* (*Geom.*) fol. 1 recto: *Divideremola in 8 altri parti partiali a reverentia delle 8 beatitudine.* [4]) Ebenda fol. 1 recto: *E perche noi seguitiamo per la magiore parte Leonardo Pisano, lo intendo dechiarire, che quando si porra alcuna proposta senca autore quella fia di detto.*

ciuolo so bestimmt ausspricht bedarf keiner besonderen Bestätigung, sonst könnten wir sie aus den meisten Dingen entnehmen, von welchen die Rede war, als die Practica Geometriae des Pisaners (S. 35—40) behandelt wurde.

Wir erwähnen als einziges Beispiel aus der 1. Distinction den Beweis der heronischen Dreiecksformel[1]), sei es auch nur, um daran anknüpfend zu bemerken, dass Paciuolo, wenn als Abschreiber, doch als denkenden Abschreiber sich erwies; er hat einen kurzen, apagogischen Zwischenbeweis eingeschaltet[2]), der bei Leonardo fehlt. In der 2. Distinction handelt es sich, was in der vorausgeschickten Inhaltsanzeige nicht klar ausgedrückt ist, um die Länge von Linien, welche irgend zwei gegebene Punkte, die zu einem gegebenen Dreiecke in Beziehung stehen, verbinden. Die letzte Aufgabe dieser Distinction ist z. B. folgende[3]) (Fig. 66). Die Seite ac eines gegebenen bei b rechtwinkligen Dreiecks abc wird bis d um ein gegebenes Stück cd verlängert, man sucht bd. Sei $ac = 5$, $ab = 4$, $bc = 3$, $ad = 20$. Man fällt die de senkrecht zu ab, so ist $de = \frac{ad \cdot bc}{ac} = \frac{20 \cdot 3}{5} = 12$. Aehnlich findet sich $ae = 16$, $be = ae - ab = 16 - 4 = 12$, $bd = \sqrt{288}$.

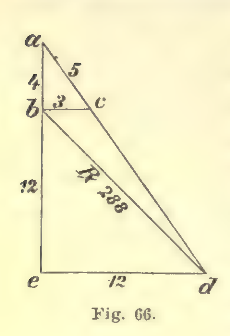


Fig. 66.

Aus der 3. Distinction erwähnen wir beispielsweise einige Aufgaben. Wie gross ist die Seite des Quadrates, dessen Fläche nebst der Seitensumme 140 beträgt?[4]) $x^2 + 4x = 140$ und $x = 10$. Von einem Rechtecke ist die kleinere Seite 6 und das Produkt 80 der grösseren Seite in die Diagonale gegeben, wie gross sind die beiden letzteren Strecken?[5]) $\sqrt{80^2 + \left(\frac{6^2}{2}\right)^2} + \frac{6^2}{2} = 100$ ist das Quadrat der Diagonale 10. Wie Paciuolo zu dieser Auflösung gelangte, ist leicht zu erkennen. Heisst die Diagonale x, so ist $\frac{80}{x}$ die grössere Seite und

$$x^2 = \frac{80^2}{x^2} + 6^2, \quad x^4 = 80^2 + 6^2 x^2, \quad x^2 = \frac{6^2}{2} + \sqrt{80^2 + \left(\frac{6^2}{2}\right)^2}.$$

Eine Ungleichung ist in folgendem Satze[6]) ausgesprochen: In jeder gleichseitigen und gleichwinkligen Figur ist das Product des halben Durchmessers des Innenkreises in mehr als den halben Umfang der Figur grösser als der Inhalt des genannten Kreises. In der 4. Distinction

[1]) *Summa* (*Geom.*) fol. 11 recto. [2]) Darauf hat Hultsch aufmerksam gemacht Zeitschr. Math. Phys. IX, 214 Note 49. [3]) *Summa* (*Geom.*) fol. 14 verso. [4]) Ebenda fol. 16 recto. [5]) Ebenda fol. 19 recto. [6]) Ebenda fol. 25 verso.

ist unter Anderem die archimedische Verhältnisszahl $3\frac{1}{7}$ ähnlich wie bei Archimed selbst mit Hilfe des regelmässigen 96-Ecks abgeleitet[1]). Ueberdies ist eine Sehnentafel[2]) vorhanden, bei welcher ebenso wie bei der Begründung ihrer Herstellung wir Leonardo wiedererkennen, der selbst aus dem Almagest schöpfte, und nicht weniger werden wir an Leonardo erinnert, wo es sich um Messungen am Abhange eines Berges handelt[3]) und dabei das *Archipendulum* (S. 38) benutzt ist. Ebenso ist die 5. Distinction von den Theilungen[4]), die 6. von den Körperausmessungen[5]), die 7. vom praktischen Feldmessen[6]) unter Anwendung eines Gnomons, eines Spiegels u. s. w. in steter Anlehnung an Leonardo bearbeitet.

Eine gewisse Selbständigkeit Paciuolo's giebt sich ausser in kleinen Abänderungen, von denen wir eine erwähnt haben, nur in der 8. Distinction[7]), *de diversis casibus utilissimis indifferenter positis*, zu erkennen, wenigstens in den 100 vermischten Aufgaben derselben, an welche sich zum Schlusse noch eine Abhandlung über die gewöhnlichen Körper, *Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria* anschliesst[8]). Die 21. Aufgabe verlangt in ein Quadrat die zwei grössten Kreise einzuzeichnen, die darin nebeneinander Raum finden. Jeder der beiden Kreise wird der sein, der dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke einbeschrieben ist, welches selbst in zweifachem Vorhandensein durch Ziehung einer Diagonale des Quadrates entsteht. Man ist also darauf hingewiesen, zunächst die Aufgabe zu lösen, den Innenkreis irgend eines gleichschenkligen Dreiecks zu finden, und diese Aufgabe tritt als die 22. auf. Zieht man (Figur 67) vom Kreismittelpunkte aus Verbindungslinien nach den Endpunkten des Dreiecks, so zerfällt dasselbe in drei Dreiecke, deren gemeinsame Höhe der Halbmesser des gesuchten Kreises ist, während die Seiten des Dreiecks die Grundlinien darstellen. Die Gesammtfläche ist also das Product des Halbmessers in den halben Dreiecksumfang, und kennt man dieselbe Fläche nach der heronischen Formel aus den drei Seiten des Dreiecks, so berechnet sich leicht der Kreishalbmesser. Die 42. und die 77. Aufgabe sind übereinstimmend, und zwar ist die Uebereinstimmung nicht etwa einer

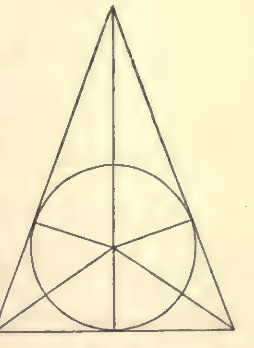


Fig. 67.

---

[1]) *Summa* (*Geom.*) fol. 31. [2]) Ebenda fol. 33. [3]) Ebenda fol. 35 recto. [4]) Ebenda fol. 35 verso bis 43 verso. [5]) Ebenda fol. 43 verso bis 49 verso. [6]) Ebenda fol. 50 recto bis 52 recto. [7]) Ebenda fol. 52 verso bis 68 verso. [8]) Ebenda fol. 68 verso.

Vergesslichkeit des Verfassers zuzuschreiben, sondern beim ersten Vorkommen verweist er im voraus auf die 77. Aufgabe. Beidemal werden drei concentrische Kreise von der Eigenschaft gesucht, dass die Flächen der beiden äusseren Kreisringe der des inneren Kreises gleich seien. Bei der 42. Aufgabe ist 6 als Durchmesser des grössten Kreises gesetzt. Seine Fläche ist daher der Zahl $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ proportional, und deren Drittel, beziehungsweise zwei Drittel sind proportional den Zahlen 3 und 6. Demgemäss sind $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ und $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ die Durchmesser des inneren und des mittleren Kreises. Bei der 77. Aufgabe ist 7 als Durchmesser des grössten Kreises gesetzt und zunächst dessen Fläche $\frac{22}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 38\frac{1}{2}$ berechnet. Auf jeden der drei gleichen Flächentheile fallen somit $12\frac{5}{6}$, auf zwei Theile $25\frac{2}{3}$. Der innere Durchmesser ist folglich

$$\sqrt{\frac{14}{11} \cdot 12\frac{5}{6}} = \sqrt{16\frac{1}{3}}$$

und der mittlere

$$\sqrt{\frac{14}{11} \cdot 25\frac{2}{3}} = \sqrt{32\frac{2}{3}}.$$

Die 44. Aufgabe lässt aus zwei Säcken von gleicher Höhe, in welche man 6 beziehungsweise 24 Maass Frucht einfüllen kann, durch Zusammennähen der Tücher einen einzigen Sack bilden und fragt, wieviel er enthalten werde. Gerechnet wird folgendermassen:

$$\sqrt{6} + \sqrt{24} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{24})^2} = \sqrt{6 + 24 + 2\sqrt{144}} = \sqrt{54},$$

also sei der Inhalt 54 Maass. Die Meinung ist offenbar die, dass bei h als Höhe und r_1 beziehungsweise r_2 als Halbmesser des ersten und zweiten gefüllten Sackes, deren Rauminhalt $\pi r_1^2 h = v_1$ und $\pi r_2^2 h = v_2$ sein müsse, folglich $r_1 = \sqrt{\frac{v_1}{\pi h}}$, $r_2 = \sqrt{\frac{v_2}{\pi h}}$. Die Breite der beiden Sacktücher ist $2\pi r_1$, $2\pi r_2$, zusammen $2\pi(r_1 + r_2)$ und der neue Sack hat also zum Rauminhalte

$$v_3 = \pi(r_1 + r_2)^2 h = v_1 + v_2 + 2\sqrt{v_1 v_2}.$$

Irrig ist an der Rechnung nur das, dass die Böden der Säcke sowie der oben beim Zubinden nothwendige Theil derselben ausser Acht gelassen sind. Die Aufgabe 51 verlangt in das Dreieck von den Seiten 13, 14, 15 zwei gleiche Kreise einzuzeichnen, die einander und je zwei Dreiecksseiten berühren. Mit allgemeinen Buchstaben gerechnet seien (Figur 68) a, b, c die Seiten, h die daraus ableitbare Höhe des Dreiecks ABC, x der gesuchte Kreishalbmesser. Das ganze Dreieck ABC hat den Inhalt $\frac{ah}{2}$. Es zerfällt aber in die Stücke

$$AOP = x(h-x),\quad AOB = \frac{cx}{2},\quad APC = \frac{bx}{2},\quad OPNT = 2x^2,$$
$$BOT + CPN = x \cdot \frac{a-2x}{2}.$$

Folglich ist
$$\frac{ah}{2} = hx - x^2 + \frac{c}{2}x + \frac{b}{2}x + 2x^2 + \frac{a}{2}x - x^2 = \left(h + \frac{a+b+c}{2}\right)x$$
und
$$x = \frac{ah}{2h+a+b+c}.$$
In dem vorliegenden Falle ist
$$a = 15,\quad b = 13,\quad c = 14,\quad h = 11\frac{1}{5}$$
und
$$x = \frac{168}{64\frac{2}{5}} = 2\frac{14}{23}.$$

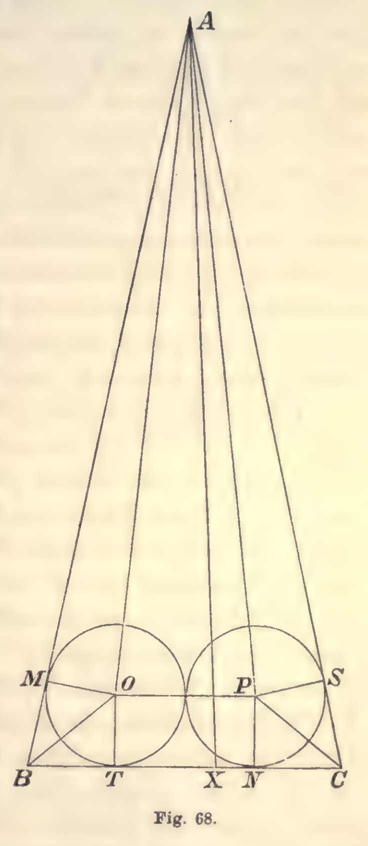


Fig. 68.

Aehnliche Aufgaben, welche wir aber nur nennen, ohne über die Auflösungen zu berichten, folgen: 52. In ein gleichschenkliges Dreieck drei gleiche einander gegenseitig und je zwei Seiten berührende Kreise einzuzeichnen. 53. 54. 55. In einen Kreis 3, 4, 5 gleiche Kreise einzuzeichnen, von denen jeder zwei benachbarte und den gemeinschaftlichen Umkreis berühren soll. 56. In einen Kreis 7 gleiche Kreise einzuzeichnen, von denen einer dem Umkreis concentrisch ist, während die 6 anderen je 2 benachbarte, ausserdem den Umkreis und den inneren Kreis berühren. Die Aufgabe 61 verlangt aus dem gegebenen Inhalte eines Dreiecks die Seiten zu finden unter der weiteren Voraussetzung, dass die Grundlinie um 1 grösser als die eine, um 1 kleiner als die andere Nachbarseite sein soll. Die Höhe trifft die Grundlinie x so, dass der Abschnitt an der kleineren Seite $\frac{x}{2} - 2$, der an der grösseren Seite $\frac{x}{2} + 2$ ist. Die Höhe selbst ist also $\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - 3}$ und die Fläche $\frac{x}{2}\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - 3}$. In dem vorgelegten Beispiele soll dieselbe 84 sein. Hier ist also
$$\frac{3}{16}x^4 = \frac{3}{4}x^2 + 7056,\quad x^4 = 4x^2 + 37636,\quad x^2 = \sqrt{37636} + 2 = 196,$$
$$x = \sqrt{196} = 14$$

und die beiden anderen Seiten $x - 1 = 13$, $x + 1 = 15$. Die Aufgabe 76 verlangt, in das Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 solle ein Halbkreis beschrieben werden, der die Seiten 13, 15 berühre, während der Mittelpunkt auf der Seite 14 liege (Figur 69). Ist e der Mittelpunkt des gesuchten Halbkreises vom Halbmesser r, ad die Höhe h des Dreiecks abc, so ist

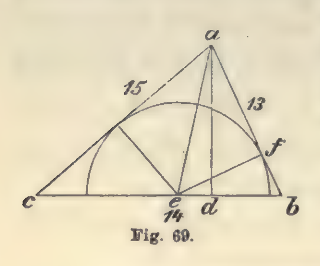


Fig. 69.

$$\triangle abe = \frac{ab}{2} \cdot r, \quad \triangle ace = \frac{ac}{2} \cdot r,$$

$$\triangle abc = \frac{bc}{2} \cdot h, \text{ also } r = \frac{bc}{ab + ac} \cdot h$$

und in den gegebenen Zahlen $r = \frac{14}{13 + 15} h = \frac{h}{2} = 5\frac{3}{5}$. Die 80. Aufgabe lässt zwei concentrische Kreise je von einer Persönlichkeit nach derselben Richtung durchlaufen, und die 81. Aufgabe weicht nur darin von der 80. ab, dass sie die Umlaufbewegungen in einander entgegengesetztem Sinne vollziehen lässt. Wenn nun die Geschwindigkeiten beider Personen gegeben sind, und sie am Anfange der Bewegung auf dem gleichen Halbmesser sich befanden, so frägt es sich, wann ein solches Zusammentreffen beider wieder stattfinden werde? Diese Aufgabe hat sammt den Zahlen, welche Paciuolo angiebt, sich auf den heutigen Tag fortgeerbt, nur dass man statt von zwei Personen von den beiden Zeigern einer Uhr zu reden pflegt, von welchen der Minutenzeiger 12 mal den Umkreis der Uhr durchläuft, während der Stundenzeiger es einmal thut, und das sind eben die für die beiden Personen angegebenen Geschwindigkeiten. Die Zeichnung zur Aufgabe zeigt überdies die beiden Personen so gerichtet, dass ihre Bewegung im Sinne des Zeigers einer Uhr verläuft. Die Versuchung liegt sehr nahe, anzunehmen, Paciuolo oder wer ihm nun die Aufgabe gestellt haben mochte, habe wirklich an eine Uhr dabei gedacht, und doch würde man, glauben wir, im Irrthum befangen sein, gäbe man dieser Versuchung nach. Die Erfindung der Taschenuhren fällt zwar etwa in die Zeit des Druckes der Summa, während grosse Räderuhren schon seit dem XIII. Jahrhunderte in Italien in Gebrauch waren, aber gerade letztere waren zu 24 Stunden von 1 bis 24 eingetheilt, und bei ihnen musste also der Minutenzeiger nicht 12, sondern 24 Umläufe vollenden, während der Stundenzeiger einmal umlief. In der 96. Aufgabe (Fig. 70) ist ein Dreieck abc durch seine drei Seiten gegeben; ferner ist die Entfernung eines Punktes d im Innern des Dreiecks

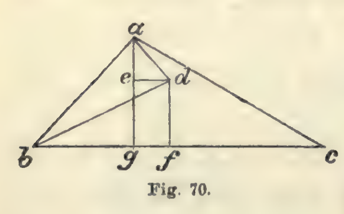


Fig. 70.

von den Eckpunkten b und c gegeben; man sucht die Entfernung da von dem dritten Eckpunkte. Rechnung allein, heisst es, sei hier sehr beschwerlich, bequemer sei folgendes Verfahren. Die Dreiecke abc und dbc sind beide ihren sämmtlichen Seiten nach gegeben. In ihnen kann man also die Höhen ag, df finden, sammt den Punkten g, f der Grundlinie, in welche diese Höhen eintreffen. Fällt g mit f zusammen, so ist einfach $ag - df = ad$. Fallen die Punkte g, f aber nicht zusammen, so ist $ag - df = ae$, $bf - bg = de$, und ad ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ae, de. Die 100. und letzte Aufgabe verlangt in eine Halbkugel den grössten Würfel zu setzen. Er ist, sagt Paciuolo, die Hälfte eines parallelopipedischen Körpers von den Dimensionen 2 zu 1, der der ganzen Kugel einbeschrieben wird, und dessen Diagonale der Kugeldurchmesser sein muss u. s. w. Die Auffindung der Diagonale eines Parallelopipedons ist nämlich schon früher[1]) nach dem bei Leonardo von Pisa vorkommenden Satze (S. 39) gelehrt, und es ist daher als bekannt angenommen, dass hier die Diagonale $x \cdot \sqrt{6}$ sein muss, wenn x die Würfelseite bedeutet. Ist d der Kugeldurchmesser und zugleich jene Diagonale, so findet sich $x = \frac{d}{\sqrt{6}}$. Die wiederholt genannte Diagonale heisst bei Paciuolo abwechselnd *axis* und *diametro*.

Wir sagten (S. 331), an die 100 vermischten Aufgaben, von denen wir eine ganz beträchtliche Anzahl als Probe der fast fortwährend algebraischen Behandlung vorgeführt haben, schliesse sich noch eine Abhandlung über die gewöhnlichen Körper. Sie füllt etwa 13 Druckseiten und enthält wesentlich Rechnungsaufgaben, deren Art gleich aus der ersten ersichtlich ist, in welcher es darum sich handelt[2]), den Körperinhalt des Tetraeders zu berechnen, dessen Kanten alle die Länge $\sqrt{24}$ haben. Die Höhe der Grundfläche, *diametro d'una de le base*, ist $\sqrt{(\sqrt{24})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{18}$, deren Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\sqrt{24} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{108},$$

die Höhe des Körpers[3]), l'axis, ist 4, also der Körperinhalt

$$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{108} = \sqrt{192}.$$

Auch die Division durch 3 ist an dieser Stelle als bekannt betrachtet, da in einem früheren Abschnitte gelehrt wurde[4]), wenn man den Rauminhalt einer Pyramide zu messen beabsichtige, müsse man die

---

[1]) *Summa* (*Geom.*) fol. 44 recto. [2]) Ebenda fol. 68 verso. [3]) Ebenda fol. 46 verso über die Körperhöhe des Tetraeders. [4]) Ebenda fol. 43 verso.

Grundfläche, welche Gestalt sie immer besitze, *di che forma sia*, mit dem dritten Theil der Höhe vervielfachen.

Wir unterlassen es, andere von diesen Aufgaben zu nennen und erwähnen nur noch einen Gegenstand, der in den kurzen der genannten Schlussabhandlung vorhergehenden Einleitungsworten vorkommt. Paciuolo spricht nämlich hier von den Modellen der regelmässigen Körper, *le forme materiali*, welche er angefertigt habe[1]). Er will im April 1489 im Palaste des Cardinals Giuliano della Rovere Monsignore de San Pietro in vinculo (später Papst Julius II) eine Sammlung derselben dem Herzoge Guidobaldo von Urbino überreicht haben. Auch in einem anderen Werke, von dem wir noch zu reden haben, in der *Divina Proportione*, erzählt Paciuolo von drei solchen Sammlungen von je 60 Modellen, welche in Florenz, in Mailand und in Venedig sich befänden. Es waren nach dieser grossen Anzahl zu urtheilen durchaus nicht nur die fünf regelmässigen Körper, sondern auch abgeleitete Formen. Lionardo da Vinci hat sie für die Divina Proportione seines Freundes (S. 307) auf 59 Tafeln in vorzüglichen perspektivischen Abbildungen gezeichnet. Der Stoff, aus welchem die Modelle hergestellt waren, war vermuthlich nicht Pappe oder Holz, man hat vielmehr Grund, an aneinandergefügte Glastäfelchen zu denken. Wir haben (S. 306) von einem Bildnisse des Paciuolo gesprochen, welches Piero della Francesca malte. Paciuolo ist mit seiner Summa vor sich dargestellt, wonach wir das Bild als nach 1494 entstanden bezeichnen dürfen. Aber noch eine andere Einzelheit von jenem Gemälde wird uns berichtet: von oben hingen einige aus Krystall gebildete regelmässige Körper herab[2]), und diese Stelle kann man kaum anders deuten, als wir es thaten. Auf die Körper selbst kommen wir mit einigen Worten bei der Divina Proportione zurück.

Jetzt erübrigt uns nach dem weitläufigen Berichte, den wir über die Summa erstattet haben, ein verbindendes Endurtheil zu fassen. Wir fürchten nicht, den Widerspruch unserer Leser wachzurufen, wenn wir die Summa als das Werk bezeichnen, welches das Bedürfniss der Zeit forderte, zugleich als das Werk, welches dieses Bedürfniss durchaus befriedigte. Es war reichhaltig wie kein anderes von den im Drucke erschienenen, ja wie kein anderes zeitgenössisches Werk, das uns handschriftlich erhalten ist. Es begann bei den ersten Anfangsgründen der Rechenkunst und endete mit Anwendung der Al-

---

[1]) Staigmüller in der Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Hist.-liter. Abthl. S. 89, 97, 127. [2]) *col suo libro avanti de la Somma Aritmetica et alcuni corpi regolari finti di cristallo appesi in alto.* Bald. Boncompagni im *Bullet. Boncompagni* XII, 364.

gebra auf geometrische Fragen, welche von dem heutigen Leser nicht ohne Nachdenken gelöst werden können. Es enthielt Vorschriften, die man nicht eigentlich zur Rechenkunst zählen konnte, die aber dem Kaufmann und Allen, welche zu Kaufleuten in Beziehung standen, unentbehrlich waren. Es stammte aus der Feder eines Mannes, der selbst früher in kaufmännischen Kreisen lebend diesen Kreisen dadurch bestens empfohlen war, zugleich eines Mannes, der innerhalb eines geachteten Ordens eine nicht unbedeutende Rolle spielte, der an Hochschulen als Lehrer thätig war, und der darum von Geistlichen und Gelehrten, mochten sie noch so eifersüchtig ihrer Standesehre sich bewusst sein, als ebenbürtig angesehen werden musste. Und diesen äusseren Empfehlungen entsprach die Form. Um ein schönes Italienisch zu lernen wird man freilich eben so wenig, als um sich in einem Latein zu üben, welches Cicero Ehre machen würde, die Summa zur Hand nehmen! Die Sprache ist vielmehr ein geradezu barbarisches Gemenge von schlechtem Latein mit schlechtem Italienisch und konnte in Folge dessen ein humanistisch gebildetes Ohr oder Auge nur verletzen, aber war man über diese erste Empfindung hinaus, so musste die anspruchslose Naivität des Verfassers, seine redliche Anerkennung fremden Verdienstes, die Klarheit seiner Auseinandersetzung der verschiedenen Verfahren, die einleuchtende Art seiner Beweisführung, wo eine solche vorhanden ist, gewinnen. Paciuolo war ja kein grosser Mathematiker, das darf man ruhig zugeben. Er selbst will nie für einen solchen gelten. Aber so unbedeutend, für wie manche Schriftsteller unseres Jahrhunderts ihn verrufen haben, war er denn doch nicht. Wir möchten ihn in dieser und in mancher anderen Beziehung den Kästner seiner Zeit nennen, überschätzt während seiner persönlichen Wirksamkeit, später unterschätzt, sei es von Solchen, die nicht merken lassen wollten, wie viel sie ihm verdankten, sei es von Solchen, die durch die Langathmigkeit seiner Schriften sich niemals hindurchgelesen haben, sei es endlich von Solchen, welche ihrer Zeit weit voraneilend dem Vorgänger nicht verzeihen konnten, dass sie nichts bei ihm zu lernen fanden. Worin aber die persönlichen Verdienste Paciuolo's liegen, ist leicht auszusprechen. Es ist erstens immer ein Verdienst, das wissenschaftliche Bedürfniss einer Zeit zu erkennen und ihm Genüge zu thun. Es muss aber Paciuolo als besonders verdienstlich nachgerühmt werden, dass er, die beiden Schulen der praktischen Rechenkunst, von welchen schon so häufig die Rede war, gleich genau kennend, für die des Leonardo, gegen die des Jordanus sich entschied. Man sollte nicht als ein Geringes verachten, dass er es war, der die Halbierung und Verdoppelung verdammte und verbannte, dass er dem Dividieren unter-

wärts Bahn brach. Man sollte noch weniger gering achten, dass er auch die zahlentheoretischen Lehren des grossen Pisaners den Mathematikern Europas im Drucke bekannt gab, und dass er so zu neuen Untersuchungen Anlass gab, die praktisch kaum irgend einen Werth hatten, aber die den mathematischen Scharfsinn übten und ihm zeigten, dass es ausserhalb des täglichen Geschäftsgebrauches Wissenswerthes und der Forschung Bedürftiges gebe. Die gleiche Bedeutung hat für die Förderung geometrischen Denkens gehabt, was Paciuolo aus Leonardo's Practica Geometriae veröffentlichte. Den Zusammenhang aber von Algebra und Geometrie hat er nun gar in seinen 100 Aufgaben zum allgemeinsten Bewusstsein gebracht. Nennen wir endlich die Lehre von den Gleichungen selbst, deren Regeln in Verse gebracht, dem Gedächtnisse leicht eingeprägt werden konnten, deren noch nicht gelösten Fälle dem Leser besonders hervorgehoben wurden, deren Giltigkeitsbereich aber durch die sogenannten proportionalen Fälle eine weite Grenzhinausschiebung erfuhr, so werden hierin Verdienste genug genannt sein, um unser erstes Urtheil über den, der sie sich erwarb, zu rechtfertigen.

Wir sagten (S. 308), Paciuolo habe 1509 in Venedig eine Ausgabe des Euklid veranstaltet. Sie fällt dieser Jahreszahl nach eigentlich in einen späteren Abschnitt unserer Darstellung. Alle Uebersichtlichkeit müsste jedoch verloren gehen, wenn wir in peinlichem Festklammern an den zufälligen Wechsel des Jahrhunderts die Leistungen eines Mannes regelmässig auseinanderreissen wollten. Andererseits ist Paciuolo's Euklidausgabe nicht zu beurtheilen, ohne vorher eine andere zu nennen, welche 1505 in Venedig im Drucke erschienen war, und welche wir also gleichfalls hier vorweg nehmen müssen. Wir haben uns (S. 291) mit der Ratdolt'schen Euklidausgabe von 1482 beschäftigt, welche den dem Arabischen entstammenden Text und die Anmerkungen des Campanus enthielt. Diese Ausgabe war wenig mehr als 10 Jahre alt, da gelangte eine griechische Handschrift der euklidischen Elemente mit Einschluss der sogenannten euklidischen letzten stereometrischen Bücher, aber auch der Phänomena und der verschiedenen optischen Schriften Euklid's, sowie der Daten in den Besitz eines Venetianers, Bartholomaeus Zambertus, italienisch Zamberti genannt[1]). Er übersetzte alle diese Schriften in's Lateinische und that dasselbe für den Commentar des Proklos zu den euklidischen Elementen. Letztere Uebersetzung ist handschriftlich noch vorhanden[2]). Sie trägt die Bemerkung, sie

---

[1]) Weissenborn, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti S. 12—28. [2]) *Cod. lat.* 6 der Münchener Bibliothek. Vergl. Fried-

sei 1539 entstanden, als der Uebersetzer sein 66. Lebensjahr vollendet hatte. Darnach wäre Zamberti 1473 geboren und hätte die Euklidübersetzung in der Mitte seiner zwanziger Jahre veranstaltet. Das ist Alles, was wir von seiner Persönlichkeit wissen. Wann er nämlich die Euklidübersetzung anfertigte, wissen wir aus der Druckausgabe, welche am Ende die Jahreszahl 1505 trägt, während die Elemente schon im Jahre 1500 gedruckt waren, so dass der ganze Druck fünf Jahre in Anspruch nahm, vielleicht in Folge kriegerischer Ereignisse, die damals das venetianische Staatswesen beunruhigten, vielleicht weil es so lange währte, bis der Druck mit einem Privilegium versehen war. *Ne quis presens opus Venetiis cudat aut alibi impressum vendere audeat: mulcta adiuncta ut in Privi · pressius legitur*[1]) heisst die Formel, welche wir hier beispielsweise einmal mittheilen. Das Privilegium war auf 10 Jahre ertheilt[2]). Ueber diese Zamberti'sche Euklidausgabe von 1505 ist Folgendes zu bemerken. Zamberti hält, gleich allen seinen Zeitgenossen, den Mathematiker Euklid und Euklid von Megara für dieselbe Persönlichkeit. Er sieht in ihm auch nur den Urheber der Sätze, während Theon als der Erfinder der Beweise gilt. Das Auffinden des griechischen Textes hat also in zwei wichtigen Irrthümern eine Richtigstellung hervorzubringen nicht vermocht; der eine Irrthum blieb, der andere veränderte sich dahin, dass ein fälschlich angenommener Urheber der Beweise, Campanus, durch einen anderen, Theon, ersetzt wurde, dem sie ebensowenig angehörten. Verbessert sind dagegen manche Uebersetzungssünden, zu welchen der Durchgang durch das Arabische früher Veranlassung gegeben hatte, und da jede solche Verbesserung unter herbem Tadel gegen Campanus vorgenommen wird, da die von diesem gebrauchten Namen helmuain und helmuariphe als barbarische, unlateinische, unverständliche Zusätze getadelt werden[3]), so kann an der Wahrheit des Satzes, so auffallend es klingt, Zweifel nicht entstehen: Zamberti wusste nicht mehr, was nur 23 Jahre früher Gemeingut der wissenschaftlich Gebildeten gewesen war (S. 292), dass die Ausgabe des Campanus auf einer Uebersetzung aus dem Arabischen beruhte[4]). Er glaubte, dieser sein Vorgänger habe, ebenso wie er selbst, griechische Handschriften benutzt, und diese Meinung wurde von den meisten Zeitgenossen Zamberti's getheilt. Eine der Stellen, welche Zamberti zu ganz besonders eifrigem Zorn aufregte, war das unglückliche Missverständniss im V. Buche der Elemente[5]), von welchem wir wieder-

---

lein's Ausgabe des Commentars des Proklos (Leipzig 1873) in der *Notarum explicatio* unter Z.

[1]) Weissenborn l. c. S. 17 und 24. [2]) Ebenda S. 14. [3]) Ebenda S. 22. [4]) Ebenda S. 27. [5]) Ebenda S. 23.

holt zu sprechen hatten. Die Bewegung, welche, wie man annehmen darf, das Erscheinen des Zamberti'schen Euklid verursachte, bewog Paciuolo seinerseits auch eine Euklidausgabe zu veranstalten[1]). Es war eine Ehrenrettung des Campanus gegen Zamberti, welche er beabsichtigt haben muss, und die er auf Kosten Ratdolt's vollzog. Die Werke des Euklid von Megara, des scharfsinnigen Philosophen, des unbestrittenen Fürsten unter den Mathematikern, erzählt uns der weitschichtige Titel[2]), seien von Campanus, der zuverlässigsten Mittelperson, übersetzt worden; die Schuld der Abschreiber und Buchhändler[3]) habe die Uebersetzung so verunstaltet, dass man sie kaum als den Euklid anzuerkennen vermöge. Jetzt habe *Lucas paciolus* die Fehler verbessert, 129 falsch gezeichnete Figuren berichtigt und vieles Nothwendige, auch kleine Erläuterungen zu schwierigen Stellen, beigefügt. Der Name Zamberti's kommt im ganzen Buche nicht ein einziges Mal vor[4]). Er wird einfach todtgeschwiegen, und nur gewisse kleine Gegensätze verrathen dem kundigen Leser, gegen wen manche verborgene Bosheit gemünzt ist. Zamberti nannte sich, wo er eigene Bemerkungen machte, *Interpres*; Paciuolo bedient sich dafür des Ausdruckes *Castigator*. Zamberti wusste gegen Campanus ein Füllhorn von Schmähworten auszuschütten, Paciuolo nennt ihn den zuverlässigsten, besten, vortrefflichsten Uebersetzer und rühmt seine Ausgabe als die vollkommenste. Zamberti sagt, seine Ausgabe beruhe auf einem griechischen Texte, Paciuolo rühmt dankbar die Hilfsleistungen, welche er von Scipio Vagius, einem Manne von Erleuchtung in beiden Sprachen, womit natürlich die griechische und lateinische Sprache gemeint sind, erfahren habe; da muss wohl der Wunsch Paciuolo's auf Zamberti gedeutet werden, es möchten doch auch Andere suchen, sich Wissen anzueignen und nicht bloss zu prahlen und mit dem, was sie nicht wissen, Wind zu machen[5]). Ueber die Anmerkungen Paciuolo's wissen wir durch einen Gelehrten, der diese seltenste aller Euklidausgaben selbst gesehen hat, und der nichts weniger als zu den Bewunderern Paciuolo's gehört[6]), dass sie neben manchen Trivialitäten auch praktische und nützliche Winke und Erklärungen einzelner Worte enthalten, dass sie neue Beweise bringen, die aufzufinden freilich nicht schwer sei, wenn man sich, wie Paciuolo häufig genug thue, gestatte, vom Gedankengange seines

---

[1]) Weissenborn l. c. S. 28—56. — Staigmüller l. c. S. 94—95. [2]) Weissenborn l. c. S. 30. [3]) Das Wort *librariorum* ist gebraucht, welches die beiden Bedeutungen haben kann und vermuthlich hier haben sollte. [4]) Weissenborn l. c. S. 50. [5]) *Atque utinam et alii cognoscere vellent non ostentare aut ea quae nesciunt veluti fumum enditare non conarentur.* [6]) Weissenborn l. c. S. 52.

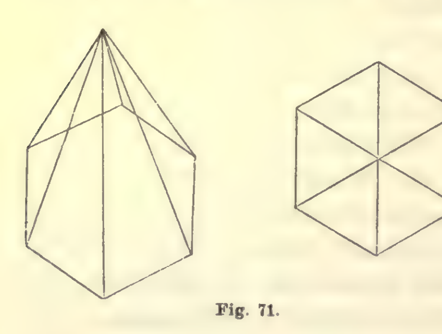
Schriftstellers abzuweichen und als bekannt anzunehmen, was erst später folge, dass in ihnen endlich auch Verschiedenes stecke, was ein für die damalige Zeit bedeutendes Wissen erkennen lasse. Wir finden in diesem Urtheile, insbesondere unter Berücksichtigung der Meinung, welche derjenige, der es aussprach, sich über Paciuolo gebildet hatte, lediglich eine Bestätigung unserer eigenen Ansicht von der wissenschaftlichen Stellung Paciuolo's innerhalb seiner Zeit. Von Einzelheiten, welche uns berichtet werden, heben wir hervor, dass zwei Figuren die nicht unzutreffenden Namen des Gänsefusses, *pes anseris*, und des Pfauenschwanzes, *cauda pavonis*, beigelegt sind[1]. Es sind das die Figuren zum 7. und 8. Satze des III. Buches, welche die Länge der Strecken betreffen, die von einem ausserhalb des Mittelpunktes liegenden Punkte innerhalb des Kreises und von einem Punkte ausserhalb des Kreises nach einem Punkte der Kreislinie selbst gezogen werden. Wir heben ferner hervor, dass Paciuolo am 11. August 1508, mithin etwa ein Jahr vor dem vom Juni 1509 datirten Erscheinen seiner Euklidausgabe, in der Bartholomäuskirche in Venedig vor einem Kreise von über 500 feingebildeten Zuhörern, deren einige genannt sind, eine Rede oder sollen wir sagen eine Predigt hielt[2], welche die Einleitung zu einer Vorlesung über das V. Buch der euklidischen Elemente bildete.

Wir kommen zu dem dritten Werke Paciuolo's, zu seiner Divina Proportione[3] von 1509. Vom Juni 1509 ist nämlich die Druckvollendung auch dieses Bandes bestätigt, während die Fertigstellung derjenigen Abtheilung, welche eigentlich als Divina Proportione im engeren Sinne zu bezeichnen ist, bis auf den 14. December 1497 zurückgeht, als Paciuolo noch in Mailand sich befand. Diese eigentliche Divina Proportione von 23 Blättern setzt im Drucke die Blattzählung bis zum 33. Blatte fort. Die Fortsetzung besteht in einer wesentlich dem Vitruvius entnommenen Abhandlung über Baukunst, welche aber auch andere für die bildende Kunst bemerkenswerthe Dinge enthält. Daran schliesst sich wieder auf 27 besonders mit Blattzahlen versehenen Blättern ein Buch von den fünf regelmässigen Körpern und solchen Körpern, welche von diesen sich ableiten. Unter der Divina Proportione, dem göttlichen Verhältnisse, versteht Paciuolo den goldenen Schnitt. Er bespricht das Vorkommen desselben insbesondere bei regelmässigen Körpern, wie es in dem von Hypsikles herrührenden sogenannten XIV. Buche des Euklid und anderwärts

---

[1] Weissenborn l. c. S. 42. [2] Ebenda S. 44. [3] Kästner I, 417—449. — Libri III, 143—144. — Pfeifer, Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst (Augsburg 1885), S. 43 flgg. — Staigmüller l. c. S. 95—97.

gelehrt ist. Von den regelmässigen Körpern leitet aber Paciuolo auch andere ab, indem er zwei ihm eigenthümliche stereometrische Verfahren in Anwendung bringt, das Abschneiden, *abscindere*, und Aufsetzen, *elevare*[1]). Es sind ähnliche Veränderungen gemeint, wie sie die Natur an Steinformen hervorbringt, und welche von einer einfachen Grundgestalt aus verstanden werden können, wenn man theils Abspaltungen, theils Verwachsungen mannigfacher Art als Ursache annimmt. Das Tetraeder z. B. wird abgeschnitten[2]), indem an den vier Ecken des Körpers ein dem Ganzen ähnliches Stück, dessen einzelne Kanten ein Drittel der ursprünglichen betragen, entfernt wird. Der neue Körper ist von 8 Ebenen begrenzt, von welchen 4 Sechsecke und 4 gleichseitige Dreiecke sind. Das aufgesetzte Tetraeder entsteht, indem auf jeder Körperfläche ein dem ursprünglichen Körper gleicher Aufsatz angebracht wird. Es besteht demnach aus einem inneren und 4 äusseren Tetraedern, welche jenes einschliessen und verbergen. Der neue Körper hat 12 gleichseitige Dreiecke als Grenzflächen. Dem abgeschnittenen Tetraeder neuerdings Körperstücke aufzusetzen erklärt Paciuolo wegen der sechseckigen Flächen für unmöglich, weil diese keine körperlichen Winkel zu bilden gestatten. Das ist so zu verstehen: Paciuolo will den jedesmaligen Körperaufsatz aus lauter gleichseitigen Dreiecken als Grenzflächen gebildet wissen. Eine Pyramide über einem gleichseitigen Sechsecke aber kann nur gleichschenklige Dreiecksflächen besitzen. Wollte man sie gleichseitig wählen, so würden sie nicht zur Pyramide sich zusammensetzen, sondern nur eine ebene Deckung des schon vorhandenen Sechsecks liefern, welches also keine körperlichen Winkel zu bilden gestattet (Figur 71). In dem gleichen Sinne kann Abschneiden und Aufsetzen bei allen regelmässigen Körpern vorgenommen werden, Aufsetzen auf einem vorher abgeschnittenen Körper aber beim Oktaeder und beim Ikosaeder ebensowenig wie beim Tetraeder, wohl aber beim Hexaeder und Dodekaeder. Es ist für Paciuolo kennzeichnend, dass er, wo er vom Hexaeder zu reden anfängt, hinzufügt, dieser Körper sei an Gestalt dem teuflischen Werkzeuge ähn-


Fig. 71.

[1]) Kästner, *De corporibus regularibus abscissis et elevatis* in den *Commentationes Societat. Reg. Scient. Gottingensis* XII, 61—98 (1796). [2]) Kästner I, 428—429.

lich, welches man Spielwürfel, *dado* oder *taxillo*, nenne. Ausser den regelmässigen Körpern werden auch halbregelmässige geschildert, und auch an ihnen wird das Abschneiden und Aufsetzen gelehrt. Es ist darauf aufmerksam gemacht worden[1]), dass Paciuolo in der Divina Proportione Buchstaben als Stellvertreter allgemeiner Zahlen anwende. Er sage z. B., wenn drei Grössen gleicher Art gegeben seien — denn sonst finden Verhältnisse zwischen ihnen nicht statt — und die erste sei *a* oder 9, die zweite *b* oder 6, die dritte *c* oder 4, dann stehen sie in dem Verhältnisse von *a* zu *b* u. s. w.

Unter mathematischen Wörtern, welche Paciuolo erklärt, erscheint auch *corausto*[2]). Wir wissen (Bd. I, S. 516 und 813), dass dieser Ausdruck der Sprache der römischen Feldmessung angehört, und sehen also durch ihn den Beweis erbracht, dass Agrimensoren jetzt auch in Italien wieder gelesen wurden, wie der gleiche Beweis für Deutschland an Johann Widmann (S. 235—236) geführt werden konnte.

Wir erwähnten aber, mit der eigentlichen Divina Proportione sei eine die Baukunst und die bildenden Künste überhaupt betreffende Abhandlung vereinigt. In letzterer Beziehung sind vornehmlich die Untersuchungen über die Maasse und Verhältnisse des menschlichen Körpers zu nennen, denen vermuthlich ähnlich, über welche wir (S. 294) als von anderen Italienern herrührend berichtet haben. Ein auf dem Rücken liegender Mensch solle Arme und Füsse so weit als möglich auseinanderspreizen. Die Endpunkte der Mittelfinger, der grossen Zehen und das Oberste des Kopfes liegen alsdann auf einer Kreislinie, deren Mittelpunkt der Nabel ist[3]). Die Verhältnisszahlen des menschlichen Körpers werden in ganzen Zahlen ausgesprochen, deren keine grösser als 10 ist. Nach diesen Verhältnisszahlen ist aber der Riese wie der Zwerg gebaut.

Wir sprachen oben auch schon von der letzten Abtheilung des Bandes, von dem Büchlein von den regelmässigen Körpern. Man solle sie mit den umschriebenen Kugeln zusammen betrachten, dann könne man ihre Abmessungen, ihre Flächen, das Verhältniss eines Körpers zu einem anderen berechnen. Den Schluss endlich machen Zeichnungen, welche auf den gesammten Inhalt des Bandes sich beziehen. Sie sind von vollendeter Ausführung, was nicht Wunder nehmen kann, denn kein geringerer Meister als Lionardo da Vinci (S. 336) hat sie entworfen. Paciuolo setzt seine Leser selbst in Kenntniss von dieser Hilfsleistung seines berühmten Freundes, der

[1]) Libri III, 144, Note 2. [2]) Kästner I, 434, Z. 2 v. u. [3]) Ebenda I, 437.

auch nicht ohne Einfluss auf die Abfassung des Werkes gewesen sei. Unter den Figuren bemerken wir die Herstellung von Buchstaben mittels Zirkel und Lineal, eine Aufgabe, von der wir bisher nur als von einer solchen reden konnten, mit welchen Araber sich beschäftigt haben (S. 294).

Dieses ist also das dritte und letzte Werk Paciuolo's, von welchem zu reden war. Die ihm angehörende Bildung neuer Körper durch Abschneiden und Aufsetzen stellt wenigstens seiner stereometrischen Phantasie ein nicht übles Zeugniss aus, wenn auch nicht mehr als das, da die mathematisch bedeutsamen Fragen, zu welchen jene neuen Körper anregen konnten, unerörtert bleiben. Jedenfalls aber hat die Divina Proportione mit dazu geholfen, den Namen des Verfassers in weitere und weitere Kreise zu tragen, und auch dieser Umstand mag fördernd für die wachsende Einwirkung seines Hauptwerkes, der Summa, gewesen sein.

58. Kapitel.

Andere Italiener. Die Franzosen Chuquet und Lefèvre.

Paciuolo war, wie die Schilderung seines Lebenslaufes uns gezeigt hat, an verschiedenen Universitäten Italiens als Lehrer thätig, bald da bald dort seinen wechselnden Wohnsitz aufschlagend. Ein rascher Tausch innerhalb der Universitäten Italiens gehörte geradezu zu den Eigenthümlichkeiten dieser Hochschulen, unterstützt durch die Sitte, dass die Professuren fast überall nur auf wenige Jahre verliehen zu werden pflegten, dann erneuert oder nicht erneuert wurden, je nachdem die Thätigkeit des Lehrers eine erspriessliche gewesen war oder nicht, je nachdem die Anerbietungen, die man ihm machte, verlockender als das von anderwärts Gebotene schienen oder nicht. Die kleinstaatliche Nebenbuhlerschaft der italienischen Hochschulen kann nur von Solchen verstanden, aber auch gewürdigt werden, welche ähnliche Verhältnisse der Wettbewerbung zwischen oft nur wenige Wegstunden von einander entfernten, aber anderen Landeshoheiten untergeordneten Bildungsanstalten selbst kennen gelernt haben. Ein rasches Leben strömt durch solche Schulen. Sie können und dürfen nicht verknöchern. Sie müssen, wenn sie es auch bei der Ungleichheit der zur Verfügung stehenden Geldmittel nicht in Allem einander gleich thun können, versuchen, in irgend einem Fache mit Glück den Wettkampf aufzunehmen, und eine derartige Anstrengung aller Kräfte trägt immer einen sicheren Lohn: das Gedeihen der

Wissenschaft in der allen Anstalten gemeinsamen grösseren Heimath, mag sie immerhin ein einheitliches Staatswesen nicht genannt werden können. So kam in Italien in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts die Mathematik an den Universitäten mehr und mehr in Aufschwung, mehr und mehr in die Hände von eigentlichen Fachmännern, ein Uebergang, der allerdings schon 50 Jahre früher (S. 204) begonnen hatte.

In Piacenza[1]) war schon um das Jahr 1400 eine Professur der Astrologie vorhanden, und dort ist auch die Geburtsstätte jenes Georg Valla[2]) gewesen, der humanistische Studien im Dienste der Mathematik trieb. Unter Giovanni Morliani von Mailand machte es sich mit dieser letzteren Wissenschaft bekannt. Sein Hauptwerk ist eine Art von Encyklopädie, welche 1501 nach des Verfassers Tode durch Aldus im Drucke herausgegeben wurde. Sie führte den Titel *De expetendis et fugiendis rebus* und ist wesentlich auf griechische und römische Ueberlieferung gegründet, während arabisch-mittelalterliche Wissenschaft bei Seite geschoben war. Die Geometrie scheint in dieser Encyklopädie ganz besonders bedacht gewesen zu sein. Im 3. Kapitel des IV. Buches derselben sei eine Abhandlung von den Kegelschnitten enthalten, die erste der Zeitfolge nach, in welcher ein abendländischer Schriftsteller mit diesen Curven sich beschäftigt hat. Im 37. Kapitel des XL. Buches ist auf die Stelle des Quintilian (Bd. I, S. 510—512) aufmerksam gemacht, in welcher von falschen Flächenschätzungen aus dem Umfange die Rede ist[3]). Eine Aufgabe, welche Georg Valla sei es aus dem Liber Geoponicus des Heron von Alexandrien, sei es aus dem Rechenbuche des Maximus Planudes geschöpft hat, mag er mit einer dieser Quellen unmittelbar oder mittelbar bekannt geworden sein, hat sich bei einem Schriftsteller des XVI. Jahrhunderts erhalten[4]). Es handelt sich um die Auffindung zweier Zahlenpaare von gleicher Summe aber derart ungleichem Producte, dass das Product der beiden ersten Zahlen zu dem der beiden anderen sich wie 1 : 4 verhält.

Die vorzugsweise mathematische Universität Italiens war Bologna. Sie besass zwei Lehrstühle, den einen für Astrologie, den anderen für Arithmetik und Geometrie. Jeder derselben war aber mehrfach besetzt, d. h. es waren, was in der Wirkung auf die Pflege der Wissenschaft ziemlich auf das Gleiche hinausläuft, neben dem Inhaber der Professur noch zwei, drei, vier andere Gelehrte vorhanden, deren Namen

---

[1]) Denifle, Die Universitäten des Mittelalters bis 1400, Bd. I, S. 571.
[2]) Libri II, 272. Note 1. [3]) So berichtet Daniel Schmenter, *Deliciae mathematicae* pag. 125. [4]) Cardanus, *Opera* IV, 179 (Lyon 1663). Vergl. auch Cantor, Agrimensoren S. 62.

wir aus den Vorlesungsverzeichnissen kennen[1]), und welche zum Unterrichte sich erboten. Man darf daran wohl die Vermuthung knüpfen, es habe sich nicht stets um den gleichen Lehrstoff gehandelt, und wenn Vorschriften aus dem Jahre 1404 eine Regelung des astrologischen Unterrichts und eine Vertheilung desselben in vier Jahresaufgaben beabsichtigen[2]), wenn wir von eigentlicher Mathematik in diesem Lehrplane nur dem Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen und den drei ersten Büchern Euklids (je eines in jedem der drei ersten Jahre) begegnen, während die längste Zeit durch Astronomie und Astrologie im heutigen Sinne dieser Ausdrücke in Anspruch genommen war, so dürfen wir vertrauen, dass auch anderes im Flusse Befindliches, z. B. die nirgends ausdrücklich genannte Lehre von den Gleichungen, den Studierenden nicht vorenthalten blieb, wenn sie nach ihr fragten. Gerade Paciuolo's Lehrthätigkeit bestärkt uns in dieser Meinung. Niemand zweifelt daran, dass seine Summa aus Vorlesungsheften allmälig herausgewachsen sei; ihrem Inhalte entsprechende Vorlesungen muss er folglich gehalten haben, mögen sie auch in dem Bologneser Verzeichnisse für 1501 in die unscheinbaren Worte sich verhüllen *leggeva Matematica*, er las über Mathematik[3]). Am Schlusse des XV. und am Anfange des XVI. Jahrhunderts waren in Bologna gleichzeitig vier Männer vorhanden, deren Nebeneinanderleben nicht gedacht werden kann, ohne die edelsten Früchte für die mathematischen Wissenschaften zur Reife zu bringen.

Paciuolo haben wir soeben genannt. Als Astronom lehrte gleichzeitig Domenico Maria von Novara, als Mathematiker Scipione del Ferro, als Studierender weilte dort seit October 1496 Nicolaus Kopperlingk aus Thorn[4]), wenn wir die Schreibweise des Kassenbuches der Bologneser Rechtsstudierenden deutscher Nation uns aneignen, womit sie den Begründer der heutigen Sternkunde bezeichnet. Den novareser Astronomen haben wir nicht anders als im Vorübergehen zu nennen. Kaum viel ausführlicher werden wir im folgenden Zeitabschnitte mit seinem deutschen Schüler uns beschäftigen dürfen, ohne eines Einbruches in das uns verschlossene Gebiet der Astronomie und ihrer Geschichte uns schuldig zu machen. Gleichfalls für das XVI. Jahrhundert sparen wir endlich um des Zusammenhanges mit anderen Männern und ihren Leistungen willen Scipione del Ferro, den Erfinder der Auflösung der kubischen Gleichungen.

---

[1]) Malagola, *Della vita e delle opere di Antonio Urceo detto Codro* (Bologna 1878) pag. 567—571 und 574. [2]) Ebenda pag. 572—573. [3]) Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze), Berlin 1871, S. 44, Anmerkung 1. [4]) Malagola l. c. pag. 562.

Wir verlassen Italien und begeben uns nach Frankreich, wo inzwischen ein Schriftsteller aufgetreten war, den wir ohne italienische Beeinflussung nicht verstehen noch würdigen können. Nicolas Chuquet aus Paris[1]) hatte Medicin studiert und in dieser Wissenschaft des Baccalaureat erworben. Vielleicht fand diese Erwerbung in Lyon statt, wo eine berühmte Aerzteschule blühte. Jedenfalls begann und vollendete Chuquet in Lyon im Jahre 1484 ein Werk, welches er *Le Triparty en la science des nombres* benannte. Es ist zwar ausser in unserem Jahrhunderte (1880) niemals gedruckt worden, fand aber jedenfalls handschriftliche Verbreitung und wurde im XVI. Jahrhunderte von einem im 59. Kapitel zu behandelnden Schriftsteller so umfassend benutzt, dass das Wort „abschreiben" nicht selten besser zutrifft als sogar „ausschreiben". Lyon war so recht der Platz, an welchem die Entstehung eines umfassenden Rechenwerkes von der Art dessen, mit welchem wir es zu thun haben, geplant und vorbereitet werden konnte. Ein grossartiger Handel befand sich dort in wesentlich italienischen Händen[2]). Eine medicinische Schule sowie angesehene Buchdruckereien zeugen von wissenschaftlichem Leben. Das waren ähnliche Einflüsse, wie diejenigen, welche anf Paciuolo wirkten, und mit annähernd gleichem Erfolge. Wir behalten es uns vor, am Schlusse unserer Auseinandersetzungen einen Vergleich zwischen beiden Schriftstellern, dem italienischen Mönche und dem französischen Arzneigehilfen zu ziehen; hier bemerken wir nur, dass die Summa zehn Jahre später gedruckt worden ist als der Triparty entstand, dass somit eine Beeinflussung des letzteren Werkes durch das erstere an dem Widerspruch der Zeitfolge scheitert, wie wir das Gleiche auch für die weiter oben (S. 243—248) besprochene Dresdner Algebra mit gleicher Bestimmtheit behaupten dürfen. Die umgekehrte Beeinflussung Paciuolo's durch die Dresdner Algebra, durch den Triparty kann ebensowenig vermuthet werden, ist auch niemals vermuthet worden, da damals ein italienischer Kaufmann es einfach für lächerlich gehalten hätte, von einem Deutschen, einem Franzosen Gegenstände der Rechenkunst oder der Lehre von den Gleichungen erlernen zu sollen. Wo also Uebereinstimmungen sich finden, werden wir an gemeinsame Anlehnung an Vorgänger aus italienischen Handelskreisen zu denken haben. Wo Uebereinstimmung zwischen Chuquet und Paciuolo fehlt, werden wir, der Neigung des letztgenannten jede mögliche Vollständigkeit anzustreben uns erinnernd, an Eigenthümlichkeiten Chuquet's

---

[1]) Arist. Marre, *Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty. Bulletino Boncampagni* XIII, 585—592. An die Abhandlung schliesst sich dann der Abdruck des *Triparty* selbst an. [2]) Marre l. c. pag. 571, Note 1.

denken müssen, insbesondere bei denjenigen Stellen, auf welche er ein Erfinderrecht geradezu beansprucht.

Triparty en la science des nombres nennt Chuquet das in drei Theile zerfallende Werk. Der 1. Theil handelt von dem Rechnen mit rationalen, der 2. von dem mit irrationalen Zahlen, der 3. von der Lehre von den Gleichungen. Die Sprache ist eine dem heutigen Französischen schon ziemlich nahestehende. Eine Accentbezeichnung kommt indessen noch nirgend vor.

Beim Zahlenschreiben führt die Null den Namen *chiffre* oder *nulle*, für sich hat sie nichts zu bedeuten, *de soy ne vault ou signifie rien*, aber indem sie eine Stelle einnimmt, giebt sie denen, die vor ihr sind, einen Werth. *Mais elle occupant ung ordre fait valoir celles qui sont apres elle*[1]). Zur bequemeren Aussprache werden die Zahlen von rechts anfangend in je sechsstellige Gruppen abgetheilt, wobei man die Anfangsstelle jeder auf die erste folgenden Gruppe durch ein Pünktchen bemerklich macht. Das Wort Million, Million von Millionen u. s. w. bietet Mittel zur Benennung so grosser Zahlen. Man kann aber auch nächst den Millionen die Byllionen, Tryllionen, Quadrillionen, Quyllionen, Sixlionen, Septyllionen, Octyllionen, Nonyllionen *et ainsi des aultres se plus oultre on voulait proceder* unterscheiden[2]). Bei den einzelnen Rechnungsarten sind überall unbewiesene Regeln ausgesprochen. Gewisse Kunstausdrücke treten dabei auf, welche sich in Frankreich unverändert forterhalten haben, so das *garder*, im Sinne behalten, bei der Addition, das *emprunter*, borgen, bei der Subtraction. Die geborgten 10 werden, wie bei den Italienern, durch Erhöhung der nächsten Subtrahendenziffer um eine Einheit ersetzt[3]). Beim Multipliciren[4]), wo es sich um den *nombre multipliant* und den *nombre a multiplier* handelt, ist in Dreiecksgestalt das kleine Einmaleins abgebildet, *laquelle chose est appelle le petit liuret de algorisme.* Die sich selbst leicht erläuternde Figur, welche aber in überflüssiger Breite erklärt wird, sieht so aus (s. S. 349).

Die Multiplication wird mit unter einander mit Einrücken angeschriebenen Theilproducten, aber auch schachbrettartig gelehrt. Bei dem letzteren Verfahren ist nur von kleinen Viereckchen, *quadrangles* die Rede, ein Wort wie *echiquier* kommt nicht vor, wiewohl es in Frankreich in verschiedenen Bedeutungen sehr wohl bekannt war[5]). Beim Dividiren wird der *diviseur* oder *partiteur* von dem *nombre a*

---

[1]) *Triparty* im *Bullet. Boncampagni* XIII, 593. [2]) Ebenda pag. 594. [3]) Ebenda pag. 595. [4]) Ebenda 596—599. [5]) Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker S. 133—135 über eine schachbrettartige Buchung in Frankreich und England.

partir unterschieden. Das Verfahren selbst erfolgt, wie nicht anders zu erwarten, überwärts. Das dabei übliche allmälige Verschieben des Divisors nach rechts heist *anteriorer*. Unmittelbar an die Division schliessen sich die Proben, *preuues*, und zwar die durch 9, deren Irrthumsquellen im Fehlen von Neunern oder von Nullen oder im

1	1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	6 6	7 7	8 8	9 9	0 0
2	2 4	3 6	4 8	5 10	6 12	7 14	8 16	9 18	0 0	
3	3 9	4 12	5 15	6 18	7 21	8 24	9 27	0 0		
4	4 16	5 20	6 24	7 28	8 32	9 36	0 0			
5	5 25	6 30	7 35	8 40	9 45	0 0				
6	6 36	7 42	8 48	9 54	0 0					
7	7 49	8 56	9 63	0 0						
8	8 64	9 72	0 0							
9	9 81	0 0								
0	0 0									

falschen Anordnen an sich richtiger Ziffern bestehen können[1]), die durch 7, welche seltener täuscht, weil die 7 den angeschriebenen Ziffern weniger verwandt ist[2]), *pour cause que 7 a moins de familiarite avec les nombres que 9*, endlich die durch entgegengesetzte Rechnungsverfahren. Nun folgen *nombres Routz*, die Brüche. *Numerateur* und *Denominateur* sind die Namen für Zähler und Nenner; *reduire* heisst mehrere Brüche auf gemeinsamen Nenner bringen; *abreuier* heisst einen Bruch kürzen. Das Kürzen tritt namentlich dann ein, wenn als gemeinsamer Nenner mehrerer zu addirenden Brüche überflüssigerweise das Product aller Nenner gewählt wurde. Es kann allmälig erfolgen, aber auch auf einen Schlag, indem der grösste Gemeintheiler von Zähler und Nenner nach euklidischer Weise, deren Erfinder freilich nicht genannt ist, gesucht wird. Beim Multipliciren von Brüchen ist als ein Sonderfall die Vervielfachung mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,

[1]) *Triparty* l. c. pag. 602. [2]) Ebenda pag. 604.

$\frac{1}{5}$ hervorgehoben; diese erzeuge das, was man *medier*, *tiercoyer*, *quartoyer*, *quintoyer* nenne[1]). Davon, dass ein Theil dieses Sonderfalles einmal als besondere Rechnungsart galt, ist ebensowenig hier die Rede als etwas später, wo im Anschlusse an die Divison von Brüchen des Verdoppelns, Verdreifachens, Vervierfachens Erwähnung geschieht[2]). (*Comment on peult doubler tripler et quadrupler tous nombres.*) Nach mehrfachen Uebungsbeispielen für alle Rechnungsarten gelangt Chuquet zu den *progressions*[3]), d. h. zu arithmetischen Progressionen, welche durch Vervielfachung der Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Gliederzahl summiert werden. Der Art nach und unbeschadet der einzigen Summationsregel giebt es vielerlei Progressionen, ununterbrochene deren Differenz 1 ist, *progression naturelle ou continue*, und unterbrochene mit von 1 verschiedener Differenz, *progression intercise ou discontinue*, wobei das Anfangsglied in beiden Fällen entweder die Einheit oder eine andere Zahl sein kann. Es folgen zahlentheoretische Untersuchungen nach Art deren, welche Boethius, der auch als Vorbild genannt ist, in seiner Arithmetik vereinigt hatte[4]). (*Et tout ce dit boete en son arismetique.*) Wir nennen gerade und ungerade Zahlen, vollkommene Zahlen, welche abwechselnd 6 und 8 als Randziffer haben, die befreundeten Zahlen 220 und 284 (von welchen allerdings bei Boethius nichts steht), die Verhältnisse in ihrer übergrossen Mannigfaltigkeit. Die geometrische Progression[5]) heisst die der *nombres constituez par ordonnance continue en toutes proporcions multiplex*, und der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder heisst der *denominateur* des Verhältnisses jener Zahlen. Die Summe wird gefunden durch Division mit der um die Einheit verringerten Benennung in das um das erste Glied verringerte Product des letzten Gliedes in eben jene Benennung.

Mit den Worten *De la multiplicacion et propriete des nombres proportionalz* eröffnet sich[6]) eine hochwichtige gemeinsame Betrachtung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe. Die arithmetische Reihe ist die mit 1 beginnende Reihe der natürlichen Zahlen, die geometrische Reihe beginnt mit irgend einer Zahl, besitzt aber eine dem Anfangsgliede gleiche Benennung, in Zeichen geschrieben: es handelt sich um die Reihen

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n. \end{matrix}$$

Chuquet hebt hervor, dass das Product von irgend zwei Zahlen der

---

[1]) *Triparty* l. c. pag. 611—612. [2]) Ebenda pag. 612—613. [3]) Ebenda pag. 617. [4]) Ebenda pag. 619—628. [5]) Ebenda pag. 628. [6]) Ebenda pag. 629.

unteren Reihe wieder ein Glied derselben Reihe gebe, und dass dessen in der oberen Reihe zu suchende Ordnungszahl die Summe der Ordnungszahlen der beiden Factoren sei. Dem Gedanken nach war dadurch auf ein logarithmisches Rechnen hingewiesen, wenn es auch noch mehr als ein Jahrhundert dauern sollte, bis aus dem zunächst unfruchtbaren Gedanken ein wirkliches Rechnen wurde.

Die Regeldetri, *rigle de troys*, wird gelehrt[1]) und auf die verschiedensten Aufgaben angewandt, auch auf solche, die mittels einfachen und doppelten falschen Ansatzes, *rigle de une posicion* und *rigle de deux posicions*, gelehrt werden[2]), die selbst eine Regeldetri voraussetzen. Bei solchen Aufgaben ist von negativen Zahlen unter dem Namen *ung moins* vielfach die Rede, und die Regeln, welche beim Rechnen mit denselben obwalten, werden genau auseinandergesetzt[3]). Moins 4 avec 10 l'addicion monte 6 et qui de 10 soustrait moins 4 il reste 14, also — 4 und 10 steigt auf 6 und — 4 von 10 bleibt 14 heisst es einmal, und an späterer Stelle im II. Theile des Werkes qui multiplie plus par plus et moins par moins Il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins vel a contra il en vient tousiours moins, oder plus mal plus und minus mal minus geben plus, plus mal minus oder umgekehrt geben immer minus. Die Zeichen[4]) der beiden Zahlenarten sind $\tilde{\text{p}}$ und $\tilde{\text{m}}$.

Den Abschluss des I. Theiles bildet die von Chuquet als sein Eigenthum in Anspruch genommene Regel der mittleren Zahlen, *la rigle des nombres moyens*[5]). Sie besteht in der Behauptung, der Zahlenwerth $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ liege immer zwischen $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$. Die Richtigkeit der Behauptung zu beweisen fällt allerdings dem Erfinder nicht ein. Sie ergiebt sich am einfachsten durch Bildung der beiden Differenzen $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1(b_1 + b_2)}$ und $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2(b_1 + b_2)}$, welche unter der einzigen Voraussetzung, dass b_1 und b_2 das gleiche Vorzeichen besitzen, selbst gleichen Vorzeichens sein müssen. Die Anwendung dieses Mittelwerthsatzes wird so gemacht, dass man zur Lösung einer Aufgabe versuchsweise zwei Werthe der unbekannten Grösse ansetzt, deren eine zu viel, die andere zu wenig hervorbringt, und dass man dann fortwährend neue Versuchswerthe aus den mittleren Zahlen sich bildet. Ganzzahlige Versuchswerthe werden der Regel untergeordnet, indem man sie als Brüche mit dem Nenner 1

[1]) *Triparty* pag. 631. [2]) Ebenda pag. 638 bezw. pag. 650. [3]) Ebenda pag. 641 vom Addiren und Subtrahiren, pag. 722 vom Multipliciren positiver und negativer Zahlen. [4]) Ebenda pag. 655. [5]) Ebenda pag. 643—654. Schon pag. 632 kündigt Chuquet sie mit den Worten an: *Je y ay adiouste la rigle des nombres moyens.*

betrachtet. Es soll z. B. die Gleichung $x^2 + x = 39\frac{13}{81}$ gelöst werden, und man findet $x = \frac{5}{1}$ zu klein, $x = \frac{6}{1}$ zu gross. Der erste Mittelwerth heisst $\frac{5+6}{1+1} = \frac{11}{2}$ und zeigt sich beim Versuche zu klein. Der zweite Mittelwerth ist $\frac{11+6}{2+1} = \frac{17}{3}$. Er erweist sich zu klein. Der dritte Mittelwerth $\frac{17+6}{3+1} = \frac{23}{4}$ besitzt die gleiche Eigenschaft. Der vierte Mittelwerth $\frac{23+6}{4+1} = \frac{29}{5}$ giebt erst ein zu Grosses, und somit ist jetzt zwischen $\frac{23}{4}$ und $\frac{29}{5}$ der Mittelwerth $\frac{23+29}{4+5} = \frac{52}{9}$ dem Versuche zu unterwerfen. Er erweist sich als richtig, und die Aufgabe ist gelöst. Man erkennt sofort, dass nach dieser Methode jede Gleichung näherungsweise aufgelöst werden kann, wenn man die Mühe der jedesmal neu anzustellenden Versuchsrechnung nicht scheut. Man erkennt ebenso, dass die Wahl irgend einer anderen Versuchsgrösse z. B. des arithmetischen Mittels zwischen einem zu Grossen und einem zu Kleinen genau die gleiche Berechtigung hätte. Aber man kann nicht leugnen, dass für den Chuquet'schen Mittelwerth als Vorzug sein verhältnissmässig langsam anwachsender Nenner geltend gemacht werden kann.

Der 2. Theil des Triparty behandelt, wie wir es angekündigt haben, Irrationalzahlen. Genauer gesprochen werden Wurzelgrössen, seien sie rational oder irrational, für sich und in Verbindung mit anderen, also ebenfalls rationalen oder irrationalen Zahlen, der Untersuchung unterworfen[1]). Wurzeln, sagt der Verfasser zur Einleitung in dieses Buch, giebt es vielerlei, zweite, dritte, vierte, fünfte Wurzeln und so endlos fort. Erste Wurzeln giebt es nicht, racines premieres ne se trouvent pas. Wollte man pour cause de continuacion de ordre, um die Ordnungszahlen fortzusetzen, von solchen reden, so müsste man sagen, erste Wurzel sei jede einfache Zahl. Als Zeichen der Wurzel dient ein R mit rechts erhöht angebrachter Ordnungszahl. Es ist also

$$R^1 12 = 12, \quad R^2 16 = 4, \quad R^3 64 = 4, \quad R^4 16 = 2, \quad R^5 243 = 3.$$

Die zweiten und dritten Wurzeln seien von den Alten Quadrat- und Kubikwurzeln genannt worden, für vierte Wurzel sagen Manche Quadratwurzel der Quadratwurzel. Soll eine Wurzel aus einer aus zwei Theilen, deren einer selbst eine Wurzel ist, bestehenden zusammengesetzten Zahl gezogen werden, so unterstreicht man die zusam-

---

[1]) *Triparty* pag. 654.

mengesetzte Zahl und nennt das Verlangte eine verbundene Wurzel, *racine lyee.* Beispielsweise ist

$$\text{℞}^2\,\underline{14\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,180} \text{ so viel wie } 3\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,5,$$
$$\text{℞}^2\,\underline{7\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,40} \text{ ist } \text{℞}^2\,2\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,5.$$

Sind die unter dem Wurzelzeichen zusammengesetzten Grössen durch $\tilde{p}$ verbunden, so ist es gleichgültig, welche Grösse rechts und welche links von dem $\tilde{p}$ geschrieben wird, ganz anders wenn $\tilde{m}$ das verbindende Zeichen ist. Wurzelgrössen können auf gleiche Wurzelbenennung gebracht werden[1]), z. B. ℞^2 und ℞^3 beide auf ℞^6. So ist $\text{℞}^2\,\underline{5\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,3}$ in $\text{℞}^6\,\underline{170\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,7500\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,2352}$ zu verwandeln und $\text{℞}^3\,\underline{4\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,6}$ in $\text{℞}^6\,\underline{22\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,384}$. Die erste der beiden hier angegebenen Verwandlungen ist nicht ohne Wichtigkeit. Es lässt sich ihr entnehmen, dass die Erhebung von $5\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,3$ zur dritten Potenz so erfolgte, das erst die zweite Potenz $28\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,300$ gebildet und diese dann wiederholt mit $5\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,3$ vervielfacht wurde. Wäre die Binominalformel für die Erhebung zur dritten Potenz benutzt worden, welche man, wie aus der Ausziehung der Kubikwurzeln hervorgeht, doch kannte, so hätte die umgewandelte Form $\text{℞}^6\,\underline{170\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,16875\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,27}$ heissen müssen. Die Ausziehung der Quadratwurzel wird in musterhaft klarer Weise gelehrt[2]). Keine Quadratzahl besitzt 2, 3, 7, 8 als Randziffer, das Vorkommen einer solchen beweist also, dass man es mit einer unvollkommenen Wurzel, *racine Imparfaicte*, zu thun habe, bei deren Aufsuchung die Benutzung der Mittelwerthregel empfohlen wird. Zweite Wurzeln aus Brüchen zu ziehen muss man die Wurzel des Zählers und die des Nenners für sich suchen. Geht dieses nicht, so hat man den betreffenden Bruch durch Erweiterung in eine solche Form zu bringen, dass entweder der Zähler oder der Nenner ein genaues Quadrat werde; welches von beiden erreicht wird, darauf ist keinerlei Gewicht gelegt. So verwandelt Chuquet die $\text{℞}^2\,\frac{5}{7}$ ebensowohl in $\text{℞}^2\,\frac{25}{35}$ als in $\text{℞}^2\,\frac{35}{49}$. Später dagegen[3]), wo das Rechnen mit zusammengesetzten Irrationalitäten gelehrt wird, ist das Rationalmachen des Nenners eines Bruches durch Erweiterung mittels einer von ihm nur im Vorzeichen abweichenden Zahl ausdrücklich vorgeschrieben: Il fault multiplier le partiteur par ung nombre qui soyt a lay egal en nombre et dissemblant en plus ou en moins. So wird $\frac{\text{℞}^2\,108\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,21}{6\,\tilde{p}\,\text{℞}^2\,7}$ mit $6\,\tilde{m}\,\text{℞}^2\,7$ erweitert und giebt $\frac{\text{℞}^2\,3888\,\sim\,\text{℞}^2\,147}{29}$ oder

---

[1]) *Triparty* pag. 658—659. [2]) Ebenda pag. 693—699. [3]) Ebenda pag. 731.

℞² $4\frac{524}{841}$ m̃ ℞² $\frac{147}{841}$ oder ℞² 3. Das letztgenannte Ergebniss zu finden, musste freilich vorher die Addition und Subtraction von Wurzelgrössen durchgenommen werden, wozu Rechnungsverfahren führen, welche auf der Grundlage der Formel $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm \sqrt{4ab}$, also auch $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{4ab}}$ beruhen, und welche voraussetzen, dass ab ein vollständiges Quadrat sei[1]). An die Ausziehung der zweiten Wurzeln aus Brüchen reihen sich Wurzelausziehungen höherer Ordnung an. Kubikzahlen können jede Ziffer als Randziffer besitzen, es giebt mithin kein äusseres Zeichen, dem man die Irrationalität einer dritten Wurzel sofort entnehmen könnte. Die Ausziehung der dritten Wurzel aus vollkommenen Kubikzahlen wird erörtert. Die Anweisung dazu ist auch ganz richtig, aber sehr gut weiss Chuquet offenbar mit der Ausführung nicht umzugehen. Was nun gar irrationale dritte Wurzeln betrifft, so könne man ähnlich verfahren wie bei den zweiten Wurzeln, d. h. Mittelwerthversuche anstellen, aber ce n'est que temps perdu et labeur sans vtilite ne aulcune necessite, es ist nur verlorene Zeit und Mühe ohne Nutzen und Nothwendigkeit[2]). Bei den vierten Wurzeln kann die Bemerkung von Nutzen sein, dass die Randziffer 0, 1, 5, 6 sein müsse. Beispielsweise sei ℞⁴ 30 4980 0625 zu suchen[3]). Wie bei der zweiten und dritten Wurzel zwei- und dreiziffrige Gruppen gebildet werden, so hat man bei der vierten Wurzel deren von je vier Ziffern abzutrennen. Die äusserste dritte Gruppe links heisst 30 und zeigt, dass die höchste Ziffer der Wurzel nur 2 sein kann. Die Randziffer 5 lässt auf die gleiche Randziffer der Wurzel schliessen. Wenn also eine genaue vierte Wurzel vorhanden ist, so muss sie zweihundertfünf und irgend ein Zehner heissen. Man dividiert nun in 30 4980 0625 mit 225, 245, 235. Letztere Division geht auf und giebt den Quotienten 12977875. Den theilt man wieder durch 235 und findet den Quotienten 55225, der sich endlich als 235 mal 235 erweise. So solle man es auch bei anderen Zahlen machen, wenn man es nicht vorziehe

℞² 30 4980 0625 = 55225 und ℞² 55225 = 235

zu rechnen. Dass Chuquet wirklich an die Ausführbarkeit solcher Rechnungsverfahren dachte, zeigt sein *liuret des racines*[4]), d. h. eine Tabelle der zehn ersten Potenzen der Zahlen 1 bis 10, zeigt ferner eine Zerlegung höherer Wurzelausziehungen in niedrigere[5]). ℞⁶ sagt Chuquet ist ℞³℞²; ℞⁸ ist ℞⁴℞²; ℞¹² ist ℞⁶℞² aber auch ℞⁴℞³ oder ℞³℞²℞² u. s. w.

---

1) *Triparty* pag. 712 flgg. 2) Ebenda pag. 703. 3) Ebenda pag. 704. 4) Ebenda pag. 705. 5) Ebenda pag. 707—708.

Wenn wir als Inhalt des dritten Theils die Lehre von den Gleichungen angekündigt haben, so scheint dieses mit der Ueberschrift[1]) *La tierce et derreniere partie de ce liure qui tracte de la rigle des premiers* nur schlecht in Einklang zu bringen. Wie passt *rigle des premiers* zu Gleichungen? Es beruht dieses auf einer Ausdrucksweise, deren Erfindung Chuquet sich wenigstens mittelbar durch die Worte zuschreibt[2]), die Alten hätten Sache, *chose*, genannt, was er Erstzahl, *premier* nenne. Das wäre also ein neuer Name für die unbekannte Grösse, welche als Länge aufgefasst auch Linearzahl *nombre linear* heissen kann. Aber mit diesem einen neuen Namen gehen andere, geht zugleich eine ganze Bezeichnung Hand in Hand, welche von höchster Wichtigkeit ist. Chuquet sagt nämlich von einfachen Zahlen, sie hätten gar keinen Namen, beziehungsweise den Namen Null, *sans aulcune denominacion ou dont sa denominacion est 0.* Er geht dann in der Benennung aufwärts. Zweitzahlen, *nombres seconds*, sind ihm die, welche früher *champs* genannt wurden. Drittzahlen *nombres tiers*, Viertzahlen *nombres quartz* sind die früher *cubics* und *champs de champs* genannten. Damit hört Chuquet's Vergleichung der alten und der neuen Benennungen auf, aber nicht die neuen Benennungen selbst, die unzählbar sind, veu quelles sont Innumerables. Auch vier alte Bezeichnungen führt Chuquet an

β ɽ □ +ɽ

für die vier ersten Potenzen der Unbekannten. Er ersetzt sie, und nicht sie allein, durch kleine rechts erhöht angeschriebene Zahlen. Ihm ist also 12^0 die Zahl 12, während 12^1, 12^2, 12^5 nach heutiger Bezeichnung $12x$, $12x^2$, $12x^5$ bedeuten. Er bleibt sogar dabei nicht stehen und scheut sich nicht 8^3 multiplie par $7^{1\,\overset{\frown}{m}}$ monte 56^2 zu schreiben[3]), um $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ damit auszudrücken. Es ist ein ungeheurer Fortschritt, dem wir gegenüberstehen, und wir wissen kaum, ob wir mehr die Kühnheit zu bewundern haben, welche negative Exponenten einzuführen wagte, oder die Folgerichtigkeit, welche einen Exponenten 0 schuf. Die Dresdner Handschrift hatte ja (S. 244) etwas dem Exponenten 0 wenigstens Aehnliches, und dadurch steigt unsere Bewunderung der bei Chuquet allein sich zeigenden negativen Exponenten.

Der Vergleich, welchen wir zwischen dem Triparty und der Dresdner Algebra leise angedeutet haben, ruft eine andere Frage mit Nothwendigkeit hervor: wie verhält sich Chuquet zu Oresme?

---

[1]) *Triparty* pag. 736. [2]) Ebenda pag. 737. [3]) Ebenda pag. 740. Eine vollständige Rechnungsanweisung für ähnliche auch additiv oder subtractiv mit einander verbundene Potenzen pag. 740—746.

Letzterer hat reichlich 100 Jahre vor Chuquet gelebt. Er hat eine Potenzrechnung mit gebrochenen Exponenten erfunden, welche allerdings nur in einer Handschrift sich erhalten hat, während ein anderes Werk des berühmten Verfassers 1482 und abermals 1486 gedruckt worden ist, also gerade zur Zeit, als Chuquet 1484 den Triparty verfasste, hochgeschätzt worden sein muss, um so rasch einen neuen Abdruck zu verstatten. Sollte damals Chuquet aus einer anderen Handschrift des Oresme'schen Proportionenwerkes (noch heute sind deren wenigstens fünfzig vorhanden) jene ältere Erfindung kennen gelernt und ausgebeutet haben?

Wir glauben dieser Frage ein ganz bestimmtes Nein entgegensetzen zu dürfen. Erstens war Oresme's Bezeichnung doch die einer ganz anderen Sache. Oresme rechnete mit Potenzen bestimmter Zahlengrössen, welche dann freilich bald ganzzahlige, bald gebrochene Exponenten besassen, aber nicht mit Potenzen der Unbekannten, die Chuquet wenigstens bei seiner symbolischen Bezeichnung durch rechts erhöhte Exponenten allein im Auge hat, wenn auch seine Vergleichung arithmetischer und geometrischer Progressionen, auf welche er im dritten Theile neuerdings zu reden kommt[1]), genügend zeigt, dass der Begriff der Potenzen gegebener Zahlen ihm nicht minder klar war. Zweitens aber können wir gerade die gebrochenen Exponenten zum Beweise nehmen, dass Chuquet von Oresme's Vorgängerschaft nichts wusste. Es ist geradezu undenkbar, dass Chuquet durch eine von ihm in Erfahrung gebrachte Anwendung gebrochener Exponenten auf seine ausgiebige Benutzung der Potenzbezeichnung geführt worden sein sollte, und die gebrochenen Exponenten selbst, so nothwendig zum Ausbau seines Systems sie waren, beseitigt hätte. Zu dieser Annahme wären wir aber gezwungen; denn Wurzelexponenten, d. h. solche, die rechts erhöht neben ℞ stehen, kommen im dritten Theile des Triparty wie in den vorhergehenden massenhaft vor, nirgend aber gebrochene Exponenten.

Ein Beispiel mit Wurzelgrössen ist folgendes. Aus

$$\sqrt{1\frac{19}{125}x^3} = 12$$

wird geschlossen $1\frac{19}{125}x^3 = 144$, $x^3 = 125$, $x = 5$. Bei Chuquet[2]) sieht das Beispiel so aus: ℞^{2} $1^3\frac{19}{125}$ est egale a 12. Or multiplie chascune partie en soy si auras $1^3\frac{19}{125}$ dune part et 144 de laultre. Partir maintenant le nombre par le tiers et trouveras ℞^{3} 125 qui est 5.

[1]) *Triparty* pag. 740—741. [2]) Ebenda pag. 765.

Wir unterlassen nicht auf die Schreibweise $1^3 \frac{19}{125}$ aufmerksam zu machen, bei welcher der gemischtzahlige Zahlencoefficient die unbekannte Hauptgrösse zwischen sich nimmt. Sie erinnert etwas an die Stellung des Proportionalitätsbuchstaben p in (S. 133) Oresme's

$$\boxed{1^p \frac{1}{2}}\,4$$

aber wir sind überzeugt, dass diese kleine Aehnlichkeit den erwähnten Verschiedenheiten gegenüber nicht als für eine Anlehnung ausschlaggebend betrachtet werden wird.

Nein, italienische Muster waren es, wie wir wiederholen dürfen, denen der Verfasser der Dresdner Algebra, denen Chuquet, denen Paciuolo folgte, und wenn bei Paciuolo und Chuquet die Wurzelbezeichnungen so genau zusammentreffen, dass ein gemeinsamer Ursprung dieser Zeichen nicht von der Hand zu weisen ist, so dürfen wir in den rechts erhöht oder nicht erhöht dem ℞ beigegebenen Wurzelexponenten den Keim zu erkennen haben, aus welchem Chuquet's positive und negative Exponenten entstanden sind.

Das eben zum Abdrucke gebrachte Beispiel einer Chuquet'schen Gleichungsauflösung liess schon eine merkwürdige Aehnlichkeit mit dem heutigen Verfahren hervortreten. Ein anderes Beispiel mag den Eindruck noch vertiefen. Es handelt sich bei diesem Beispiele[1]) um das Rationalmachen einer Gleichung. Chuquet behandelt hier die Gleichung, *equipolence des nombres*, wie folgt, indem wir nur wenige Zwischenworte weglassen:

$$\text{℞}^2\, \underline{4^2\, \tilde{\text{p}}\, 4^1}\, \tilde{\text{p}}\, 2^1\, \tilde{\text{p}}\, 1 \text{ egaulx a } 100$$
$$\text{℞}^2\, \underline{4^2\, \tilde{\text{p}}\, 4^1} \text{ dune part et } 99\, \tilde{\text{m}}\, 2^1 \text{ daultre}$$
$$4^2\, \tilde{\text{p}}\, 4^1 \text{ egaulx a } 9801\, \tilde{\text{m}}\, 396^1\, \tilde{\text{p}}\, 4^2$$
$$400^1 \text{ dune part et } 9801 \text{ daultre.}$$

Weiter ist die Ausrechnung nicht geführt, und auch heute würde man sich leicht damit zufrieden geben, am Schlusse die einer Auflösung nahezu gleichkommende Gleichung $400x = 9801$ auftreten zu sehen, wenn $\sqrt{4x^2 + 4x} + 2x + 1 = 100$ den Ausgangspunkt bildete.

Andere Gleichungen werden auf andere Schlussgestalten zurückgeführt, deren es im ganzen vier giebt, die sogenannten *canons*, ein Wort, bei welchem man sofort der Canonen im Bamberger Rechenbuche, der als Canones betitelten metrischen Gleichungsauflösungen

[1]) *Triparty* pag. 746.

bei Paciuolo sich erinnern wird. Die vier Formen Chuquet's sind[1]) nach heutiger Schreibart:

$$1.\ ax^{\alpha} = bx^{\alpha+\delta} \qquad 2.\ ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} = cx^{\alpha+2\delta}$$

$$3.\ ax^{\alpha} = bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} \qquad 4.\ ax^{\alpha} + cx^{\alpha+2\delta} = bx^{\alpha+\delta}.$$

Das sind vier von den sieben Algorismen der Dresdner Algebra (S. 245); aber welcher Fortschritt der Klarheit von dort zu Chuquet, welcher Fortschritt auch gegenüber den proportionalen Gleichungen Paciuolo's, welche dieser (S. 322) erst am Ende seiner Lehre von den Gleichungen zur Sprache brachte, während Chuquet von dem allgemeinen Falle ausgeht, ihn allein behandelt, $\delta = 1$ nur als nebensächlichen Sonderfall betrachtet, der besondere Beachtung nicht bedarf.

Zahlreiche Beispiele dienen freilich mit Recht auch bei Chuquet zur Einübung sämmtlicher vier Fälle, und sie werden uns zu einigen Bemerkungen Anlass geben. Gleich beim ersten Canon meint Chuquet[2]), die Denominationen der beiden Glieder müssten verschieden sein, denn $4x^2 = 4x^2$ (4^2 egal 4^2) gestatte gar keine Folgerung (ceste raison ne conclut riens) und $9x^2 = 5x^2$ (9^2 egal 5^2) sei unmöglich (la raison est impossible). Für Chuquet wie für Paciuolo (S. 322) gab es also keine Auflösung $x = 0$, und ebensowenig wird dieses bei ihren Vorgängern, wie sie geheissen haben mögen, der Fall gewesen sein.

Dass beim vierten Canon zwei Wurzelwerthe erscheinen, je nachdem die vorkommende Quadratwurzel addirt oder subtrahirt wird, sagt der Verfasser gleich bei der ersten Schilderung der vier Canonen[3]). Er kommt bei Gelegenheit einzelner Beispiele darauf zurück, und hier weist er darauf hin, dass bald zwei Auflösungen, bald gar keine möglich sei. Letzteres wenn, nachdem die ganze Gleichung durch den Coefficienten des höchsten Gliedes getheilt wurde, das Quadrat des halben Coefficienten des mittelhohen Gliedes kleiner sei als der Coefficient des niedersten Gliedes. Aus $12 + 3x^2 = 9x$ folge

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4},$$

woraus die Unmöglichkeit sich zeige, weil $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < 4$: *Il sensuit que ceste raison est impossible.*

---

[1]) *Triparty* pag. 748—749. Die gleich weit von einander abstehenden Potenzen besitzen *differances de nombre egalement distans lune de laultre.* Ist der Abstand 1, so hat man *denominacions prochaines*, ist er grösser, so sind letztere *non prochaines.* [2]) Ebenda pag. 750. [3]) Ebenda pag. 749 und dann später pag. 805.

Die vier Canonen erschöpfen, wie Chuquet sich deutlich bewusst ist, keineswegs alle erdenkbaren Fälle. Er schliesst darum sein Werk mit folgender Aeusserung[1]): „Zur Vollendung und Erfüllung dieses Buches bedarf es noch der Auffindung allgemeiner Regeln und Canonen für drei Glieder von ungleicher gegenseitiger Entfernung, auch für vier oder mehr Glieder, mögen sie gleicher oder ungleicher gegenseitiger Entfernung sein. Diese Fälle lassen wir für Solche, welche tiefer eindringen wollen." Klarer konnte die Aufgabe der Zukunft gewiss nicht ausgesprochen werden!

Die Handschrift, aus welcher der Triparty herausgegeben ist, lässt demselben eine sehr grosse Anzahl der verschiedenartigsten Aufgaben nachfolgen, welche auf Rechenkunst, auf Algebra, auf Geometrie, auf Handelsgeschäfte aller Art sich beziehen. Leider ist dieser Anhang nicht vollständig veröffentlicht, sondern nebst kurzer Einleitung nur der Wortlaut von 166 Aufgaben sammt ihren Auflösungen[2]), aber ohne die Auflösungswege, welche nur im Allgemeinen als algebraische bezeichnet werden. Eine dieser Aufgaben, und zwar eine, welche in der Handschrift ziemlich weit hinten steht, ist eine chronologische und bietet den Vortheil, welchen solcherlei Aufgaben nicht selten zeigen, auf die Zeit der Niederschrift sich zu beziehen. Sie sagt[3]): *maintenant que lon compte 1484 et le 2e Jour de may*, ist also in der gleichen Zeit entstanden, in welcher der Triparty geschrieben ist, und dieser Umstand verbunden mit dem anderen, dass die Aufgaben einen Anhang zum Triparty bilden, haben Veranlassung gegeben, die ganze Sammlung Chuquet zuzuschreiben. Manche Aufgaben der Sammlung hat man auch in einer anderen etwa gleichaltrigen wiedererkannt. Diese letztere[4]), niedergeschrieben im XV. Jahrhunderte in Pamiers (Département de l'Arriège) in dem romanischen Dialecte der Landschaft Foix, zu welcher jene Stadt gehört, bedient sich aber bei ihren Auflösungen nicht der Gleichungen. Chuquet, wenn er wirklich der Urheber der 166 gedruckten Aufgaben, oder mindestens ihrer algebraischen Auflösungen war, ist mit rein negativen Auflösungen wohl vertraut. Die Aufgabe XIV führt zu der Gleichung

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+20-x\right)\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=10,$$

---

[1]) *Triparty* pag. 814: *Reste encore pour la perfection et accomplissement de ce liure trouver rigles et canons generaulx pour troys differances de nombre inegalement distans. Et encore pour quatre ou plusieurs differances soient egalement ou inegalement distans lune de laultre. Lesquelles sont delaissees pour ceulx qui plus auant vouldront profunder.* [2]) *Bulletino Boncompagni* XIV, pag. 413—460 [3]) Ebenda pag. 415. [4]) Ebenda pag. 416.

woraus $x = -7\frac{3}{11}$, $20 - x = 27\frac{3}{11}$ als die beiden Theile gefunden werden, in welche die Zahl 20 zerlegt werden soll, und welche gewissen in jener Gleichung sich kundgebenden Bedingungen genügen sollen. Der Verfasser fügt der Auflösung die Worte bei: *Ainsi ce calcule est vray que aulcuns tiennent Impossible* [1]), somit ist die Rechnung richtig, welche Manche für unmöglich halten. Auch über den Sinn rein negativer Auflösungen spricht er bei Aufgabe XLIII sich aus [2]). Diese frägt nach dem Einkaufspreise und der Anzahl von Aepfeln eines Wiederverkäufers unter folgenden Bedingungen. Verkauft er 3 um ein Geldstück, so gewinnt er 15 solcher Geldstücke, und verkauft er 4 um ein Geldstück, so gewinnt er davon 14. Es waren 12 Aepfel und deren Einkaufspreis war -11, welches 0 m̃ 11 geschrieben ist. Das wird nun folgendermassen erläutert: Der erste Besitzer gab die Aepfel dem Wiederverkäufer und erliess ihm überdies eine Schuld von 11 Geldstücken, damit dieser ihm die Aepfel nur abnehme. Weniger glücklich ist die Erläuterung der Aufgabe XXXV, welche gleichfalls zu einer negativen Auflösung führt [3]).

Die Aufgabe CXIV führt zu einer imaginären Auflösung. Sie verlangt [4]) zwei Zahlen zu finden, deren Summe $\sqrt[3]{72}$ und deren Product $\sqrt{60}$ sei und findet dieselben als Summe, beziehungsweise Differenz von ℞³ 9 und ℞⁶ $\underline{\text{81 m̃ ℞² 60}}$; dann rechnet der Verfasser zur Probe die Multiplication der beiden Zahlen aus, und bei dieser Rechnung zeigt sich, dass er als zweiten Theil der Auflösung eigentlich ℞² ℞³ $\underline{\text{81 m̃ ℞² 60}}$ verstanden hatte und die zwei aufeinander folgenden Wurzelzeichen ℞²℞³ irriger Weise zu ℞⁶ vereinigte. Die ganze Aufgabe scheint ihm darnach nicht vollständig klar gewesen zu sein, und wenn wir sagten, eine imaginäre Auflösung erscheine, so ist dieses vielleicht dahin einzuschränken, dass der Verfasser selbst sich dessen bei seiner Rechnung nicht bewusst war, dass $\sqrt{\sqrt[3]{81} - \sqrt{60}}$ die Quadratwurzelausziehung aus einer negativen Zahl verlangte. Dieses Bewusstsein spricht sich dagegen mit voller Klarheit in einer Randnote von anderer Handschrift aus, und wenn wir auch über ihre Entstehungszeit durchaus im Dunkel sind, glauben wir doch den Inhalt mittheilen zu sollen. Das Product zweier Theile von gegebener Summe, sagt der Schreiber der Randnote, sei am grössten, wenn die Theile einander gleich gewählt werden. Hier sei dieses grösste Product $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{72}\right)^2 = \sqrt[3]{81}$. Nun werde aber das noch grössere $\sqrt{60}$ als Product verlangt, und das sei unmöglich.

---

[1]) *Bulletino Boncompagni* XIV, pag. 419. [2]) Ebenda pag. 427. [3]) Ebenda pag. 424. [4]) Ebenda pag. 444—445.

Neben den bestimmten Aufgaben kommen auch unbestimmte vor, z. B. die Aufgabe LXXVIII, zu welcher der Verfasser eine Zusatzbemerkung gemacht hat, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Wurzeln solcher Gleichungen deutlich ausspricht[1]: *Et par ainsi appert que telles raisons ont response necessaire de deux en deux mais de ung a ung Ilz ont telle response que lon veult,* d. h. einzeln genommen erhalten die Unbekannten beliebige Werthe, paarweise auf einander bezogen sind sie dagegen bestimmt. Es handelt sich um das Gleichungssystem:

$$x_1 + x_2 + 100 = 3(x_3 + x_4 - 100)$$
$$x_2 + x_3 + 106 = 4(x_4 + x_1 - 106)$$
$$x_3 + x_4 + 145 = 5(x_1 + x_2 - 145)$$
$$x_4 + x_1 + 170 = 6(x_2 + x_3 - 170)$$

dessen allgemeine Auflösung

$$x_2 = 215 - x_1, \quad x_3 = 15 + x_1, \quad x_4 = 190 - x_1$$

zwar nicht angegeben ist, wohl aber die besonderen Werthe 100, 115, 115, 90 und 80, 135, 95, 110, welche bei $x_1 = 100$ und $x_1 = 80$ entstehen.

Die Aufgaben CXLIX bis CLII sind unbestimmt vom zweiten und dritten Grade[2]. Eine Quadratzahl zu finden, welche um 7 vermehrt wieder eine Quadratzahl gebe. Ein Quadrat zu finden, welches um 4 vermehrt wieder eine Quadratzahl gebe. Drei Quadratzahlen mit der Summe 13 zu finden. Drei Kubikzahlen mit der Summe 20 zu finden. Die entsprechenden Auflösungen sind:

$$3^2 + 7 = 4^2; \quad \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \left(2\frac{1}{2}\right)^2; \quad \left(3\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 13;$$
$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + (1)^3 = 20.$$

An zwei Stellen[3], Aufgabe LXIX und CV, ist von einem Buche eines Mönches Barthelemy de Rommans vom Predigerorden die Rede, welches im Uebrigen nicht bekannt ist, die Vergessenheit aber, in welche es gerieth, verdient zu haben scheint. Geschichtlich bemerkenswerth sind endlich einige Textaufgaben, welche theils schon früher bei diesem oder jenem Schriftsteller bekannt geworden sind, theils mindestens von nun an in zahllosen Wiederholungen wiederkehren. Wir nennen Aufgabe XXIII von den nach dem Tode des Vaters geborenen Zwillingen, welche römisch ist (Bd. I, S. 523), CLXIII und CLXIV von dem Wolfe, der Ziege und dem Kohlkopfe,

---

[1]) *Bulletino Boncompagni* XIV, 434. [2]) Ebenda pag. 455. [3]) Ebenda pag. 432 und 442.

welche über einen Fluss zu setzen sind, und von den ebenso Vorsicht in der Auswahl der allein Bleibenden beanspruchenden drei Ehepaaren, die beide möglicherweise auf Alcuin zurückgehen[1]), CLX von dem Ringe an einem gewissen Gelenke eines gewissen Fingers einer gewissen Person, welche Leonardo von Pisa errathen lehrte (S. 8). Wir nennen Aufgabe CLVII, welche die Grundlage eines heute noch üblichen, artigen Kunststückes ist, endlich CXLVI von den in einen Kreis zu ordnenden 15 Christen und 15 Juden, von welchen immer der 9. Mann ertränkt werden soll, bis nur 15 übrig bleiben, und wobei die Anordnung so zu treffen ist, dass nur Juden, diese aber alle, dem Tode verfallen. Auch diese Aufgabe hat im Laufe der Zeiten nur geringe Aenderungen erfahren, wesentlich darin bestehend, dass es bald Juden, bald Türken weren, die man in's Wasser werfen liess. Von ihrer Geschichte wird im 75. Kapitel die Rede sein.

Wir haben (S. 347) eine Vergleichung zwischen Paciuolo und Chuquet zum Schlusse unseres Berichtes über den Triparty des Letzteren in Aussicht gestellt. Zu wessen Gunsten sie ausfallen muss ist nicht zweifelhaft. In Paciuolo haben wir einen fleissigen, tüchtigen, theoretisch wie praktisch gebildeten Schriftsteller kennen gelernt, nicht jeder Bedeutung ledig, aber immerhin nicht als grosser Mathematiker zu bezeichnen (S. 337). Seine Eigenthümlichkeiten hatten wir vorzugsweise auf geometrischem Gebiete zu suchen, wo er die Lehren der Algebra vortrefflich anzuwenden wusste. Ob auch Chuquet und wie weit er in der Geometrie Bescheid wusste, ist uns unbekannt. In seinem Triparty findet sich nichts aus diesem Gebiete, und die geometrisch-algebraischen Aufgaben der Sammlung, welche dem Triparty als Anhang dient, und von welcher wir annahmen, sie könne vielleicht durch Chuquet zusammengestellt worden sein, sind nicht veröffentlicht. Aber in Arithmetik und Algebra war Chuquet ein ideenreicher Kopf. Er begnügte sich keineswegs damit, das von Anderen Gewonnene zu beherrschen, er ging weit über diese Vorgänger hinaus. Wir haben in unserem Berichte eine ganze Reihe von Gedanken besonders hervorgehoben, die mit grösserer oder geringerer Wahrscheinlichkeit Chuquet angehören; die Mittelwerthmethode, die gleichzeitige Betrachtung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe, die Andiespitzestellung ganz allgemeiner Formen in der Lehre von den Gleichungen, die Anwendung ganzzahlig positiver und negativer Exponenten und des Exponenten Null, ferner im Anhange, wenn dieser wirklich von Chuquet herrührt, die klare Einsicht in das Wesen einer unbestimmten Gleichung, die Rechnung

---

[1]) Cantor, Die römischen Agrimensoren S. 149.

mit einem imaginären Ausdrucke, das sind doch Dinge, die ihrem Urheber einen Platz unter den Männern von wahrhafter Erfindungsgabe anweisen. Wir sind weit entfernt davon, hier bestreiten zu wollen, was wir selbst früher behaupteten, dass Chuquet Vorgänger, italienische Vorgänger besessen haben muss, an die er vielfach sich anlehnte. Aber besass Paciuolo diese Vorgänger weniger? Und wenn Chuquet entlehnte, woran Paciuolo trotz umfassenden Wissens nichtachtend vorüberging, giebt das Chuquet nicht erst recht das Zeugniss, dass er zu würdigen verstand, was Paciuolo nebensächlich erschien? Gewiss, wir dürfen, wir müssen Chuquet als Mathematiker um eine beträchtliche Stufe höher als Paciuolo stellen.

Das ist nun wiederum nicht so gemeint, als bedauerten wir hier die Lobsprüche, welche wir früher auf Paciuolo's Summa häuften, als suchten wir sie zurückzunehmen. Keineswegs. Paciuolo und Chuquet, beide Männer, wie das beiden gespendete Lob bestehen geschichtlich gleichberechtigt nebeneinander. Man darf nicht vergessen, was die Berühmtheit der Summa hervorbrachte, was sie möglich machte. Sie war, wie wir mit den schon einmal ausgesprochenen Worten wiederholen, das Werk, welches das Bedürfniss der Zeit forderte, zugleich das Werk, welches dieses Bedürfniss durchaus befriedigte, und sie erschien im Drucke! Der Triparty blieb Handschrift, und er wäre, dürfen wir behaupten, auch als gedrucktes Buch nicht zu der sofortigen Verbreitung und zu dem Einflusse gelangt, deren die Summa sich erfreute. Der Eine kaufte und las die Summa als Lehrbuch der Rechenkunst und der Algebra, der Zweite wegen der Darstellung der Buchhaltung, der Dritte wegen der Belehrung über Wechsel, welche er aus ihr schöpfen durfte, der Vierte wegen der als Tariffa bezeichneten Tabellen, der Fünfte wegen der hundert Aufgaben am Schlusse des Werkes; aber den Triparty hätte nur jener Erste etwa sich angeeignet, hätte ihn gelesen, vielleicht verstanden, vielleicht aber auch nicht verstanden. So vollendet klar Chuquet's Darstellungsweise uns heute vorkommt, den Zeitgenossen wären grade die Dinge, um derentwillen wir ihn am höchsten stellen, so überraschend neu gewesen dass die sachliche Schwierigkeit von der sprachlichen Durchsichtigkeit keinen weiteren Nutzen gezogen hätte, als dass man statt am Ausdrucke vielmehr am Inhalte verständnisslos vorbeigegangen wäre. Wir dürfen diese Behauptung aufstellen, denn wir sind in der Lage sie zu beweisen. Ein Schriftsteller aus der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts, mit dem wir es im nächsten Kapitel zu thun haben werden, hat ganze Seiten aus dem Triparty einfach abgeschrieben. Was uns von hoher Bedeutung schien, das hat er vernachlässigt. Der Schriftsteller, wer er auch sei, und wann auch seine Lebenszeit falle, schreibt

zunächst in der wissenschaftlichen Sprache seines Landes und für das Verständniss seiner Heimathsgenossen. Fehlt ihm dieses, so wird er schwerlich baldige Anerkennung finden. Das Frankreich Chuquet's war für ihn nicht reif; ein Ausspruch Lefèvre's kann und mag als Beleg dienen.

Jacques Lefèvre[1]) gehörte zu den berühmtesten Franzosen der zweiten Hälfte des XV. und des ersten Drittels des XVI. Jahrhunderts. Geboren in Étaples um 1455 führte er von dieser seiner Vaterstadt den latinisirten Namen Faber Stapulensis. Seine Studien machte er in Paris und erwarb sich dort die Würde eines Magisters der freien Künste. Als solcher ging er vor 1486 zu mehrjährigem Aufenthalte, jedenfalls bis 1492, nach Italien und wandte sich dort den mathematischen Wissenschaften zu. Nach Frankreich zurückgekehrt setzte er in der Heimath ein ziemlich unstetiges Reiseleben fort. Theologische Streitigkeiten, ein Wahrzeichen der Zeit, in welcher Lefèvre lebte, entfesselten den Zorn der Kirchenbehörde gegen ihn, ohne der Gunst des Hofes Eintrag zu thun. Lefèvre war sogar unter Franz I. eine Zeit lang Prinzenerzieher. Er starb 1537 in einem Alter von mehr als 80 Jahren in Nérac. Lefèvre erzählt nun[2]), ein Grieche, mit welchem er über die pariser Universität gesprochen, habe diese sehr gelobt; nur Eines fehle ihr: Mathematik. Wenn eine Stütze jener Anstalt, wie Lefèvre es damals war, ein solches Urtheil — von unserem Standpunkte aus dürfen wir es eine Verurtheilung nennen — ohne Widerrede veröffentlicht, wenn er vielmehr noch bestätigend hinzusetzt, dadurch sei er erst veranlasst worden, den mathematischen Wissenschaften den ihnen gebührenden Fleiss zuzuwenden, dann muss es doch um die pariser Mathematik schlecht bestellt gewesen sein, und Paris war Frankreich.

Was that nun Lefèvre, um dem von ihm erkannten Uebelstande nach Kräften abzuhelfen? Er veranstaltete Druckausgaben von vier Werken verstorbener Mathematiker. Drei dieser Drucke gehören dem XVI. Jahrhunderte an, sollen aber des Zusammenhanges wegen hier vorweggenommen werden. Zuerst gab er 1496 die Arithmetik des Jordanus Nemorarius, welche 1514 wiederholt gedruckt wurde. Das war entschieden ein glücklicher Griff, aber bezeichnend bleibt es immerhin, dass grade die Arithmetik des Jordanus gewählt wurde, dasjenige Werk, in welchem er am wenigsten selbständig auftrat, und welches dementsprechend weitaus nicht die Wirkung übte, welche von einem Abdrucke der Bücher De numeris datis etwa erzielt werden

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XXX, 333—339, Artikel von Ernest Grégoire. [2]) Kästner I, 283.

konnte. Dann kam zweitens 1507 die Sphaera des Johannes von Sacrobosco. Neue Auflagen von 1511, von 1526, von 1531 bezeugen, wie vielfachen Wünschen damit entsprochen war. War die Sphaera doch immer noch das vorzugsweise benutzte Lehrbuch der Astronomen, und gerade in Paris bildete es noch unverändert den Inhalt von Universitätsvorlesungen, schliesslich auch kein glänzendes Zeugniss für die Lehrer, für welche ein Peurbach nicht gelebt zu haben scheint. Dann kam 1514 ein Abdruck der Werke des Nicolaus von Cusa, aber wir fürchten kaum Widerspruch gegen unsere Ansicht, es seien die politisch-religiösen Streitschriften des Cardinals gewesen, welche dem Herausgeber am wichtigsten waren, und die mathematischen Schriften seien nur so nebenbei mit zum Drucke gelangt. Das vierte Druckwerk endlich ist eine Euklidausgabe[1]) von 1516. Wir erinnern uns (S. 339), dass Zamberti 1505 ein zehnjähriges Privilegium für seinen aus dem Griechischen übersetzten Text erworben hatte. Diese Frist war eben abgelaufen, als Lefèvre einen neuen Abdruck in der berümten Druckerei des Stephanus in Paris unternahm. Er hatte in Michael Pontanus einen engbefreundeten Mitarbeiter, der im weiteren Verlaufe des Druckes, als Lefèvre nach Narbonne sich begab, die ganze Leitung allein übernahm, so dass es scheinen möchte, als sei Lefèvre nicht anders an der Ausgabe betheiligt gewesen, als durch die ihm gewordene Aufforderung eine solche zu veranstalten, durch die Unterhandlung mit dem Drucker und durch ein dem Werke vorgesetztes Widmungsschreiben aus seiner Feder. Aber gleichviel, wer der eigentliche Herausgeber war, eine neue Euklidausgabe konnte für die Hebung des mathematischen Interesses in Frankreich Erspriessliches leisten, konnte überhaupt, wenn sie, was nicht sehr schwer zu erreichen war, über die schon vorhandenen Druckausgaben sich erhob, von nicht unbedeutendem Nutzen sein. Sehen wir uns darum die pariser Ausgabe von 1516 etwas näher an.

Der Abdruck enthält nicht sämmtliche Euklidische Werke, sondern nur die sogenannten 15 Bücher der Elemente, und diese in den beiden vorhandenen Uebersetzungen, in der des Campanus und der des Zamberti. Euklid selbst heisst auf dem Titelblatte nach wie vor Megarensis. Campanus wird ebenda als Gallus transalpinus bezeichnet, d. h. als Italiener, da der Ausdruck in Paris gebraucht wurde; in Italien würde dieselbe Benennung einem Franzosen gegolten haben, ähnlich wie der fast gleichbedeutende Ausdruck Ultramontanus nördlich der Alpen von einem Italiener, südlich derselben von einem

[1]) Weissenborn, Die Uebersetzungen des Euklid S. 56—63.

Nichtitaliener gebraucht wurde. Zamberti heisst Venetianer, und Theon ist als Alexandriner genannt. Eine Erwähnung des arabischen Vermittelungstextes, dessen Campanus sich bediente, fehlt durchaus, man scheint daher von diesem so wesentlichen Umstande noch immer keine Kenntniss besessen zu haben. Die Druckfolge ist die, dass zuerst immer die Lehrsätze in der Lesart des Campanus stehen, überschrieben *Euclides ex Campano*. Dann kommen dessen Beweise mit der wechselnden Ueberschrift *Campanus* oder *Campani additio* oder *Campani annotatio*. Unmittelbar darauf folgt *Euclides ex Zamberto* d. h. die Lehrsätze in der Lesart Zamberti's, und dessen Beweise unter dem Namen *Theon ex Zamberto* erscheinen bei jedem einzelnen Satze an vierter Stelle. Die Zusätze des Campanus, soweit sie aufgenommen sind — die Dreitheilung des Winkels fehlt — sind unter den schon erwähnten Ueberschriften Campani additio oder annotatio mitenthalten. Zamberti's feindselige Aeusserungen gegen Campanus sind durchweg entfernt. Man sollte sagen, der Leser müsse gewünscht haben, über das Verhältniss, in welchem die vier Persönlichkeiten Euklid, Campanus, Theon, Zamberti zu einander standen, etwas zu erfahren, der Herausgeber müsse diesen Wunsch vorahnend zu befriedigen gesucht haben, aber das ist nicht der Fall. Weder auf dem weitschweifigen Titelblatte noch in dem Lefèvre'schen Widmungsbriefe ist Aufschluss gegeben. Die Druckfolge allein konnte allenfalls zu Muthmassungen führen, welche kaum anders ausfallen konnten, als dass der Transalpine Campanus und der Alexandriner Theon jeder für sich Beweise zu den euklidischen Sätzen erfunden haben. Waren beide Schriftsteller gleichzeitig, war der zuerst genannte Campanus der ältere? Darüber schweigen die Herausgeber, und gleiches Schweigen ist die Antwort auf die nicht minder sich aufdrängende Frage, wieso Campanus und Theon zu im wesentlichen übereinstimmenden Beweisen gelangt waren. Wenn aber der Leser in diesen wichtigen Punkten auch nicht die Andeutung einer Auskunft erhielt, so wird man in der pariser Euklidausgabe von 1516 einen Fortschritt nicht zu erkennen vermögen.

Wir sind wieder an dem Schlusse eines Abschnittes, eines Jahrhunderts angelangt. Die Ausdehnung unserer Darstellung hat wesentlich zugenommen, und eine weitere Zunahme wird in den folgenden Abschnitten bemerklich werden. Liegt das daran, dass mit der Erfindung der Buchdruckerkunst mehr Schriften Verbreitung fanden, über welche dann auch leichter zu berichten ist? Zum Theil verhält es sich so, aber das ist doch nicht Alles. Die Mathematik beginnt in der That einen neuen Aufschwung zu nehmen. Es sind nicht mehr ganz vereinzelte Geister, welche mathematische Gedanken neuer

Art hegen und äussern; in Italien vorzugsweise, daneben in Deutschland, beginnt die Mathematik Volkseigenthum zu werden, und je breiter die Grundlage, um so höher kann von ihr aus das Gebäude errichtet werden. Wir haben in diesem Abschnitte Persönlichkeiten auftreten sehen, deren Leistungen wir zum Theil in ausführlicheren Uebersichten zusammengefasst haben. Wir brauchen hier nur die Namen Widmann und Regiomontanus, Lionardo da Vinci und Paciuolo, endlich den des alleinstehenden Chuquet zu wiederholen, um die Baumeister vereinigt zu haben, welche in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts den mathematischen Bau am meisten förderten. Rechenkunst, Algebra, Anwendung der Algebra auf Geometrie und damit einigermassen verwandt auch Trigonometrie waren die hauptsächlichen Gebiete ihrer Thätigkeit, während eine reingeometrische Untersuchungsweise etwas in den Hintergrund zurückgedrängt erscheint.



XIII. Die Zeit von 1500—1550.



59. Kapitel.

Französische, spanische und portugiesische Mathematiker.

Als wir im vorigen Kapitel mit Chuquet uns beschäftigten, beriefen wir uns für die Behauptung, sein Triparty sei ein für die damaligen Franzosen zu gedankenreiches Werk gewesen, auf einen Schriftsteller dieses Landes, der nur kurze Zeit später lebend der Handschrift des Triparty sich bediente. Wir meinten Estienne de la Roche genannt Villefranche aus Lyon. Von seinem Leben ist ausser dem Geburtsorte, den wir dem Titelblatte seines Buches *Larismethique nouellement composee par maistre Estienne de la roche dict Villefranche natif de Lyon sus le Rosne* entnehmen, nicht das Geringste bekannt. Diese Arithmetik ist 1520 zuerst, dann 1538 in einem zweiten Abdrucke erschienen. Nimmt man an, der Verfasser habe das Buch mit 40 Jahren veröffentlicht, so gelangt man zu einem Geburtsjahre um 1480, welches angegeben worden ist[1]), aber jene Annahme selbst schwebt durchaus in der Luft und kann sich ganz gewiss nicht auf eine in dem Buche zu erkennende besondere geistige Reife des Verfassers stützen. De la Roche gesteht von vornherein zu, dass er nur die Blüthen mehrerer geübten Meister vereinigt und aufgehäuft habe, wozu er irgend kleine Zuthaten beifügte, welche er als Praktiker ersonnen habe[2]). Als die von ihm vorzugsweise benutzten Meister nennt er Nicolas Chuquet von Paris und Bruder Lucas von Burgo Sancti Sepulcri, d. h. also Paciuolo. Zwischen beiden uns wohlbekannten Namen erscheint auch als dritte Quelle ein Philipp Friscobaldi von Florenz. Vielleicht gelingt es italienischen Fachgenossen über diese Persönlichkeit und über ihre Leistungen

---

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* II, 228. [2]) *Aut playsir et louange de dieu le createur et de la tres glorieuse vierge marie sa tressacree mere et de mon seigneur saint estienne mon tresreverend patron et de toute la court celestielle de paradis ay collige et amasse la fleur de plusieurs maistres expertz en cest art: comme de maistre nicolas chuquet parisien, de philippe friscobaldi florentiis: et de frere luques de burgo sancti sepulcri de lordre des freres mineurs avecques quelque petite addicion de ce que iay peu invente et experimente en mon temps en la pratique.*

Klarheit zu schaffen. Da, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, wichtige italienische Quellenschriften uns noch fehlen, so ist jede Spur zu verfolgen, welche möglicherweise dahin führen könnte, den Algebraiker zu erkennen, welchen Chuquet, welchen der Verfasser der Dresdner Algebra benutzte.

De la Roche's Arithmetik besteht aus drei Abtheilungen. Die erste von 140 Druckseiten ist vielfach wörtlich dem Triparty entnommen und stellt für sich ein Lehrbuch der Rechenkunst und der Algebra vor. Die zweite Abtheilung von 298 Druckseiten beschäftigt sich mit dem kaufmännischen Rechnen, wie es bei Paciuolo in aller Ausführlichkeit gelehrt ist. Die letzten 20 Druckseiten können, wiewohl nicht äusserlich von der zweiten Abtheilung getrennt, als dritte Abtheilung betrachtet werden; sie wenden die Rechenkunst auf Geometrie an. Wir haben den Triparty als wesentliche Quelle der ersten Abtheilung genannt. Wir würden ein ganz verkehrtes Bild derselben erwecken, wenn wir nicht auf die Lücken hinwiesen, die eine genauere Vergleichung bemerken lässt. De la Roche hat aus dem Triparty nicht übernommen die den Begriff des logarithmischen Rechnens enthaltende Vergleichung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe, nicht den Exponenten Null, nicht die negativen Exponenten, nicht den Ausblick auf Gleichungen mit mehr als drei Gliedern oder mit ungleich von einander entfernten Gliedern als Aufgabe der Zukunft. Das sind aber gerade die bahnbrechenden Gedanken Chuquet's, welche weggelassen sind, offenbar nur aus dem Grunde, welchen wir oben andeuteten, weil eben De la Roche sie in ihrer Bedeutung zu würdigen nicht fähig, wenigstens nicht reif war. Am deutlichsten zeigt sich diese Unreifheit bei dem Exponenten Null. Wenn Chuquet gesagt hat, man könne (S. 355) einfache Zahlen als solche betrachten, die gar keinen Namen, beziehungsweise den Namen Null führen, so schrieb De la Roche, als er an die betreffende Stelle kam, nicht etwa einfach ab, sondern er liess die bessere Hälfte des Satzes weg und sprach nur von Zahlen, welche keinen Namen führen[1]. Er hat eben nicht verstanden, dass das unscheinbare Zeichen 0 rechts erhöht geschrieben eine Erfindung darstellte, die erst nach weiteren 100 Jahren zur Geltung kommen sollte. Mit aller Breite verweilt De la Roche dagegen bei den kaufmännischen Rechnungsaufgaben, die ihm des reichlich doppelten Raumes würdig erscheinen, den er der ersten Abtheilung widmete. Hier sind auch jene Regeln mitgetheilt, welche insbesondere bei Vervielfachungen benannter Zahlen in Anwendung

---

[1]) De la Roche, *Larismethique* etc. fol. 42 recto letzte Zeile: *les nombres qui nont nulle denomination sont occupans le premieur lieu en lordre des differences.*

traten, und welche auf der Auffassung des Multiplicators als einer Summe beruhen, deren einzelne Summanden die Vielfachen leicht finden lassen. Tolletrechnung war der Name, unter welchem wir (S. 224—225) Aehnliches in Deutschland kennen gelernt haben. Jetzt heisst das Verfahren[1]) Regeln der Praktik, und diesem Namen wie der Sache selbst werden wir künftig in allen Ländern begegnen. Ein Beispiel möge den Sinn unserer Worte erläutern[2]). Man will in Livres ausgedrückt das 960fache von 6 Sous 9 Deniers wissen, während 1 Livre = 20 Sous, 1 Sou = 12 Deniers ist. Man zerfällt 6 Sous 9 Deniers in 5 Sous, 1 Sou 3 Deniers, 6 Deniers oder in $\frac{1}{4}$ Livre + $\frac{1}{16}$ Livre + $\frac{1}{40}$ Livre und rechnet:

$$\frac{1}{4} \text{ von } 960 \text{ ist } 240,$$
$$\frac{1}{16} \text{ von } 960 \text{ ist } 60,$$
$$\frac{1}{40} \text{ von } 960 \text{ ist } 24,$$
$$\text{zusammen } 324 \text{ Livres.}$$

Auch einiges Geometrische, sagten wir, sei in De la Roche's Buch vorhanden[3]). Gross ist das Wissen nicht, von welchem hier Anwendung gemacht ist, aber es sind wenigstens richtige Formeln, nach denen gerechnet ist, wie wir im Gegensatze zu einem vielgebrauchten encyklopädischen Werke, von welchem wir auf deutschem Boden zu reden haben werden, anerkennen dürfen. Es handelt sich um Kreisausmessungen mittels des archimedischen Werthes $\pi = \frac{22}{7}$, um mehrfache Benutzung des pythagoräischen Lehrsatzes, um die Ausrechnung der Dreiecksfläche nach der heronischen Formel, um Zerlegung von Vielecken in Dreiecke. Ein Kreisabschnitt wird zum Kreisausschnitt ergänzt, der alsdann der sovielte Theil der ganzen Kreisfläche ist, als sein Bogen Theil der Kreislinie[4]): Z. B. sei 6 die Länge des Bogens und $3\frac{1}{2}$ der Halbdiameter. Die Kreislinie hat demnach die Länge $2 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} = 22$ und die Kreisfläche ist $\frac{22}{2} \cdot 3\frac{1}{2} = 38\frac{1}{2}$. Die Regeldetri $22 : 38\frac{1}{2} = 6 : 10\frac{1}{2}$ liefert mit $10\frac{1}{2}$ die Fläche des Kreisausschnittes. Von ihr ist alsdann wieder das ergänzende Dreieck ab-

---

[1]) De la Roche fol. 77 verso: *Des regles briefves aultrement dictes regles de pratique.* [2]) Ebenda fol. 79 recto. [3]) Ebenda fol. 220 recto: *Comment la science des nombres se peult applicquer aux mesures de geometrie.* [4]) Ebenda fol. 223 recto.

zuziehen, von dessen Ausrechnung jedoch nichts gesagt ist. Endlich kommen noch einige Körperausrechnungen vor.

So das Buch des Estienne de la Roche. Das Urtheil über dasselbe hat sich im Verlaufe von etwa zehn Jahren sehr zu seinen Ungunsten verschoben. Auf uns, welche wir die bessere Vorlage kennen, macht es den Eindruck eines recht untergeordneten Werkes; auf eine Zeit, welcher der Triparty noch nicht zugänglich war, durfte und musste es befriedigender wirken. Sah man doch nur die von Chuquet entlehnten Dinge, ohne zu wissen, wie genau sie entlehnt waren, und vor allen Dingen ohne zu wissen, was dem Abschreiber in der Feder stecken geblieben war.

Wir heben diesen Gegensatz in der Würdigung eines und desselben Schriftstellers durch gleich gewissenhafte Forscher, möglicherweise durch den gleichen Forscher innerhalb kurzer Zwischenzeit nicht ohne Absicht hervor. Uns däucht, es falle dadurch ein bedeutsames Licht auf den Werth mancher Urtheile in der Geschichte der Wissenschaften. Sehen wir doch hier das deutlichste Beispiel davon, dass der glänzendste Ruhmestitel eines Gelehrten unter Umständen darin bestehen kann, dass man seine Vorgänger nicht kennt, dass das Dunkel, welches den Einen unverdientermassen umhüllt hat, den Hintergrund bildet, von welchem das nur mässig helle Bild des Anderen sich abhebt. Müssen wir bei solchen Erwägungen nicht misstrauisch werden namentlich gegen die Urtheile über solche Männer, deren Thätigkeit viele Jahrhunderte hinter dem Zeitalter der häufigen und erleichterten Vervielfältigung von schriftstellerischen Leistungen zurückliegend ein zufälliges Verlorengegangensein dieser oder jener Quellenschrift um so eher möglich erscheinen lässt? Nur ein Beweismittel erscheint uns nahezu untrüglich. Wir meinen nicht etwa die einstimmige Anerkennung der Zeitgenossenschaft. Wie sehr diese trügen kann, beweist jedes Jahrhundert an Beispielen, die aufzufinden nicht schwierig sind. Aber wir meinen das Vorhandensein verschiedener, von einem Verfasser herrührender Werke, welche alle den Stempel höherer Begabung tragen. Der Fall ist kaum denkbar, dass es einem Menschen gelänge, wiederholt in die Fusstapfen früher Lebender so einzutreten, dass jede Spur des Vorgängers verwischt würde. Darum dürfen wir getrost den Ruhm eines Euklid, eines Archimed, eines Apollonius als einen durch keine Neuentdeckung zu gefährdenden erachten, dürfen wir mit gleicher Zuversicht Männer wie Leonardo von Pisa, wie Regiomontanus ihnen zur Seite stellen. Von ihnen allen trifft das Merkmal zu, dass ihr Ruf, als bahnbrechende Geister in der Mathematik gewirkt zu haben, auf mehr als nur eine von ihnen verfasste Schrift sich gründet.

Einstimmige Anerkennung der Zeitgenossenschaft, sagten wir, kann trügen. Ein Beispiel bietet uns gleich der nächste Schriftsteller, von welchem wir zu reden haben. Am Ende des XV. Jahrhunderts lebte in Briançon, einer Bergveste unweit der französisch-italienischen Grenze, ein Arzt François Fine, nicht *Finé*, wie man aus der latinisirten Form Finaeus zu schliessen geneigt ist, welcher auch mit Astronomie sich schriftstellerisch beschäftigte. Ihm wurde 1494 ein Sohn Oronce, latinisirt Orontius Finaeus[1]), geboren der am 8. October 1555 in Paris starb, unbemittelt aber weit und breit berühmt, der Neubegründer mathematischer Studien in Frankreich, wie er in einem an König Franz I. gerichteten Einleitungsschreiben seiner *Protomathesis* sich selbst nennt, worin aber auch die ganze Mitwelt einstimmte. Was nur von geistiger Bedeutung in Paris lebte, Männer der Wissenschaft und der schönen Künste, Beamte und Höflinge, Gesandte, Prinzen, der König selbst vereinigten sich in den Vorlesungsräumen des Collège royal, wo Finaeus seit 1532 eine für ihn errichtete Lehrstelle inne hatte und als Professor mit beispiellosem Zulaufe wirkte. Sehen wir zu, welche schriftstellerische Leistungen der Hochbewunderte hinterliess. Auf die grosse Anzahl derselben braucht man von vornherein kein sonderliches Gewicht zu legen. Er vervielfältigte dieselben in jeder Weise: durch Uebersetzung in andere Sprachen, durch Veränderung der Ueberschrift oder auch bloss des Formats, durch Herausgabe bald im Einzelnen, bald als Sammlung, nur um diese Druckwerke immer anderen hochgestellten Persönlichkeiten widmen zu können, von denen er vergeblich Befreiung aus drückenden Geldverhältnissen erflehte. Die Geschichte der Mathematik hat es nur mit zwei Werken des Orontius Finaeus zu thun. Die Protomathesis[2]) von 1532 handelt in vier Büchern von der Arithmetik, in zwei Büchern von der Geometrie, in fünf Büchern von der Kosmographie, in vier Büchern von der Gnomonik. Die drei ersten arithmetischen Bücher sind dem gemeinen Rechnen gewidmet und unterscheiden sich, wie es nach den Auszügen, auf welche unser Bericht sich stützt, den Anschein hat, nur dadurch von anderen gleichzeitigen Lehrbüchern, dass dem Sexagesimalsystem ein grösserer Spielraum gegeben ist. Die Quadratwurzelausziehung z. B. lehrte er so[3]), dass dem Radikanden $2n$ Nullen rechts angefügt und dann ganzzahlig die Wurzel gesucht werden soll, welche solcher Weise

---

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 706—712. — L. Am. Sédillot, *Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France* im *Bulletino Boncompagni* Band II und III. Ueber Orontius Finaeus II, 363—364.
[2]) Kästner I, 449—453. [3]) Tartaglia, *General Trattato de' numeri et misure.* Parte II fol. 22 (Venetia 1556).

um n Stellen zu lang ist. Diese n rechts überschiessenden Stellen soll man dann mit 60 vervielfachen und abermals n Stellen rechts abschneiden, mit denen man wiederholt in gleicher Art zu verfahren habe, um Sexagesimalbrüche zu erhalten. Die Kubikwurzelausziehung schloss sich an und wurde wohl nach ähnlichen Vorschriften gelehrt. Auch ein *Canon Sexagenarum* war beigefügt, offenbar eine Art von Einmaleinstafel im Sexagesimalsystem mit Stellungswerth der durch Kommata getrennten Zahlen, die jeder nach links vorrückenden Zahl den 60fachen Werth als der gleichen rechts stehenden verleiht, z. B. $64 = 1 \cdot 60 + 4 \cdot 1 = 1, 4$; $169 = 2 \cdot 60 + 49 \cdot 1 = 2, 49$ u. s. w. Das vierte arithmetische Buch geht zu den Proportionen über und gipfelt in der *regula sex proportionalium quantitatum*, also in den zusammengesetzten Proportionen, die bei 6 darin vorkommenden Grössen 18 Versetzungen unterworfen werden können, wie sowohl Leonardo von Pisa (S. 16) als Jordanus Nemorarius (S. 67) gelehrt haben, deren Ersterer Achmed den Sohn Joseph's als Quelle angab. Bei den zwei geometrischen Büchern wird insbesondere die vorzügliche Ausführung der Figuren gelobt, ein Zeugniss für die Geschicklichkeit des Verfassers im Zeichnen, auf die er sich somit nicht umsonst etwas zugute that. So soll der Abdruck eines Maassstabes von 6 Pariser Zoll bei einer durch Kästner[1]) angestellten Vergleichung mit einem sehr genauen Messingstabe haarscharfe Uebereinstimmung gezeigt haben, so soll auch die Perspective der Raumfiguren besonders gut gelungen sein. Im Uebrigen wird als Inhalt des ersten geometrischen Buches angegeben: Erklärungen, Vorbereitung den Euklid leichter zu verstehen, von Kreisen auf der Kugel, Maasse, eine Sinustafel durch alle Minuten in Sechzigsteln des Halbmessers ausgedrückt. Aus dem zweiten geometrischen Buche nennt unsere Vorlage Feldmesserwerkzeuge, Ausrechnung ebener Figuren, Archimed's Kreisrechnung, Ausrechnung der Körper. Unter der Bezeichnung Kreisrechnung dürfte die Benutzung der Verhältnisszahl $\pi = \frac{22}{7}$ zu verstehen sein. Finaeus wusste, dass dieser Werth nicht anders als angenähert richtig ist. Unbegreiflich erscheint daher, dass er von dieser Kenntniss aus den Rückschritt vollzog, eine zeichnende Umwandlung des Kreises in ein Quadrat, welche gleichfalls in diesem zweiten geometrischen Buche gelehrt ist, und welche, wenn auch nicht von $\pi = \frac{22}{7}$ ausgehend, doch auf eben diesen Werth führt, für genau zu halten, ein Rückschritt, an welchem nicht zu zweifeln ist, da Finaeus anderwärts sich ausdrücklich gerühmt hat[2]), er habe zur grossen Wuth seiner Gegner

[1]) Kästner I, 451. [2]) *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 708, Note 1.

die Quadratur des Kreises, von welcher Aristoteles an verschiedenen Stellen sage, sie sei nicht unauffindbar, aber noch nicht aufgefunden, wirklich entdeckt und bewiesen. Ueber die kosmographische und die gnomonische Abtheilung gehen wir, als dem Inhalte unserer Darstellungen fern gelegen, hinweg. Ebenso begnügen wir uns mit dem Hinweise auf eine von Finaeus vorgeschlagene Methode zur Längenbestimmung[1]). Mit Finaeus war ein Pariser Arzt und Astronom Antoine Mizauld[2]) (1520—1578) befreundet. Diesem hatte Finaeus den Auftrag hinterlassen, nach seinem Tode ein zweites mathematisches Werk dem Drucke zu übergeben, und es erschien schon 1556 unter dem prunkhaften Titel der vier Bücher von den bisher ersehnten mathematischen Dingen, De rebus mathematicis hactenus desideratis[3]). Diese ersehnten Dinge sind der Reihenfolge nach 1. Auffindung zweier mittleren Proportionalen zwischen gegebenen Strecken, 2. Rectification des Kreises, 3. Theilung der Kreislinie in 3, 5, 7, 11, 13 gleiche Längen, beziehungsweise Einbeschreibung von regelmässigen Vielecken von der entsprechenden Seitenzahl, 4. Zerschneidung der Kugel in zwei Abschnitte, deren Rauminhalt im gegebenen Verhältnisse stehen soll. Alle diese Aufgaben glaubte Finaeus unter alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal gelöst zu haben, woraus die Unrichtigkeit seiner Lösungen hinlänglich hervorgeht. Ihnen allen liegt übrigens ein einziger Gedanke zu Grunde, die Benutzung der göttlichen Proportion, worunter Finaeus den goldenen Schnitt versteht. Er feierte ihn auch in einem an die Spitze gestellten Distichon[4]):

Authoris distichon de divina proportione.
Si quid divinum condebat pulchra mathesis
Quod Geometra colat; haec tibi sola dabit.

Was von göttlichem Inhalt Verehrungswerthes Mathesis
Dem Geometer verbarg, giebt Dir die Eine allein.

Unter den Versen befindet sich die Zeichnung einer nach äusserem und mittlerem Verhältnisse getheilten Strecke. Der Ausdruck *Divina proportio* der Ueberschrift lässt vermuthen, dass Finaeus mit der Divina Proportione des Paciuolo bekannt war und zu den dort gerühmten Vorzügen des goldenen Schnittes noch andere, bewundernswerthere hinzuzufügen dachte. Jene Kenntniss konnte Finaeus in der That besitzen. Der buchhändlerische Verkehr begann bereits ein lebhafterer zu werden, und wir dürfen auch wohl noch auf den besonderen Umstand hinweisen, dass Lionardo da Vinci, der Zeichner der Figuren-

---

[1]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 379 (München 1877). [2]) Poggendorff II, 163. [3]) Kästner I, 454—457. [4]) Ebenda S. 455.

tafeln zur Divina Proportione, die letzten Jahre seines Lebens bis 1519 am Hofe desselben Königs Franz I. zugebracht hatte, in welchem Finaeus einen wenn auch nicht sehr freigebigen Gönner verehrte. Finaeus sagt in seinem nachgelassenen Werke, die Verhältnisszahl π liege zwischen $\frac{22}{7}$ und $\frac{245}{78}$, und diese Grenzen sind ja auch richtig. Dann aber legt er seinen Zeichnungen den zweiten kleineren Werth zu Grunde und preist ihn an, er führe zur genauen Rectification. Nicht als ob die Zeichnungen selbst mit diesem Werthe in völliger Uebereinstimmung sich befänden; es bleibt ein Fehler, welchen Finaeus auf $\frac{1}{3702857}$ eines Theiles, deren 60 auf einen Kreishalbmesser gehen, berechnet, wenn die Länge der dem Kreisquadranten gleichen Strecke in Frage steht, aber dieser so kleine und unvermeidliche Fehler dürfe vernachlässigt werden. Gewiss ist auch letztere Behauptung berechtigt und die ganze Zeichnung eine praktisch vollauf genügende, wenn nur der theoretische Fehler nicht begangen wäre, dass bald $\frac{245}{78} < \pi$, bald genau $\frac{245}{78} = \pi$ gesetzt würde. Noch weniger gerechfertigt sind die Constructionen, deren Finaeus bei den anderen oben erwähnten Aufgaben als längst ersehnter Erfindungen sich rühmt, und man darf mit einigem Bedauern feststellen, dass das nachgelassene Werk des wahrscheinlich mit Recht wegen seiner ausgezeichneten Lehrgabe bewunderten Mannes seiner erworben geglaubten Unsterblichkeit ein schnelles Ende bereitete. Wenn die Nachwelt, unbeirrt durch anfänglichen Ruhm, durch späteren Misserfolg Finaeus fortwährend eines Lobes für würdig hält, so ist es eines solchen, welches in Finaeus dem Menschen und nicht dem Mathematiker gilt. Finaeus war es sicherlich in erster Linie um die Wissenschaft zu thun. Er war keine jener eifersüchtigen Naturen, die es nicht ertragen können, dass einem Anderen als ihnen selbst ein Verdienst zugebilligt werde. Das hat er durch die Herausgabe fremder Werke bewiesen, denen er dadurch selbst den Stempel seiner Achtung aufdrückte. Die Arithmetik des Silicius hat er 1519, die Margaritha Philosophica 1523 neu herausgegeben, zwei Werke, von denen die theils chronologische, theils geographische Gliederung, welcher wir folgen, uns verbietet, jetzt schon mehr als nur die Namen zu nennen. Es folgte 1525 eine Ausgabe von Peurbach's astronomischem Hauptwerke, der Theorica nova Planetarum, und Anderes mehr, was unserem Gegenstande noch ferner liegt.

Fast genau derselben Zeit wie Finaeus gehörte Jean Fernel[1]) (1497—1558) an. Zuerst zweifelhaft, ob er der Kanzel oder dem

[1]) Montucla I, 576. — *Nouvelle Biographie universelle* XVII, 477—483.

Vertheidigerstande sich widmen solle, wurde er nur deshalb Arzt, weil er fühlte, dass seine Stimme für die Anforderungen der beiden anderen Berufe zu schwach war. Er hat eine glückliche Wahl getroffen. In der Geschichte der Medicin führt er den Beinamen des modernen Galenus, ein hinlänglicher Beweis dafür, dass der Schwerpunkt seines wissenschaftlichen Lebens in seiner ärztlichen Thätigkeit zu suchen ist. Seine medicinischen Leistungen beginnen indessen erst 1534, und vorher waren es astronomisch-mathematische Arbeiten, die ihn beschäftigten. Dem Jahre 1528 gehört eine Schrift *De proportionibus* an. Seine *Cosmotheoria* aus dem gleichen Jahre schildert eine unweit Paris durch Fernel ausgeführte Gradmessung, welche nicht durch die Vorzüglichkeit der Methode, wohl aber durch die zufällig erreichte Genauigkeit bekannt geblieben ist. Die Geschichte der reinen Mathematik zeichnet Fernel's Namen als den eines Mannes auf, dessen auf anderem Gebiete erworbene Berühmtheit seiner Beschäftigung mit unserer Wissenschaft Interesse verleiht.

Jodocus Clichtovaeus[1]), in Flandern geboren und 1543 in Chartres gestorben, wo er Canonicus war, hat über die geheimnissvollen Eigenschaften der Zahlen geschrieben, ausserdem ein Rechenbuch, hat aber überdies möglicherweise ein viel älteres Rechenbuch (vielleicht das des Sacrobosco?) zum Drucke befördert (S. 88).

Den bis hierher in diesem Kapitel genannten mathematischen Schriftstellern lassen wir Charles de Bouvelles[2]), lateinisch Bovillus folgen. Der Mann kommt auch in den Formen Bouelles und Bouilles vor. Er ist 1470 in Saucourt in der Picardie geboren und war Professor der Theologie und Canonicus in Noyon, wo er 1553 starb. Sein Hauptwerk erschien 1503 in lateinischer Sprache: Geometriae introductionis libri sex, breviusculis annotationibus explanata, quibus annectuntur libelli de circuli quadratura et de cubicatione sphaerae et introductio in perspectivam Caroli Bovilli. Der Titel einer französischen Ausgabe von 1542 lautet: Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Géométrie, composé nouvellement en françois par maître Charles de Bouvelles, chanoine de Noyon. Andere Ausgaben des wiederholt aufgelegten Werkes sind von 1547, 1551, 1557, 1608. In der französischen Ausgabe[3]) spricht Bouvelles

— Wolf, Geschichte der Astronomie, S. 168—169. — Les historiettes de Tallemant des Reaux IV, 169 Note 1 (geschrieben 1657—1659, gedruckt Paris 1862).

[1]) Kästner I, 222—226. — Chasles, *Aperçu hist.* 473 (deutsch 540).
[2]) Poggendorff I, 253. — Fontès, *Caroli Bovilli liber de numeris perfectis* in den *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres de Toulouse* 1894. [3]) Chasles, *Apercu hist.* 481 (deutsch 551). — S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876), S. 5—10.

von den regelmässigen Vielecken und anderen, welche sich daraus ableiten. Er beginnt (Figur 72) mit dem Fünfeck $ABCDE$

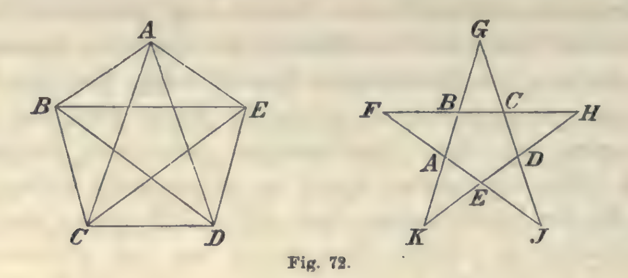


Fig. 72.

und leitet durch Ziehung aller Diagonalen ein ähnliches inneres aber mit der Spitze nach unten gekehrtes Fünfeck ab, welches selbst wieder durch Verlängerung sämmtlicher Seiten zum Sternfünfecke wird. Diese beiden Entstehungsweisen vereint betrachtet lassen aber die Winkelsumme des Sternfünfecks erkennen. Alle Fünfeckswinkel zusammen betragen 6 Rechte, der einzelne 108°. Die gezogenen Diagonalen zerfällen jeden Winkel wieder in 3 gleiche Winkel von je 36°. Das Sternfünfeck hat somit 5 Winkel von je 36° mit der Gesammtsumme von 2 Rechten. Ob die Einschränkung auf regelmässige Vielecke, welche Bouvelles sich auferlegt, neu ist, dürfte fraglich sein. Bradwardinus und die Anderen, welehe Sternvielecken ihre Aufmerksamkeit zuwandten, sagen zwar nirgend etwas von dieser Einschränkung, und deshalb haben wir geglaubt, in unseren Berichten gleichfalls schweigen, in unseren Figuren uns nicht an die Regelmässigkeit binden zu dürfen, aber die Figuren jener älteren Schriftsteller sind thatsächlich alle regelmässig gezeichnet. Neu ist nur bei Bouvelles, dass er der Regelmässigkeit als Beweismittel sich bedient und sie desshalb betont. In der lateinischen Ausgabe von 1557 erscheint zwar einmal ein unregelmässiges Sternachteck[1]), so erzeugt, dass (Figur 73) die 4 Eckpunkte eines Quadrates je mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbunden werden; aber ob Bouvelles dieses Achteck $AEDHCGBF$ als Sternvieleck anerkannt hätte, geht aus dem Texte in keiner Weise hervor. Die französische Ausgabe geht weiter zum Sechsecke, dessen *angles egredients* (Winkel des Sternsechsecks) 4 Rechte betragen. Jede solche Figur bestehe (Figur 74) aus zwei

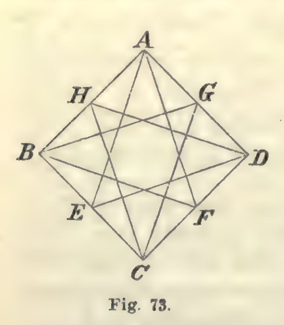


Fig. 73.

[1]) Günther l. c. S. 8, Figur 6 mit Berufung auf Blatt 33 der lateinischen Ausgabe.

sich durchsetzenden gleichseitigen Dreiecken und habe die doppelte Fläche ihres regelmässigen Sechsecks, das heisst desjenigen Sechsecks, durch dessen Seitenverlängerung sie hervorgebracht ist. Beim Siebeneck giebt es ein herausgehendes und ein noch mehr herausgehendes Siebeneck[1]). Bei dem letzteren, also bei dem Sternsiebeneck zweiter Art, sei die Winkelsumme 2 Rechte, wie sie bei dem Sternfünfeck war. Das eine Mal sei eben eine Theilung durch 7 vorzunehmen, wo das andere Mal nur eine solche durch 5 erforderlich sei. Bouvelles will damit wohl sagen, die Winkelsumme des Siebenecks (n-ecks) oder $10(2n-4)$ Rechte, sei durch 7 (n) zu theilen, um den Winkel des regelmässigen Siebenecks (n-ecks) in der Grösse $\frac{10}{7}\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ Rechten zu finden. Dann theilt sich jeder Winkel durch 5 $(n-2)$ Diagonalen in ebenso viele kleinere Winkel von der Grösse $\frac{2}{7}\left(\frac{2}{n}\right)$ Rechte, und 7 (n) solcher Winkel betragen 2 Rechte. Der ganze letzte, eigentlich wesentlichste Theil des Beweises ist schweigend vorausgesetzt. Die obengenannte lateinische Ausgabe von 1557 geht in mancher Beziehung über den französischen Text von 1542 hinaus. Gleich beim Fünfeck ist die Figur und deren Beschreibung vollständiger als je zuvor (Figur 75). Die beiden früheren Veränderungen des convexen Fünfecks $ABCDE$ durch Diagonalenziehung und Seitenverlängerung sind hier vereinigt. Es ist bemerkt, dass im Dreieck ACE und den gleichartig gebildeten jeder der beiden Winkel bei A und E doppelt so gross sei als der Winkel bei C. Die Axe CF des herausgehenden Fünfecks heisst es, sei zweimal so lang als die des einförmigen, *uniformis*, ein gar nicht übler Kunstausdruck für die nach allen Seiten convexe Figur, der Bouvelles wohl eigenthümlich ist. Das Sechseck und Siebeneck scheint zu weiteren Bemerkungen keinen Anlass geboten zu haben. Dagegen ist in der lateinischen Ausgabe auch das Achteck noch hinzugekommen und

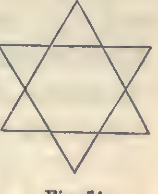


Fig. 74.

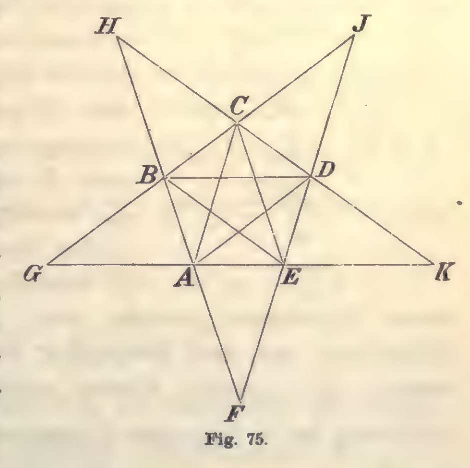


Fig. 75.

[1]) *Si on prolonge les costez de lheptagone saillant ou il surviendra ung aultre heptagone moult plus egredient que le premier.*

zwar sowohl das aus zwei sich durchsetzenden Quadraten gebildete erste Sternachteck, wenn man dieses gleichwie das aus zwei Dreiecken gebildete Sechseck wirklich ein Sternvieleck nennen darf, als auch das zweite eigentliche Sternachteck. Dass das letztere die Winkelsumme von 2 Rechten besitze, scheint Bouvelles nicht gesagt zu haben. Es bleibe dahingestellt, ob er es als selbstverständlich verschwieg, weil, wie wir oben zeigten, seine Andeutungen beim Siebeneck einem allgemein geführten Beweise ähneln oder ob jene unsere Auffassung Bouvelles zu viel zutraute und schon beim Achtecke eine Lücke seines Wissens wie seines Könnens sich bemerklich macht.

Bouvelles wird gemeiniglich als derjenige Gelehrte genannt, welcher nächst dem Cardinal von Cusa (S. 202) zuerst das Rollen eines Rades auf einer geradlinigen Basis beobachtete und somit in der Geschichte der Cykloide Erwähnung verdiene[1]). Richtig daran ist, dass Bouvelles ausdrücklich erzählt, er habe einmal auf einer Brücke in Paris auf das Rad eines über das ebene Pflaster rollenden Wagens geachtet. Da sei ihm klar geworden, dass, wenn ein Rad einen ganzen Umlauf vollendet habe, der zurückgelegte Weg dem Kreisumfange gleich sein müsse, und dass man, wenn die Punkte der Basis, auf welche einzelne Punkte des Rades auftreffen, gefunden werden, damit zugleich Strecken erhalte, welche Theilen des Kreisumfanges gleich seien. Die Curve dagegen, welche etwa ein Nagel des Rades in der Luft beschreibt, während jene Umdrehung sich vollzieht, also die eigentliche Cykloide, hat Bouvelles keineswegs erkannt. Er hält vielmehr (Figur 76) die bei einer halben Umdrehung erzeugte Curve ohne weiteres für einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt um den vierten Theil des Halbmessers des rollenden Kreises tiefer liegt als der Punkt, in welchem jener Kreis die Basis trifft, und dessen Halbmesser gefunden wird, indem man den so bestimmten Mittelpunkt mit dem Endpunkte des der Basis parallelen Durchmessers des rollenden Kreises verbindet. Eine Erörterung dieser Zeichnung hat zu folgendem Ergebnisse geführt. Vermöge $EH = \frac{5}{4}r$ und $ED = r$ ist $HD = r\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{r}{4}\sqrt{41}$. Ferner

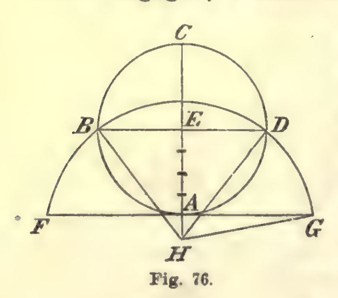


Fig. 76.

[1]) Wallis in den *Philosophical Transactions* Vol. XIX (für die Jahre 1695, 1696, 1697) pag. 561—566. — S. Günther, War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhunderte bekannt? in Eneström's *Biblioth. mathem.* 1887, S. 8—14. Auf S. 8 der Abdruck der wesentlichen Stelle aus der französischen Ausgabe von Bouvelles und daran anknüpfend die Discussion der Construction.

$$AH = \frac{r}{4}, \quad HG = HD = \frac{r}{4}\sqrt{41},$$

also

$$AG = \frac{r}{4}\sqrt{41} - 1 = \frac{r}{2}\sqrt{10}.$$

Aber $AG = \text{arc.}\,AD$ stellt ein Viertel der Kreisperipherie, d. h. $\frac{r\pi}{2}$ dar, mithin ist Bouvelles' Zeichnung gleichbedeutend mit der Annahme $\pi = \sqrt{10}$. Ob ihm dieser indische Werth (Bd. I, S. 606) von aussen zugetragen worden, ob er von selbst auf ihn verfiel, dürfte mit Gewissheit sich nicht entscheiden lassen. Auffallend ist das Zusammentreffen unter allen Umständen.

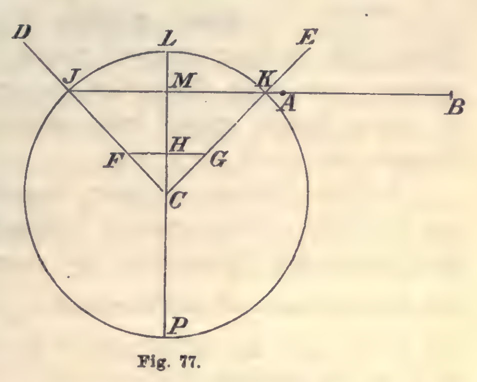


Fig. 77.

Einen zweiten missglückten Versuch auf dem Gebiete der Kreismessung machte Bouvelles in Gestalt einer Arcufication[1]). Man theile (Figur 77) eine Strecke AB in drei gleiche Theile und trage auf den Schenkeln eines rechten Winkels DCE vom Scheitel C aus je ein Drittel $CF = CG = \frac{1}{3}AB$ ab. Nachdem FG gezogen, wird zu dieser Geraden parallel innerhalb des rechten Winkels JK gesucht, so dass $JK = CF + CG + FG$. Alsdann soll der um C als Mittelpunkt mit CK als Halbmesser beschriebene Kreis die vierfache Länge von AB besitzen. Sei $AB = a$, $CG = \frac{a}{3}$. Weil CGH ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck ist, ergiebt sich $HG = \frac{a}{3\sqrt{2}}$, $FG = 2HG = \frac{a}{3}\sqrt{2}$. Daraus folgt

$$JK = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}JK = MK = MC = \frac{a}{6}(2 + \sqrt{2}),$$

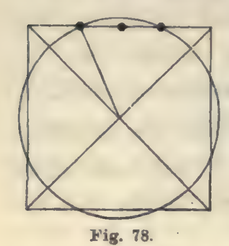
$$CK = MK \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{3}(1 + \sqrt{2}).$$

Die gezeichnete Kreisperipherie mit CK als Halbmesser ist folglich $2\pi \cdot \frac{a}{3}(1 + \sqrt{2})$ und wird für $4a$ gehalten. Das bedeutet $\pi = \frac{6}{\sqrt{2}+1}$ $= 6(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{72} - 6 = 2{,}4852814\cdots$, mithin ein viel zu kleiner Werth.

Ein dritter Versuch ist der einer Circulatur. Halbmesser des

[1]) Buteo, *De quadratura circuli* (Lyon 1559) pag. 155—158 berichtet darüber.

dem Quadrate (Figur 78) flächengleichen Kreises ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Quadrates mit dem einen Eckpunkte zunächst gelegenen Viertheilungspunkte der Quadratseite. Ist a die Quadratseite, so ist jener Halbmesser offenbar $\frac{a}{4}\sqrt{5}$ und die Kreisfläche $\frac{5}{16}a^2\pi$. Sie soll dem Quadrate a^2 gleich, also $\pi = 3{,}2$ sein.


Fig. 78.

Genau die gleiche Construction[1]) lehrte Joachim Fortius Ringelberg in seinem *Chaos mathematicum*, welches in einer Gesammtausgabe seiner Werke 1531 in Lyon gedruckt wurde. Ringelberg[2]) ist in Antwerpen geboren, am Hofe Maximilian I. erzogen. Nachdem er erst mit 17 Jahren Latein gelernt hatte, studirte er in Löwen, Paris, Orleans, Bourges und starb etwa 1536.

Endlich viertens entnahm Bouvelles noch eine Circulatur, wie uns berichtet wird[3]), einem in Volkssprache geschriebenen, von einem Bauer verfassten Büchelchen. Der einem Quadrate flächengleiche Kreis hat nämlich nach dieser Vorschrift $\frac{8}{10}$ der Diagonale als Durchmesser. Sei a die Seite des Quadrates, a^2 die Kreisfläche. Die Diagonale ist $a\sqrt{2}$, der Kreisdurchmesser

$$2r = \frac{8}{10}a\sqrt{2}, \quad a = \frac{5r}{2\sqrt{2}}, \quad a^2 = 3\frac{1}{8}r^2 = \pi r^2 \quad \text{und} \quad \pi = 3\frac{1}{8}\cdot$$

Werth und Construction sind uns wieder von früher her bekannt. Der Werth $\pi = 3\frac{1}{8}$ ist uns in diesem Bande bei Paciuolo (S. 317) als untere Grenze jener Verhältnisszahl schon vorgekommen, die Construction ähnelt einer indischen (Bd. I, S. 601—602) und fällt ganz mit ihr zusammen, wenn wir die damalige versuchsweise aufgestellte Vermuthung von dem Näherungswerthe $\sqrt{2} \sim \frac{10}{7}$, aus welcher folgte, dass der Kreisdurchmesser dort $\frac{8}{10}$ der Diagonale war, jetzt rückwärts auf die ausdrücklich ausgesprochene Vorschrift stützen dürfen. Immer auffallender wird dabei das ganz unvermuthete und uns kaum erklärliche Zusammentreffen mit Indischem, von welchem die zuerst angeführte Rectification schon ein Beispiel gab.

Bouvelles hat zwischen der lateinischen Ausgabe seiner Geometrie von 1503 und deren französischen Uebersetzung von 1542 (S. 379) auch noch ein von derselben verschiedenes französisches Buch: *Géo-*

---

[1]) So berichtet wieder Buteo l. c. pag. 151. [2]) Jöcher, Allgemeines Gelehrten-Lexikon III, 2102—2103. [3]) Tartaglia, *General Trattato de' numeri et misure*, Parte IV fol. 22 (Venetia 1560).

métrie en françoys verfasst, welches 1511 und wiederholt 1514 in Paris erschien. Noch ein Jahr früher gab der gleiche Pariser Drucker *Opuscula de Charles de Bouvelles* (1510) heraus, einen Sammelband, in welchem auch eine theologisch-philosophisch-arithmetische Abhandlung *Opus de XII numeris* eine Stelle gefunden hat. In ihr ist Einiges über vollkommene Zahlen enthalten, z. B. der Satz, dass ausser der 6 jede andere vollkommene Zahl nach Abzug von 1 durch 9 theilbar werde, umgekehrt lasse sich aber der Satz nicht behaupten[1]).

Wir haben hier noch eines Guillaume Postel[2]) (1510—1581) zu erwähnen, welcher 1540 anonym ein *Compendium de Mathematicis disciplinis ex Cassiodoro* herausgegeben zu haben scheint. Aus diesem Buche wird die wichtige Stelle berichtet[3]): *Huius disciplinae tota vis in exemplis, additionibus et detractionibus partium, est sita: quam partem qui volet plenissime pernosse, L. Appulejum legat; qui primus Latinis haec argumenta demonstravit*, aus welcher ähnlich wie aus dem Algorithmus linealis (S. 222) der Schluss gezogen worden ist (Bd. I, S. 524), ein Rechenbuch des Appuleius müsse sich bis zum Anfange des XVI. Jahrhunderts erhalten haben.

Wir wenden uns von Frankreich nach Südwesten zur pyrenäischen Halbinsel. Mag es doch unseren Lesern wunderlich genug erscheinen, dass von diesem Theile Europas in diesem Bande noch gar nicht die Rede war. Spanien war unter arabischer Herrschaft, wie wir im I. Bande gesehen haben, der Sitz einer hoch entwickelten wissenschaftlichen Bildung. Mathematische Studien blühten dort. In der Mitte des XIII. Jahrhunderts, als die Araber nach Granada zurückgedrängt wurden, herrschte Alfons X el Sabio (der Weise) über die Sieger, der Astronom auf dem Königsthrone, welcher, wie wir mehrfach anzuführen in der Lage waren, in den Alfonsinischen Tafeln eine Tabellensammlung berechnen liess, deren die Astronomen von ganz Europa sich Jahrhunderte lang bedienten. Als endlich mit der Einnahme von Granada am 2. Januar 1492 auch das letzte Bollwerk des Islam gefallen war, da verliess nur sieben Monate später Christoforo Colombo auf spanischem Schiffe Europa, um die erste seiner vier im Dienste des gleichen Landes gemachten Entdeckungsreisen anzutreten. Das benachbarte Portugal war nicht minder an den grossen Entdeckungen betheiligt, welche die Kenntniss der Erdoberfläche erweiterten. In der ersten Hälfte des XV. Jahrhunderts

---

[1]) Fontès l. c. Der Satz selbst ist richtig und wurde zuerst von Wantzel in den *Nouvelles annales de mathématiques* III, 337 bewiesen. [2]) Poggendorff II, 508—509. [3]) Vossius pag. 40.

lebte der Infant Don Henrique der Seefahrer, in der zweiten Hälfte des gleichen Jahrhunderts trat Martin Behaim, der Schüler von Regiomontanus (S. 289) in portugiesische Dienste, am Ende des Jahrhunderts umschiffte Vasco de Gama die Südspitze Afrikas. Solche kühne Seereisen sind undenkbar, wenn die Führer nicht der praktischen Sternkunde in hohem Grade mächtig sind. Sternkunde andererseits setzt immer und überall eine ihr gleichlaufende Entwickelung der Schwesterwissenschaft der Mathematik voraus. Wer waren die Träger dieser Entwickelung in Spanien und Portugal? Wir haben die Frage aufgeworfen und dadurch ihre Berechtigung anerkannt. Wir müssen aber als Antwort die auffallende Erscheinung ins Licht treten lassen, dass von jener Entwickelung der Mathematik auf spanischem und ebenso auf portugiesischem Boden nur sehr dürftige Spuren nachweisbar sind, so dürftige, dass man sich gezwungen sieht, anzunehmen, das kaum Glaubliche sei wirklich Wahrheit: die Schifffahrtskunde habe, wie kaum je zuvor, Fortschritte gezeigt, die Mathematik sei daneben so gut wie unbeachtet geblieben. Die wenigen Namen, welche wir zu nennen haben, bestätigen lediglich diesen Ausspruch.

Um die Wende des Jahrhunderts haben wir Petro Sanchez Ciruelo[1]) zu erwähnen. Er studirte in Salamanca, zog dann in jungen Jahren nach Paris, wo er während zehn Jahren Mathematik und Philosophie lehrte. 1510 wurde er Professor der Theologie und Philosophie an der Universität zu Alcala, später Canonicus an der Kathedrale von Salamanca. Er war einer der drei Lehrer und zwar der höchstgestellte des nachmaligen Königs Philipp II. Seine Arithmetik *Arithmetice pratice seu Algorismi Tractatus* ist 1505 in Paris gedruckt, ebenda schon früher 1502 (nach Anderen 1495?) die von Ciruelo herausgegebene Arithmetica speculativa des Bradwardinus, ebenda 1508 eine Ausgabe der Sphaera des Sacrobosco mit reichhaltigen Erläuterungen, so dass man fast verpflichtet wäre, den Spanier als

[1]) Poggendorff I, 446. Wie dieser sonst so sorgfältige Schriftsteller dazu kam, als Geburtsjahr 1500 etwa anzugeben, während er 1496 als Druckjahr der Arithmetik angiebt, ist unerfindlich. — Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert S. 42 (Supplementheft zu Zeitschr. Math. Phys. XXII) hält Sanchez für den Familiennamen. — *Nouvelle Biographie universelle* X, 620—621. — G. Vicuña, *Sur quelques écrits mathématiques publiés en Espagne aux XVI et XVII Siècles* in Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1890, 33—36. — A. F. Vallin, *Cultura scientifica de España en el siglo XVI. Discursos leìdos ante la real academia de sciencias*, Madrid 1893, ist uns nur durch einen Bericht von G. Eneström (*Bibliotheca mathem.* 1894, pag. 33—36) bekannt, scheint aber wesentlich bibliographische Notizen ohne Inhaltsangabe der betreffenden Werke zu enthalten.

Franzosen zu behandeln, wenn nicht 1516 und wiederholt 1518 in Alcala ein *Cursus quatuor mathematicarum artium liberalium* erschienen wäre. Bemerkenswerth ist aus seiner Arithmetik, dass er Namen für 10^6 und 10^{12} kennt, welche von den bei Chuquet vorkommenden abweichen; 10^6 heisst ihm *cuento* und 10^{12} erst heisst *millon*. Die geometrische Abtheilung des Cursus soll sich hauptsächlich an Campanus und Bradwardinus anschliessen, in der Angabe zweier Kreisquadraturen folge er Bouvelles. Die Darstellung der Perspective sei reich an geschichtlichen Bemerkungen.

Wir schalten hier den Namen eines Ungarn Magister Georgius de Hungaria ein, der, wie die von ihm benutzten Zahlwörter *cuento* und *millon* beweisen, als Schüler Ciruelo's betrachtet werden muss. Diese Abhängigkeit weist ihm hier seinen Platz an, während das Erscheinungsjahr 1499 seiner in Holland gedruckten Arithmetik[1]) ihn schon im 55. Kapitel zur Erwähnung hätte bringen sollen.

Etwa in gleiche Linie mit Ciruelo ist Juan Martinez Guijeno[2]) zu stellen. Das Wort Guijeno bedeutet Kieselstein und wurde als Silicius latinisirt, unter welchem Namen der hier gemeinte Schriftsteller verhältnissmässig am bekanntesten ist. Er war Professor der Philosophie an der Universität Salamanca, später Erzbischof von Toledo und Cardinal. Auch er war einer der Lehrer Philipp II., wozu er als Nachfolger des Ciruelo ernannt wurde, nachdem dieser, wie man erzählt, durch seinen kleinen Wuchs sich als nicht recht tauglich erwiesen hatte. Silicius liess 1514 in Paris eine praktische Arithmetik drucken, welche, wie wir schon wissen (S. 219) das Linienrechnen lehrte, und welche (S. 378) Finaeus wenige Jahre später wiederholt zum Drucke beförderte, und gab Schriften des Suisset heraus.

Gasper Lax[3]) war, obwohl Spanier von Geburt, Lehrer an der Universität Paris und gab dort Schriften über Arithmetik und über Proportionenlehre heraus. Später kehrte er nach seiner Heimath zurück und lehrte in Saragossa, wo er 1560 starb.

Juan de Ortega[4]) gehörte dem Orden der Prädicatoren an. Er liess 1512 in Barcelona eine *Compusicion de la arte de la arismetica y Juntamente de geometria* erscheinen, welche dann wiederholt und in verschiedenen Sprachen gedruckt worden ist. Wir sind durch

---

[1]) Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499 von Coloman von Szily und August Heller. Math. und naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XII. Budapest 1894. Die Arithmetik selbst ist gleichfalls 1894 in Budapest in Neudruck erschienen. [2]) Poggendorff, II, 930—931. [3]) Ebenda I, 1395. [4]) Kästner, I, 96—99. — Jos. Perott, *Sur une arithmétique espagnole du seizième siècle* im *Bulletino Boncompagni* XV, 163—169.

Auszüge damit bekannt, dass auch bei Ortega das Wort *cuento* mit der Bedeutung einer Million vorkommt, ferner dass

$$\sqrt{55702} = 236\frac{6}{473} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{18889} = 26\frac{1313}{2106}$$

gerechnet ist. Man erkennt in diesen Werthen die beiden Formeln

$$\sqrt{A} \backsim a + \frac{A - a^2}{2a + 1}, \quad \sqrt[3]{A} \backsim a + \frac{A - a^3}{3a(a + 1)}$$

Die erste derselben ist, wie wir uns erinnern wollen, arabischen Gebrauchs gewesen, die zweite weicht um ein Geringes von der Formel Leonardo's von Pisa (S. 32)

$$\sqrt[3]{A} \backsim a + \frac{A - a^3}{3a(a + 1) + 1}$$

ab. Die Quadratwurzel ist aber auch nicht regelmässig nach der gegebenen Formel gebildet. Es kommen Angaben vor wie

$$\sqrt{128} = 11\frac{16}{51}, \quad \sqrt{80} = 8\frac{17}{18}, \quad \sqrt{75} = 8\frac{103}{156} \text{ u. s. w.,}$$

welche hergestellt werden konnten, indem man sich eines neuerdings seit 1894 wieder bekannt gewordenen Verfahrens des Heron von Alexandria bediente, von welchem überhaupt zahlreiche Spuren vermuthet werden.

Das ist die ganze Ausbeute, welche Spanien bis zur Mitte des XVI. Jahrhunderts uns bietet. Portugal bietet für den gleich bemessenen Zeitraum weniger und zugleich mehr: einen einzigen Namen, aber als Träger desselben einen Mann, der die Wissenschaft um mehrere fruchtbare Gedanken bereichert hat, Pedro Nuñez, lateinisch Nonius[1]). Er ist 1492 zu Alcazar de Sol geboren, studirte in Lissabon, dann in Salamanca. Im Jahre 1519 kam er in die verantwortungsreiche Stellung eines Oberaufsehers der Zölle nach Goa in Indien, von wo er 1529 als königlicher Kosmograph zurückkehrte. 1544 bis 1562 war er Inhaber eines für ihn gegründeten Lehrstuhls der höheren Mathematik an der Universität Coimbra. Er unterrichtete den Prinzen Heinrich von Portugal, welcher später den Königsthron dieses Landes bestieg. Nonius starb zu Coimbra 1577. Seine Schriften hat er theils in lateinischer, theils in portugiesischer Sprache verfasst. Eine der letzteren hat er nachträglich selbst ins Spanische übersetzt, und in dieser Gestalt ist sie 1567 in Antwerpen als *Livro de Algebra em Arithmetica e Geometria* gedruckt worden.

---

[1]) Kästner II, 337 und 587—590. — *D'Araujo d'Azevedo* in von Zach's Monatlicher Correspondenz für Beförderung der Erd- und Himmelskunde III, 203—206. — *Nouvelle Biographie universelle* XXXVIII, 361—363. — R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 327, 365, 367. — S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie S. 341—344.

In dieser Algebra scheint der Versuch enthalten zu sein[1]), den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier algebraischen Ausdrücke zu ermitteln. Wir haben noch drei andere Schriften zu erwähnen. Sein *De crepusculis liber unus*, gedruckt 1542 in Lissabon (*Olysipone*) enthält die Auflösung der in der Geschichte der Astronomie wohlbekannten Aufgabe der kürzesten Dämmerung, ist für uns aber durch den Vorschlag, wie man bei Winkelmessungen verfahren solle, der nebenbei gemacht ist, merkwürdig. Nonius will eine aus 46 concentrischen Kreisquadranten bestehende Vorrichtung angefertigt wissen. Der äusserste und grösste Kreisbogen soll in 90 Theile, mithin in ganze Grade eingetheilt sein, der nächstfolgende in 89 Theile, deren jeder also $1\frac{1}{89}$ Grad oder $1^0\,40,''4494\ldots$ beträgt. Jeder folgende Quadrant soll wieder in gleiche Theile eingetheilt sein, deren Anzahl um je eine Einheit abnimmt. Der innerste Quadrant hat mithin nur 45 Theile von je 2^0. Wird nun der eine Schenkel eines spitzen Winkels mit dem einen die Vorrichtung begrenzenden Halbmesser, der Scheitel des Winkels mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte aller Quadranten zur Deckung gebracht, so hatte man nur zuzusehen, bei welchem von den Quadranten der andere Schenkel mit einem Theilstriche zusammenfiel und der wievielte Theilstrich es war, um den Winkel mit grosser Genauigkeit gemessen zu haben. Dass die sehr sinnreiche Vorrichtung wenigstens für Winkelmessung sich nicht einzubürgern vermochte, beruht wohl wesentlich auf der technischen Schwierigkeit, jene 46 unter sich verschiedenen Bogentheilungen mit gleicher Zuverlässigkeit auszuführen, eine Schwierigkeit, welche erst zu einer Zeit vollkommen besiegt wurde, als andere vollkommnere Einrichtungen die des Nonius überholt und verdrängt hatten. Gleichwohl hat die Nachwelt den Namen des Nonius mit den genauen Winkelmessungen verknüpft, welche nicht nach seinem Gedanken zur Ausführung kamen.

Die zweite von uns zu nennende Schrift *De erratis Orontii Finei* ist 1546 in Coimbra (*Conimbricae*) gedruckt. Sie macht gegen den damals auf der Höhe seines Ruhmes stehenden pariser Lehrer Front.

Die dritte Schrift gleichen Druckjahres und gleichen Druckortes wie die eben angegebene heisst *De arte atque ratione navigandi*. Von einem Punkte der Meeresoberfläche zum anderen führen zahllose Wege. Einer derselben ist der kürzeste und würde, wäre die Meeresoberfläche eben, eine gerade Linie sein. Das war auch die ursprüngliche Meinung der Seefahrer, welche in gerader Linie zu segeln ver-

---

[1]) *Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges* (Leiden 1634) pag. 56, Problème LIII.

meinten, wenn sie die Richtung zum Bestimmungsorte unverändert festhielten. Nonius war der erste, welcher es aussprach, dass die Schiffsbahn, welche sämmtliche Meridiane der Erdoberfläche unter gleichem spitzen Winkel schneidet, als auf einer Kugel verlaufend keine gerade Linie, aber auch kein Grössterkreis der Erdkugel und ebensowenig ein aus Stücken von Grösstenkreisen zusammengesetzter Weg sein könne. Sie sei vielmehr durch das Zusammenwirken zweier, unter Umständen mehrerer Kräfte zu Stande gekommen, gleich wie die Spirale durch zwei vereinigte Bewegungen entsteht, und sei eine eigenartige Linie, *rumbus*. Damit war die Entdeckung derjenigen Linie doppelter Krümmung vollzogen, welche am Anfange des XVII. Jahrhunderts durch Willebrord Snellius den Namen Loxodrome erhielt. Die deutschen Seeleute gaben ihr den der Nonius'schen Bezeichnung nachgebildeten Namen Rhumbs, weil die beiden sich vereinigenden Bewegungen jeweils als die Seiten eines Rhombus erschienen. Nonius hat nicht nur das Vorhandensein dieser krummen Linie entdeckt, er ist auch zur Kenntniss einer ihrer überraschendsten Eigenschaften vorgedrungen, derjenigen nämlich, dass Loxodromen, wenn wir uns erlauben schon jetzt des gebräuchlichsten Namens uns zu bedienen, zwar in Windungen um den Erdpol herumgehen und demselben ohne Aufhören näher kommen, aber den Pol selbst nicht zu erreichen im Stande sind. Wäre solches der Fall, so müsste das letzte Stückchen der Loxodrome mit irgend einem Meridian zusammenfallend diesen unter dem Winkel 0 treffen, d. h. dem Gesetze widersprechen, dass die Loxodrome alle Meridiane, welchen sie begegnet, unter gleichem Winkel schneide.

60. Kapitel.

Mathematiker an deutschen Universitäten.

Deutschland hat in dem Zeitraume des XIV. Abschnittes so viele Persönlichkeiten hervorgebracht, welche genannt werden müssen, dass nothwendigerweise eine gewisse Anordnung zu treffen ist, welche die Uebersicht uns ermögliche. Demgemäss werden wir zuerst von der Mathematik an den Universitäten handeln und dabei geographisch von Osten nach Westen fortschreiten. Dann aber sprechen wir von den viel zahlreicheren Mathematikern, welche nicht an einer Universität wirksam waren, und müssen bei ihnen als neuen Eintheilungsgrund das engere mathematische Gebiet wählen, auf welchem sie ihr Arbeitsfeld fanden. Wir geben den Rechenmeistern die erste Stelle,

knüpfen an sie die Cossisten an, dann die Geometer mit Einschluss derjenigen, welche dem besonderen mehr rechnenden Kapitel der Geometrie, welches den Namen der Trigonometrie führt, ihre Kräfte widmeten.

Wir knüpfen unmittelbar an Früheres an, wenn wir Wien als die Hochschule nennen, welche vorzugsweise die mathematischen Wissenschaften pflegte. Maximilian I., über dessen Verdienste um das deutsche Reich die Ansichten noch so weit auseinander gehen können, ohne zu beeinträchtigen, was er für seine österreichischen Erblande, was er insbesondere für seine Hauptstadt Wien war, wusste in den letzten Jahren des XV. Jahrhunderts Männer an die dortige Universität zu ziehen, welche ihr zu einer noch nicht erreichten Höhe verhalfen [1]. Konrad Celtis, der berühmte Wanderprediger des Humanismus, der von Ort zu Ort sein Wissen und seine Leidenschaften, seinen Trieb zu lehren und zu dichten, seine in jedem Sinne rastlose Thätigkeit trug, kam 1497 nach Wien. Mit ihm kam sein Freund Andreas Stöberl aus Oettingen im Ries, bekannter unter der lateinischen Namensform als Stiborius [2]. Beide wurden hervorragende Mitglieder der von Ofen nach Wien verlegten Donaubruderschaft, eines gelehrten Kreises, welcher Geschichte, Mathematik und Musik pflegte, und aus welchem eine eigentlich wissenschaftliche Vereinigung mit besonderen Satzungen und feierlicher Eröffnung am 4. Februar 1502 herauswuchs, gewissermassen die erste Akademie der Wissenschaften in Deutschland. Ihr Name war der des *Collegium poetarum et mathematicorum*, und der Vorsitzende der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abtheilung war Johannes Stabius [3] († 1522), der eben erst in Nürberg am Chor der St. Lorenzkirche eine berühmte Sonnenuhr angefertigt hatte, welche in unserem Jahrhunderte unter fachkundiger Leitung wieder hergestellt worden ist [4], der andrerseits auch eine flächentreue Landkartenzeichnung erdachte, wahrscheinlich die älteste, welche grade diese Seite der Aufgabe bildlicher Darstellung von Theilen der Erdoberfläche bestimmt ins Auge fasste. Von Ergebnissen, welche aus der Gründung des genannten Collegiums für unsere Wissenschaft hervorgegangen wären, lässt sich nichts berichten, es sei denn, dass wir als solche die Errichtung von zwei mathematischen Lehrstühlen an der Wiener Universität gelten lassen, welche Maxi-

---

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 36—41 und S. 51—60. Günther, Unterricht Mittela. S. 249—264. [2]) Aschbach, Geschichte der Universität Wien II, 374—376. [3]) Ebenda S. 363—373. [4]) Günther, Unterricht Mittela. S. 252 Note 1.

milian vollzog, und wozu er die Anregung, wenn nicht von dem Collegium als solchem, doch sicherlich von einflussreichen Mitgliedern desselben erhalten hatte, die alle in einer oder der andern Weise an der Universität lehrten, beziehungsweise vielleicht lehren wollten. Celtis lehrte unter Anderem mathematische Geographie[1]) unter Zugrundelegung eines gereinigten Textes des Ptolemäus und unter Erläuterung des Vorgetragenen an einer künstlichen Erd- und Himmelskugel, Vorrichtungen, welche vermuthlich damals zuerst beim Unterrichte benutzt wurden.

Von den beiden mathematischen Professuren erhielt Stiborius die eine, zur anderen wurde 1503 Rosinus, das ist Stephan Rösel aus Augsburg, ernannt, der 1501 von Krakau nach Wien übergesiedelt war, und ebendort 1533 verstarb. Wie lange er dem ihm anvertrauten Lehramte vorstand, ist nicht bekannt. Von seinen schriftstellerischen Leistungen erwähnen wir einer in deutscher Sprache geschriebenen *Praktik*, ein Titel, der uns von De la Roche her (S. 373) schon bekannt ist. Stiborius behielt seine Professur nur ganz kurze Zeit. Bereits 1503 hatte sie einen neuen Inhaber Tannstetter.

Georg Tannstetter[2]) war etwa 1480 in Rhein am Lech geboren und hatte sich, da Rain in seiner Heimath so viel wie Grenzpfad bedeutete, den lateinischen Namen Collimitius beigelegt. Zum Magister wurde er in Ingolstadt ernannt, und von dort kam er nach Wien. Neben einer fruchtbaren Thätigkeit als Schriftsteller und Lehrer, von der gleich noch die Rede sein muss, widmete er sich auch der Heilkunde und zwar mit solchem Erfolge, dass Maximilian ihn als Leibarzt an seine Person fesselte, ihm bei dieser Gelegenheit den Adelstitel Tannstetter von Thamnau verleihend. Er war auch 1519 um den Kaiser bei dessen Tode im Schlosse zu Wels. Er selbst starb 1530. Als Schriftsteller bemühte sich Tannstetter namentlich um die Drucklegung damals schon klassischer Werke, ein wahres Verdienst in einer Zeit, in der es immer noch galt, Gutes durch Vervielfältigung zum Allgemeingute zu machen, und wenn die Nachwelt in der Verleihung des Beiwortes gut auch nicht immer der damaligen Gegenwart beipflichtete, so hat sie unter allen Umständen dankbar anzuerkennen, dass ein Lefèvre d'Etaples, ein Orontius Finaeus, ein Tannstetter vielleicht durch jene Drucklegungen Schriften vor dem Untergange bewahrt haben, die auch so noch zu den grössten buchhändlerischen Seltenheiten geworden sind, und ohne deren Kenntniss wir über gar Vieles noch mehr im Unklaren wären, als wir es

[1]) Aschbach l. c. II, 62. — Günther l. c. S. 250 Note 2. [2]) Poggendorff II, 1067. — Aschbach l. c. II, 271—277.

sind. Das erste durch Tannstetter's Vermittelung gedruckte Werk erschien 1514 in Wien bei den Brüdern Leonhard und Lucas Alantsee, welche von 1498 bis 1522 aus ihrer Druckerwerkstätte im Ganzen 109 Werke hervorgehen liessen, eine für die damalige Zeit bedeutende Zahl[1]). Der Band von 1514 ist eine Vereinigung[2]) der Tabulae eclypsium von Peurbach und der Tabula primi mobilis von Regiomontan. An der Spitze steht als Einleitung[3]) *Viri mathematici, quos inclytum Viennae gymnasium ordine celebres habuit*, mithin eine Art von Geschichte der Wiener Mathematiker, welche die Hauptquelle dessen geworden ist, was man von der dortigen mathematischen Schule weiss. Bei Nennung des Stiborius, als dessen Schüler Tannstetter sich bezeichnet, giebt er ein Verzeichniss von dessen reichhaltiger Büchersammlung. Ausserdem geht den Peurbach'schen Tafeln noch eine Vorrede des Stiborius voraus[4]), welche weitere Namen deutscher Mathematiker aufbewahrt hat. Ein zweiter gedruckter Band von 1515 ist eine Vereinigung der fünf wichtigsten Schriften der mittelalterlichen Mathematik[5]), Schriften, welche unsere Leser insgesammt kennen: die Arithmetik von De Muris, die Proportionenlehre von Bradwardinus, die Latitudines von Oresme in der durch Blasius von Parma erläuterten Ausgabe, das Rechnen mit ganzen Zahlen von Peurbach, das Bruchrechnen von Johann von Gmunden bilden den Band, welchen Tannstetter einem Schüler, Bunderl, zu lieb zum Drucke befördert hat. Dessen Inhalt bildete sonach offenbar einen wesentlichen Theil des Stoffes, welchen der Schüler sich anzueignen angewiesen war. Unter den eigenen Schriften Tannstetter's erwähnen wir noch eine mit Stiborius gemeinsam verfasste. Papst Leo X. hatte die Frage der Kalenderverbesserung sich angelegen sein lassen und von Kaiser Maximilian die Unterstützung der Wiener Mathematiker erbeten[6]). Die Universität um Rath gefragt ernannte Stiborius und Tannstetter zur Anfertigung eines Gutachtens, welches handschriftlich sich erhalten hat. Das Zusammenwirken mit einem gelehrten Freunde entsprach vollständig den Neigungen Tannstetter's, der auch freilich ohne nennenswerthe Erfolge versuchte, in der *Collimitiana* genannten Gesellschaft einen Ersatz für das nach dem Tode des Celtis eingegangene poetisch-mathematische Collegium zu schaffen[7]). Unter Tannstetter's Verdiensten stand ohne Zweifel seine Lehrthätigkeit obenan. Rühmen ihn doch die Schüler, so oft sie schriftstellerisch zu Aeusserungen Gelegenheit fanden, um die Wette.

---

[1]) Allgem. deutsche Biographie I, 170. [2]) Kästner II, 526 flgg. [3]) Ebenda S. 529—532. [4]) Ebenda S. 532 Nr. 8. [5]) Denis, Wiens Buchdruckereigeschicht bis MDLX (Wien 1782) S. 134 flgg. [6]) Aschbach l. c. II, 376. [7]) Ebenda S. 273.

Einer dieser Schüler war der steiermärker Astronom und Arzt Andreas Perlacher[1]), und dessen Schüler wieder war Johann Vögelin[2]) aus Heilbronn. Letzterer begann seine eigene Lehrthätigkeit an der Domschule zu Augsburg. In Wien nahm ihn sodann Tannstetter als Gehülfen, um seine Vorlesungen ersatzweise zu halten, wenn er selbst ärztlich in Anspruch genommen dieselben aussetzen musste. Im Jahre 1528 wurde Vögelin mit der damals erledigten mathematischen Professur bedacht und hatte namentlich den Lehrauftrag für die Sphaerik des Theodosius, die er 1529 im Drucke herausgab[3]). Vögelin ist aber wesentlich durch eine andere schriftstellerische Leistung bekannt, durch sein *Elementale geometricum ex Euclidis geometria* von 1528. Euklid's Elemente bildeten, wie wir uns erinnern (S. 251—254), einen Lehrgegenstand der Universitäten, aber doch nur in sehr beschränkter Weise. Die vier ersten Bücher der Elemente oder, wenn man von der Proportionenlehre in einem Athem mitreden will, allenfalls die fünf ersten Bücher waren der Meistbetrag dessen, was den Studirenden geboten wurde. Sollte um dieses Stoffes willen der Schüler genöthigt werden, eine der im Preise kostbaren umfangreichen Euklidausgaben anzuschaffen, oder sollte er ohne gedrucktes Hilfsmittel den Vorlesungen folgen müssen? Das Erstere schien vielleicht unerreichbar, jedenfalls unzweckmässig, das Zweite widersprach allen Gewohnheiten der Zeit. Desshalb liess ein gewisser Lacher[4]) aus Mersburg am Bodensee 1506 in Frankfurt an der Oder einen besonderen Abdruck der vier ersten Bücher nach der Ausgabe des Campanus bewerkstelligen. Etwas selbständiger ging Vögelin vor, der es sich angelegen sein liess, das Nothdürftigste aus der euklidischen Geometrie der Ebene zu wenigen Druckbogen zusammenzustellen, wofür er freilich einer anderen Ausdrucksweise sich bedient, wenn er in der Widmung an Tannstetter sagt[5]), er habe zum Vortheile aller Studirenden diejenigen Sätze aus der Geometrie Euklid's ausgezogen, welche häufiger bei Beweisen vorkommen, und welche ziemlich nahe daran sind, zum Gipfelpunkte der Wissenschaften hinzuführen. Armseliger Gipfelpunkt, aber noch armseligere Genügsamkeit der Zeit, welche Vögelin's kleinen Auszug in wiederholten Nachdrucken zu Tage förderte und an den verschiedensten Anstalten

---

[1]) Aschbach, l. c. II, 339—343. [2]) Ebenda S. 340 und S. 342. — Günther, Unterricht Mittela. S. 58 und S. 256. [3]) Ueber diese Ausgabe vergl. Nizze's deutsche Ausgabe des Theodosius (Stralsund 1826), Vorrede pag. VI. [4]) Kästner I, 302—305. [5]) *Propter omnium studiosorum commoda ex Euclidis Geometria eas dumtaxat excerpi Propositiones, quae in demonstrationibus linearibus crebrius observantur, quaeque satis prope sunt ad disciplinarum culmen perducere*

mit Vorliebe benutzen liess! Geometrie, das sehen wir auch aus dieser Thatsache wieder, war nicht die starke Seite der deutschen Mathematiker im Allgemeinen, und um so höher werden wir diejenigen zu stellen haben, welche grade auf diesem Gebiete sich auszeichneten.

Ausser Vögelin war ein zweiter Schriftsteller Schüler Tannstetter's und, wenn auch ohne Inhaber einer der beiden Professuren zu sein, Lehrer an der wiener Universität, Heinrich Schreiber aus Erfurt, genannt Grammateus[1]). Er hat 1507 bis 1512 in Wien[2]) studirt, wo Stiborius und Tannstetter seine Lehrer waren, dann in Krakau und hat dort schon 1514 einen *Algorismus proportionum* verfasst. Nach Wien übergesiedelt, wo er 1518 Procurator der sächsischen Nation war, ein Ausdruck, welcher auf die damals übliche Einreihung der Studenten in Nationen mit erwählten Führern sich bezieht, war er gleichzeitig Lehrer, wie aus der Einleitung zu seinem gleich zu erwähnenden Rechenbuche hervorgeht. Im Jahre 1521 wurden die Hörsäle der Wiener Universität wegen einer Seuche geschlossen, Grammateus begab sich damals über Nürnberg nach Erfurt zurück. Später war er wieder in Wien und starb daselbst 1525, als er eben neuerdings zum Procurator gewählt war[3]). In Nürnberg[4]) erschien 1521 sein seit 1518 vollendetes Rechenbuch in deutscher Sprache. Der Titel, welcher eine vollständige Inhaltsangabe in sich schliesst und dadurch allein schon bemerkenswerth ist, lautet wie folgt: „Ayn new künstlich Buech welches gar gewiss und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen practic, regeln falsi und etlichen regeln Cosse mancherley schöne und zuwissen notürfttig rechnung auf kauffmannschafft. Auch nach den proportion der kunst des gesangs jm diatonischen geschlecht ausz zutaylen monochordum, orgelpfeyffen und andere jnstrument ausz der erfindung Pythagore. Weytter ist hierjnnen begriffen buechalten durch das zornal, Kaps und schuldbuch. Visier zu machen durch den Quadrat und triangel mit vil andern lustigen stücken der Geometrey. Gemacht auf der löblichen hoen schul zu Wienn in Osterreich durch Henricum Grammateum, oder schreyber von Erffurdt der sieben freyen künste Maister." Als Einleitung dient eine Widmung an Johannes Tschertte mit der Ort- und Zeitangabe Wien 1518. Tschertte, sonst auch Schertte und Tzerte genannt, war bürgerlicher Rathsherr in Wien, der Mathematik

---

[1]) Denis, Wiens Buchdruckereigeschicht bis MDLX, S. 181 flg. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 36—38 und S. 51—54. — Günther, Unterricht Mittela. S. 258 und häufiger. — Unger S. 47 und häufiger. — Christ. Friedr. Müller, Henricus Grammateus und sein Algorismus de integris. Zwickau 1896. [2]) Müller l. c. S. 8 Note 34 und S. 10—11. [3]) Ebenda S. 16. [4]) Ebenda S. 18.

aber so kundig, dass Tannstetter ihm in seinem Mathematikerverzeichnisse einen Platz eingeräumt hat[1]). Andere Beziehungen Tschertte's zu Mathematikern werden im 63. Kapitel Erwähnung finden. Ihm also widmete Grammateus sein Buch, als demjenigen, der ihn ermuntert habe, ein solches „den unwissenden und sondern liebhabern der kunst an den tag zu bringen", nachdem er ihm vorher Einsicht davon gegeben. Titel und Beschreibung des in mehrfachen Auflagen gedruckten Buches lassen erkennen, dass es mit Zahlenrechnen und Algebra, mit Buchführung und Geometrie zu thun hat, dass es also eine gewisse Vollständigkeit anstrebte, wie Paciuolo sie in seiner Summa erreicht hat. Dass italienische Druckschriften und unter ihnen die Summa damals in Wien zu Handen sein konnten, ist keinem Zweifel unterworfen, und dass die aus Humanisten zusammengesetzte wiener Schule mit Vorliebe bei italienischen Schriftstellern sich Rath suchte, kann ebenfalls nur als selbstverständlich erscheinen. In der That erinnert auch Grammateus sehr an das Vorbild Paciuolo's, ohne desshalb eine vollständige Wiederholung desselben zu sein. So lässt Grammateus erstmalig unter deutschen Schriftstellern die Verdoppelung und Halbirung weg, weil sie im Begriffe des Multiplicirens und Dividirens mit enthalten seien, wie wir (S. 310) bei Paciuolo es fanden, während er in dem 1514 in Krakau gedruckten *Algorithmus proportionum* die Duplatio und Mediatio noch besonders betrachtete. Eine Verdoppelung und Halbirung eines Verhältnisses war Erhebung zum Quadrate und Quadratwurzelausziehung, und deren Einzelbetrachtung hat niemals aufgehört zweckmässig zu sein[2]). In dem deutschen Rechenbuche weicht dann Grammateus darin von Paciuolo ab, dass er an die Addition nicht die Subtraction, sondern die Multiplication anschliesst, weil „in dieser operation werden funden alle aigenschafft der addition". Beim Addiren soll man „hab fleiss dass die figuren gleich stehen uber einander"[3]) u. s. w. Bei der Bruchlehre[4]) wird die Addition, Subtraction und Division durch Zurückführen der beiden mit einander in Verbindung tretenden Brüche auf gemeinsamen Nenner vollzogen. Näherungsweise Quadrat- und Kubikwurzeln zu ziehen, werden die Zahlen nach rechts hin durch Nullen verlängert, deren Anzahl ein Vielfaches von 2, beziehungsweise von 3 ist, wie wir solches wiederholt gelehrt fanden. Bei der Regeldetri werden Buchstaben angewandt[5]). „Wie sich hadt *a* zum *b* also hat sich *c* zum *d*." Neben dem Zahlenrechnen ist fortwährend auch das Rechnen auf den Linien gelehrt. In dem algebraischen Abschnitte[6])

[1]) Kästner II, 532. [2]) Müller l. c. S. 18. [3]) Unger S. 73. [4]) Ebenda S. 48. [5]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 38 Note 1. [6]) Ebenda S. 51—54. — Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 35.

beginnt nach Grammateus „ain newe und besunder art der rechnung gezogen auss den regeln Cosse gleicformig in der übung allain das die namen der quantitet sein verandert“. Er fängt seine Betrachtung damit an, dass er die Reihe der von 1 an sich fortwährend verdoppelnden Zahlen hinschreibt

$$1 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 32 \,.\, \text{etc.}$$

Von diesen heisst 1 der numerus, dann 2 die erste Quantität *prima*, 4 die andere Quantität *secunda*, 8 die dritte Quantität *tertia* u. s. w. Diese Reihe und neben ihr die Reihen, welche aus den Potenzen von 3, 4 u. s. w. entstehen, bilden ihm die Grundlage der Gleichungslehre, denn in den 7 überhaupt in Erörterung gezogenen Gleichungsformen (als deren Musterbeispiele $2x = 4$, $3x^2 = 27$, $2x^3 = 128$, $2x^2 + x = 55$, $2x^2 + 18 = 15x$, $12x + 24 = 2\frac{10}{49}x^2$, $5x^4 = 20480$ angegeben sind) seien zuerst zwei auf einander zunächst folgende Glieder einer Reihe betrachtet, dann zwei Glieder, zwischen welchen eines fehle, zwei Glieder, zwischen denen zwei fehlen u. s. w. Die Progression, aus welcher hier die Gleichung abgeleitet wird, haben wir (S. 244) in der Dresdner Algebra angetroffen; die Namen *prima*, *secunda*, ... mahnen auf's deutlichste an Chuquet's Erstzahlen, Zweitzahlen, ... (S. 355). Müssen wir neuerdings auf die Aufgabe hinweisen, diese Aehnlichkeiten zu erklären? Genügt es nicht daran zu erinnern, dass Italien uns als dasjenige Land erschien, von wo die Allen gemeinsame Quelle stammen muss? Die Algebra des Grammateus wendet fortwährend die Zeichen + und — an. Das Buchhalten ist, soweit bekannt, durch Grammateus zuerst in deutscher Sprache gelehrt worden[1]). Die im Titel enthaltenen Namen *Zornal* und *Kaps* bedeuten Journal und Kapsel, also das Tagebuch und das Cassabuch als Aufzeichnung des in einer Kapsel verwahrten baaren Geldes. In Erfurt hat Grammateus im Jahre 1523 einen lateinischen *Algorismus de integris* herausgegeben. Die vier einfachen Rechnungsverfahren nebst der Regeldetri sind darin in ganzen Zahlen mit mustergiltiger Klarheit gelehrt[2]). Auf der letzten Seite des Algorismus integris findet sich als *Regula generalis pro solutione quorundam exemplorum* die indische Umkehrungsrechnung, welche Leonardo von Pisa (S. 22) als Regula versa gelehrt hat.

Schüler des Grammateus war ein Mann, welcher, wie es scheint, den grössten Theil seines Lebens in Wien zubrachte, welcher aber der wiener Universität als Lehrer nie angehört hat. Es ist eine be-

---

[1]) Unger S. 47—48. [2]) Müller l. c. S. 21—33 giebt einen Abdruck der sehr seltenen. Schrift.

wusste Folgewidrigkeit, welche wir uns zu Schulden kommen lassen, wenn wir an dieser Stelle anfangen von ihm zu reden, und dennoch thun wir es, um ihn nicht loszureissen von dem Boden, auf welchem er erwachsen ist, und dessen Spuren überall in ihm sich nachweisen lassen. Christoph Rudolff[1]) ist in Jauer geboren. Sein Geburtsjahr ist ebensowenig bekannt wie sein Todesjahr. Die von ihm veröffentlichten Schriften sind eine Coss von 1525, eine Beispielsammlung von 1530 „seynen schülern zu sonderer übung auch allen handthierungen personen zu nutz und gutem verfertigt", ein Rechenbuch von 1532 (die Vorrede ist allerdings schon von 1526), welches 1540 zum wiederholten Abdrucke kam. Die Druckorte wechseln. In Strassburg, in Nürnberg, in Augsburg verliessen die Bücher die Presse, die insgesammt in Wien geschrieben sind. Wir dürfen vielleicht aus diesen Beziehungen Rudolff's zu Druckern an weit entlegenen Wohnsitzen einen Schluss auf die weitreichende Bekanntschaft seines Namens ziehen. Zum gleichen Schlusse führt der Umstand, dass 1552 kein Exemplar der Coss mehr aufzutreiben war, wenn man auch den drei- und vierfachen Preis dafür zu zahlen sich erbot[2]), und dass darum eine neue Ausgabe durch Michael Stifel zum Drucke besorgt wurde. Rudolff selbst war demnach 1552 jedenfalls nicht mehr unter den Lebenden[3]). Wir haben den Namen Rudolff geschrieben, wie er fast überall in den Drucken sich findet, auch in der zweiten Ausgabe der Coss, während auf deren Titelblatte und in einigen Ueberschriften Ludolff steht, ein vereinzeltes Vorkommen, welchem grosses Gewicht unmöglich beigelegt werden kann. Die Coss ist dem Fürstbischof Sebastian von Brixen zugeeignet, und in dem Widmungsschreiben bezeichnet sich Rudolff als „liephaber der freien künsten". Berücksichtigt man, dass dieser Zusatz in keiner der späteren Schriften vorkommt[4]), und dass, wie oben bemerkt, die Beispielsammlung von 1530 den Schülern zur Uebung angefertigt wurde, so wird daraus zu entnehmen sein, dass Rudolff doch allmälig vom freien Gelehrtenthum zum Lehrer übergegangen ist, wenn auch ausser Beziehung zur wiener Universität. Die Coss zerfällt in zwei Theile[5]), deren erster

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXIX, 571—572. [2]) Vorrede zur zweiten Ausgabe. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie S. 340 giebt das Geburtsjahr 1499, das Todesjahr „etwa 1545". Wir wissen nicht, worauf die erstere Zahl sich gründet. Die zweite wird als zwischen 1540 und 1552 gelegen, also zwischen einem Jahre, in welchem Rudolff noch lebte, und einem zweiten, in welchem er verstorben war, annähernde Richtigkeit besitzen. [4]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 38 Note 2. [5]) Drechsler, Scholien zu Christoph Rudolph's Coss (Programmabhandlung des Vitzthum'schen Geschlechtsgymnasiums in Dresden zu Ostern 1851).

der Rechenkunst gewidmet ist, während der zweite mit Gleichungen sich beschäftigt. Der erste Theil entspricht also inhaltlich dem Rechenbuche von 1532, ohne mit demselben sich vollständig zu decken. Im Rechenbuche ist z. B. das Wort *Million* benutzt, aber allerdings nur ein einziges Mal[1]). Im Rechenbuche findet sich ferner die Regel, die Division durch 10, 100, 1000 u. s. w. lasse sich so ausführen, dass man so viele Ziffern, als der Divisor Nullen besitze, „mit einer virgel“ abschneide[2]), mit anderen Worten: Rudolff ist ähnlich wie vor ihm Piero Borgi (S. 305) der Erfindung der Decimalbrüche recht nahe gewesen, aber dass es eine Erfindung war, erkannte die Zeit noch nicht. Das Rechenbuch lehrt nach dem Ziffernrechnen das auf den Linien[3]), welches bei einfachen Aufgaben am bequemsten sei, während es „zu subtilen Rechnungen zum dickermal[4]) seumlich“ sich erweise. Aus der Coss erwähnen wir nur die im 7. Kapitel des I. Theils vorhandenen Wurzelzeichen $\sqrt{}$, $\sqrt{}\!\sqrt{}\!\sqrt{}$, $\sqrt{}\!\sqrt{}$ für Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzel. Offenbar haben die Pünktchen, von denen (S. 243) die Rede war, sich zu Strichen verlängert, welche alsdann durch feinere Züge mit einander in Verbindung traten; die Ursprungsfrage ist damit nicht im Geringsten geklärt. Rudolff kannte auch den Kettensatz[5]) und gab, wenn auch ohne eigentliche Herleitung, die Entstehung desselben aus der Regeldetri an. Vielleicht ist bei Rudolff erstmalig hervorgehoben, dass beim Kettensatze mit Vortheil eine Kürzung der einzelnen Zahlen auftreten könne. So weit, was wir an dieser Stelle von Rudolff zu sagen beabsichtigten. Wir kehren zu ihm zurück, wenn wir von den ausserhalb der Universitäten stehenden Cossisten reden.

Wir gehen zur Universität Leipzig über. Am Anfange des Jahrhunderts lehrte dort Udalrich Kalb als Professor der Mathematik, und sein Schüler, der Baccalaureus Balthasar Licht[6]), widmete ihm dankbar seinen *Algorithmus linealis* genau nach der Art, wie in den nürnberger Rechenschulen das Verfahren gelehrt wurde. Der Druck erfolgte 1500 bei Lotter in Leipzig[7]). Seit 1513 erschien in Krakau und zwar in etwa 15 Auflagen ein *Algorithmus linealis* von Johannes de Landshut[8]). Wieder etwas später 1520 erschien in Wien ein anderer *Algorithmus linealis* von einem leipziger

---

[1]) Das Wort Million kommt schon in der Ausgabe von 1532 vor und zwar Blatt 𝔄 III recto, und nicht, wie meistens behauptet wird, erst in der Ausgabe von 1540. Wertheim brieflich. [2]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 39. [3]) Ebenda S. 40. [4]) zum dickermal = zum Oefteren (holländisch dikwijls). [5]) Unger S. 92. [6]) Kästner I, 84—88. [7]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplement S. 24. Die von Kästner beschriebene Ausgabe ist aus dem Jahre 1513. [8]) Curtze brieflich.

Professor, nämlich von Heinrich Stromer[1]). Dieser geistreiche Gelehrte aus Auerbach in der bayrischen Oberpfalz gebürtig und häufig mit dem Namen seines Geburtsorts bezeichnet, wie er auch diesen Namen auf einen von ihm in Leipzig erbauten Hof und Keller übertrug, war seines eigentlichen Faches Mediciner und beispielsweise 1523 Decan der medicinischen Facultät in Leipzig. Jedenfalls lehrte er auch Arithmetik, denn in der an Andreas Humelhaym (einem Verwandten seiner Frau Anna Humelhaym) gerichteten Widmung spricht Stromer von seinen Schülern, für welche er schreibe, damit ihnen die Rudimente nicht verborgen blieben, *ne te ceterosque meos discipulos rudimenta eius prorsus laterent.* Ob dabei an Universitätsvorlesungen zu denken ist, erscheint einigermassen fraglich. Wir neigen eher der anderen Meinung zu, es habe sich ausserhalb des Universitätsrahmens um die Unterweisung eines Stromer näher stehenden Kreises gehandelt. Stromer's Algorithmus linealis dürfte vermöge des in unserer Zeit erfolgten Wiederabdrucks leichter als andere ähnliche Schriften zur Hand sein; überdies ist das Latein desselben unvergleichlich viel besser als das vieler dem Anfange des XVI. Jahrhunderts angehörenden Bücher, ein Zeichen für die höhere allgemeine Bildung des Verfassers. Diese beiden Umstände vereint veranlassen uns grade an ihn einige Bemerkungen über das Linienrechnen anzuknüpfen und dadurch zu ergänzen, was wir (S. 216) nur in aller Kürze erörtert haben. Beim Numeriren wird der Grundgedanke des Linienrechnens hervorgehoben, dass nämlich ein Rechenpfennig auf einer Linie eine Einheit um so höherer Ordnung bedeute, je weiter die Linie nach oben rücke, dass ein Rechenpfennig zwischen zwei Linien den halben Werth nur besitze als wenn er auf der oberen, den fünffachen als wenn er auf der unteren sich befände. Dem Numeriren ist das Eleviren und Resolviren angeschlossen. Ersteres bedeutet die Darstellung einer Zahl durch die wenigsten Rechenpfennige, indem man, wo immer eine Vereinigung und Zusammenfassung an höherer Stelle möglich ist, solches ausführt. Letzteres löst umgekehrt eine Einheit höheren Ranges in niedrigere auf, indem unter Benutzung einer grösseren Menge von Rechenpfennigen nach unten weiter gegangen wird, um die Zahl dort anzulegen. Diese beiden Hilfsbegriffe kommen bei den zwei folgenden Operationen, der Addition und Subtraction, in Betracht, nur dass beidemal das gleiche Wort Reduciren sowohl statt Eleviren als statt Resolviren gebraucht wird. Das Linien-

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie I, 638. Einen Abdruck des *Algorithmus linealis* besorgte S. Günther in den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften VI. Folge, 10. Band (1880).

rechnen Stromer's kennt noch die alten Rechnungsarten des Duplirens und Halbirens, wie nicht anders zu erwarten steht, da des Grammateus Rechenbuch noch nicht erschienen war, welches, wie wir wissen, für Deutschland den Abbruch mit dem alterthümlichen Gebrauche bezeichnet. Beim Dupliren werden die auf Linien stehenden Rechenpfennige verdoppelt, die in einem Zwischenraume befindlichen nach oben verschoben. Das Halbiren verfolgt den gleichen Grundgedanken in entgegengesetzter Weise. Beim Multipliciren beginnt man an der untersten Stelle und vervielfacht zeilenweise bei gleichzeitigem Eleviren. Das Dividiren theilt von oben nach unten unter gleichzeitigem Resolviren, und dabei wird das Rechnen mit Brüchen leise angedeutet. Gelangt man nämlich beim Theilen und Resolviren zu der untersten Linie, so ist ein Weiterrücken in verwandelter Form nicht mehr thunlich. Was alsdann bei der Theilung übrig ist heisst der Rest, und er als Zähler stellt mit dem Divisor als Nenner einen Bruchtheil eines Ganzen dar[1]). Dagegen hat der andere von uns erwähnte Schriftsteller über das Linienrechnen, Balthasar Licht, sich ausführlicher mit Brüchen beschäftigt, insbesondere mit ihrem Vorkommen in einzelnen Gliedern einer Regeldetri[2]). Stromer giebt nach dem Dividiren die Regel zur Summirung einer arithmetischen Progression, während er als Beispiel zur Anwendung der Regel nur die mit 1 beginnende Reihe der natürlichen Zahlen bis zu einer graden oder ungraden Endzahl benutzt. Dann kommt zum Schlusse die Regeldetri oder goldene Regel oder Kaufmannsregel[3]). Man hat bei ihr folgende drei Bedingungen zu beachten: 1. Die Fragezahl soll immer rechts stehen. 2. Die erste und die dritte Zahl sollen sachlich und im Namen übereinstimmen. 3. Die vierte aus der Regel hervorgehende Zahl muss immer der zweiten entsprechen. Dann verfährt man nach der Regel: Multiplicire die zweite Zahl mit der dritten, dividire das Product durch die erste, und im Quotient kommt die vierte Fragezahl heraus.

Die Universität Ingolstadt dürfte nächst und mit Wien diejenige gewesen sein, an welcher die Leitung eine gewisse Vorliebe für mathematische Studien bethätigte, und an welcher demzufolge auch mathematisch veranlagte Persönlichkeiten gern verweilen mochten. Stabius und Stiborius sind von Ingolstadt nach Wien gekommen, und Peter Apianus[4]) hat Ingolstadts wegen Berufungen nach

---

[1]) *relictum dicitur: quod simul tanquam numerator cum divisore fractionem integri constituit.* [2]) Kästner I, 87. [3]) *Sequitur Regula que nunc de Tri: nunc Aurea: nunc Mercatorum vocitatur.* [4]) Allgemeine deutsche Biographie I, 505—506 Artikel von Bruhns. — Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplement S. 15, 22, 56, 73 und Die deutsche

Leipzig, Tübingen, Wien und sogar über die deutschen Grenzen hinaus nach Padua und Ferrara ausgeschlagen. Dieser vielseitig gebildete Gelehrte, der in der Geschichte der Astronomie, der Geographie, ja sogar der Inschriftenkunde einen nicht minder ehrenvollen Platz als in der der Mathematik einnimmt, lebte von 1495 bis 1552. Sein deutscher Name Bennewitz oder Bienewitz wurde bald durch das latinisirte Apianus vollständig verdrängt. Der Geburtsort war Leisnig in Sachsen (etwa in der Mitte zwischen Dresden und Leipzig). An der Leipziger Universität hat Apianus vermuthlich unter Professor Kalb die mathematischen Studien begonnen. Unter seinen eigenen Schülern war später kein Geringerer als Kaiser Karl V., so dass es nicht Wunder nehmen kann, dass Apianus von engen Verhältnissen ausgehend als wohlhabender, ja reichbegüterter Edelmann gestorben ist, ein nicht von gar vielen Fachgenossen getheiltes Schicksal. Die Adelserhebung fand 1541 als Folge der Herausgabe eines dem Kaiser gewidmeten grossen astronomischen Werkes statt, welches überdies dem Verfasser ein Geschenk von 3000 Goldgulden eintrug, abgesehen davon, dass der Kaiser die Druckkosten deckte. Die erste Schrift, um deren willen wir es mit Apian zu thun haben, ist ein in deutscher Sprache verfasstes Rechenbuch: Ein newe und wolgegründt underweisung aller Kauffmanns Rechnung in dreien Büchern. Die Widmung führt die Zeitangabe des 7. August 1527, der Druck scheint aber erst 1532 stattgefunden zu haben. Andere Auflagen sind von 1537 und häufiger. Seit Grammateus war Apian wieder der erste Universitätslehrer, der ein deutsches Rechenbuch verfasste, und der durch jenen Vorgänger sich soweit beeinflussen liess, dass er die dort überwundene Verdoppelung und Halbirung nicht wieder in ihr missbräuchliches Gewohnheitsrecht einsetzte. Aber darum allein geben wir selbstverständlich Apianus keinen Platz in unserer Darstellung, und ebensowenig wegen der gleichmässigen Behandlung, die bei ihm Linienrechnen und Ziffernrechnen erfuhren, sondern wegen einiger anderen verdienstlicheren Besonderheiten. Apianus lässt in seinem Rechenbuche ausser der gewöhnlichen Neunerprobe auch die durch die Zahlen 6, 7, 8 oder durch irgend andere Zahlen zu und insbesondere die Probe durch das entgegengesetzte Rechnungsverfahren. Im ersten Buche ist von den geometrischen Progressionen die Rede, welche ähnlich wie es (S. 397) bei Grammateus hervorgehoben wurde, mit einer arithmetischen Reihe in Verbindung gebracht sind. Apian's Dar-

---

Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV. Supplement S. 17. — Günther, Peter und Philip Apian in den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften VI. Folge, 11. Band. — Unger, S. 51, 80, 83, 101.

stellung ähnelt noch mehr der von Chuquet, insofern als die arithmetische Reihe mit 0 beginnt. Apianus hebt auch die Brauchbarkeit jener Reihen beim Multipliciren hervor, indem man die entsprechenden Glieder der arithmetischen Reihe addire und nennt diese letzteren die Signaturen. Das ist aber ein besonderer Kunstausdruck, und Schaffung einer neuen Benennung durch Kunstausdrücke beweist immer, dass wer sie schuf der Bedeutung des Gegenstandes sich bewusst war. Im zweiten Buche ist die Kubikwurzelausziehung

$$\sqrt[3]{14886936} = 246$$

deutlicher dargestellt, als es wohl irgend früher geschah[1]). Apianus giebt den nach einander gefundenen Ziffern 2, 4, 6 die Stellenzeiger a, b, c und lässt die Nebenrechnungen zur Auffindung von $3a^2$, $3a$, später von $3(a+b)^2$, $3(a+b)$ am Rande ausführen, wo sie sehr übersichtlich hervortreten. Im dritten Buche ist das Dividiren unterwärts gelehrt[2]), welches zwar als *Divisio danda* in Italien schon mindestens ein halbes Jahrhundert bekannt war, aber in Deutschland jetzt erstmalig auftrat, freilich ohne rasch allgemeinen Eingang zu finden. Auch hier sind Buchstaben als Stellenzeiger der allmälig herunterzuziehenden Ziffern des Dividenden vorhanden. Heutiger Sprech- und Schreibweise gegenüber ist zu bemerken, dass Apianus eine Zahl nicht durch, sondern in eine andere getheilt sein lässt, und dass die Theildividenden, wie sie nach einander in Betracht kommen, unter einander gestellt werden, ohne ihrer Rangordnung im Dividenden entsprechend nach rechts fortzurücken. Ein Beispiel des Apianus sieht darnach so aus:

Dividirt 378784 in 224
Steht also.

abc	quotient
378784	1691
224	
1547 *a*	
1344	
2038 *b*	
2016	
224 *c*	
000	

Endlich ist im dritten Buche die Tolletrechnung (S. 224—225) gelehrt. Ein anderes Werk des Apianus sollte mit der Algebra sich beschäftigen. Das schon erwähnte Widmungsschreiben zum Rechenbuche verspricht ausdrücklich: „die Regulam Cosse mit sampt dem Centi-

[1]) Treutlein, Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII. Supplement S. 72—78. [2]) Unger, S. 54 und 80.

loquio, darinne der kern ligt, wird ich in kürtzer Zeit (wil Got) auch in Druck geben", aber das Versprochene ist nicht erschienen, und was das Wort Centiloquium bedeuten sollte (etwa eine Beispielsammlung von 100 Textgleichungen?) ist durchaus fraglich. Ob Apianus auch der Geometrie seine Thätigkeit zugewandt hat, ist zweifelhaft. Ein *Liber de mensuratione vasorum cum artificiali partis vacuae inventione* wird zwar genannt[1]), allein diese entweder überhaupt nie gedruckte oder gänzlich verschollene Schrift dürfte nur einem bestimmten handwerksmässigen Bedürfnisse gedient haben, dessen wir früher (S. 237) Erwähnung gethan haben. Dem Titel nach kann es kaum etwas anderes als ein Visirbüchlein gewesen sein. Um so sicherer gestellt ist Apian's Beschäftigung mit dem Grenzgebiete geometrischer und astronomischer Forschung, mit der Trigonometrie. Können wir ihm doch schon als Verdienst anrechnen, dass er 1534 die seiner Zeit durch Gerhard von Cremona ins Lateinische übersetzte Astronomie des Dschâbir ibn Aflah (Bd. I, S. 749) in Nürnberg zum Drucke beförderte, aber dieser Uebersetzung schickte Apianus als Einleitung eine eigene Abhandlung voraus: *Instrumentum primi mobilis*, deren Bedeutung gewürdigt werden muss[2]), und ein Jahr früher bereits war er in seiner *Introductio geographica in doctissimas Verneri annotationes* auf ganz ähnliche Dinge[3]) eingegangen und hatte dort auf neun Seiten eine Sinustabelle zum Drucke gegeben, welche innerhalb des ersten Quadranten die Sinusse aller Winkel in Zwischenräumen von je einer Minute finden liess. Das Instrumentum primi mobilis ist eine Vorrichtung zur Auffindung des Sinus und des Sinus versus (oder 1 minus dem Cosinus) eines Winkels im ersten Quadranten mit der bei Ablesungen überhaupt erzielbaren Genauigkeit (Fig. 79). Ein rechter Winkel BAC ist durch den Kreisquadranten BC abgeschlossen[4]). Die Halbmesser BA und AC sind, die erstere Strecke von B nach A, die letztere von A nach C in eine gleiche Anzahl von n (bei Apian vorschlagsweise 100000) Theile getheilt, an denen Zahlen angebracht sind, welche die Bestimmung haben, das Ablesen zu erleichtern. Ueber AB sowie über AC als Durchmesser sind von den Mittelpunkten D und E aus die Halbkreise AHB und AKC be-

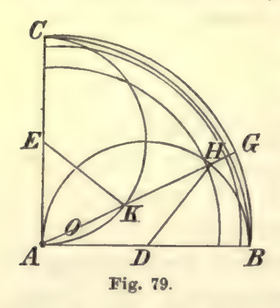


Fig. 79.

[1]) Günther, Peter und Philip Apianus S. 27. [2]) Kästner I, 578—581. Weit eingehender Günther l. c. S. 31—34. [3]) Günther l. c. S. 28—31. [4]) Wir haben die Druckschrift Apian's nicht zu Handen, glauben aber der Beschreibung Günther's l. c. S. 32 unter Annahme zweier Druckfehler, wo A und B vertauscht sind, unsere Figur und Erklärung entnehmen zu dürfen.

schrieben. Ersterer heisst *semicirculus versus*, letzterer *semicirculus rectus.* Auf der Halbirenden des Winkels BAC mit der Entfernung $\frac{AD}{2\sqrt{2}}$ von A wird ein neuer Mittelpunkt O bestimmt, von welchem aus drei concentrische Kreisbögen beschrieben werden, deren äusserster durch B und C geht, während die beiden inneren in kleiner Entfernung von jenem und von einander auf AB und AC aufstehen. Diese Kreisbögen begrenzen ein Stück Kreisring, auf welchem die Eintheilung von 0 bis 90^0 unter Angabe auch von Bruchtheilen von Graden in der Richtung von A nach C abgelesen werden kann. Endlich ist in A ein in beliebiger Richtung AG spannbarer Faden vorhanden. Nun sei $\sphericalangle GAB = \alpha$ und AG schneide in dieser Lage den semicirculus versus in H, den semicirculus rectus in K. Denkt man die Halbmesser jener Halbkreise DH, EK gezogen, so ist $\frac{\frac{1}{2}AH}{AD} = \frac{AH}{AB} = \cos\alpha$ und $BA - AH = BA$ sin vers. α. Ferner $\frac{\frac{1}{2}AK}{AE} = \frac{AK}{AC} = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$. Trägt man somit durch einen in A eingesetzten Zirkel $AI = AH$ auf AB und $AL = AK$ auf AC auf, was in unserer Figur unterblieb, um sie nicht weiter mit Buchstaben zu beschweren, so kann man in I die Strecke $BI =$ sin vers. α, in L diejenige $AL = \sin\alpha$ ablesen. Dass Apianus ein nicht minder feiner Höfling als Mathematiker war, bewies er dadurch, dass er in den drei sich durchsetzenden Kreisbögen AHB, AKC, BGC die Gestalt eines Fuchseisens erkannte, des Wappens der Freihern von Stadion, und dass er daraus Gelegenheit nahm, seine Schrift dem diesem Geschlechte entstammenden Bischofe Christoph von Augsburg, der sich ihm stets als Gönner erwiesen hatte, zuzueignen. Bemerkenswerth erscheint, dass Apianus nur vom Sinus, Sinus versus und Sinus Complementi (unserem Cosinus) Gebrauch machte. Die Tangenten finden sich nirgend bei ihm vor, so sehr Regiomontan's Tabula foecunda geeignet war, sie dem Astronomen zur Anwendung zu empfehlen.

Während der Zeit, von welcher hier die Rede ist, vollzog sich eine wissenschaftliche That an der Universität Basel. Dort starb 1541, dort lehrte zuletzt Simon Grynaeus der ältere[1]), der in Wien und Ofen, in Heidelberg und Tübingen vorher seine humanistische

---

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 10, Note 10 und 12. — Poggendorff I, 967. — Weissenborn, Die Uebersetzungen des Euklid durch Campanus und Zamberti S. 64.

Tüchtigkeit bewiesen hatte. In Basel gehörte seine Lehrthätigkeit vorzugsweise der Theologie an, selbstverständlich im Sinne der kirchlichen Reformbestrebungen, denen er sich vollständig angeschlossen hatte. Zugleich aber stellte er seine Kenntniss des Griechischen in den Dienst der Mathematik und gab 1533 in Basel die erste Ausgabe des Urtextes der euklidischen Elemente sowie der Erläuterungen des Proklos zu denselben in Druck. Wenige Jahre später, 1538, liess er erstmalig einen griechischen Almagest erscheinen. Unter dem Ausdrucke einer wissenschaftlichen That, dessen wir uns bedienten, verstanden wir in erster Linie die griechische Euklidausgabe. Sie war es wirklich durch die nunmehr einem Jeden gebotene Möglichkeit, sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Uebersetzungen desjenigen Werkes zu überzeugen, ohne welches, wie wir wiederholt sahen, ein mathematisches Wissen nicht gedacht werden konnte. Sie war es auch durch die als thatsächliche Folgerung sich ergebende Herausgabe der anderen grossen Geometer des griechischen Alterthums. Wieder in Basel erschien schon 1544 eine griechische Archimedausgabe unter der Leitung von Thomas Venatorius[1]), dessen deutscher Name Gechauff war.

Drei deutsche Universitäten Heidelberg, Tübingen, Wittenberg sind eng verknüpft durch ihre Beziehungen zu einem Manne, der, ohne Hervorragendes als Mathematiker geleistet zu haben, dennoch in einer Geschichte der Mathematik so wenig fehlen darf als in der Geschichte irgend einer Wissenschaft, aus der ein allgemeiner Unterrichtszweig geworden ist. Wir meinen natürlich Philipp Melanchthon[2]), der als Sohn des kurpfälzischen Waffenschmieds Georg Schwartzerd 1497 in Bretten geboren wurde und 1560 in Wittenberg starb. Von October 1509 bis Sommer 1512 war er an der Universität Heidelberg immatriculirt und erwarb sich dort im Juni 1511 das Baccalaureat. Bei seiner Bewerbung um die Magisterwürde wurde er wegen zu grosser Jugend zurückgewiesen. Darauf siedelte er im September 1512 nach Tübingen über und erlangte hier, aber auch nicht vor Januar 1514, den Grad eines Magisters der freien Künste. In Tübingen begannen Melanchthon's theologische Studien. Im Sommer 1518 folgte er einem Rufe nach Wittenberg, welcher Universität er fortan bis zu seinem Lebensende angehörte. Zuerst war er in Wittenberg als Professor der griechischen Sprache und Literatur angestellt. Im Jahre 1526 übernahm er dazu eine zweite theologische Professur,

---

[1]) Vossius pag. 56. — Doppelmayr S. 41, Note nn und S. 51—52.
[2]) Hartfelder, Philipp Melanchthon als *Praeceptor Germaniae* (VII. Band der *Monumenta Germaniae paedagogica*), Berlin 1889.

und von seinem thatkräftigen Eingreifen in die grosse kirchliche Bewegung der Zeit weiss die politische und Kirchengeschichte zu erzählen. Wissenschaftlich beschränkte seine Einwirkung sich gleichfalls keineswegs auf die beiden Fächer, mit welchen sein Beruf ihn verband. Die Bildung des Volkes, so weit die Ausdehnung des Wortes Bildung gefasst werden mochte, war das hohe Ziel, auf welches seine edlen Bestrebungen sich richteten. Darum gab die Mitwelt schon ihm den Namen *Praeceptor Germaniae*, darum bestätigt die Nachwelt dankbar das schon alte Wort und nennt ihn den ersten Lehrer Deutschlands. Allerdings haben wir dabei eine nicht unbedeutende Einschränkung vorzunehmen. Die Schule, deren Verbesserung und Verallgemeinerung Melanchthon und gleich ihm seinem Freunde Martin Luther am Herzen lag, war keineswegs die deutsche Volksschule. Wohl entstand diese am Anfange des XVI. Jahrhunderts aus den Katechisationen, welche mit der Jugend vorzunehmen die kursächsische Schulordnung von 1528 den Pfarrern vorschrieb, und zu deren Vorbereitung ein Unterricht nothwendig war, den der Pfarrer allmälig auf die Schultern des Küsters lud, der von diesem in der Woche abgehalten wurde und nach und nach vom Unterrichte in den Evangelien auf das Lesen, Psalmensingen, zuletzt auf das Schreiben sich ausdehnte. Wohl gab es daneben deutsche Schulen, Rechenschulen, Schreibschulen, durch ihre besonderen Namen deutlich zu erkennen gebend, was in jeder einzelnen gelehrt wurde, wobei wir den Umfang des Gelehrten nicht enge genug uns denken können. Aber für alle diese Schulen hat Melanchthon niemals Vorschriften gegeben. Er erachtete sie dessen sicherlich nicht werth. Erst die niedere Lateinschule, in drei Haufen (wir sagen dafür heute Classen) zerfallend und darum Trivialschule genannt, erfreute sich des Wohlwollens des für die Schule begeisterten Humanisten, der so sehr Humanist war, dass er einen Unterricht nicht würdigte, welcher nicht in lateinischer Sprache ertheilt wurde, also den Unterricht in der Lehrsprache als Vorschule zur Voraussetzung hatte. Die Schulmeister, sagte Melanchthon, sollen selbst so weit möglich nichts denn lateinisch mit den Knaben reden. Gelehrt wurde aber in allen drei Classen wieder kaum etwas anderes als Latein. Die Grammatik dieser Sprache zu beherrschen, einen reichen Wortschatz sich anzueignen, zahlreiche Schriftsteller zu lesen, selbst fliessend lateinisch sprechen zu können, darin gipfelte der Plan der Trivialschule. Die Erwerbung von Kenntnissen in Geschichte, in Geographie, im Rechnen wurde nicht einmal angestrebt, geschweige denn erreicht. Das Rechnen, wir haben es schon gesagt, veranlasste die Gründung besonderer Rechenschulen, deren Lehrer sich etwas Höheres zu sein dünkten als der Schreiblehrer

oder der Lehrer im Deutschen. Sie waren wesentlich Bildungsstätten für den Kaufmannsstand. Wer aber ausserhalb der Rechenschule Kenntnisse im Hantieren mit Zahlen sich verschaffen wollte, der musste, wenn ihm das Selbststudium zahlreich vorhandener Rechenbücher nicht genügte, zur Universität gehen. Hier begegnen wir wieder dem Einflusse Melanchthon's, welcher dringend verlangte und durchzusetzen wusste, dass die Wiener Einrichtung von zwei besonderen mathematischen Professuren unter den zehn Professuren der philosophischen Facultät, wie man jetzt statt des früheren Namens der Artisten zu sagen anfing, in Wittenberg und wo man sonst auf Melanchthon's Wort hörte, Nachahmung fand. „Die Anfangsgründe der Arithmetik, das Addiren und Subtrahiren sind unbedingt zum täglichen Gebrauche nothwendig und so leicht, dass Knaben sie erlernen können; die Regeln der Multiplication und Division erfordern allerdings ein wenig mehr Aufmerksamkeit, aber bei einiger Anstrengung werden sie doch bald begriffen.“ So lautet Melanchthon's Programm für den arithmetischen Inhalt von Universitätsvorlesungen. Es ist freilich geeignet, ein halb spöttisches, halb mitleidiges Lächeln hervorzurufen, aber vergessen wir doch Eines nicht: dass bei Neuschaffungen es meistens schwieriger ist, für den Inhalt die richtige Form, als für die Form den richtigen Inhalt zu finden. Waren erst die Lehrstühle vorhanden, so konnten allmälig deren Inhaber den Unterrichtsstoff den Zeitbedürfnissen nach ummodeln, und das ist geschehen. Darin besteht die ganze weitere in Deutschland und anderwärts allerdings zuerst unsäglich langsam fortschreitende Entwickelung des mathematischen Universitätsunterrichtes von drei Jahrhunderten. Melanchthon, der in Tübingen den Unterricht Stöffler's genossen hatte, eines Astronomen, welcher von der Zeitkrankheit der Sterndeutung mit genügender Stärke ergriffen war, um sie auf seine Schüler zu übertragen, nicht aber zugleich das Heilmittel streng geometrischer Prüfung ihnen vererbte, sah nun einmal nicht weiter, als wir es mit seinen Worten angegeben haben, und konnte über den eigenen Horizont hinaus auch Anderen nicht als Wegweiser dienen.

Innerhalb des Gesichtskreises, welchen er beherrschte, lag dagegen die Herausgabe classischer Werke, in erster Linie solcher von griechischen und arabischen Schriftstellern, in zweiter aber auch solcher, welche, neueren Ursprungs, vermöge der anerkannten Berühmtheit ihrer Verfasser als classisch gelten durften[1]). Aratus, Pto-

[1]) Vergl. das chronologisch geordnete Verzeichniss der Arbeiten Melanchthon's bei Hartfelder l. c. S. 579—620 mit 709 Nummern, wovon folgende hierher gehören: 44, 187, 228, 257, 502, 528.

lemäus, Proklus, Alfragan gehören zur ersten, Sacrobosco und Peurbach zur zweiten Gruppe, an deren Drucklegung Melanchthon mehr oder weniger thätig war. Selbst gleichzeitigen Schriftstellern von mathematischer Bedeutung erwies er sich gern nützlich. Wir werden auf Michael Stifel, zu dessen *Arithmetica integra* er eine Vorrede[1]) verfasste, noch zu reden kommen, eine andere Vorrede verfasste er zu Voegelin's *Elementale geometricum* (S. 394), welche alsdann unter Veränderung weniger Schlussworte einer 1546 bei Hervagius gedruckten lateinischen Euklidausgabe neuerdings beigegeben wurde[2]), wir meinen aber vorzugsweise Melanchthon's Declamationen. Declamationen nannte man lateinische Reden, welche bei festlichen Gelegenheiten gehalten wurden, und deren Uebung Melanchthon in Wittenberg einbürgerte. Elegante Sprache war dem Humanistenkreise, der die Professuren an den deutschen Hochschulen für sich und seine Freunde in Erbpacht genommen hatte, die Hauptsache, und da diese Hauptsache wiederum nicht Jedermanns Sache war, so wurde es Uebung, dass mancher Redner die ihm aufgetragene Declamation von einem Anderen schreiben liess, ja es wird erzählt[3]), dass Melanchthon die meisten öffentlichen Reden verfasste, welche in Wittenberg gehalten wurden, und dass es vorgekommen sei, dass der Festredner schon begonnen hatte, während Melanchthon an seinem Schreibtische noch beschäftigt war, das Ende der Rede niederzuschreiben. Eine Declamation über Regiomontanus schrieb und hielt Melanchthon selbst. Eine weitere über den Nutzen der Arithmetik war die Antrittsrede für den 1536 als Professor der Mathematik nach Wittenberg berufenen Rhäticus, und ihr sind die Worte entnommen, welche wir vorher als Melanchthon's Programm für den arithmetischen Universitätsunterricht anführten. In Melanchthon's Werken ist noch eine dritte scheinbar hierher gehörige Declamation abgedruckt, aber mit Unrecht[4]). Es ist die Rede, welche einst Regiomontanus in Padua als Einleitung zu seinen Vorlesungen über Alfraganus hielt (S. 260), die sich hier eingeschlichen hat. Wir sagten, Melanchthon habe sich um den Druck der Werke des Alfraganus bemüht. Der 1537 erschienene Band ist eröffnet durch ein Widmungsschreiben Melanchthon's an die städtische Obrigkeit von Nürnberg, dem Druckorte. Darauf folgt die Rede des Regiomontanus, und dann die Werke Alfragan's. Offenbar hat später die räumliche Zusammengehörigkeit des Briefes und der Rede, ver-

---

[1]) Hartfelder, l. c. S. 599, Nr. 346 des Verzeichnisses. [2]) Mittheilung von H. Max Simon. [3]) Hartfelder l. c. S. 101 mit Berufung auf Camerarius, *De Philippi Melanchthonis ortu, totius vitae curriculo et morte* pag. 63 (Leipzig 1566). [4]) *Corpus Reformatorum* ed. C. G. Bretschneider XI, 531—543.

bunden mit der schönen Form dieser letzteren den Irrthum veranlasst, für beide einen Verfasser zu vermuthen.

In Rostock, später in Köln lehrte Jan Bronkhorst (1494—1570) aus Nimwegen, der nach seiner Vaterstadt den Beinamen Noviomagus führte. Im Jahre 1539 gab er in Köln eine Schrift *De numeris* heraus, in welcher (Buch I, Kapitel 15) eine geschichtlich merkwürdige Stelle sich findet, die Schilderung gewisser aus graden Strichen zusammengesetzter Zahlzeichen, deren *Chaldaei et Astrologi* sich bedient hätten. Beispielsweise bedeuten ┌, ┐, └, ┘ der Reihe nach 1, 10, 100, 1000; ɼ, ɿ, ʞ, ɺ der Reihe nach 4, 40, 400, 4000 u. s. w. Wer die von Bronkhorst gemeinten Chaldaeer waren, ist durchaus ungewiss. Möglicherweise ist an spätrömische oder gar an mittelalterliche Sterndeuter zu denken[1]).

Auf unserer Rundschau in deutschen Universitäten gelangen wir nunmehr nach einer schon geraume Zeit nicht mehr zu Deutschland gehörenden Hochschule, welche aber damals als eine deutsche zu bezeichnen ist, jedenfalls nicht leicht unter ein anderes Reichsgebiet gebracht werden kann, Löwen. Dort finden wir Rainer Gemma-Frisius[2]), ursprünglich van den Steen, geboren 1508 zu Dockum in Friesland, woher ihm der Beiname Frisius stammt, Arzt und Mathematiker, seit den vierziger Jahren auf Empfehlung seines muthmasslichen Lehrers Peter Apianus Professor der Mathematik in Löwen, eine Stellung, welche er vor 1553 mit der eines Professors der Medicin vertauschte. Als solcher starb Gemma-Frisius 1555. Seine Erfindung eines sogenannten astronomischen Ringes, einer Methode zur Bestimmung der geographischen Länge mittels einer genau gehenden kleinen Uhr, welche dem Grundgedanken nach sich bis auf den heutigen Tag erhalten hat, ist hier nicht weitläufiger zu schildern. Sein libellus de locorum describendorum ratione (Antwerpen 1533) war von grundlegender Bedeutung. Hier finden sich die ersten Vorschriften zu einer wahren Triangulation veröffentlicht. Zwei Orte von bekannter gegenseitiger Entfernung — Gemma wählte zu diesem Zwecke Kirchthürme in Brüssel und Antwerpen — werden als Grundpunkte aufgezeichnet. Von jedem derselben werden andere neue Punkte einvisirt und die Sehlinien gezeichnet. Die Durchschnittspunkte solcher

[1]) Cantor, Mathem. Beitr. z. Kulturleben der Völker S. 167, Anmerkung 337, Figur 37. — Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer (Erlangen 1869), S. 12. [2]) Kästner I, 129 und II, 334, 573, 579. — Quételet pag. 78. — Max. Curtze in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik LVI, 313. — Allgemeine deutsche Biographie VIII, 555. — Wauwermans, *Essai de l'histoire de cartographie anversoise au seizième siècle* im Bulletin de la société royale de géographie d'Anvers. 1893—1894.

Sehlinien legen sodann neue Punkte auf der Karte fest und gestatten, von ihnen aus wieder weitere Punkte einzuschneiden und dadurch die Karte zu vervollständigen. Mit diesen praktisch so wichtigen Lehren trat Gemma an die Spitze einer niederländischen geographischen Schule, von welcher im XIV. Abschnitte die Rede sein wird, und deren bedeutendster Vertreter, Mercator, unmittelbar Gemma's Unterricht genoss. Als arithmetischer Schriftsteller trat Gemma 1540 mit einem lateinisch verfassten Lehrbuche auf, welches zahlreiche Abdrücke erlebte. Einige Dinge aus diesem Lehrbuche sind erwähnenswerth. Gemma spricht über Verdoppelung und Halbirung; Manche bezeichneten diese als von Multiplication und Division verschieden; was aber diesen Dummköpfen als Beweggrund diene, wisse er nicht[1]. Gerade so gut müsse man Verdreifachung, Vervierfachung u. s. w. als besondere Rechnungsarten aufführen. Bei der Ausführung der Quadratwurzelausziehung werden die verdoppelten Wurzelziffern, soweit sie bereits gefunden sind, unter die gerade in Behandlung stehende Abtheilung des Radicanden mit Einrückung um eine Stelle nach links geschrieben, und in die rechts noch frei gebliebene Stelle tritt alsdann die durch Division neu ermittelte Wurzelstelle, so dass mit ihr alsdann die ganze dastehende Zahl behufs weiterer Theilsubtraction vom Radicanden vervielfacht werden kann. Z. B.:

$$\sqrt{11\,90\,25} = 345$$

```
√11 90 25 = 345
  9
 ----
  290
   64
  256
 -----
   3425
    685
   3425
 -----
```

wobei wir nur darin von Gemma abweichen, dass wir die Theilreste abwärts zum Abdrucke brachten, während bei Gemma dieselben noch immer nach altem Brauche über dem Radicanden unter Durchstreichung der vernichteten Radicandenziffern erscheinen. Endlich findet sich bei Gemma die Anwendung der Regel des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische, des einfachen auch auf kubische Aufgaben, worauf er sich nicht wenig zu gute thut, da ein gewisssr Christoph Rudolff von Jauer, *Christophorum quendam Rudolphum Januerum* (sic), die Möglichkeit davon in Abrede gestellt habe. Aus 5832 Steinwürfeln soll eine Mauer errichtet werden, deren

[1] *Quid vero moverit stupidos illos nescio.*

Länge um die Hälfte grösser sein soll als die Dicke, und die Höhe um die Hälfte grösser als die Länge. Nimmt man die Abmessung von 2 Steinen als Dicke an, so ist 3 die Länge, $4\frac{1}{2}$ die Höhe und es werden 27 Steine verbraucht. 5832 durch 27 dividirt giebt 216 als Quotient, und weil $\sqrt[3]{216} = 6$, sind die einzelnen Abmessungen zu versechsfachen, also 12 auf 18 auf 27 Steine zu nehmen. Zusammengesetzter ist die Anwendung des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische Aufgaben, wiewohl von Gemma an einer früheren Stelle seines Buches gelehrt. Ein rechteckiges Feld von 200 Quadratellen besitzt eine Länge, welche um die Hälfte grösser ist als die Breite; beide Abmessungen werden gesucht. Eine Breite von 4 Ellen bei einer Länge von 6 Ellen giebt 24 Quadratellen, also 176 zu wenig. Eine Breite von 20 Ellen bei einer Länge von 30 Ellen giebt 600 Quadratellen, also 400 zu viel. Nun bildet man $4^2 = 16$ und $20^2 = 400$, sowie $4^2 \cdot 400 + 20^2 \cdot 176 = 76800$ nebst $400 + 176 = 576$. Der Quotient $\frac{76800}{576} = 133\frac{1}{3}$ giebt durch Quadratwurzelausziehung die Breite mit $11\frac{27}{50}$. Die Länge ist folglich $17\frac{31}{100}$. Die beiden Zahlen mit einander vervielfacht geben nahezu 200, während die wahre Breite und Länge niemals in Zahlen ausgedrückt werden kann[1]). Wie Gemma zu dem Näherungswerthe

$$\sqrt{133\frac{1}{3}} \sim 11\frac{27}{50}$$

gelangte, ist leicht zu vermuthen. Er wird wohl

$$10000 \cdot 133\frac{1}{3} = 1333333$$

gesetzt haben; als Quadratwurzel fand er dann 1154 und nach Division durch 100 jene im Texte genannte Zahl. Für die Länge giebt Gemma durch einen offenbaren Druckfehler $17\frac{43}{100}$. Das ganze Verfahren wollen wir einmal an Buchstaben prüfen. Sei $y = ax$, $p = xy = ax^2$ die in Gleichungsform geschriebene Aufgabe. Nun liefern $x = x_1$ und $y = y_1 = ax_1$ das Product $p_1 < p$, sowie $x = x_2$ und $y = y_2 = ax_2$ das Product $p_2 > p$, und zwar sei $p - p_1 = d_1$, $p_2 - p = d_2$. Gemma rechnet $\sqrt{\frac{x_1^2 d_2 + x_2^2 d_1}{d_1 + d_2}} = x$ und das ist auch richtig. Man hat

$$x_1^2 d_2 + x_2^2 d_1 = x_1^2 p_2 - x_1^2 p + x_2^2 p - x_2^2 p_1$$
$$= x_1^2 \cdot ax_2^2 - x_1^2 \cdot ax^2 + x_2^2 \cdot ax^2 - x_2^2 a x_1^2 = ax^2(x_2^2 - x_1^2).$$

---

[1]) *Hi duo numeri in invicem ducti, 200 fere constituunt, neque unquam vera longitudo aut latitudo numeris exprimi potest.*

Ferner

$$d_1 + d_2 = p - p_1 + p_2 - p = p_2 - p_1 = a x_2{}^2 - a x_1{}^2 = a(x_2{}^2 - x_1{}^2).$$

Der gebildete Quotient beider Zahlen ist folglich x^2 mit der Quadratwurzel x. Wenn aber doch bei der einen Aufgabe die Kubikwurzelausziehung, bei der anderen die Quadratwurzelausziehung nicht vermieden werden konnte, warum der Umweg durch den falschen Ansatz, welcher nur noch mehr Rechnung nöthig machte? Wir finden als Antwort auf diese Frage zwei Beweggründe, welche bei Gemma wirksam gewesen sein werden. Erstens wollte er die Coss nicht lehren, welche gleichwohl als bekannt vorausgesetzt zu werden scheint, da ihr Name wiederholt im Texte auftritt, und zweitens versprach er sich offenbar aus der Anwendung des doppelten falschen Ansatzes in einem Falle, wo dieselbe als theoretisch unmöglich bezeichnet worden war, hohen wissenschaftlichen Ruhm, der ihm auch in der That nicht vorenthalten blieb. Hat man doch mit seinem Namen Gemma alle die Wortspiele durchgeführt, zu welchen er Anlass gab, ja sogar ihn als Edelgestein verdeutscht, während die Sitte der Zeit sonst nur zur Umwandlung deutscher Namen in fremdländische führte.

Erasmus Oswald Schreckenfuchs[1]) (1511—1579) lehrte in Tübingen Hebräisch, später in Basel neben Sebastian Münster[2]) (1489—1552), dem Hebraisten und Kosmographen, und von Basel aus auch in Freiburg Mathematik. Schreckenfuchs kam in Besitz eines 1534 in Constantinopel gedruckten Exemplars des Sefer-Hamispar von Elias Misrachi (S. 229) und gab 1546 gemeinschaftlich mit Münster einen Auszug aus diesem Werke in hebräischer Sprache mit lateinischer Uebersetzung heraus. Elias Misrachi selbst (etwa 1455—1526) war jüdischer Oberrabbiner in Constantinopel und nahm als solcher eine sehr hervorragende und einflussreiche Stellung ein. Sein „Buch der Zahlen“ ist wesentlich nach griechischen und arabischen Mustern gearbeitet, enthält aber auch noch manches Eigene, wie Misrachi selbst betont hat. Dazu gehört weniger ein in Dreiecksgestalt angeordnetes Einmaleins, für welches wir (S. 229) einen jüdischen Vorgänger denken müssen, als die Entwickelung der Summenformeln für $1+2+\cdots+n$, für $1^2+2^2+\cdots+n^2$ und für $1^3+2^3+\cdots+n^3$. Misrachi schliesst so $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1+2}{3}=\frac{2}{2}$, $\frac{1+2+3}{4}=\frac{3}{2}$, also auch $\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}=\frac{n}{2}$ und $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

---

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XXXII, 467—468. Artikel von S. Günther. [2]) Ebenda XXIII, 30—33. Artikel von Ludwig Geiger.

Ferner $\frac{1^2}{2} = 1$, $\frac{1^2+2^2}{1+2} = 1 + \frac{2}{3}$, $\frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3}$, also auch $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3}$ und $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}$.

Endlich sagt er:

$$\frac{1^3+2^3}{1+2} - \frac{1^3}{1} = 2,$$

$$\frac{1^3+2^3+3^3}{1+2+3} - \frac{1^3+2^3}{1+2} = 3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1+2+\cdots+n} - \frac{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3}{1+2+\cdots+(n-1)} = n$$

und durch Addition sämmtlicher Gleichungen $\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1+2+\cdots+n} = 1+2+\cdots+n$, also auch $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$. Allerdings bedient sich Misrachi bei diesen Schlüssen nur der Induction, aber deren Statthaftigkeit hat nachträglich bewiesen werden können [1]).

Wir haben dem 59. Kapitel ein Schlusswort gar nicht beigefügt. Was hätten wir auch über die herzlich unbedeutenden Leistungen sagen sollen, die wir mit einziger Ausnahme der Schriften des Nonius und höchstens noch des Charles de Bouvelles nur um der Pflicht der Vollständigkeit nach Kräften zu genügen überhaupt erwähnen mussten? Und Nonius wiederum trat aus dem Rahmen des Kapitels so weit hervor, dass man ein falsches Bild bekäme, wenn man ihn, nachdem er im Einzelnen Gegenstand unseres Berichtes war, noch einmal zusammenfassend als Vertreter einer Mathematik auf der Pyrenäenhalbinsel schildern wollte. Gleichmässiger ist und gestattet eher eine Zusammenfassung, was wir im 60. Kapitel erörtert haben. Die Leistungen der Männer, welche an den deutschen Universitäten Wien, Leipzig, Ingolstadt, Basel, Tübingen, Heidelberg, Wittenberg, Löwen die Stellung eines Professors einnahmen, kommen darauf hinaus, dass das Rechnen sich entwickelte, dass die veraltete Verdoppelung und Halbirung mit immer bewusster werdender Verachtung entfernt wurden, dass das Dividiren unterwärts auftauchte, dass ein Rechnen mit Decimalbrüchen sich anbahnte, dass die sogenannte wälsche Praktik Allgemeingut zu werden begann. Algebraische Aufgaben konnten durch die Coss beantwortet werden, neben welcher (oder sollen wir sagen vor welcher?) auch die Regeln des einfachen wie des doppelten falschen

[1]) Die Arithmetik des Elia Misrachi von G. Wertheim (Braunschweig 1896), S 20—23.

Ansatzes geübt wurden. Geometrie war noch immer ein ziemlich vernachlässigter Zweig der Wissenschaft, an welchem eigene neue Triebe sich nicht zeigten. Trigonometrisches haben wir nur bei Apianus und bei Gemma zu erwähnen gehabt, allerdings in einer Weise, die beiden Männern alle Ehre machte.

61. Kapitel.

Deutsche Rechenmeister und Cossisten ausserhalb der Universitäten.

Wir reden nunmehr von solchen Verfassern von Rechenbüchern, welche nicht an Universitäten thätig waren. Dass derartige Schriften in einer Anzahl vorhanden waren, welche fast eher die Anwendung des Wortes Unzahl gestattet, haben wir berührt (S. 408). Eines dieser Werke, welches einen encyklopädischen Inhalt besitzend, ein Spiegelbild jeglicher Schriften für wissenschaftlichen Selbstunterricht am Beginne des XVI. Jahrhunderts in Deutschland darbietet, ist die Margaritha philosophica des Karthäuserpriors Gregor Reisch[1]). Der Verfasser ist in Balingen in Württemberg geboren. Er studirte seit 1487 in Freiburg und erwarb dort die akademischen Grade eines Baccalaureus und eines Magisters. Dann trat er dem Karthäuserorden bei, in welchem er zu hohem Ansehen gelangte. Als Prior des Freiburger Karthäuserklosters starb er 1523. Die Margaritha philosophica ist zuerst 1503 gedruckt[2]), weitere Ausgaben folgten, wovon die meisten in Strassburg die Presse verliessen. Eine Ausgabe wurde 1523 durch Orontius Finaeus (S. 378) in Paris veranstaltet. In Gestalt eines Zwiegespräches zwischen Lehrer und Schüler sind die sieben freien Künste in ebensovielen Büchern der Reihe nach in lateinischer Sprache behandelt. Meistens stellt der Schüler die Frage, welche der Lehrer ihm beantwortet, doch kommt auch das Gegentheil vor, dass der Schüler Fragen des Lehrers zu beantworten hat. Vor den meisten Büchern befindet sich eine symbolische Abbildung des zur Behandlung gelangenden Gegenstandes, und insbesondere das Bild, welches die Rechenkunst eröffnet, ist als bemerkenswerth wiederholt geschildert worden. Die Rechenkunst als Frau dargestellt, *Typus arithmeticae*, nimmt die Mitte des Bildes ein und streckt mit jeder Hand ein ge-

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVIII, 117, Artikel von Prantl. — Hartfelder in der Zeitschrift für Geschichte des Oberrheins Nr. 5, V. 2, S. 170 bis 200. [2]) Die Unrichtigkeit der Behauptung, es gäbe auch schon eine Ausgabe von 1496, hat Hartfelder l. c. dargethan.

öffnetes Buch aus. Ihr Kleid trägt vorn als Verzierung die beiden nach abwärts gehenden Progressionen

	1	
3		2
9		4
27		8

deren gleiche Anfangszahl 1 nur einmal vorkommt, wie unsere überdies in der Form der Zahlzeichen nicht getreue Abbildung es erkennen lässt. Links von der Arithmetik sitzt *Pytagoras*, wie die Ueberschrift ihn nennt, der auf einem Rechentische die Zahlen 1241 und 82 mit Rechenpfennigen angelegt hat, ausserdem noch einen Haufen Rechenpfennige daneben liegen hat, welchem seine rechte Hand sich nähert. Zur Rechten der Arithmetik sitzt an einem Tische *Boetius*, gleichwie sein Gegenüber durch eine Ueberschrift gekennzeichnet, gleich ihm in der Tracht eines wohlhabenden Bürgers des XVI. Jahrhunderts. Boethius rechnet mit Ziffern, doch ist den vor ihm befindlichen theilweise durchstrichenen Zahlzeichen ein richtiger Sinn nicht abzugewinnen. Man darf getrost diese Abbildung als das Interessanteste an dem ganzen der Arithmetik gewidmeten Buche bezeichnen. Der ihr folgende Text bietet Zahlentheoretisches nach Boethius, die Eintheilung der Zahlen in Finger- und Gelenkzahlen, die sieben Rechnungsarten: Numeration, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Wurzelausziehung und Progression mit ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen und Sexagesimalbrüchen, das Linienrechnen und die Regeldetri, ohne dass irgendwo eine Besonderheit hervorträte, welche unsere Aufmerksamkeit zu fesseln verdiente. Weit mehr ist solches in dem geometrischen Buche des Werkes der Fall, welches selbst wieder in speculative und praktische Geometrie eingetheilt ist. Das Titelbild des ersten Tractates stellt Frau Geometrie dar. Ihre rechte Hand hält einen Zirkel, mit welchem sie Längen an einem Fasse abnehmen zu wollen scheint, auf welchem ein eingetheilter Maassstab liegt, ein Hinweis also auf die Visierkunst. Die linke Hand hält einen als Winkelinstrument zu benutzenden Quadranten. Die speculative Geometrie selbst ist ein unendlich dürftiger Auszug aus Euklid, der Hauptsache nach blosse Erklärungen, daneben einige wenige Sätze, unbewiesen aber richtig, das ziemlich getreue Ebenbild des ersten Buches der Geometrie des Boethius, nur in noch abgemagerterer Gestalt. Den zuverlässigsten Beweis der Benutzung einer unmittelbar oder mittelbar römischen Vorlage liefert das Vorkommen des Wortes *corauscus*[1])

---

[1]) *Discipulus: Basis quid est? Magister: Est linea figurae planae quae tota jacet in fundamento sive plano. Linea vero huic aequaliter superposita dicitur corauscus.*

für Scheitellinie. Eine eigenthümliche Abbildung versinnlicht die drei räumlichen Abmessungen an einem unbekleideten von drei Spiessen durchbohrten Menschen durch Beisetzung der Wörter oben und unten (Länge), rechts und links (Breite), vorn und hinten (Tiefe) an die Spiesse selbst. Nun folgt der zweite der praktischen Geometrie vorbehaltene Tractat. An eine kurze Maasstabelle schliesst sich die Beschreibung eines Winkelinstrumentes nach Art des Astrolabiums und die Vorschrift, wie man es zu Höhenmessungen zu benutzen habe, nämlich um ähnliche Dreiecke herzustellen, auf deren Berechnung Alles hinauslaufe. Als zweites wichtiges Messwerkzeug wird der Jacobsstab genannt und geschildert. Nun kommt die eigentliche rechnende Geometrie, beginnend mit Kreismessungen unter Anwendung von $\pi = 3\frac{1}{7}$. Bei der Flächenmessung geradliniger Figuren ist die Abhängigkeit von Schriften römischer Agrimensoren noch viel deutlicher wahrnehmbar, als an den vorher erwähnten Merkmalen. Der Durchmesser des Innenkreises eines rechtwinkligen Dreiecks wird gefunden als Rest der um die Hypotenuse verminderten Summe der beiden Katheten; die Höhe eines mittels seiner drei Seiten gegebenen Dreiecks wird unter Beiziehung des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet, und auch der Abschnitt auf der Grundlinie, beziehungsweise die Ueberragung, welche bei spitz- und stumpfwinkligen Dreiecken durch Ziehen der Höhe entsteht, ist nach richtigen, den Feldmessern bekannten Formeln erhalten; ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke werden gebildet; endlich gelten die Formeln der Vieleckszahlen, vom Dreieck und Fünfeck beginnend bis zum Zehneck einschliesslich als Flächenmaasse jener regelmässigen Figuren. Das sind untrügliche Kennzeichen, an welchen sich bestätigt, was (S. 234) mit Bezug auf Widmann von uns behauptet werden durfte: dass nämlich um 1500 die römische Feldmesskunst in Deutschland aus langem Winterschlafe zu allerdings nicht nachhaltigem Leben erwachte.

Schon vor dem Sammelwerke des Gregorius Reisch, welchem wir nur als Sammelwerke, aus welchem einige wenige Bücher unser Interesse in Anspruch nahmen, den Vorrang liessen, wurde 1501 eine Schrift gedruckt: das Enchiridion von Huswirt[1]). Der Verfasser heisst zu Ende des Büchleins *Johannes Huswirt Sanensis.* Vielleicht weist dieser Ortsname nach Sayn im Westerwalde, wo einst eine Prämonstratenserabtei stand. Jedenfalls stimmen die in den Auf-

---

[1]) Anleitung zum Rechnen aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts von Huswirt, neu herausgegeben mit historischer Einleitung und Commentar von Prof. Dr. Wildermuth. Programm des königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1864—1865.

gaben des Enchiridion genannten Münzsorten mit denjenigen überein, deren man in der Rheingegend sich bediente. Die Sprache ist die lateinische. Da Huswirt[1]) früher schrieb als Grammateus, darf man sich nicht wundern, bei ihm noch dem Verdoppeln und Halbiren als besonderen Rechnungsarten zu begegnen. Die Reihenfolge, in welcher diese Rechnungsarten erscheinen, ist aber einigermassen auffallend. Wo zuerst das Rechnen mit der Feder gelehrt wird, folgen sich Addition, Subtraction, Multiplication, Verdoppelung, Division, Halbirung[2]). Wo alsdann das Linienrechnen an die Reihe kommt, ist Verdoppelung und Halbirung zwischen Subtraction und Multiplication eingeschoben[3]), und ebenso, wo wieder etwas später das Rechnen mit Brüchen gelehrt wird[4]). Bemerkenswerth erscheint auch das Vorkommen des Wortes *cifra* in doppelter Bedeutung[5]) als Null und als Ziffer. Die Ausführung der einzelnen Rechnungsarten mit der Ergänzung einer beim Subtrahiren geborgten Zehn durch Erhöhung der nächsten Subtrahendenstelle um die Einheit, mit der überall benutzten Neunerprobe, mit dem Dividiren überwärts bietet nicht viel, was nicht aus anderen Schriften uns mehrfach schon bekannt wäre. Allenfalls könnte auf die Regel zur Summirung arithmetischer Progressionen hingewiesen werden, welche in Verse gebracht ist[6]):

Si primus numerus cum postremo faciat par,
Eius per medium loca singula multiplicabis,
Ast impar medium vult multiplicari locorum.

Die halbe gerade Summe des ersten und letzten Gliedes will sie mit der Gliederzahl multiplicirt haben oder die ganze ungerade Summe ebenderselben mit der halben Gliederzahl. Ferner dürfen wir auf das Vorhandensein einer kleinen Tabelle[7]) der neun ersten Kubikzahlen aufmerksam machen. Ein letzter Abschnitt[8]) enthält 28 „Regeln", d. h. natürlich, wie schon bei Widmann und früheren Schriftstellern seit Leonardo von Pisa, einzelne Musteraufgaben, welche nicht einmal immer durch ihren Inhalt den Namen, welchen sie führen, rechtfertigen, sondern mittels dieses Namens nur an eine mitunter recht alte Vorgeschichte der Aufgabe erinnern. Die 6. Regel vom fliehenden Hasen[9]) z. B. erzählt uns kein Wort von einem durch einen Hund

---

[1]) Anleitung zum Rechnen aus dem Anfange des XVI. Jahrhunderts von Huswirt, neu herausgegeben mit historischer Einleitung und Commentar von Prof. Dr. Wildermuth. Programm d. königl. Gymnasiums in Tübingen zum Schlusse des Schuljahres 1864—1865, S. 3. [2]) Ebenda S. 8—16. [3]) Ebenda S. 22. [4]) Ebenda S. 26. [5]) Ebenda S. 7: *Decima vero theca, circulus, cifra sive figura nihili appellatur* und S. 23: *Quoniam de integris tam in cifris quam in proiectilibus, dei auxilio, dictum est.* [6]) Ebenda S. 17. [7]) Ebenda S. 20. [8]) Ebenda S. 28—38. [9]) Ebenda S. 31.

verfolgten Hasen, sondern lässt einen von Köln gegen Rom fliehenden Mann durch einen Verfolger einholen, welcher Köln erst 5 Tage später als der Erste verlässt.

Theoderich Tzwivel[1]) hat 1507 ein Buch zum Drucke befördert, dessen Titelblatt verspricht, einen Algorithmus zu lehren *per figurarum* (*more alemannorum*) *deletionem.* Sich selbst nennt der Verfasser gleichfalls auf dem Titelblatte einen *ingeniosus Pythagorista.* Diese Bezeichnung und jenes Versprechen sind, scheint es, das Bemerkenswertheste an dem Buche. Was die alemannische Gewohnheit der Auswischung der Zeichen war, sagt unsere Vorlage nicht. Wir vermuthen, es sei das Ueberwärtsrechnen gemeint, welches fortwährendes Auslöschen nothwendig machte; aber warum alemannische Gewohnheit? Höchst eigenthümlich ist Tzwivel's Stellung zur Verdoppelung und Halbirung gewesen. Er hatte das Bewusstsein und sprach es gradezu aus, dass beide Rechnungsverfahren vom Multipliciren und Dividiren nicht zu trennen seien. Er war also hierin ein deutscher Vorgänger des Grammateus (S. 396). Gleichwohl hat Tzwivel beide Sonderfälle in besonderen Abschnitten behandelt[2]).

Es ist kaum möglich, geschweige denn nothwendig, alle Rechenbücher in lateinischer und deutscher Sprache aufzuzählen, welche ihrer Entstehungszeit gemäss hierher gehören. Wir begnügen uns mit der Nennung einiger wenigen, welche durch irgend besondere Gründe der Aufmerksamkeit empfohlen sind. Jacob Köbel[3]) von Heidelberg (1470—1533) studirte in Krakau seit etwa 1490 und widmete sich dort insbesondere den mathematischen Wissenschaften, nachdem er zuvor an seiner heimathlichen Universität das Baccalaureat der Rechtswissenschaft schon erworben hatte. In Krakau war Köbel Studiengenosse des Kopernikus. Nach Süddeutschland zurückgekehrt liess Köbel sich als Stadtschreiber in Oppenheim nieder und entwickelte dort als Dichter eines gereimten Lehrgedichtes über das Verhalten bei Tische, die „Tischzucht" genannt, als Zeichner und Holzschneider, als Buchdrucker und Verleger, als Verfasser mathematischer Schriften neben seinem amtlichen Berufe eine ungemeine Rührigkeit. Ein Rechenbuch auf der Linien von 1514, ein solches mit der Feder von 1520, ein Visirbuch von 1515, sämmtlich wiederholt aufgelegt, eine Vereinigung der drei Schriften, die dabei wesentlich vermehrt erschienen, von 1531, welche selbst wieder neue Auflagen erlebte, das sind die Schriften Köbel's[4]), welche wir zu verzeichnen haben. Uns

[1]) Kästner I, 82—84. — Nagl, Ueber eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Hist.-litter. Abthlg. S. 145. [2]) Christ. Friedr. Müller, *Henricus Grammateus* S. 18 Note 95. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XVI, 345—349, Artikel von Eisenhart. [4]) Unger S. 44—46.

lag dabei eine Auflage[1]) von 1543 vor, welche bei Christian Egenolff in Frankfurt am Main gedruckt ist und den Titel führt: „Zwei rechenbüchlin uff der Linien und Zipher mit eym angehencktem Visirbüch so verstendtlich fürgeben das jedem hieraus on eiñ lerer wol zu lernen. Durch den Achtbarn und wol erfarnen H. Jacoben Köbel Statschreiber zu Oppenheym." Die römischen Zahlzeichen sind mindestens am Anfange vorwiegend im Gebrauche und werden als die gewenlich teutsch Zal im Gegensatz zu der ziffern zale benannt[2]), eine Benennung, auf welche wir bei dieser Gelegenheit zum ersten Male aufmerksam machen, welche aber doch schon etwas älterer und häufigerer Uebung ist. Man hat sie in einem in Wittenberg 1525 gedruckten „Bökeschen vor de leyen und Kinder", sowie in einer Schrift aus dem Jahre 1530 von Joannem Kolross tüdtsch Leermeystern zu Basel vorgefunden[3]). Köbel gehörte noch der alten Schule an, welche das Verdoppeln und Halbiren besonders lehrte. Er bediente sich des Linienrechnens auch bei der Quadratwurzelausziehung[4]), wo $\sqrt{4356} = 66$ sehr ausführlich dargestellt ist. Verfasser anderer Rechenbücher in deutscher Sprache sind Johann Böschenstein[5]) mit Ausgaben von 1514, 1516, 1518, welchen den Beweis der grossen Verbreitung dieser Schrift liefern, und Georg Reichelstain[6]) 1532. Letzterer ist einer der Ersten in Deutschland, welcher Arithmetik und Dichtkunst zu vereinigen bestrebt war, und seine Subtractionsregel

So du magst von der obern nit
Ein ziffer subtrahirn mit sitt,
Von zehen sollt sie ziehen ab,
Der nechst under addir eins knab

ist vielfach als Muster solcher Darstellungsweise angeführt.

Weitaus am bekanntesten unter den deutschen Rechenmeistern ist Adam Riese[7]). Sein Name hat sich sprichwörtlich auch bei Persönlichkeiten, denen Riese selbst eine fast mythische Figur geworden ist, in der Redensart „nach Adam Riese" erhalten, welche von jedem sehr einfachen Rechenergebnisse gebraucht zu werden pflegt. Auch die kleine Geschichte ist aufbewahrt[8]), wie Riese einen

---

[1]) Das Werk besteht aus 144 Blättern, die acht ersten Blätter sind ohne Numerirung, dann beginnt eine solche sofort mit der Zahl 9 und geht blattweise durch den ganzen Band. [2]) Köbel fol. 9 verso. [3]) Unger S. 9—13. [4]) Köbel fol. 49—50. [5]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 13.—Unger S. 46. [6]) Treutlein l. c. S. 37, 45. — Unger S. 56. [7]) Unger S. 48—53 giebt die genaueste und ausführlichste Auskunft über Riese's Schriften, theilweise nach Berlet, Ueber Adam Riese 1855 und Berlet, Die Coss von Adam Riese 1860, aber mit zahlreichen Ergänzungen. [8]) Kästner I, 111.

Feldmesser demüthigte, der, um sich als Meister des Zirkels zu erkennen zu geben, einen silbernen Zirkel auf dem Hute trug, und doch nicht wusste, dass es genügt, einen Halbkreis über einen Durchmesser zu zeichnen, um in kürzester Zeit beliebig viele rechte Winkel in diesem Halbkreise zu erhalten. Adam Riese, auch Ries, Rys, Ryse geschrieben, ist 1492 zu Staffelstein bei Lichtenfels in Franken geboren. Er war 1522 Rechenmeister in Erfurt, 1525 Rechenmeister in Annaberg. Ebenda trat er 1528 in öffentliche Dienste bei der Buchführung der Bergwerke. Sein Todesjahr ist 1559. Vier verschiedene Bücher von ihm sind, jedes in wiederholten Auflagen, im Drucke erschienen. Das erste ist eine Rechnung auf der Linie von 1518, das zweite ein Rechenbuch auf Linie und Feder von 1522 zur Zeit als Riese noch Rechenmeister in Erfurt war. Das dritte und häufigste Buch führt den Titel „Rechnung nach der Lenge auff den Linichen und Feder. Darzu forteil und behendigkeit durch die Proportiones Practicá genannt mit grüntlichem unterricht des visirens. Durch Adam Riesen im 1550 Jar." Ihm ist das Bildniss Riese's mit der Umschrift „Anno 1550 Adam Ries seines Alters im LVIII" beigegeben, woraus das Geburtsjahr des Verfassers hat erschlossen werden können. Man hat in diesen drei Werken den Fortschritt zu erkennen, welchen Riese als Lehrer machte, und welchen er auf seine Schüler fortpflanzte. Zu einem klaren Unterrichte im volksthümlichen, aber auch nur einfachsten Volksbedürfnissen genügenden Linienrechnen gesellt sich ein Rechnen mit Ziffern, zu beiden alsdann ein Anwenden aller der „forteil und behendigkeit", deren die Zeit fähig war, ohne dass die beiden ersten Theile dadurch verkürzt würden. Man darf nicht vergessen, dass die Lehre vom Unterrichten als solche damals erst im Entstehen war, dass Männer wie unser früher genannter Melanchthon, wie Johannes Sturm[1]), der Schulvorstand in Strassburg, erst an ihrer Begründung arbeiteten, um Riese's Stellung innerhalb seiner Zeit zu würdigen. Was seine Bücher, insbesondere das vollständigste dritte Rechenbuch auf der Lenge lehrten, erhob sich in keiner Weise über das übliche Maass. Es würde sehr schwer fallen, eigene Gedanken, und beträfen sie nur geringe Rechenvortheile, bei Adam Riese nachzuweisen. Dagegen hat er zu vereinigen und zweckdienlich zu ordnen gewusst, was vorhanden war. Aus seiner Anordnung konnte der Rechenunterricht die methodischen Vorschriften sich bilden, welche heute als selbstverständlich gelten. Die Vorschrift des Aufsteigens vom concreten Denken zum abstracten wird in jedem Rechenunterrichte heute beachtet; bei

---

[1]) Hartfelder, Melanchthon S. 148—150.

Riese ist das Rechnen mit Rechenpfennigen dem mit Ziffern vorausgeschickt. Die zweite Grundregel ist die des Ueberganges vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren, und auch diese war Riese's Rechenbuch auf der Lenge zu entnehmen. Die Rechnungsarten sind dort zuerst so breit und umständlich zur Ausführung gebracht, als es in ihrer Natur liegt, dann erst wird mehr und mehr auf eine gewisse Eleganz des Verfahrens Rücksicht genommen. Mit verschiedenen Multiplications- und Divisionsarten, mit dem Kürzen bei Bruchrechnungen, mit der welschen Praktik als wesentlich leichterer Lösung der Regeldetriaufgaben, mit falschem Ansatze, mit unbestimmten Aufgaben, mit Zauberquadraten wird der Schüler Riese's in umfassendster Weise bekannt gemacht, aber erst nachdem er das gemeine Ziffernrechnen überwunden hat. Endlich die dritte für das Rechnen fast mehr als für irgend einen Lehrgegenstand erspriessliche Vorschrift verlangt stete Uebung des einmal Erlernten. Auch Riese hat wohl beherzigt, dass Uebung den Meister macht. Es ist immer der gleiche Stoff, der in immer neuen Aufgaben, in immer neuer Form, so weit als möglich in angenehmem Gewande, bis zu fünf- und sechsmal wiederholt erscheint. Ein gleichzeitiger Schriftsteller, der geistig unendlich hoch über Riese stand, Michael Stifel, nannte dessen Aufgaben „holdselig" und entnahm sie ihm für sein eigenes Werk[1]). Andere folgten diesem Beispiele ohne in gleicher Offenheit ihre Quelle zu nennen, und so galt hinfort für einen Meister der Rechenkunst, wer Adam Riese's Rechnung nach der Lenge vollständig durchgearbeitet hatte[2]). Ein viertes Buch gab Adam Riese 1533 zu Ehren des „Erbarn Weisen Rath auff Sanct Annenbergs" heraus. Es war „ein gerechent Büchlein auff den Schäffel, Eimer und Pfundtgewicht", mithin eine Sammlung von 116 Tabellen, die zu Preisberechnungen dienen[3]). Hier findet sich unter Anderem die berühmte Annaberger Brodordnung, welche das Gewicht angiebt, das ein Halbgroschenbrod, ein Pfennigbrod und ein Semmelpaar haben müssen, während die Kornpreise von 20 bis zu 84 Geldeinheiten steigen. Ausser den in Druck gegebenen Schriften Riese's hat sich von ihm noch eine Coss[4]) handschriftlich erhalten. Wir entnehmen ihr, dass mancherlei Anregung von Aquinas Dacus, jenem früher (S. 238) erwähnten Mönche des Predigerordens, ausging, welcher übrigens nach der Sitte der Zeit sein

---

[1]) Unger S. 51, Note 5. [2]) Doppelmayr, S. 169, Note oo. [3]) Unger S. 96. [4]) Berlet, Die Coss von Adam Riese (Annaberg 1860) enthält umfangreiche wortgetreue Auszüge. Vergl. ausserdem Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 12 und 14—15 und besonders Wappler, Zur Geschichte der deutschen Algebra im XV. Jahrhunderte (Zwickau 1887).

Wissen zu Kauf trug und sich beispielsweise für die Mittheilung einer natürlich von ihrer Auflösung begleiteten Aufgabe von einem gewissen Hans Conrad, der erst in Eisleben, dann neben Adam Riese in Annaberg lebte, einen Gulden geben liess. Wir lernen einen Hans Bernecker aus Leipzig kennen, der selbst Beispiele anfertigte. Wir erfahren von einem Magister Andreas Alexander, welcher ein ganzes Buch über die Coss geschrieben hat. Die wissenschaftliche Wirksamkeit aller dieser Persönlichkeiten mag vielleicht vor 1500 begonnen haben, reicht aber gewiss wenigstens theilweise bis gegen Ostern 1524, als dem Zeitpunkte, in welchem Riese's Coss vollendet worden ist. Es wird uns von ihm auch nicht vorenthalten, woher er seine Beispiele nahm. Er nennt eine alte Handschrift seine Quelle, und dieses heute noch in Dresden vorhandene Manuscript ist dasjenige[1]), welches wir die Dresdner Algebra zu nennen uns angewöhnt haben, und welches einst im Besitze von Johannes Widmann war. Aufgaben des Jordanus, Aufgaben aus der lateinischen Algebra von unbekanntem Verfasser, ebenso die Randaufgaben (S. 248) hat Riese benutzt, und nicht minder sind seine theoretischen Auseinandersetzungen den dortigen ähnlich. Ihm selbst, vielleicht beeinflusst durch die deutsche Dresdner Algebra mit ihrem „Czebreyen", dürfte möglicherweise das Missverständniss zuzuschreiben sein, welches auf den „berumbsten In der Zall erfarnen Algebram den Arabischen meister"[2]) Bezug nimmt und welches noch auffälliger wird, wenn es an einer etwas späteren Stelle gar heisst[3]): „Volgenn hernach die Acht equaciones Algebre, gezogenn auss seynem ersten Buch genant gebra vnd almuchabola". Die angekündigten acht Equaciones lauten in unserer gegenwärtigen Zeichensprache:

$$1.\ ax^{n+1} = bx^n. \qquad 2.\ ax^{n+2} = bx^n. \qquad 3.\ ax^{n+3} = bx^n.$$

$$4.\ ax^{n+4} = bx^n \quad 5.\ ax^{n+2} + bx^{n+1} = cx^n. \quad 6.\ ax^{n+2} + cx^n = bx^{n+1}.$$

$$7.\ ax^{n+2} = bx^{n+1} + cx^n. \quad 8.\ \text{Irgend eine Gleichung zwischen } x^n,\ x^{n+m},\ x^{n+2m}.$$

Von diesen acht allgemeinen Fällen, die allerdings meistens in der besonderen $n = 0$ voraussetzenden Form auftreten, hat die Dresdner lateinische Algebra (S. 245) die sieben ersten. Woher Riese die achte entnahm, können wir nicht genauer nachweisen. Aus den acht Equaciones werden dann weiter „24 Regeln" gebildet. Die deutsche wie die lateinische Dresdner Algebra besitzen sie in von einander abweichender Anordnung, und Riese hat wieder eine dritte Anordnung

---

[1]) Wappler hat l. c. diese Thatsache ausser Zweifel gestellt. [2]) Berlet l. c. S. 9. [3]) Ebenda S. 12.

getroffen, ohne dass die Einzelfälle selbst eine Aenderung erfahren hätte. Riese's Reihenfolge ist diese:

1. $ax = b$. 2. $ax^2 = b$. 3. $ax^2 = bx$.
4. $ax^2 + bx = c$. 5. $ax^2 + c = bx$. 6. $ax^2 = bx + c$.
7. $ax^3 = bx^2$. 8. $ax^3 = bx$. 9. $ax^3 = b$.
10. $ax^3 + bx^2 = cx$. 11. $ax^3 + cx = bx^2$. 12. $ax^3 = bx^2 + cx$.
13. $ax^4 = bx^3$. 14. $ax^4 = bx^2$. 15. $ax^4 = bx$.
16. $ax^4 + bx^3 = cx^2$. 17. $ax^4 + cx^2 = bx^3$. 18. $ax^4 = bx^3 + cx^2$.
19. $ax^2 = \sqrt{bx}$. 20. $ax^2 = b\sqrt{x^2}$. 21. $ax^4 = b$.
22. $ax^4 + bx^2 = c$. 23. $ax^4 + c = bx^2$. 24. $ax^4 = bx^2 + c$.

War Riese's Coss zunächst noch nicht Allgemeingut, so war dagegen Rudolff's Coss, wie wir schon wissen, seit 1525 im Drucke vorhanden und verhältnissmässig rasch vergriffen. Wir haben versprochenermassen jetzt auf sie zurückzukommen, zuvor aber auf eine Vorlage, welche ihm gedient hat. Wir haben früher (S. 240) einer Wiener Handschrift des XVI. Jahrhunderts gedacht, welche die Aufschrift Regulae Cosae vel Algebrae führt. Die Abhandlung ist zuverlässig vor 1510 entstanden, denn ausser in der Wiener Handschrift 5277 steht sie auch in einer Münchner Handschrift, welche von einem Besitzer im Jahre 1510 um 13 Kreuzer käuflich erstanden wurde, wie es in einer auf ihr angebrachten Notiz heisst. Die Regulae Cosae vel Algebrae[1]) bestehen aus 33 Blättern. Zunächst sind Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication für mit Vorzeichen versehene Zahlen ausgesprochen, und ganz besonders bemerkenswerth tritt der Umstand hervor, dass in den kurzgefassten Regeln nur jene Vorzeichen (*notae*) + und — ohne beigefügte Zahlen erscheinen. So heisst es für die Addition:

Conditiones circa + vel — in additione. $\left.\begin{matrix}+ \text{ et } + \\ - \text{ et } -\end{matrix}\right\rangle$ facit $\left.\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\rangle$ addatur non habendo respectu quis numerus sit superior. Si fuerit $\left\langle\begin{matrix}+ \text{ et } - \\ - \text{ et } +\end{matrix}\right\rangle$ simpliciter subtrahatur brevior numerus a majori et residuo sua ascribatur nota.

Bezüglich der Subtraction sind die Regeln nicht minder kurz und dennoch ausreichend klar, sobald man eingesehen hat, dass die zuerst genannte Zahl immer als Minuendus, die zweite als Subtrahendus genannt ist.

---

[1]) Gerhardt in den Monatsberichten der Berliner Akademie für 1870, S. 143—147. — Curtze brieflich.

> Conditiones circa + et — in subtractione. Si fuerit + et + vel — et —, existente numero superiore majore, fiat subtractio et relicto sua ascribatur nota. Quodsi inferior excesserit superiorem, fiat subtractio et residuo apponatur nota aliena. Si fuerit $\left\langle\begin{matrix}+ \text{ et } - \\ - \text{ et } +\end{matrix}\right\rangle$ addatur absque ullo respectu superioris et inferioris, quandum ad excessum, per dictum habebit $\left\langle\begin{matrix}+ \\ -\end{matrix}\right.$.

Von der Rechnung mit Monomen wird sodann der Uebergang zum Rechnen mit algebraischen Summen gemacht und jede einzelne Regel an mehrfachen Beispielen geübt. Bruchrechnung und Regeldetri schliessen sich an und an diese wieder die eigentliche Lehre von den Gleichungen. Als Beispiele der acht Formen sind $3x = 6$, $3x^2 = 12$, $2x^3 = 16$, $4x^4 = 64$, $3x^2 + 4x = 20$, $3x^2 + 4 = 8x$, $2\frac{1}{2}x^2 = 2x + 6$, $2x^2 + 12 = 1\frac{1}{4}x^4$ behandelt, denen allen der Wurzelwerth $x = 2$ gemeinschaftlich ist. Ausserdem folgen aber noch zahlreiche Beispiele aller Formen, meistens in lateinischer, andere aber auch in deutscher Sprache. Dann folgen noch Aufgaben von einer neunten und zehnten Form $x^2 = b\sqrt{x}$, $x^2 = b\sqrt{x^2}$. Endlich auf dem vorletzten Blatte folgen unter der Ueberschrift *Regule Cosse* 24 Gleichungsformen, denen zu begegnen uns nicht mehr in Erstaunen setzen kann.

Aus dieser Handschrift also schöpfte Christoph Rudolff, und schon seine Zeitgenossen wussten es, wobei ihr Urtheil über seine Handlungsweise weit auseinander ging. In der Vorrede zur zweiten Auflage der Coss, welche (S. 398) Michael Stifel besorgte, sagt dieser: „Was aber dieser Christoff Rudolff bey etzlichen für danck hab will ich mich nicht jrren lassen. Ich höret auff ein zeit jm grewlich vnd vnchristlich fluchen das er die Coss hatte geschrieben vnd das beste (wie der flucher sagt) hatte verschwigen, nemlich die Demonstrationes seyner Regeln. Vnd hatte seine Exempla (wie er saget) auss der Librey zu Wien gestolen. Das sagt einer der sich treffentlich gelehrt wüst vnd das ansehen haben wolt, als were jhm sehr ernst die künsten zu promoviren. Du lieber Gott was solt doch einer sollichen leuthen rechts thun können? Ob denn gleich Christoff Rudolff sein Exempla nicht alle selbs hatte gedichtet, sondern etzlich in der Librey zu Wien abgeschriben, vnd vns die selbige durch den truck mitgeteylet, wem hat er damit schaden gethan?" Mit dem Abschreiben selbst hat es auch nur theilweise seine Richtigkeit. Rudolff band sich keineswegs knechtisch an seine Vorlage. Er liess aus ihr weg, was ihm nicht passte, er fügte da und dort bei, was ihm beifügungswerth erschien, er übernahm einfach, was ihm gefiel. Zu letzteren

Dingen gehören die kurzen Zeichenregeln der Addition[1]), der Subtraction[2]) sowie der Multiplication[3]). Als Zusatz sind die (S. 399) erwähnten Wurzelzeichen zu nennen. So heisst es[4]) „zu mercken das radix quadrata in diesem Algorithmo von kurtz wegen vermerckt wird mit sollichem Character $\sqrt{}$. Als $\sqrt{4}$ bedeutet radicem quadratam auss 4. ist 2.“ Weggelassen sind die 24 Regeln[5]): „Lass dich nicht jrren, das etliche bisher vnd noch von 24 Regeln der Coss gross geschrei machen, denn angesehen yhre meynung vnd die Cautel (deren sye sich zu volliger zal der 24 regeln auch behelffen) will ich auss den 8 regeln nicht alleyn 24 sondern etlich vnd hundert machen. Ist ein verdriesslicher vberfluss, von einer Kunst gross geschwetz treyben, so mit einem wenigeren, nicht allein ordenlicher, sonder auch verstentlicher vollkommenlicher alles mag daregeben werden.“

Die Cautelen, gleichfalls bereits in der wiener Algebra enthalten, sind vier an der Zahl, mittels deren nach Rudolff's Ansicht die Regeln fast beliebig vermehrt werden können. Sie lauten wie folgt[6]): Erstlich kann, wenn auf beiden Seiten der Gleichung wie wir heute sagen würden, Grössen gleicher Benennung (Zahlen, Unbekannte in erster, zweiter u. s. w. Potenz) vorkommen, die kleinere mit entgegengesetztem Zeichen hinübergeschafft und dort durch Subtraction mit der grösseren vereinigt werden. Zweitens kann eine negativ auftretende Grösse als positiv hinübergeschafft werden. Diese beiden Cautelen beruhen ersichtlich auf den Sätzen: Gleiches von Gleichem giebt Gleiches, Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches. Die dritte Cautel schafft Wurzelzeichen durch Potenzirung, die vierte Brüche durch Multiplication mit dem Nenner fort. Diese beiden beruhen mithin auf den Sätzen: Gleiche Potenzen von Gleichem sind gleich, Gleiches mit Gleichem vervielfacht giebt Gleiches.

Alles, was auf diese Cautelen noch folgt, sind Beispiele für die sämmtlichen acht Regeln, welche keine anderen sind, als die im Wiener Manuscripte zuerst behandelten Fälle, und am Schlusse noch acht Aufgaben, zu welchen jene Regeln nicht sofort ausreichen. Die sechste, siebente und achte derselben sind kubische Gleichungen[7]), welche aufgelöst werden, nämlich $x^2(10-x)=63$ mit $x=3$, ferner

$$\frac{x^3-x^2}{2}=605$$

mit $x=11$, endlich $x^3=10x^2+20x+48$ mit $x=12$. Aber wie findet Rudolff diese Wurzelwerthe? Durch fein ausgeklügelte, in

---

[1]) Coss (Ausgabe von 1553) fol. 64 verso. [2]) Ebenda fol. 66 recto. [3]) Ebenda fol. 69 recto. [4]) Ebenda fol. 86 recto. [5]) Ebenda fol. 139 verso. [6]) Ebenda fol. 148 verso bis 151 recto. [7]) Ebenda fol. 477 recto flgg.

jedem dieser Einzelfälle gerade zutreffende Kunststückchen. Die letzte Gleichung z. B. behandelt er folgendermassen. Zuerst addirt er 8 auf beiden Seiten, dann dividirt er durch $x+2$, erhält also der Reihe nach

$$x^3+8=10x^2+20x+56 \text{ und } x^2-2x+4=10x+\frac{56}{x+2}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung bildet er zwei $x^2-2x=10x$ und $4=\frac{56}{x+2}$, welchen beiden $x=12$ genügt. Das ganz Zufällige dieser Auflösung leuchtet ein. In der vorgelegten Gleichung stimmt die Zerlegung, in anderen würde sie Widersprechendes zu Tage fördern. Rudolff wusste, muss man sagen, von der Aufgabe der Zeit, die keine andere war als die Auflösung kubischer Gleichungen. Er kannte die Wurzeln einiger solcher Gleichungen, vielleicht weil er von dieser Kenntniss aus die Gleichungen sich gebildet hatte, und tastete nach allerlei Kunstgriffen, welche diese Wurzelwerthe ihn finden liessen, aber dass er auch nur auf dem Wege zu einem methodischen Auflösungsverfahren gewesen sei, kann man nicht behaupten.

Trotz der freien Benutzung der Zeichen $+$ und $-$ kennt Rudolff doch nur positive Zahlen, wenigstens nur positive Gleichungswurzeln und berücksichtigt desshalb nur dann zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung, wenn diese die Form $ax^2+b=cx$ besitzt und überdies c^2-4ab positiv ist. Ja auch diese Zwiespaltigkeit, um Rudolff's Ausdruck anzuwenden, bringt er erst nachträglich zur Rede.

Für die einzelnen Potenzen der Unbekannten werden Symbole benutzt, wie sie ähnlich von verschiedenen deutschen Schriftstellern her uns bekannt geworden sind[1]). Sie führen den Namen Charakter, und sehen so aus

ϑ, 𝔛, 𝔷, 𝔠𝔢, 𝔷𝔷, ß, 𝔷𝔠𝔢, 𝔅ß, 𝔷𝔷𝔷, 𝔠𝔠𝔢.

Rudolff's Beispiele sind, wie schon bemerkt, vielfach aus der Handschrift der Wiener Bibliothek entnommen, aber auch eine gedruckte Quelle hat er keineswegs zu benutzen verschmäht, wie die oftmals bis in die Zahlen nachgewiesene Uebereinstimmung mit Johann Widmann[2]) darthut, es sei denn, dass die Wiener Handschrift auch jene Widmann'schen Aufgaben enthielte, worüber Untersuchungen noch fehlen.

Auch Aufgaben mit mehreren Unbekannten hat Rudolff unter dem Namen *Regula quantitatis* behandelt[3]), indem er die eine Unbekannte durch das Zeichen 𝔛, die andere als Quantität durch q dar-

---

[1]) Coss (Ausgabe von 1553) fol. 141 recto. [2]) Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplement S. 121. [3]) Coss fol. 307 flgg. — Treutlein l. c. S. 84—85.

stellt, und unter diesen Aufgaben finden sich sowohl bestimmte als unbestimmte. Bestimmt ist z. B. Rudolff's 191. Exemplum[1]). Beim Pferdekauf um 34 Gulden bedarf von drei Gesellen A die Hälfte, B ein Drittel, C ein Viertel des Geldes der beiden Anderen, um die Bezahlung zu ermöglichen. Hat A die Summe $\mathfrak{x}$ und B und C zusammen $\mathfrak{q}$, so ist $\frac{2\mathfrak{x} + \mathfrak{q}}{2} = 34$, $\mathfrak{q} = 68 - 2\mathfrak{x}$, der Gesammtbesitz von A, B, C also $68 - \mathfrak{x}$. Nun habe B allein die Summe $\mathfrak{q}$ und mithin A mit C zusammen $68 - \mathfrak{x} - \mathfrak{q}$, dann ist

$$\mathfrak{q} + \frac{68 - \mathfrak{x} - \mathfrak{q}}{3} = 34, \quad \mathfrak{q} = \frac{34 + \mathfrak{x}}{2}.$$

Besitzt endlich C die Summe $\mathfrak{q}$, also A mit B zusammen $68 - \mathfrak{x} - \mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q} + \frac{68 - \mathfrak{x} - \mathfrak{q}}{4} = 34$, $\mathfrak{q} = \frac{68 + \mathfrak{x}}{3}$. Die Besitzstände sind demnach $\mathfrak{x}$, $\frac{34 + \mathfrak{x}}{2}$, $\frac{68 + \mathfrak{x}}{3}$ mit der Summe $68 - \mathfrak{x}$, folglich $\mathfrak{x} = 10$. Unbestimmt dagegen ist das 188. Exemplum[2]), wo es darauf ankommt $\mathfrak{x} + 14$ so in zwei Theile $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{x} + 14 - \mathfrak{q}$ zu zerlegen, dass der erste um 8 vom zweiten vermehrt, um 2 grösser als der dreifache Rest des zweiten sei. D. h. $\mathfrak{q} + 8 - 2 = 3(\mathfrak{x} + 14 - \mathfrak{q} - 8)$, $\mathfrak{q} = \frac{3\mathfrak{x} + 12}{4}$; der zweite Theil ist daher $\mathfrak{x} + 14 - \frac{3\mathfrak{x} + 12}{4} = \frac{\mathfrak{x} + 44}{4}$. Wie gross man nun $\mathfrak{x}$ wählen soll, ist in der Aufgabe durch keine weitere Bedingung vorgeschrieben, „so ists ein Zeychen, das diss Exemplum vil verantwortung leydet, Vnd nicht der artigen Exempeln eins ist". Es bedarf kaum der Bemerkung, dass unsere Darstellung nicht buchstäblich Rudolff entnommen ist, der insbesondere von einem Gleichheitszeichen noch nichts weiss.

Die hier angeführte unbestimmte Aufgabe veranlasst uns, wiederholt auf Rudolff's Rechenbuch von 1532 (S. 398) zurückzugreifen, um von der in dessen Anhange abgedruckten Schimpffrechnung, d. i. Rechenscherzen zu reden[3]). Unter diesen Aufgaben befindet sich diejenige Methode, eine Zahl unterhalb 105 zu errathen, welche die Chinesen Ta yen genannt haben, und welche durch nicht aufgeklärte Uebertragung um 1200 Leonardo von Pisa (S. 26), um 1400 Byzantinern bekannt gewesen zu sein scheint. Unter ihnen befindet sich aber auch eine andere unbestimmte Aufgabe, von welcher wir eben so gut bei Apianus und bei Adam Riese hätten reden können,

---

[1]) Coss fol. 309 verso bis 310 verso. [2]) Coss fol. 307 verso bis 308 recto.
[3]) Unger S. 53, 100, 106.

wenn die Druckwerke dieser Schriftsteller nicht später als Rudolff's Rechenbuch veröffentlicht worden wären, so dass es richtiger erschien, die Aufgabe bei dem zu besprechen, der sie zuerst im Drucke bekannt machte. Wir meinen die Aufgabe von der gemeinsamen Zeche. Eine gegebene Anzahl von Personen, Männer, Frauen und Jungfrauen, haben zur Tilgung einer gemeinsamen Schuld nach Verhältnisszahlen beizutragen, welche für jeden einzelnen Mann, jede einzelne Frau, jede einzelne Jungfrau so gegeben sind, dass die Schuld genau getilgt wird; man will wissen, wie viele Männer, wie viele Frauen, wie viele Jungfrauen unter der Gesellschaft sich befanden[1]). Die Aufgabe geht unter verschiedenen Namen, *regula virginum*, auch *regula potatorum*, am häufigsten *regula coeci* durch zahlreiche Bücher bis tief in das XVIII. Jahrhundert herab, wo Euler noch sich des letzteren Namens als Ueberschrift des 2. Kapitels des 2. Abschnittes des II. Bandes seiner Algebra bediente. Man hat den Namen mit dem blinden Umhertasten nach einer Auflösung in Verbindung gebracht. Weit ansprechender ist die Ableitung von *Zeche*, aus welchem *coeci* ohne grossen sprachlichen Zwang entstehen konnte.

In diesem 61. Kapitel haben wir hauptsächlich die aus der Zahl der Rechenbücher entnehmbare Verbreiterung derjenigen Volksschichten, welche rechnen zu können als wünschenswerth, wenn nicht als nothwendig erkannten, bemerken können, und fast gleichen Schritt mit dem Rechnen mit bestimmten Zahlen hielt die Coss. Die wenigsten Schriftsteller unter denen, welche wir nannten, sind von hervorragender Bedeutung gewesen, wenn auch keinem von ihnen eine gewisse provinzielle Berühmtheit abging. Nur Christoff Rudolff und Adam Riese haben über den engeren Ort und die engere Zeit ihres Lebens hinaus eine Wirksamkeit sich bewahrt, entsprechend der Kunst ihrer stylistischen Darstellung, entsprechend auch eigenen Gedanken, die wir wenigstens nicht weiter aufwärts zu verfolgen im Stande waren. Am Bedeutsamsten erscheint darunter Rudolff's Aufräumen mit den 24 Regeln, dem Paradepferde seiner Vorgänger.

62. Kapitel.

Michael Stifel.

Der Herausgeber der 2. Auflage von Rudolff's Coss war, wie (S. 398) schon gesagt worden ist, Michael Stifel, eine nach den

---

[1]) Treutlein, Das Rechnen im XVI. Jahrhundert. Zeitschr. Math. Phys. XXII, Supplementheft S. 90—92. — Unger S. 100—101.

verschiedensten Seiten hochmerkwürdige Persönlichkeit, welcher wir ein besonderes Kapitel schuldig sind.

Michael Stifel[1]) ist 1486 oder 1487 in Esslingen geboren, 1567 in Jena gestorben. Er gehörte schon frühe dem Augustinerorden an, der mit Franziscanern und Dominicanern nicht ohne Glück in der allgemeinen Werthschätzung wetteiferte, und der namentlich in Deutschland zahlreiche Niederlassungen besass. Auch Luther war bekanntlich Augustiner, und dessen umwälzende Gedanken fanden im Esslinger Kloster Eingang und Anhänger, unter welchen Stifel der eifrigste war. Die schroffe Vertretung dieser Meinungen zwang ihn 1522 zur Flucht aus dem Kloster, und nun begann ein unstetes Wanderleben als Geistlicher der neuen Richtung. Im Mansfeldischen, in Oesterreich, in der Nähe von Wittenberg, in Preussen hat Stifel als Geistlicher gewirkt. Während seines Aufenthaltes in und bei Wittenberg wandte Stifel, der schon früher an mystischen Zahlenspielereien Vergnügen gefunden und ihretwegen arithmetische Kenntnisse, zum mindesten die der Dreieckszahlen, sich erworben hatte, ein eifriges Studium auf die Rudolff'sche Coss. Er „fasset sie auf, allein mit lesen leichtlich, ohn allen mündtlichen bericht", wie er 1553 in der Wortrechnung erzählt[2]), doch müssen wir annehmen, dass er damals, wenn nicht früher, mit anderen mathematischen Schriften, welche er in einem schon 1544 gedruckten Werke, der Arithmetica integra, da und dort erwähnt, sich gründlich bekannt machte. Dort ist das Rechenbuch Adam Riese's angeführt[3]); dort Schriften von Albrecht Dürer[4]), dort die euklidischen Elemente in der Bearbeitung durch Campanus[5]). Griechisch verstand Stifel nicht und bediente sich dafür des Rathes von Männern wie Dionysius Roner von Esslingen, Johann Heinrich Mayer von Bern, Adolf von Glauburgk von Frankfurt[6]). Rudolff's Coss beschäftigte ihn jedenfalls am längsten, volle 14 Jahre, und diente ihm als Anknüpfungspunkt für eigene wissenschaftliche Untersuchungen, welche nach und nach im Drucke erschienen.

Zuerst kam die schon genannte Arithmetica integra von 1544 heraus, dann die deutsche Arithmetica von 1545, endlich die durch zahlreiche Zusätze und die gleichfalls schon genannte nachtragsweise

---

[1]) Strobel, Neue Beiträge zar Litteratur besonders des XVI. Jahrhunderts. Ersten Bandes erstes Stück. Nürnberg und Altdorf 1790. — Realencyclopädie für protestantische Theologie und Kirche (II. Auflage) Bd. XIV, 702—706 (Leipzig 1884). — Allgemeine deutsche Biographie. [2]) Wortrechnung fol. B 1 recto. [3]) *Arithmetica integra* fol. 226 verso. [4]) Ebenda fol. 211 recto. [5]) Ebenda fol. 104 verso und häufiger. [6]) Ebenda fol. 143 verso.

gedruckte Wortrechnung vermehrte zweite Auflage der Rudolff'schen Coss von 1553. Von diesen Schriften haben wir zu reden[1]).

Die Arithmetica integra erschien bei dem damals berühmtesten Buchdrucker Johannes Petreius in Nürnberg, mit welchem Stifel, damals Pastor der kleinen Gemeinde Holzdorf bei Wittenberg, durch Vermittelung des Wittenberger Professors Justus Jonas in Verbindung getreten war[2]), während ein zweiter Professor der gleichen Universität, der berühmte Melanchthon, eine Vorrede zu dem Werke verfasste (S. 409), welche den hohen Werth der Arithmetik in ein glänzendes Licht zu stellen bestimmt war. Den Namen Arithmetica integra hatte Milichius vorgeschlagen[3]), welcher seit 1524 erst als Professor der Philosophie, in welcher Eigenschaft er auch die ersten mathematischen Vorlesungen in Wittenberg hielt[4]), dann der Medicin dieser Universität angehörte und dem engeren Freundeskreise Stifel's beigezählt werden muss. Milichius war es auch, welcher Stifel mit guten Gründen die Ueberzeugung beibrachte, das Wort Algebra stamme von dem Astronomen Geber, dem Erfinder derselben[5]). In das schon druckfertige Manuscript hat Stifel auf ausdrücklichen Wunsch des Petreius noch die Regula falsi hineingearbeitet[6]) und mancherlei Veränderungen anbringen müssen, welche den Druck noch weiter herumzogen, während die Niederschrift schon vorher volle fünf Jahre fertig dagelegen hatte[7]). Das Werk besteht aus drei Büchern, von denen das 1. von den rationalen, das 2. von den irrationalen Zahlen, das 3. von der Algebra handelt.

Am meisten Eigenthümlichkeiten zeigt das 1. Buch, auf welches auch mit Recht meistens ziemlich ausschliesslich eingegangen wird, wo es sich um die Würdigung Stifel's handelt. Aus diesem 1. Buche sind es dann selbst wieder zwei Stellen, die besonders hervorgehoben zu werden pflegen. Die erste Stelle, zu deren Ergänzung allerdings Stellen des 3. Buches beigezogen werden müssen, handelt von dem Nutzen, den es gewähre, immer einer arithmetischen Progression eine geometrische entsprechen zu lassen[8]). Das ist derselbe Gedanke,

---

[1]) Ueber Michael Stifel als Mathematiker vergl. Kästner I, 112—128 und 163—184. — Cantor, Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus. Zeitschr. Math. Phys. II, 353—376. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 60—74. — Treutlein, Deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 17—20 und häufiger. — Giesing, Michael Stifel's *Arithmetica integra* I. Theil (Döbeln 1879). — Unger S. 58 und häufiger. [2]) *Arithmetica integra* fol. 102 recto. [3]) Ebenda fol. 93 recto. [4]) Poggendorff II, 150. [5]) *Arithmetica integra* fol. 226 verso zu vergleichen mit 30 recto, 55 recto, 231 verso u. s. w. [6]) Ebenda fol. 93 recto. [7]) Ebenda in dem angehängten Druckfehlerverzeichnisse. [8]) *Sequitur utilis quaedam tractatio, ut progressioni Arithmeticae*

dem wir bei Nicolas Chuquet, dem wir bei deutschen Cossisten begegnet sind, für welchen wir einen italienischen Ursprung vermuthet haben. Also ein Erfinderrecht auf den Gedanken kann man für Stifel unter keinen Umständen in Anspruch nehmen. Ist es aber der alte Gedanke in seiner alten Form? Diese Frage dürfte zu verneinen sein. Stifel sucht überall einen praktischen Gewinn aus dem Gedanken zu ziehen, wie er diesem Nutzen auch in der Ueberschrift *utilis tractatio* genügende Bedeutung beilegte. Schon die Thatsache, dass a, $a+d$, b, $b+d$ (um allgemeine Symbole zu gebrauchen) dem Gesetze $(b+d)=b+(a+d)-a$ gehorchen, lässt ihn folgern[1]), dass man das 4. Glied einer Regeldetri finden werde, wenn man das Product des 2. und 3. Gliedes durch das 1. dividire, während bei der sogenannten umgekehrten Regeldetri die Vorschrift nur dahin zu ändern sei, dass man das Product des 1. und 2. Gliedes durch das 3. dividire. An späterer Stelle ist die arithmetische wie die geometrische Reihe als nach beiden Seiten fortsetzungsfähig gekennzeichnet. Eine beispielsweise Versinnlichung hat folgende Gestalt:

— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

und es sei möglich, sagt Stifel hier ausdrücklich[2]), an dieser Stelle ein ganz neues Buch von den wunderbaren Eigenschaften der Zahlen einzuschalten, eine Versuchung, welcher er jedoch sich entziehen und mit geschlossenen Augen von dannen gehen müsse. So sehr hat Stifel mit dem Instincte des Genies die Fruchtbarkeit des Begriffes empfunden, welchen wir den des L o g a r i t h m i r e n s nennen dürfen. Noch ist es nicht Licht geworden, aber deutlicher treten doch die Umrisse bei Stifel als bei Chuquet hervor, und mag Stifel der Gedanke von Anderen überkommen sein, mag er, wie es uns mit Rücksicht auf die von ihm studirten Werke wahrscheinlicher däucht, in seinem Geiste neu entstanden sein, man sieht, dass die Erfindung der Logarithmen nun nicht gar lange mehr auf sich warten lassen wird. Ein Kunstausdruck tritt insbesondere hier bei Stifel auf, der später in erweitertem Sinne allgemeines Bürgerrecht erwerben sollte. Die Glieder der arithmetischen Reihe heissen E x p o n e n t e n der zugehörigen Glieder der geometrischen Reihe.

---

respondeat Geometrica progressio. Arithmetica integra fol. 35 recto zu vergleichen mit fol. 235 verso und besonders 249 verso.

[1]) *Arithmetica integra* fol. 36 recto. [2]) Ebenda fol. 249 verso: *Posset fere hic novus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducam, et clausis oculis abeam.*

Wesentlich vollkommener sind die Anschauungen, welchen Stifel an der zweiten stets hervorgehobenen Stelle Ausdruck verleiht[1]). Die Zahlen, von denen er dort sagt, dass sie zu ihren besonderen Wurzelausziehungen gehören, sind nichts anderes als die Binomialcoefficienten. Es erscheint uns als sehr müssige Spitzfindelei, zweifeln zu wollen, ob Stifel wirklich das Bewusstsein gehabt habe, dass diese Zahlen zur Ausrechnung von $(a+b)^n$ Dienste leisten, weil er nur deren Anwendung auf die Ausziehung $n$ter Wurzeln lehre. Gewiss ist diese Behauptung unbestreitbar wahr, aber welcher deus ex machina konnte Stifel mit den bei den Wurzelausziehungen unentbehrlichen Binomialcoefficienten bekannt gemacht haben, wenn er dieselben nicht durch Potenzerhebungen sich bildete? Fragt man aber, warum Stifel in den Namen, den er den Binomialcoefficienten beilegt, von der Potenzerhebung schweigt, so liegt die Antwort darauf auf der Hand. Dass etwa $12^4 = 20736$, konnte nach der Formel

$$(10+2)^4 = 10^4 + 4 \cdot 10^3 \cdot 2 + 6 \cdot 10^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 10 \cdot 2^3 + 2^4$$

ausgerechnet werden, aber bequemer war das Verfahren allmäliger Multiplication, und so konnte eigentlich nicht behauptet werden, die Zahlen 4, 6 seien der Potenzerhebung eigenthümlich. Umgekehrt konnte $\sqrt[4]{20736} = 12$ nur von jener Entwickelung aus ermittelt werden, der Wurzelausziehung waren mithin die Zahlen 4, 6 wirklich eigenthümlich. Stifel wusste, dass er hier eine Erfindung gemacht habe, eine Erfindung, deren Bedeutung er zu betonen wusste. Die Vorrede zum 2. Buche war es, in welcher er folgendermassen sich aussprach[2]). Er habe die Regeln der Wurzelausziehung erheblich vermehrt, weit über das hinaus, was Apianus vielleicht wusste, aber jedenfalls nicht lehrte, denn dessen Vorschriften erstreckten sich nicht weiter als darauf, wie man bei der Ausziehung 5. und 7. Wurzeln Gruppen von je 5 und 7 Ziffern zu bilden habe. „Ich werde, sagt Stifel an der ersten Stelle, wo die Binomialcoefficienten auftreten[3]), die Erfindung durch folgende Tabelle mittheilen, deren Fortsetzung ins Unendliche jeder leicht einsieht, wenn er erst die Art sie herzustellen erkannt hat.“ Dann folgt die Tabelle bis zu den Binomialcoefficienten der 17. Potenz. (Siehe S. 434.)

Das Gesetz, nach welchem die Zahlen gebildet sind, wird ausführlich erörtert. Wir können es mit Hilfe jetzt gebräuchlicher Zeichen kurz dahin aussprechen, dass Stifel von dem Satze

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 44 verso: *De inventione numerorum, qui peculiariter pertinerent ad suas species extractionum.* [2]) Ebenda fol. 102 recto. [3]) Ebenda fol. 44 verso.

seinen Ausgangspunkt nahm. Beim Gebrauch zur Wurzelausziehung ist jede Horizontalzeile zu vervollständigen, indem man ihre Zahlen rückläufig, *retrograde*, wiederholt, mit Ausnahme der letztgeschriebenen Zahl, welche sich nicht wiederholt. Bei grader Anfangszahl giebt das eine ungrade, bei ungrader eine grade Anzahl von Gliedern[1].

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Sind diese beiden Stellen des 1. Buches der Arithmetica integra, und besonders die zweite, diejenigen, welche als die folgewichtigsten sich erwiesen haben, so fehlt es keineswegs an anderen gleichfalls recht bemerkenswerthen Dingen, auf deren einige noch aufmerksam gemacht werden mag. Schon Leonardo von Pisa hat (S. 11) Theilbarkeitsmerkmale für die Theilung durch 2, 3, 5, 9 aufgestellt. In Deutschland hat vermuthlich Christoph Rudolff in seinem Rechenbuche von 1526 die gleichen Regeln[2]) zuerst mitgetheilt. Stifel ging darüber hinaus, indem er[3]) Theilbarkeitsregeln für jeden der Theiler 1 bis 10 angab. Die Regel für 7 dürfte ihm angehören. Sie ist richtig, wenn auch zu eng. Sie behauptet nur, 7 theile jede Zahl, welche die Summe von 3, 6, 9, 12 Gliedern einer geometrischen Progression vom Gliederquotienten 2, 4 oder 16 sei. — Bei Besprechung vollkommener Zahlen schreibt Stifel vor[4]), man solle die geometrische Reihe

4 . 8	16 . 32	64 . 128	256 . 512	etc.

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 46 recto. [2]) Unger S. 84. [3]) *Arithmetica integra* fol. 8 verso. [4]) Ebenda fol. 10 verso.

bilden und wie in dem Schema, welches wir ihm entnehmen, je zwei Glieder derselben von 4 und 8 beginnend zu einer Gruppe vereinigen; das Product der kleineren Zahl in die um 1 verringerte grössere Zahl sei alsdann stets eine vollkommene Zahl. Wir heben diese Behauptung hervor, weil sie einen Irrthum enthält. Euklid IX, 36 wusste ganz gut, dass diese Regel nur insofern Bestand hat, als jene um 1 verringerte grössere Zahl eine Primzahl ist, und wenn Stifel diese einschränkende Bedingung wegliess, so glaubte er offenbar $2^{2n+1}-1$ sei immer Primzahl, ein Irrthum, von welchem er sich schon bei dem letzten Zahlenpaare seines Schemas hätte überzeugen können, da $511 = 7 \cdot 73$ und demzufolge $256 \cdot 511 = 130816$ keine vollkommene Zahl ist. Der Begriff der vollkommenen Zahl führt dann weiter dazu, die Theiler einer Zahl aufzusuchen und ihre Anzahl zu ermitteln, was allerdings zunächst[1]) nur durch gewisse Versuche in Erfahrung gebracht wird. An einer späteren Stelle[2]) ist die Anzahl der Theiler eines Productes von n Primzahlen zu $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$ angegeben, wobei zwar die 1, aber nicht die Zahl selbst als Theiler mit eingerechnet ist. Das Interessante bei diesem letzten Satze besteht nicht bloss darin, dass Stifel ihn überhaupt kennt, sondern dass er ihn als Satz des Cardanus bezeichnet und dadurch zeigt, dass er eine Schrift dieses letzteren italienischen Mathematikers bereits gesehen hatte, welche gleichzeitig mit der Arithmetica integra bei Petreius im Drucke befindlich war. Diametralzahlen nennt Stifel[3]) das Product zweier Zahlen, deren Quadratsumme ein rationales Quadrat ist. Anders ausgedrückt kann man sagen, eine Stifel'sche Diametralzahl sei der doppelte Flächeninhalt eines pythagoräischen Dreiecks, und da jedes Sehnendreieck, dessen eine Seite Kreisdurchmesser ist, ein rechtwinkliges Dreieck sein muss, so giebt es viele rechtwinklige Dreiecke zu derselben Hypotenuse und mehr als eine Diametralzahl mit gleicher Quadratsumme ihrer beiden Factoren. Es ist z. B. $65^2 = 25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2$, also sind $25 \cdot 60 = 1500$ und $39 \cdot 52 = 2028$ Diametralzahlen von gleichem Diameter[4]). Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass Stifel's numerus diametralis etwas ganz anderes ist, als der *διάμετρος* Theon's von Smyrna (Bd. I, S. 407), der einen Näherungswerth der irrationalen Diagonale eines Quadrates darstellt, während bei Stifel die

[1]) *Arithmetica integra* fol. 11 verso bis 12 verso. [2]) Ebenda fol. 101 recto. [3]) Ebenda fol. 14 verso flgg. [4]) Ebenda fol. 15 verso: *Possibile autem est, unam diametrum esse plurium diametralium numerorum diametrum, ut satis ostenditur hac figura sequenti,* worauf ein Kreis mit dem Durchmesser 65 und den beiden Rechtecken folgt, deren Diagonale der Durchmesser ist, während die Seiten 25 und 60, beziehungsweise 39 und 52 sind.

rationale Diagonale eines Rechtecks den Ausgangspunkt liefert. Um so mehr ist zu vermuthen, dass Stifel aus sich selbst auf diese Untersuchung kam, die er so weit führt, dass er behauptet, ein Product ab sei dann und nur dann Diametralzahl, wenn

$$a : b = (2n^2 + 2n) : (2n + 1)$$

oder

$$a : b = (4n^2 + 8n + 3) : (4n + 4).$$

Natürlich sagt er solches nicht in den hier gebrauchten allgemeinen Symbolen, sondern so, dass er die Verhältnisszahlen in einer der Formen $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{7} \cdots$ oder $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16} \cdots$ sucht. In der That ist

$$(2n^2 + 2n)^2 + (2n + 1)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

und

$$(4n^2 + 8n + 3)^2 + (4n + 4)^2 = (4n^2 + 8n + 5)^2.$$

Wieder eine Stifel eigenthümliche Aufgabe ist die von der circulären Bezifferung[1]), *de numeratione circulari*. Ihr Wesen besteht darin, dass die $4n - 4$ Randfelder eines aus n^2 kleinen Quadraten bestehenden grösseren Quadrates mit Ordnungsziffern versehen werden sollen, indem man an irgend einem Randfelde beginnend nach Abzählung einer jeweils bestimmten Felderzahl in bestimmter Richtung eine Ordnungsziffer einsetzt, bis sämmtliche Felder mit Ausnahme dessen, bei welchem das Abzählen angefangen hat, beziffert sind; man fragt, wie viele Felder jedesmal abzuzählen sind, damit die Aufgabe erfüllt werde, welche also eine Art von Schliessungsproblem ist. Weiter bemühte sich Stifel[2]) um die Herstellung von Zauberquadraten. Nachdem Inder, Chinesen, Araber und Byzantiner (Bd. I, S. 594, 633, 697, 480) mit dieser Zahlenspielerei sich beschäftigt hatten, fand sie im XV. Jahrhunderte, wie es scheint, Eingang in Deutschland. Aus jener Zeit stammt ein Quadrat der ersten 25 Zahlen[3]). Albrecht Dürer benutzte im Jahre 1514 in seinem „Melancholie“ genannten Holzschnitte das Quadrat der ersten 16 Zahlen in der Form:

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 16 verso. Vergl. Giesing l. c. S. 45—50.
[2]) Ebenda fol. 24 verso bis 30 recto. Vergl. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig 1876), Kap. IV Historische Studien über die magischen Quadrate (besonders S. 220—228) und Giesing l. c. S. 56—61, endlich Fontès, *Sur les carrés à boraure de Stifel* in den Veröffentlichungen der Association Française pour l'avancement des sciences (Congrès de Bordeaux 1895). [3]) Curtze brieflich.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Agrippa von Nettesheim (1487—1535) hat alsdann in seinem Werke *De occulta philosophia* (1533) eine ganze Anzahl von Zauberquadraten sowohl mit grader als ungrader Seitenzahl beschrieben. Jedem Planeten ist ein bestimmtes Zauberquadrat eigen und hat entsprechende geheimnissvolle Eigenschaften. Der erste Mathematiker, welcher in Deutschland mit Zauberquadraten sich beschäftigte, war Adam Riese (S. 422). Er that dieses am Ausführlichsten in seiner Rechnung nach der Lenge von 1550, welche mithin späteren Datums als die Arithmetica integra ist, womit unsere Bezeichnung Riese's als erster deutscher Mathematiker, welcher die Frage in Angriff nahm, hinfällig würde, aber Riese beruft sich in diesem späteren Werke ausdrücklich auf das Rechenbuch von 1522, in welchem er gleichfalls schon eine Vorschrift zur Bildung von Zauberquadraten gegeben habe. Wir haben nichts weniger als die Absicht, auf den für die Gesammtentwickelung der Mathematik sehr nebensächlichen Gegenstand näher einzugehen, aber bemerken müssen wir doch, dass Riese's Regel und die nach ihr gebildeten Quadrate von denen Stifel's verschieden sind und die Selbständigkeit beider Schriftsteller von einander verbürgen. Damit ist auch für Riese eine gewisse zahlentheoretische Begabung festgestellt, wenn auch nicht in dem hohen Grade wie für Stifel, dessen dahin sich neigende Geistesrichtung durch alle Einzelheiten, welche wir angaben, bezeugt wird. Wir können uns dafür auch auf ein Kunststückchen Stifel's berufen[1]), welchem wir nirgend anderswo begegnet zu sein uns erinnern können. Man lasse eine n- z. B. zweiziffrige Zahl x denken, und merke sich eine Zahl a von der Beschaffenheit, dass $a(a+1)$ eine $n+1$-ziffrige Zahl werde, z. B. $a=10$, $a(a+1)=110$. Dann lasse man sich die Reste r_1, r_2 sagen, welche die Divisionen $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a+1}$ übrig lassen. Bildet man alsdann für sich $r_1(a+1)+r_2(a^2)=S$, so ist nach Stifel's Behauptung x immer der Rest, welcher bei der Division $\frac{S}{a(a+1)}$ übrig bleibt. Die Richtigkeit seiner Vorschrift ist unter Anwendung des Symbols $E\left(\frac{p}{q}\right)$ zur Be-

[1]) *Arithmetica integra* fol. 38 verso.

zeichnung der grössten in $\frac{p}{q}$ steckenden ganzen Zahl leicht zu erweisen. Offenbar lassen sich die Reste r_1, r_2 als

$$r_1 = x - a \cdot E\left(\frac{x}{a}\right), \quad r_2 = x - (a+1) E\left(\frac{x}{a+1}\right)$$

schreiben, und alsdann folgt

$$S = (a+1)x - a(a+1)E\left(\frac{x}{a}\right) + a^2 x - a^2(a+1)E\left(\frac{x}{a+1}\right)$$
$$= x + a(a+1)\left[x - E\left(\frac{x}{a}\right) - aE\left(\frac{x}{a+1}\right)\right]$$

und damit ist Stifel's Regel schon gerechtfertigt[1]), sofern der in eckigen Klammern stehende Ausdruck nicht negativ ausfallen kann. Das ist aber unmöglich, denn $a(a+1) > x$ und S ist seiner Entstehung nach positiv. Wäre also das ganzzahlige

$$x - E\left(\frac{x}{a}\right) - aE\left(\frac{x}{a+1}\right)$$

negativ, so würde es mit $a(a+1)$ vervielfacht absolut genommen grösser als x sein, mithin ein negatives S hervorbringen. Ob freilich Stifel bereits eine derartige Ueberlegung anstellte, dafür sind wir ohne jeglichen Anhaltspunkt.

Das 2. Buch ist, wie wir schon ankündigten, den Irrationalen gewidmet. Gleich zu Anfang steht der wichtige Satz: *Impossible est ut ex multiplicatione fracti in se fiat numerus integer*[2]), aus der Multiplication eines Bruches mit sich selbst könne niemals eine ganze Zahl entstehen. Gehe nämlich schon der Nenner des Bruches nicht in dessen Zähler auf, so könne noch weniger das Quadrat, der Kubus u. s. w. des Nenners in dem Quadrate, dem Kubus u. s. w. des Zählers aufgehen. Kein Irrationales könne demnach einem Rationalen gleich sein, wenn es auch zwischen zwei rationale Zahlen falle. Euklid leugne deshalb die Zahleneigenschaft des Irrationalen und handle in seinem ganzen X. Buche nur von irrationalen Strecken. Stifel schliesst sich soweit an, dass sein ganzes zweites Buch der Arithmetica integra als Erläuterung zu jenem schwierigen euklidischen Buche aufgefasst werden kann. Eine Frage, mit welcher Stifel sich sehr eingehend beschäftigt hat, ist die nach den Gründen der

---

[1]) Die gleichzeitig zu erfüllenden Congruenzen $x \equiv r_1 \pmod{a}$ und $x \equiv r_2 \pmod{a+1}$ erfordern $x \equiv (a+1)r_1 - ar_2 \pmod{a(a+1)}$. Addirt man, um das mögliche Auftreten einer negativen Zahl zu vermeiden, rechts noch $a(a+1)r_2$, so erscheint:

$$x \equiv (a+1)r_1 + a^2 r_2 \pmod{a(a+1)}.$$

Aber solcher Schlüsse war Stifel gewiss nicht fähig. [2]) *Arithmetica integra* fol. 103 verso.

Verschiedenheit der Euklidübersetzung des Campanus von derjenigen, welcher unmittelbar die Theon'sche Ausgabe zu Grunde lag[1]). Es sei schon möglich, dass erstere mitunter die richtigere Reihenfolge der Sätze darbiete als Theon, in dessen Hände die euklidischen Elemente doch erst nach mehreren Jahrhunderten gelangt seien, und euklidische Sätze seien doch kein Evangelium, ein freieres Urtheil sei daher statthaft. Die Beweise vollends hielt Stifel auf die Aussage seiner des Griechischen kundigen Freunde hin[2]) für Theonisches Beiwerk.

Bei diesen im 2. Buche gegebenen Erläuterungen — oder sollen wir sie eine algebraische Uebersetzung des geometrischen Textes nennen? — sind verschiedene Zeichen in Anwendung. Vor allem erscheinen hier die Zeichen + und —, dann aber auch Wurzelzeichen von verschiedenen Wurzelexponenten, sämmtlich durch $\surd$ dargestellt, welchem alsdann ein die Art der Wurzel näher bezeichnender Buchstabe folgt[3]). Die Wurzeln von der zweiten bis zur dreizehnten sehen demnach so aus:

√ʒ, √ce, √ʒʒ, √ß, √ʒce, √bß, √ʒʒʒ, √cece, √ʒß, √cß, √ʒʒce, √dß.

Bezieht sich ein Wurzelzeichen auf additiv oder subtractiv vereinigte Grössen, so hat es einen Punkt hinter sich z. B.

$$\sqrt{\mathfrak{z}}\cdot\sqrt{\mathfrak{z}}\,20 - 4 - \sqrt{\text{ß}}\,8 = \sqrt{\sqrt{20} - 4 - \sqrt[5]{8}}.$$

Beim Rechnen mit den Zeichen + und — wird die Regel aufgestellt[4]): *A ponit M et S ponit S.* Das ist eine von den Gedächtnisshilfen, an welchen die Zeit reich war, und von welchen zahlreiche Beispiele anzuführen nicht schwer hielte. Der Sinn der Regel ist der, dass bei der Addition ungleichbezeichneter Zahlen Major, die grössere Zahl, den Ausschlag gebe, bei der Subtraction solcher Zahlen dagegen immer das Vorzeichen des Superior, der oben stehenden Zahl, zu nehmen sei.

Uebrigens giebt das 2. Buch auch Veranlassung zu Aeusserungen Stifel's über geometrische Dinge. Er verweist für die Netze von Vielflächnern auf Albrecht Dürer[5]) und bringt in dem Druckfehlerverzeichnisse am Ende des ganzen Bandes diese Netze selbst. Er verweist ausserdem einmal[6]) auf eine Geometrie, welche er selbst zu schreiben beabsichtigte. Von einer Ausführung dieser Absicht ist nichts bekannt, wir haben indessen keinen Grund, das Unterbleiben

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 158 verso. [2]) Ebenda fol. 143 verso. [3]) Ebenda fol. 109 recto und häufiger. [4]) Ebenda fol. 124 recto. [5]) Ebenda fol. 211 recto. [6]) Ebenda fol. 226 recto: *Sed de his omnibus suo loco in Geometria mea dicam latius.*

besonders zu beklagen, wenn wir die einzige Stelle beachten, an welcher Stifel als eigentlicher Geometer sich kundgiebt[1]). Zwischen (Figur 80) AB und dem doppelt so grossen AC, welches zu AB senkrecht gezeichnet ist, sollen zwei mittlere Proportionalen eingeschaltet werden. Stifel halbirt AC in D, AD in E, AE in F, EF in I und beschreibt um I als Mittelpunkt mit IC als Halbmesser den Halbkreis $CLSK$. Dann wird um M, Halbirungspunkt der BL, als Mittelpunkt mit ML als Halbmesser der Halbkreis LGB beschrieben und behauptet, es sei

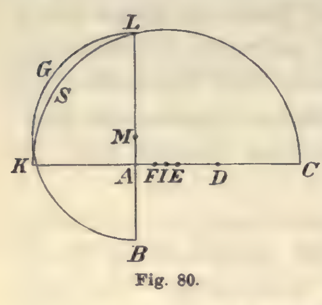


Fig. 80.

$$AB : AK = AK : AL = AL : AC.$$

Der Irrthum besteht, wie leicht ersichtlich, darin, dass angenommen wird, der zweite Halbkreis gehe gleichfalls durch den Punkt K, was nicht der Fall ist. Ist nämlich $AB = a$, $AC = 2a$, so ist

$$CI = \frac{13}{8}a, \quad AK = \frac{5}{4}a, \quad AL = \sqrt{2a \cdot \frac{5}{4}a} = a\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot$$

Schneidet nun der Halbkreis LGB die verlängerte CA in K', so ist $AK' = \sqrt{AB \cdot AL} = a\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$ und sollte K' mit K zusammenfallen, so müsste $\frac{5}{4}a = a\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$ sein oder $\frac{5}{4} = \sqrt[3]{2}$. Nicht viel vertrauenerweckender ist ein Anhang zum zweiten Buche über die Quadratur des Kreises[2]), in welchem der mathematische Kreis von dem physischen unterschieden und diesem die Quadrirbarkeit zugeschrieben, jenem aber desshalb abgesprochen wird, weil der Kreis ein Unendlichvieleck sei, die unendliche Zahl aber nicht angegeben werden könne.

Im 3. Buche der Arithmetica integra ist die Algebra enthalten. Man habe Regeln in Fülle aufgestellt und ihnen lächerliche Namen beigelegt[3]). Da gab es *Regulae aequalitatis*, *separationis*, *transversionis*, *commixtionis*, *positionis*, *legis*, *augmenti*, *decrementi*, *pluris*, *residui*, *collectionis*, man könne sie alle zusammen als Menschenquälerei, *vexationes populi*, bezeichnen. Statt dessen genüge die einzige Regel des Algebras, welche so lautet[4]): „Ist eine unbekannte Zahl zu finden, so setze man statt ihrer 1 Coss (wir schreiben dafür 1 𝔵), und ist alsdann eine Gleichung hergestellt, so bringe man sie auf eine wo möglich einfachere Form. Dann theile man durch die

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 119 verso flgg. Vergl. Treutlein, Die deutsche Coss. Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplementheft S. 53. [2]) Ebenda fol. 224 recto bis 226 recto. [3]) Ebenda fol. 227 recto. [4]) Ebenda fol. 227 verso.

mit der höchsten cossischen Grösse verbundene Zahl das ihr Gleichgesetzte mit seiner Benennung. So erscheint immer die unbekannte Zahl entweder als der Quotient oder als eine Wurzel desselben. Ist aber eine Wurzel auszuziehen, so giebt das diejenige cossische Grösse, von welcher der Divisor hergenommen wurde, durch ihr cossisches Zeichen schon zu erkennen."

Wir werden uns später überzeugen, dass Stifel hier in einiger Abhängigkeit von Cardanus sich befindet. Im Uebrigen muss an das Zeichen $\mathfrak{X}$ eine Bemerkung geknüpft werden. Dass es aller Wahrscheinlichkeit nach als der Buchstabe *r* zu deuten ist, haben wir gesagt, als es zum ersten Male vorkam, aber warum *r*? Die nächstliegende Vermuthung, unterstützt durch die Worte *1 Coss* (*nos autem ponimus 1* $\mathfrak{X}$), wird die sein an *res* als Uebersetzung von *Coss*, *cosa* zu denken, dessen Anfangsbuchstabe gewählt wurde; aber nichts wäre irriger. Viele Stellen, an welchen neben $\mathfrak{X}$ das Wort radix abgedruckt ist, beweisen dass jenes Zeichen so zu deuten ist, und ganz unwiderlegbar ist in dieser Beziehung eine Stelle, wo es heisst *quaerenda erit 1* $\mathfrak{X}$ *de quotiente*[1]), man suche die Wurzel des Quotienten, wo also $\mathfrak{X}$ überhaupt kein Symbol der Unbekannten, sondern einfach eine Abkürzung für *radix* ist.

Die eine Regel, deren Wortlaut wir angegeben haben, ersetze, sagt Stifel[2]), die 8 Regeln, welche Rudolff, sowie die 24, welche Andere aufzustellen für nöthig fanden, und sie ist unschuldig daran, wenn man eine durch sie geforderte Operation nicht auszuführen im Stande ist, wie z. B. wenn man aus $x^3 = 5x^2 + 192$ nicht weiss $x = 8$ abzuleiten. Zweite Wurzeln, *radices secundae*, werden weitere in der Gleichung vorkommende Unbekannte genannt[3]). Als Zeichen für sie sind neben $\mathfrak{X}$ die Initialen $A, B, C, D \ldots$ in Gebrauch, aber man soll sie nur dann anwenden, wenn es nicht möglich ist mit einer Unbekannten auszukommen[4]). Die höheren Potenzen der zweiten Wurzeln heissen $A\mathfrak{z}$, $A\mathfrak{ce}$, $A\mathfrak{zz}$ u. s. w. Die so zu sagen regelrechte Anordnung der *aequatio reducta* ist nach Stifel's allgemeiner Vorschrift die, bei welcher die höchste Potenz der Unbekannten mit positivem Zahlencoefficienten auf der einen, alles Uebrige auf der andern Seite steht. Stifel benutzt aber auch jede andere Anordnung, ja in einem Falle bringt er die Gleichung auf Null[5]),

$$116 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,41472 - 18\,\mathfrak{X} - \sqrt{\mathfrak{z}}\,648\,\mathfrak{z} \text{ aequantur } 0,$$

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 233 verso. Man vergleiche ferner 235 verso, 267 verso u. s. w. [2]) Ebenda fol. 250 verso. [3]) Ebenda fol. 251 verso. [4]) Ebenda fol. 252 verso: *Persuade tibi peccatum esse, si per plura fiunt quae possunt fieri per pauciora.* [5]) Ebenda fol. 283 recto.

wahrscheinlich das erste solche Vorkommen und damit ein allerdings durchaus unbewusstes Muster für die Zukunft.

Wenn wir sagten, Stifel habe jede Anordnung der Gleichung benutzt, so müssen wir nachträglich eine einzige Anordnung davon ausnehmen. Es kommt nie vor, dass lauter Glieder mit positiven Vorzeichen solchen mit ausschliesslich negativen Vorzeichen gleich gesetzt werden, weil solche Gleichungen durch positive Wurzelwerthe nicht erfüllt werden können, für Stifel aber nur positive Gleichungswurzeln einen Sinn haben. Auch bei den quadratischen Gleichungen hat in seiner Behandlung nur die Form $ax^2 = bx - c$ die beiden Wurzeln $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$, weil beide positiv werden; dass $4ac > b^2$ sein könnte, wird gar nicht in Betracht gezogen. Doch bedurfte dieses kaum der Hervorhebung, denn diese Beschränkung des Wurzelbegriffes ist allen deutschen Cossisten gemein, wenn wir auch nicht für nothwendig hielten, bei jedem einzelnen Schriftsteller besonders darauf hinzuweisen.

Was Stifel auszeichnet, oder womit er wenigstens aus dem Kreise der deutschen Cossisten heraustrat, das ist die Erklärung der negativen Zahl als kleiner als Null, welche mit ihm ihren Einzug in die Mathematik hielt, um Jahrhunderte lang nicht mehr aus ihr zu verschwinden. *Finguntur numeri minores nihilo ut sunt* $0 - 3$, $0 - 8$ *etc.* sagt Stifel schon in seinem 1. Buche[1]), und im 3. Buche häufen sich die Stellen[2]), wo die negativen oder mit Stifel zu reden die absurden Zahlen für kleiner als Null erklärt werden. Da heisst es: 0 *i. e. nihil* (*quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos*). Da wird darauf hingewiesen, dass bei absurden Zahlen Alles absurd oder verkehrt, *absurde sive inverse*, geschehe; bei wirklichen Zahlen, *in veris numeris*, bringe die Subtraction Verminderung hervor, bei absurden dagegen Vermehrung. Ob bei dieser Auffassung an eine Abhängigkeit von Paciuolo (S. 319) zu denken ist, scheint sehr zweifelhaft.

Zum Schlusse des 3. Buches ist eine ganze Anzahl von schwierigeren algebraischen Aufgaben des Cardanus behandelt. Bald sind es solche, die auf Gleichungen 4. und 3. Grades führen, bald solche, die nur 2. Grades sich dadurch auszeichnen, dass es auf geschickte Wahl der Unbekannten ankommt. Die Gleichungen 4. Grades werden so gelöst, dass beide Seiten der Gleichung zu vollständigen Quadraten ergänzt werden, um dann durch beiderseitige Wurzelausziehung eine nur noch quadratische Gleichung zu liefern. Bei den Gleichungen

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 48 recto. [2]) Ebenda fol. 248 verso bis 250 verso.

3. Grades findet die Zurückführung auf einen niedrigeren Grad dadurch statt, dass wieder beiderseitige Ergänzungen vorgenommen werden, welche diesmal keine Wurzelausziehung, aber die Division durch einen beiden Seiten gemeinsamen Factor gestatten. Zurückführung von einem höheren auf einen niedrigeren Grad ist also der Zweck, aber ein einheitliches Verfahren zur Erreichung des Zweckes ist nicht vorhanden, sondern immer neue besondere Kunstgriffe müssen geübt werden.

Nur ein Jahr später als die Arithmetica integra erschien 1545 bei dem gleichen Drucker Johann Petreius in Nürnberg die „Deutsche Arithmetica inhaltend die Haussrechnung, deutsche Coss, Kirchrechnung“. Das Titelblatt enthält noch eine Lobpreisung des Inhaltes in folgender Fassung: „Mein lieber Leser, Nach dem die Coss (welche ist ein Kunstrechnung der gantzen Arithmetick) bissher den Deutschen mit vil frembden worden, vermangt und verblend, schwer ist gewesen, So weit sie hie mit new erfundenen vortheil vnnd Regeln, sehr leicht vnd kurtz herfur bracht vnd gelehrt vnd mit guten Deutschen bekantlichen worten vnd Exempeln erweyset. Das ander so hierin gelert wird von der Haussrechnung vnd Kirchrechnung bringt seinen bericht genugsam mit sich. Alles durch Herr Michael Stifel, auff eine besondere newe vnd leichte weis gestellet.“ Ist schon diese Empfehlung des Buches und die deutsche Sprache, in welcher es verfasst ist, dazu angethan, einen anderen Leserkreis als denjenigen, für welchen Stifel seine Arithmetica integra geschrieben hatte, vermuthen zu lassen, so wird die Vermuthung zur Gewissheit durch den Ausspruch[1]) „sollichen geübten leuthen schreibe ich hie in diesem büchlin gar nichts, wie ich mich des bedingt hab bey dem anfang“. Dem weniger wissenschaftlichen Zwecke entsprechend beschränkt sich Stifel wesentlich auf das Rechnen auf den Linien. Dieses freilich lehrt er in seinem ganzen Umfange, und er zeigt eben so gut, wie man das Halbiren mit Rechenpfennigen vollzieht[2]), als deren Gebrauch zum Wurzelausziehen[3]). Dass das Halbiren sich noch erhielt, während das Verdoppeln abhanden gekommen ist, mag dadurch entschuldigt sein, dass es in der That bei Anwendung von Rechenpfennigen besonders leicht auszuüben war. Lagen Rechenpfennige in grader Anzahl auf einer Linie, so nahm man die Hälfte derselben fort, ein überschiessender einzelner Rechenpfennig wurde auf das darunter befindliche Spacium geschoben[4]). Die Wurzelausziehung auf den Linien hatte Köbel gelehrt (S. 420), aber Stifel

---

[1]) Haussrechnung fol. 5 recto. [2]) Ebenda fol. 6 recto. Von dem halbiren und vom greyffen der Linien. [3]) Ebenda fol. 43 verso bis 48 verso. [4]) Ebenda fol. 1 verso: Spacium ist ein feld zwischen zweien Linien.

geht über ihn hinaus. Er zeigt nicht bloss an $\sqrt{82573569} = 9087$ die Quadratwurzelausziehung, er lehrt auch die Kubikwurzelausziehung $\sqrt[3]{644972544} = 864$ mittels Rechenpfennigen und versteigt sich sogar bis zu $\sqrt[4]{614656} = 28$. Letzteres Ergebniss wird allerdings in der Gestalt $\sqrt{\sqrt{614656}} = \sqrt{784} = 28$ durch doppelte Quadratwurzelausziehung gefunden, trotzdem an anderer Stelle der Haussrechnung [1]) die Binomialcoefficienten bis zur 16. Zeile, also nur um eine Zeile gegen die Arithmetica integra verkürzt, abgedruckt sind. Man könne, sagt er dabei, die Anwendung der Tabelle wie die Bildung ihrer Zahlen aus einander leicht verstehen, „wer sich aber selbs nich kan drauss verrichten, mag jm solliche zeygen lassen“.

Die Wurzelzeichen sind von denen der Arithmetica integra verschieden. Statt √ʒ, √𝔠𝔢, √ʒʒ ist hier ᴢ, ʒ, ʒ angegeben [2]). Die Zeichen der Addition und Subtraction sind geblieben. Für Multiplication und Division sind neue Zeichen hinzugekommen [3]): „wie man addiret durch das zeichen + also multipliciret ich durch das zeichen 𝔐 und dividiret durch das Zeichen 𝔇“, wobei es auffallen mag, dass diese letzten dem Wortlaute nach von Stifel selbst erfundenen Zeichen ausser hier, wo sie dem Leser vorgestellt werden, in der ganzen Haussrechnung nicht ein einziges Mal vorkommen.

Ausser dem gemeinen Rechnen, welches „jederman seine Kinder, wenigstens die Knaben, lernen lassen sollte“ [4]), wird in einem zweiten Theile auch die deutsche Coss gelehrt, worunter verstanden ist, dass bei der Auseinandersetzung deutsche Ausdrücke und nicht Fremdwörter benutzt werden sollen, von welchen Rudolff's Coss. wimmle [5]). So heisst z. B. die unbekannte Zahl nicht *cosa*, sondern Sum̃. und beim Multipliciren wird diese Silbe nur mehrmals wiederholt, ähnlich wie man es mit Zahlen mache, welche Nullen als Randziffern besitzen [6]). Die Multiplication von 20000 mit 3000 giebt 2 mal 3 oder 6 mit 4 und 3 oder 7 Nullen; die Multiplication von 6 sum sum sum mit 12 sum sum sum giebt 6 mal 12 oder 72 sum sum sum sum sum sum. Sollen mehrere ungerechnete d. h. unbekannte Zahlen unterschieden werden, so nenne man sie Sum A, Sum B u. s. w. [7]). Dann wird auf derselben Blattseite fortfahrend die Regel der Coss gegeben, welche natürlich dem Sinne nach mit jener übereinstimmt, die wir der Arithmetica integra entnahmen. Die behandelten Aufgaben führen bis zu gemischten quadratischen Gleichungen [8]).

Endlich schliesst sich an die deutsche Coss noch der dritte Theil

---

[1]) Haussrechnung fol. 71 verso. [2]) Ebenda fol. 61 verso. [3]) Ebenda fol. 74 recto. [4]) Ebenda, Vorrede. [5]) Ebenda fol. 17 verso. [6]) Ebenda fol. 20 verso. [7]) Ebenda fol. 22 recto. [8]) Ebenda fol 50 recto flgg.

von der Kirchenrechnung[1]), „die man nennet Computum Ecclesiasticum“. Wir heben aus diesem dritten Theile nur einen deutschen Cisojanus[2]) hervor, d. h. Reimverse, welche für jeden Monat aus so vielen Silben bestehen, als der Monat Tage hat, und in welchen die Hauptfeiertage genannt sind, so dass wieder ihre Anfangssilben mit dem Datum der betreffenden Tage zusammenfallen. Für Juni, oder mit dem von Stifel gebrauchten deutschen Namen für den Brachmonat ist z. B. folgende Strophe vorhanden:

Alweg bald nach Pfingsten
Haben wir den tag am lingsten.
Veyt macht ein kurtzes Metrum
Wie Sant Johannes suche Petrum.

Von den 30 Silben dieser Strophe ist die 15. Veyt, die 24. Sant, die 29. Pet und damit soll gesagt sein Juni habe 30 Tage und am 15. Juni sei Veit, am 24. Johanni, am 29. Peter und Paul. Ueberdies sollen die beiden ersten Zeilen dem Gedächtnisse einprägen, dass Pfingsten und auch der längste Tag in den Monat fallen.

Wir kommen zur dritten von uns zu besprechenden Veröffentlichung Stifel's, zu der Ausgabe der Rudolff'schen Coss von 1553. Wir haben erwähnt, dass zahlreiche Zusätze zu dem vorhandenen Texte von Stifel herrühren, und in diesen Zusätzen begegnen wir Manchem wieder, was in der Arithmetica integra bemerkenswerth erschien. Da finden wir die Theilbarkeitsregeln der Zahlen[3]), da die Tafel der Binomialcoefficienten[4]), allerdings dahin abgeändert, dass sie nur bis zur 7. Potenz reicht, dafür aber sämmtliche Coefficienten enthält, ohne dass an den Benutzer die Anforderung gestellt würde, das nur zur Hälfte Angegebene rückwärtsgehend zu ergänzen. Die Tafel sieht nämlich hier so aus:

1 ʒ.	2	1					
1 ℭ.	3	3	1				
1 ʒʒ.	4	6	4	1			
1 ß.	5	10	10	5	1		
1 ʒℭ.	6	15	20	15	6	1	
1 𝔅ß.	7	21	35	35	21	7	1

[1]) Haussrechnung fol. 75 recto flgg. [2]) Ebenda fol. 76 verso flgg. Ueber den Cisojanus vergl. K. Pickel, Das heilige Namenbuch (Strassburg 1878) S. 19. [3]) Coss fol. 23 verso. [4]) Ebenda fol. 168 recto.

und unter der Tafel steht: „So weyt ist yetzt genug." In einem Zusatze finden wir auch wieder die Regel der Coss[1]), welche alle 24 alten Regeln in sich schliessen soll und unmittelbar an dieselbe anknüpfend „die vorige Regel mit wenigern worten. Für das facit deiner auffgab setz 1 𝔛. Handle da mit nach der auffgab bis du kommest auff ein equatz. Die selbige reducir so lang bis du sihest das 1 𝔛 resoluirt ist." In den Zusätzen lehnt sich Stifel so weit an die Rudolff'sche Bezeichnung der Wurzelgrössen (S. 399) an, dass er bei der Quadratwurzel den kennzeichnenden Wurzelexponenten 𝔷 weglässt und damit ist dem Zeichen $\sqrt{}$ die Bedeutung als Quadratwurzel errungen, welche es hinfort behielt.

Ein Zusatz[2]) lehrt die Kubikwurzelausziehung aus $45 + \sqrt{1682}$. Man bilde $45^2 - 1682 = 343$; man nehme $\sqrt[3]{343} = 7$; man suche die Ergänzung von 7 zu einer Quadratzahl, etwa 2 weil $7 + 2 = 3^2$, und sehe zu, ob der Radicand 1682 durch sie getheilt einen quadratischen Quotienten giebt; ist dieses, wie hier, der Fall, indem $\frac{1682}{2} = 29^2$ ist, so bleibe man bei der gewählten Ergänzung stehen und hat $3 + \sqrt{2}$ als die gewünschte Kubikwurzel. Einen Beweis des Verfahrens giebt Stifel nicht. Um dasselbe zu verstehen, setzen wir

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$$

und erheben auf die dritte Potenz. Gleichsetzung der beiderseitigen rationalen und irrationalen Bestandtheile giebt

$$a = \alpha^3 + 3\alpha\beta, \quad b = \beta(3\alpha^2 + \beta)^2 = 9\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^3,$$
$$a^2 - b = \alpha^6 - 3\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^2 - \beta^3 = (\alpha^2 - \beta)^3$$
$$\alpha^2 - \beta = \sqrt[3]{a^2 - b}$$

und das ist die in dem Beispiele enthaltene Zahl 7. Diese muss durch die Zahl β zum Quadrate α^2 ergänzt werden, zugleich muss aber auch $\frac{b}{\beta} = (3\alpha^2 + \beta)^2$ ein Quadrat sein. Der einzige Mangel an Stifel's Verfahren besteht also darin, dass er sich damit begnügt zu wissen, $\frac{1682}{2} = 29^2$ sei Quadrat, ohne sich zu vergewissern, ob

$$29 = 3\alpha^2 + \beta = 3 \cdot 3^2 + 2 \text{ ist.}$$

Unter dem Titel Beschlussexempeln, und zwar als deren erstes sind die befreundeten Zahlen 220 und 284 angegeben[3]), wenn auch dieser Name fehlt.

Ein anderer unmittelbar vorhergehender Zusatz endlich[4]) enthält

---

[1]) Coss fol. 147 verso. [2]) Ebenda fol. 481 recto und verso. [3]) Ebenda fol. 486 verso. [4]) Ebenda fol. 483 verso bis 486 recto.

die Regel des Scipione Del Ferro zur Auflösung kubischer Gleichungen und Beispiele dazu, welche Stifel aus den Schriften des Cardanus kennen gelernt hatte. Wir müssen uns hier mit dieser dürftigen Angabe begnügen, da wir die Regel selbst und die Geschichte ihrer Erfindung und Veröffentlichung erst dann zu behandeln haben, wenn wir mit den italienischen Mathematikern des XVI. Jahrhunderts uns beschäftigen werden.

Als Anhang zu seiner Ausgabe der Rudolff'schen Coss hat Stifel auch seine Wortrechnung abdrucken lassen. Sie setzt die Paginirung der Coss nicht einfach fort, sondern ist nur nach Buchstaben bezeichnet. Die Sache verhält sich folgendermassen: Stifel war, als er die Coss sammt der Wortrechnung dem Drucker in Königsberg überlieferte, noch Geistlicher in Haberstrom bei Königsberg, hatte aber die Aussicht oder wenigstens die Hoffnung, demnächst wieder in die Nähe von Wittenberg zurückkehren zu können. Da bat er denn, man möge die Wortrechnung zuerst in Angriff nehmen, so lange er noch selbst den Druck überwachen könne, weil hierbei der unbedeutendste Fehler von ungemeiner Tragweite sei, und diesen Wunsch wird der Drucker wohl erfüllt haben. Die an sich geringfügige Thatsache ist geradezu kennzeichnend für Stifel und für die Wichtigkeit, die er seiner Wortrechnung beilegte. Ebendasselbe lässt sich aus der Ausführlichkeit erkennen, mit welcher er über die Entstehung der Wortrechnung berichtet[1]). Er war noch Augustinermönch in Esslingen, aber innerlich dem Mönchsthum seit 1520 entfremdet, als er die ersten Deutungsversuche an den geheimnissvollen Zahlen der Apokalypse anstellte. Dass die Zahl 666 nur auf Leo X., der von 1513 bis 1521 den päpstlichen Thron innehatte, gehen könne, war ihm klar, nur bildeten die in Leo DeCIMVs enthaltenen Zahlenbuchstaben MDCLVI = 1656 eine Zahl, welche um 1000 zu gross, um 10 zu klein war. Daran erkannte er die Nothwendigkeit, dem Worte *decimus* noch das Zahlzeichen X folgen zu lassen, und las man nun M nicht als 1000, sondern als *Mysterium*, so war die Sache im Reinen. Der erste Erfolg spornte Stifel an, Weiteres zu suchen. Als Hofprediger zu Mansfeld kam er auf den Gedanken, nicht bloss einzelne Buchstaben einer Wortverbindung mit Zahlenbedeutung zu versehen, sondern alle Buchstaben. Ganz neu war das nicht, denn abgesehen von der jüdischen Gematria (Bd. I, S. 96) hatte auch Rudolff seiner Coss eine Wortrechnung einverleibt[2]), der zufolge die Buchstaben A bis Z der Reihe nach die natürlichen Zahlenwerthe 1

---

[1]) Die acht ersten Seiten der Wortrechnung (der ganze Buchstabe A) handeln davon. [2]) Coss fol. 488.

bis 24 erhalten sollten. Den Anfangsbuchstaben eines Geheimwortes solle man durch $\mathfrak{X}$, die folgenden, je nachdem sie im Alphabete früher oder später erscheinen, durch $\mathfrak{X}$ verbunden mit angegebenen abzüglichen oder hinzuzufügenden Zahlen darstellen, endlich solle man $\mathfrak{X}$ als Wurzel einer Gleichung benutzen, welche dem Kundigen den Zahlen- beziehungsweise Buchstabenwerth von $\mathfrak{X}$ und damit schliesslich das Geheimwort selbst enthüllen werde. Aber Stifel's Entdeckung war anders geartet. Er gab den Buchstaben A, B, C bis Z den Werth der auf einander folgenden Dreieckszahlen[1]) 1, 3, 6.... bis 276 und suchte nun Wörter auf, deren Buchstabensumme die räthselhaften Zahlen der Apokalypse und des Buches Daniel waren. Diese Rechnung zeigte er Luther, welcher aber meinte, es wäre nichts gewisses daran, und so „liess ichs gar fallen bis auff das Jahr 1532". Im genannten Jahre gab Stifel, ohne seinen Namen zu nennen, ein Büchelchen heraus, in welchem „die Zahlen Danielis misbrauchet" waren, so dass „ungeschickt und ungereimt gerechnet ist", und der Weltuntergang auf eine bestimmte Stunde eines bestimmten Tages vorhergesagt wurde, aber nicht eintraf. Volle 14 Jahre unterbrach Stifel seine Wortrechnungen, bis er im Bade sitzend erkannte, dass die Buchstaben des Satzes *vae tibi Papa vae tibi* als Dreieckszahlen addirt die Summe 1260 gaben, welche Zahl in der Apokalypse XI, 3 und XII, 6 vorkommt. Von da an war ihm kein Zweifel mehr möglich, und er entdeckte nicht nur eine Wortverbindung, sondern ganze Blätter voll von mehr oder weniger zusammenhängenden Sätzen, so dass jeder Satz die gleiche Buchstabensumme bildet, welche jedesmal eine der Zahlen ist, in welche die genannten Bücher der Heiligen Schrift die tiefsten Geheimnisse versiegelt sein lassen wollen. Es kann natürlich hier auf die immerhin grossen Scharfsinn beanspruchende Spielerei nicht weiter eingegangen werden. Was wir darüber erzählt haben, war fast schon zu viel, wenn es nicht aus mehreren Gründen nothwendig gewesen wäre. Erstens erfahren wir dadurch, dass, wie wir bei den biographischen Angaben schon sagten, Stifel mindestens mit den Dreieckszahlen schon bekannt war, bevor er die Rudolff'sche Coss studirte. Zweitens bewährt sich in der Wortrechnung der gleiche auf das innere Wesen der Zahl gerichtete Geist, von welchem wir in der Arithmetica integra, als dem wissenschaftlichen Hauptwerke Stifel's, anderweitige Spuren deutlich erkennen durften.

Wir sind damit in den Stand gesetzt, ein endgiltiges Urtheil

---

[1]) Unter Dreieckszahlen versteht man bekanntlich (Bd. I, S. 149) Zahlen von der Form $\frac{n(n+1)}{2}$.

über Stifel dahin zusammenzufassen, dass wir in ihm einen nicht bloss Fremdes wiedergebenden und allenfalls in Einzelheiten verbessernden, sondern geradezu einen, wenn auch leider von Verschrobenheiten nicht freien, schöpferischen mathematischen Geist zu bewundern haben, den ersten grossen deutschen Zahlentheoretiker der Zeit nach, einen der Ersten für alle Zeiten, sofern man erwägt, dass er so gut wie ganz unberührte Aufgaben sich gestellt hat. Dadurch tritt er gewaltig aus der Schaar der deutschen Rechenmeister und Cossisten der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts hervor und bezeichnet einen Höhepunkt, der vorher nie erreicht war, von dem es nach Stifel's Tode für eine ziemliche Zeit nur ein Herabsteigen gab.

63. Kapitel.

Deutsche Geometer. Englische Mathematiker.

Wir gelangen nun zu den deutschen Geometern. An einen dürftigen Zustand des geometrischen Denkens und Wissens in der grossen Menge der Gebildeten haben uns einige Schriftsteller gewöhnt, welche wir nebenbei auf ihre Thätigkeit auf diesem Gebiete zu prüfen hatten. Zwar haben wir Apianus (S. 404) als einen sinnreichen Erfinder von trigonometrisch anwendbaren Vorrichtungen, Gemma Frisius (S. 410) als einen bahnbrechenden Feldmesser kennen gelernt, aber dürftig war das Wissen Vögelin's, Köbel's, dürftiger was wir in der Magaritha philosophica fanden, sogar die Genialität eines Stifel litt in der geometrischen Frage der Würfelverdoppelung kläglich Schiffbruch (S. 440). Keinen besseren Eindruck machen die Auszüge aus einigen geometrischen Schriften, welche aufbewahrt sind. Die Geometrie des Wolffgang Schmid[1]), Rechenmeister zu Bamberg von 1535, die Visirkunst des Burchard Mithobius[2]), welche er 1544 unter dem Titel Stereometrie herausgab, die Perspective des Hieronymus Rodler[3]) von 1546, welche nur von niedrigerem Standpunkte wiederholte, was wir noch in diesem Kapitel besser aus der Feder Dürer's kennen lernen werden, die ganz ähnliche Zwecke verfolgende Anweisung in die Geometrie des Augustin Hirschvogel[4]) scheinen ein längeres Verweilen bei ihnen nicht zu rechtfertigen. Und doch würden wir der deutschen Geometrie das grösste Unrecht zufügen, wenn wir sie ausschliesslich nach diesen Persönlichkeiten beurtheilen wollten. Es gab denn doch auch Schriften und Schriftsteller, welche mit Ehren als Geometer zu nennen sind.

[1]) Kästner I, 681—683. [2]) Ebenda I, 678—679. [3]) Ebenda II, 9—13. [4]) Ebenda II, 13—17.

An die Spitze unserer Darstellung setzen wir gleichsam als Uebergang vom Schlechten zum Guten die Geometria deutsch eines unbekannten Verfassers aus unbekannter Zeit, welche in einem alten Sammelbande der Nürnberger Stadtbibliothek aufgefunden und neu veröffentlicht worden ist[1]). Mancherlei Umstände könnten zwar veranlassen, den Druck des aus sechs Blättern in Quart bestehenden Schriftchens als einer älteren Zeit angehörend zu vermuthen, und Fachmänner haben das Jahr 1487 als obere Grenze der Zeit angegeben, zu welcher die Geometria deutsch erschienen sein kann. Wir erlaubten uns, bei der immerhin vorhandenen Ungewissheit, ob sie der Zeit unseres XII. oder unseres XIII. Abschnittes angehört, sie erst hier in Erwähnung zu bringen, wo ein innerer Zusammenhang mit dem Werke eines berühmten Nürnbergers unsere Aufmerksamkeit um so mehr zu fesseln im Stande sein wird, je näher räumlich die Schilderungen beider Schriften gerückt sind. Die Geometria deutsch lehrt neun geometrische Aufgaben lösen, ohne bei irgend einer Auflösung einen Beweis auch nur anzudeuten. Die erste Aufgabe verlangt die Herstellung eines rechten Winkels (Figur 81). Zwei einander in a schneidende beliebige gerade Linien bc und de werden gezogen; von a aus wird die gleiche Länge $ab = ac = ad$ auf der einen Geraden nach beiden Seiten, auf der anderen einmal aufgetragen; Verbindung

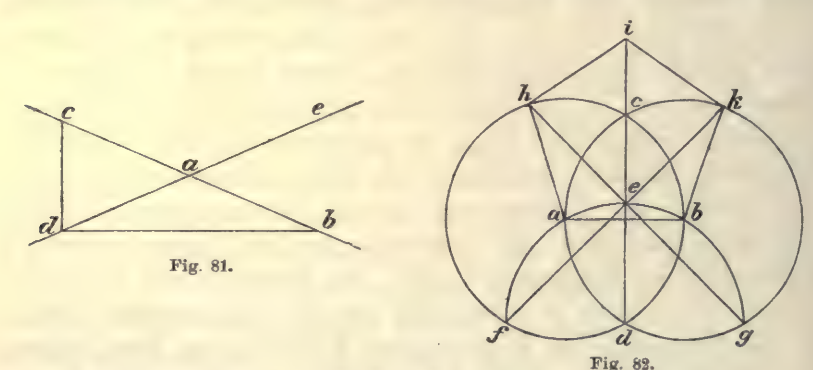


Fig. 81.

Fig. 82.

der Punkte bd und cd giebt den rechten Winkel. Die zweite Aufgabe lehrt ein regelmässiges Fünfeck „mit unverrücktem Zirkel" zeichnen (Figur 82). Um die Endpunkte a und b einer Strecke werden mit dieser Strecke als Halbmesser Kreise beschrieben, ein dritter Kreis um den Durchschnittspunkt d der beiden ersten Kreise

---

[1]) S. Günther hat diese Veröffentlichung in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-litter. Abthl. S. 5—7 vollzogen. Vergl. dazu ebenda M. Curtze S. 57 flgg. und Günther S. 113 flgg. Ferner Günther, Unterricht Mittela. S. 347—354.

als Mittelpunkt. So bestimmen sich, wenn auch noch die gemeinsame Sehne *cd* der beiden ersten Kreise gezogen wurde, die Punkte *e, f, g*, welche dazu dienen, mittels *fek, geh* die Punkte *k* und *h* zu erhalten. Bögen von *h* und *k* aus bestimmen endlich *i*, und *abkih* ist das verlangte Fünfeck. Die dritte Aufgabe zeichnet ein regelmässiges Siebeneck „behend" in einen Kreis, wenn als Seite desselben eine Strecke gewählt wird, welche mit der Hälfte der Seite des gleichseitigen Sehnendreiecks übereinstimmt. Die vierte Aufgabe giebt den Uebergang von einem Quadrate zu einem regelmässigen Achtecke durch Kreisbögen, welche von den vier Ecken als Mittelpunkten mit der halben Diagonale des Quadrates als Halbmesser beschrieben werden, und welche die Quadratseiten in den Eckpunkten der verlangten Figur schneiden. Die fünfte Aufgabe liefert die Länge einer Kreislinie als $3\frac{1}{7}$mal dem Durchmesser. Die sechste Aufgabe lehrt den verlorenen Mittelpunkt eines Kreisbogens finden (Figur 83). Von beliebigen Punkten *c* und *h* auf dem Bogen *ab* als Mittelpunkten werden mit einem und demselben Halbmesser Bögen geschlagen, welche den Bogen *ab* in *d* und *g* schneiden, von *d* und *g* aus noch zwei mit dem unveränderten Halbmesser; so findet man die Punkte *e, f, i, k*, und die Verbindungsgeraden *ef, ik* schneiden einander in dem gesuchten Punkte *l*. Die siebente Aufgabe verwandelt ein gleichseitiges Dreieck in ein flächengleiches Quadrat, indem $^2/_3$ der Dreiecksseite als Quadratseite gelten. Die achte und die neunte Aufgabe verlangen die Zeichnung eines Stechhelms und eines Schildes als geometrische Figuren.

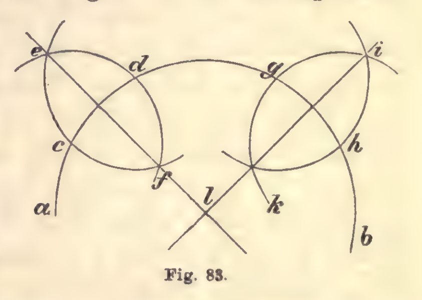


Fig. 83.

Diese beiden letzten Aufgaben bieten zur Besprechung keinen Anlass. Kaum mehr thun es die 1., 4., 5., 6. Aufgabe, welche an Euklid, Heron, Archimed und wieder Euklid anschliessen; höchstens wäre bei der 1. Aufgabe darauf zu verweisen, dass ihre Auflösung noch zur Zeit Adam Riese's nicht allgemein bekannt war (S. 421). Die 3. Aufgabe löste Lionardo da Vinci (S. 298) genau so wie die Geometria deutsch, und wir haben, als wir es mit jenem Schriftsteller zu thun hatten, auf noch früheres Vorkommen hingewiesen. Die 2. und 7. Aufgabe veranlassen einige Bemerkungen. Die Fünfeckszeichnung der 2. Aufgabe, welche uns vor der Geometria deutsch nirgend vorgekommen ist, wurde von einem Mathematiker, der um 1600 schrieb, von Christoph Clavius der Rechnung unter-

worfen[1]). Er fand die Grösse der Winkel des entstandenen allerdings gleichseitigen Fünfecks nicht sämmtlich zu 108°, sondern

$$a = b = 108^\circ\, 22', \quad h = k = 107^\circ\, 2', \quad i = 109^\circ\, 12'.$$

Eine in neuerer Zeit wiederholte Rechnung[2]) hat ergeben, dass Clavius die Winkel h und k um je 20″ zu nieder, den Winkel i um 40″ zu hoch angegeben hat. Die 7. Aufgabe setzt $\left(\frac{2a}{3}\right)^2$ als Fläche des gleichseitigen Dreiecks von der Seite a, welche eigentlich $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ beträgt. Demnach bedeutet die Construction, dass $3 \sim \left(\frac{16}{9}\right)^2$ angenommen ist. Es ist hier auf den ungemein eigenthümlichen Zufall, wenn wirklich nur Zufall, aufmerksam gemacht worden[3]), dass von den beiden als gleichwerthig angenommenen Zahlen die eine $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ bei den Aegyptern (Bd. I, S. 57), die andere 3 bei nahezu allen Völkern des Alterthums als die Verhältnisszahl des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser galt.

Wir verlassen hiermit die kleine Schrift, welche bei dem vielfach Bemerkenswerthen, welches dort auf so engem Raume erscheint, bei den Spuren weit entlegenen Wissens, die sich in ihr vereinigen, doch ihrer Form nach nicht wohl als von einem Mathematiker für angehende Mathematiker verfasst betrachtet werden kann. Sie mag vielleicht für Zunftangehörige irgend eines Kunstgewerbes bestimmt gewesen sein und würde dadurch jenen Bauvorschriften näher rücken, welche seit dem XV. Jahrhunderte schon auftraten[4]), aber so wenig eigentlich Mathematisches enthalten, dass wir glaubten sie übergehen zu sollen.

Wir kommen zu einer bestimmten Persönlichkeit, zu Johannes Werner[5]). Er ist am 14. Februar 1468 in Nürnberg geboren, widmete sich der Theologie und wurde auch wirklich nach Rückkehr von einem fünfjährigen (1493—1498) Aufenthalte in Rom Pfarrer zu St. Johann in seiner Vaterstadt. In diesem Amte blieb er bis zu seinem Tode 1528. Neben der Theologie studirte Werner aufs eifrigste Mathematik, und ihr sowie der Geographie gehören seine schrift-

---

[1]) Clavius, *Geometria practica* Lib. VIII prop. 29. In der fünfbändigen Folioausgabe seiner Werke (Mainz 1611) findet sich die Stelle II, 210. [2]) Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's (Ansbach 1886) S. 6—7. [3]) Günther, Unterricht Mittela. S. 352 Note. [4]) Ebenda S. 335 bis 346. — Obenrauch, Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie (Brünn 1897) S. 167—192. [5]) Doppelmayr, S. 31—35. — Kästner II, 52—64. — Chasles, *Aperçu hist.* 120, 532—533 (deutsch 117, 628—629). — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 23—25. — Günther, Unterricht Mittela. S. 330.

stellerischen Leistungen an. Was er 1514 an geographischen Schriften herausgab[1]), bleibe unerörtert so weit es auf Kartenzeichnung sich bezieht, wie wir auch bei Peter Apianus, der hierin als Schüler Werner's betrachtet werden muss, die gleiche Enthaltsamkeit übten. Tragen wir doch die schwersten Bedenken, die ohnedies so weitschichtige Geschichte der Mathematik noch mit anderen Zuthaten zu belasten. Dagegen müssen einige rein mathematische Dinge berührt werden, welche in dem Anhange zu einer Abhandlung eines griechischen Schriftstellers sich finden. Georg Amirucio war in Trapezunt geboren und ging, als seine Heimath 1461 unter türkische Herrschaft gerieth, selbst zum Islam über, worauf er in Konstantinopel eine angesehene Stellung einnahm[2]). Eine in griechischer Sprache von ihm verfasste Abhandlung über zur Geographie nothwendige Vorkenntnisse kam handschriftlich nach Wien, wo sie von Stabius eingesehen wurde. Nun war aber Stabius mit Johannes Werner näher befreundet und hat auf dessen Verwendung hin jene Sonnenuhr in der Lorenzkirche zu Nürnberg angefertigt, von der die Rede war, als wir Stabius zuerst nannten. Er schlug seinem Freunde, dessen wissenschaftliche Neigungen und Fähigkeiten ihm bekannt waren, vor, die griechische Abhandlung zu übersetzen, und diese Uebersetzung erschien eben 1514 unter dem Titel *De his quae geographiae adesse debent Georgi Amirucii opusculum.* Vorher war die Schrift so gut wie nicht vorhanden, und das ist der Grund, warum wir auch mit ihr in diesem Kapitel uns beschäftigen, statt in demjenigen, welches das Ende des XV. Jahrhunderts als die Entstehungszeit behandelt; wäre doch ohnehin in jenem Abschnitte die Schrift eines Byzantiners schwer unterzubringen gewesen. Was wir ihr zu entnehmen haben, ist die Auflösung einer Aufgabe der sphärischen Trigonometrie[3]): Die Entfernung zweier durch ihre Länge und Breite gegebenen Punkte einer Kugel in Graden des die Punkte verbindenden Bogens eines Grösstenkreises zu bestimmen. Die Lösung schlägt folgenden Gang ein, bei welchem ausschliesslich Kenntnisse der ebenen Trigonometrie zur Anwendung kommen (Figur 84). Die Meridiane der beiden Punkte c, d, um die es sich handelt, werden bis zum Pole a verlängert und $ae = ad$, $ab = ac$ gemacht. Weil beide Punkte durch ihre

[1]) S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie (Halle 1877—1879) V. Heft, S. 277—332 (Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physischen Erdkunde) giebt über alle geographischen Schriften Werner's ausführliche Auskunft. Werner's Schriften selbst, von denen darin die Rede ist, lagen uns in einem Bande der Münchener Bibliothek vor. [2]) Doppelmayr S. 33, Note y. [3]) Günther, Studien u. s. w. S. 306—308.

Länge und Breite bekannt sind, kennt man auch die Bögen de, bc von Parallelkreisen und deren Halbmesser. Folglich sind auch die Strecken de, bc als Sehnen jener Bögen bekannt und $bf = \frac{1}{2}(bc - de)$. Ueberdies ist der Meridianbogen bd und durch ihn seine Sehne bd bekannt. Ferner berechnet sich jetzt

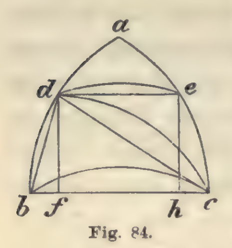


Fig. 84.

$$df = \sqrt{bd^2 - bf^2}, \quad cd = \sqrt{df^2 + fc^2}$$

und endlich zu cd der entsprechende Bogen des Grösstenkreises. Werner hat der Uebersetzung einen aus 11 Sätzen bestehen Anhang *In Georgii Amirucii Constantinopolitani opusculum Ioannis Verneri Norimbergensis appendices* nachfolgen lassen. Er zeigt sich in demselben als mit stereometrischen Sätzen, insbesondere mit der Lehre vom Dreikant wohl vertraut.

Den Veröffentlichungen von 1514 ist ein kaiserliches Privilegium vorgedruckt[1]), welches noch eine Reihe anderer Schriften nennt, die Werner im Drucke herauszugeben beabsichtigte. Leider fand er dafür keinen Verleger, und die nachweislich schon vollendeten Schriften gingen verloren. Darunter befand sich eine offenbar recht vollständige sphärische Trigonometrie in fünf Büchern *De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V*, welche nach Werner's Tode an einen Nürnbergischen Mechaniker Georg Hartmann, von diesem 1542 an einen Mathematiker, von welchem weiter unten die Rede sein wird, Rhäticus, gelangte[2]). Von da an ist die Handschrift verschollen, und es ist nur eine allerdings an und für sich nicht unwahrscheinliche Vermuthung, dass Rhäticus den Inhalt derselben seinen eigenen Arbeiten einverleibt haben werde. Mehr als Vermuthung ist es aber, wenn ein anderer Schriftsteller[3]) behauptet, in diesen Büchern über die Dreiecke sei die Erfindung der Prosthaphaeresis enthalten gewesen. Der sprachlich recht unglücklich aus πρόςθεσις, Hinzusetzung, und ἀφαίρεσις, Wegnahme, zusammengesetzte Ausdruck lässt sich etwa als Additions- und Subtractionsmethode übersetzen und bezeichnet ein eigenthümliches, vor Erfindung der Logarithmen sehr brauchbares Verfahren, Multiplicationen durch Additionen oder Subtractionen zu ersetzen. Grundlage ist die Formel:

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

Waren also beliebige Zahlen mit einander zu vervielfachen, so konnte

[1]) Ueber das Privilegium vergl. auch Doppelmayr S. 33—34 nebst Note q (S. 32) und Note aa (S. 33). [2]) Ebenda S. 33, Note bb und S. 34, Note cc. [3]) Montucla I, 584 und 617—619. — A. v. Braunmühl in der *Biblioth. mathem.* 1896 S. 105—108.

jede derselben nach vorhergegangener Division oder Multiplication mittels einer mit Nullen versehenen Einheit als Sinus eines Winkels α (β) in einer mit genügender Genauigkeit berechneten Sinustafel nachgewiesen werden. Dann waren aber aus der Tafel auch die zu $(\alpha - \beta)$ und zu $(\alpha + \beta)$ gehörenden Cosinusse zu entnehmen, und nach vollzogener Subtraction war nur noch die zum Beginne eingeführte Veränderung der Zahlen um Einheiten verschiedener Ordnung und eine Halbirung zu vollziehen, um das Product zu erhalten, welches man suchte. Sollte addirt werden und nicht subtrahirt, so wählte man als Ausgangspunkt

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$$

Unter den verloren gegangenen Schriften Werner's war ferner ein *Tractatus resolutorius qui prope pedisequus existit libris datorum Euclidis* und ein *Libellus arithmeticus qui complectitur quaedam commenta arithmetica*. Die erstere Abhandlung kennzeichnet sich selbst als einen offenbar fortlaufenden Commentar zu den euklidischen Daten, während für den Inhalt der zweiten Abhandlung nicht der geringste Anhaltspunkt gegeben ist, denn der Titel arithmetischer Erörterungen kann alles Mögliche unter sich fassen.

Endlich ist der Verlust noch eines Werner'schen Werkes zu bedauern. Zu den durch Wohlstand wie durch feine Geistesbildung sich auszeichnenden Patriziern der Zeit gehörte Bilibald Pirckheimer[1]), welcher aus Eichstädt stammend, in Nürnberg eine zweite Heimath gefunden hatte. In seinem Hause verkehrten Venatorius, Camerarius, Osiander, Dürer, Werner, kurzum wer nur auf humanistische und besonders auf humanistisch-mathematische Gelehrsamkeit Anspruch machen konnte. In seiner den Freunden stets zugänglichen Büchersammlung hatte Pirckheimer vereinigt, was er nur an alten, namentlich an griechischen Handschriften auftreiben konnte, einen griechischen Euklid, einen griechischen Archimed, welchen Venatorius (S. 406) herausgeben durfte u. s. w. Er besass auch von Walther's Erben erhandelt Regiomontan's Bücher De Triangulis und Anderes mehr. Durch Pirckheimer's Vermittelung trat Werner in Beziehung zu Sebald Beheim, einem geschickten Stückgiesser, dessen Sohne Werner er mathematischen Unterricht ertheilte. Er legte demselben eine eigens dazu angefertigte deutsche Uebersetzung der euklidischen Elemente mit jedem Satze beigefügten Erläuterungen zu Grunde, für welche er von Beheim 100 Thaler, eine damals sehr

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 810—817, Artikel von L. Geiger leider ohne Benutzung von Doppelmayr S. 36—44 bearbeitet.

grosse Summe, erhielt, welche Uebersetzung aber schon um das Jahr 1550 trotz emsigen Suchens darnach nicht mehr aufzufinden war[1]).

Wieviel die mathematischen Wissenschaften durch das Verlorengehen aller dieser Schriften einbüssten, kann man etwa aus dem durch einen Druck von 1522 vor dem Untergange Bewahrten ermessen. Damals verlegte der berühmte Wiener Buchhändler Lucas Alantsee einen Sammelband Werner'scher Schriften, welcher unter den Augen des Verfassers in Nürnberg gedruckt wurde. In dem einleitenden Briefe Werner's an Alantsee wird erzählt[2]), dass dieser vorher selbst in Nürnberg gewesen war und von Werner's Arbeiten in Begleitung eines Freundes Einsicht genommen hatte. Der Begleiter war Johannes Tschertte, der einst Grammateus zur Herausgabe seines Rechenbuchs (S. 395) veranlasste. Werner rühmt ihn hier als besonders geschickt in der Perspective. Der Werner'sche Sammelband gehörte bald zu den Seltenheiten des Buchhandels. Schon am Ende des XVI. Jahrhunderts liess ihn Tycho Brahe vergeblich in ganz Deutschland suchen und stöberte ihn endlich in Italien auf[3]). Die erste darin enthaltene Schrift ist ein 34 Seiten füllender *Libellus super viginti duobus elementis conicis.* Werner versteht darunter 22 Sätze von den Kegelschnitten. Kegel nennt er, gleichwie Apollonius es schon that, diejenige Oberfläche, welche eine Gerade erzeugt, die durch einen festen Punkt gehend um den Umfang eines Kreises herumgeführt wird, ausserhalb dessen Ebene der betreffende Punkt liegt. Dagegen weichen Werner's Beweisführungen wesentlich von denen des Apollonius ab. Dieser untersuchte den einmal hervorgebrachten Kegelschnitt als ebene Curve, und in seinen Figuren ist der Kegel nirgend mit gezeichnet. Für Werner bleibt umgekehrt die Parabel und die Hyperbel (mit der Ellipse beschäftigt er sich nicht) immer Kegelschnitt, und an dem Kegel, der in nahezu allen Figuren auftritt, sind die Beweise geführt, welche in Folge dieser Werner angehörenden Auffassung wesentlich als sein Eigenthum bezeichnet werden müssen. Der letzte von ihm bewiesene Satz ist der von dem constanten Rechtecke der Strecken, welche aus einem Hyperbelpunkte parallel zu den beiden Asymptoten und jeweil bis zum Durchschnitte mit der anderen Asymptote gezogen werden, der Satz also, den die Coordinatengeometrie in die Worte kleidet, die Gleichung der auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogenen Hyperbel sei $xy = k^2$. Die Asymptoten heissen bei Werner *non coincidentes.* Die zunächst ungemein auffallende Erscheinung, dass eine Abhandlung von den

---

[1]) Doppelmayr S. 35 und ebenda Note oo. [2]) Kästner II, 54. [3]) Ebenda II, 52.

Kegelschnitten nur zwei von den drei überhaupt vorhandenen in Betracht zieht, erklärt sich durch den Zweck der Abhandlung. Werner schrieb sie, wie er selbst am Anfange der zweiten in seiner Sammlung gedruckten Schrift ausspricht, nur als Einleitung in diese, also in den *Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi eius problematis quod cubi duplicatio dicitur*. Georg Valla (S. 345) war Besitzer einer sehr alten Handschrift des Archimed[1]) mit Einschluss der Erläuterungen des Eutokius zu den Büchern über Kugel und Cylinder. Aus ihr übersetzte er die von Eutokius aufbewahrten Würfelverdoppelungen ins Lateinische, aber, meint Werner in dem oben erwähnten Einleitungsbriefe an seinen Verleger, Valla versah diese Würfelverdoppelungen mit einer harten und schäbigen Uebersetzung, dura scabraque admodum traductione, und diese wollte Werner durch eine andere ersetzen, bei welcher er auch die Reihenfolge der mitgetheilten Würfelverdoppelungen abgeändert zu haben scheint. Eratosthenes, der bei Eutokius als vorletzter erscheint, wird erster, Plato, der erste bei Eutokius, wird siebenter, und auch andere Umstellungen sind noch vorhanden. Am auffallendsten erscheint, dass das als zweite Würfelverdoppelung mitgetheilte Verfahren des Philon von Byzanz zugleich auch dem Phyloponus (sic) zugeschrieben wird, einem Schriftsteller also, der später als Eutokius lebte, und dessen Name somit keinenfalls diesem entnommen sein kann. In allen diesen Würfelverdoppelungen kommen, so weit Kegelschnitte angewandt werden, nur Parabel und Hyperbel vor, und desshalb dürfte Werner auf Untersuchungen über die Ellipse in der einleitenden Abhandlung verzichtet haben. Den Würfelverdoppelungen sind 12 Zusätze beigegeben: einen Würfel zu finden, der zu einem gegebenen Würfel in gegebenem Verhältnisse stehe, eben einen solchen gleich einem gegebenen Parallelopipedon; ein Parallelopipedon mit gegebener Höhe einem gegebenen Würfel und einem gegebenen Parallelopipedon gleich herzustellen, letztere Aufgabe auch unter der Bedingung, dass statt der Höhe die Grundfläche des herzustellenden Parallelopipedons gegeben sei; einen Cylinder zu finden einem gegebenen Cylinder ähnlich und zu demselben in gegebenem Raumverhältnisse stehend. Der siebente Zusatz zeigt, dass die Flächen eines Quadrates und des eingeschriebenen Kreises sich wie 14 : 11 verhalten, und von diesem Verhältnisse machen drei weitere Zusätze Gebrauch zur Verwandlung eines Parallelopipedons in einen Cylinder von gleicher Höhe, eines Cylinders in einen Würfel. Der 11. Zusatz

---

[1]) Die Beschreibung des Valla'schen Codex — jetzt Florentiner Codex A — vergl. Heiberg's Archimed-Ausgabe III, Prolegomena pag. VIII.

behauptet, die Sonnenstrahlen kämen scheinbar parallel auf der Erde an und beweist diese Behauptung wie folgt (Figur 85). Werden von dem Sonnenpunkte a aus auf zwei Strahlen lauter gleiche Strecken $ad = ai = de = ih$ u. s. w. aufgetragen, so verhalten sich die Verbindungsgeraden der bemerkten Punkte $di : eh : fg : bc$ u. s. w. wie $1 : 2 : 3 : 4$ u. s. w. In grosser Entfernung von der Sonne verhalten sich also zwei solche parallele Verbindungsgerade zwischen zwei Strahlen wie zwei grosse in der Zahlenreihe unmittelbar auf einander folgende Zahlen, d. h. sie zeigen nur einen unmerkbaren und fast nicht vorhandenen Längenunterschied[1]) und lassen die Strahlen dadurch parallel erscheinen.

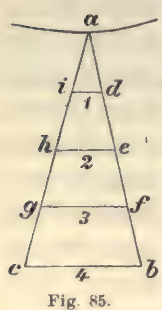


Fig. 85.

Zu derselben Ueberzeugung könne man erfahrungsmässig gelangen, indem man von zwei nicht allzuweit von einander entfernten Erdpunkten auf dem gleichen Meridian gleichzeitig die Sonnenhöhe messe und genau zu demselben Winkel gelange. Bei grösserer Entfernung von etwa 5000 Schritten zwischen den Beobtungspunkten finde man allerdings verschiedene Winkel. Der Zweck dieses 11. Zusatzes wird im 12. und letzten klar, wo hervorgehoben ist, ein parabolischer Spiegel vereinige die parallel auf ihn fallenden Sonnenstrahlen in einem Punkte, der sphärische Spiegel thue das nicht, ersterer zünde daher leichter als letzterer[2]). Nun folgt eine Abhandlung über den archimedischen Kugelschnitt (Bd. I, S. 294), d. h. die Aufgabe, die Kugel durch eine Ebene derart zu schneiden, dass die Rauminhalte der beiden Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnisse stehen. Diokles hat diese Aufgabe mit Hilfe von Hyperbel und Ellipse (Bd. I, S. 338), Dionysodorus mit Hilfe von Hyperbel und Parabel gelöst (Bd. I, S. 383), beide Auflösungen hat Eutokius in seinen Erläuterungen zu Archimed's Bücher über Kugel und Cylinder aufbewahrt[3]), und diese standen, wie wir schon wissen, Werner zu Gebote. Die Auflösung des Dionysodorus giebt er aus dieser seiner Quelle ausführlich wieder. Bezüglich der Auflösung des Diokles begnügt er sich damit, die dort angewandte Fragestellung anzuführen, ohne die eigentlichen Vorschriften zur Anfertigung der Zeichnung zu erörtern. Er fühlte sich hier offenbar dadurch beengt, dass er in der Kegelschnittabhandlung die Behandlung der Ellipse übergangen hatte. Zum Schlusse fügte er eine ihm eigene Auflösung mittels Hyperbel und Parabel bei. Die beiden noch übrigen Schriften des Werner'schen Bandes sind astronomischen Inhaltes.

---

[1]) *insensibiliter ac pene nihil differe magnitudine videbuntur.* [2]) *Ergo speculum concavum concavitate parabolica fortius celeriusque incendit speculo sphaerico.* [3]) Archimed (ed. Heiberg) III, 180—206.

Was wir an geometrischen Ergebnissen aus Johannes Werner's Schriften kennen gelernt haben, zeigt, mag es auch der Menge nach nicht sehr viel sein, diesen Mathematiker jedenfalls in zwei Beziehungen weit über die Zeitgenossen sich erhebend: einmal dadurch, dass er bei gründlicher Bekanntschaft mit der griechischen Kegelschnittlehre der Nothwendigkeit strenger geometrischer Beweisführung sich bewusst war, zweitens dadurch, dass er bei solcher Beweisführung seine eigenen Wege ging.

Zu dem Pirckheimer'schen Kreise (S. 455) gehörte auch Albrecht Dürer[1]), geboren in Nürnberg 1471, gestorben ebenda 1528, in weitesten Kreisen berühmt als der hervorragendste deutsche Künstler des XVI. Jahrhunderts, aber kaum minder bedeutend in seiner Eigenschaft als Schriftsteller, welche er in drei Veröffentlichungen aus den Jahren 1525, 1527, 1528 (die letztere erst nach dem Tode des Verfassers ausgegeben) bewährte. Die erste Schrift von 1525 führt den Titel „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen vnnd gantzen corporen durch Albrecht Dürer zusamen getzogen vnd zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht“ und ist Pirckheimer zugeeignet. In der Widmung meint Dürer, es gebe recht viele im Uebrigen ganz geschickte Maler in Deutschland, welche Mancherlei ganz falsch zeichneten, auch ihre Schüler es so machen lehrten, als wenn sie Wohlgefallen an ihrem Irrthume hätten, während doch die alleinige Ursache sei, dass sie die Kunst der Messung nicht gelernt haben, ohne die kein rechter Werkmann werden oder sein könne. Dem Zwecke, welcher Dürer darnach vorschwebte, den Maler in den Stand zu setzen, gewisse Constructionen nicht aus freier Hand ohne Gewähr der Richtigkeit, sondern nach geometrischen wenn auch unbewiesenen Vorschriften auszuführen, sind im Ganzen 89 Seiten eines kleinen Folioformates gewidmet, deren Inhalt nach vier Büchern sich gliedert. Dürer's Sprache vermeidet die Fremdwörter und giebt höchst wahrscheinlich selbstgebildete deutsche Ausdrücke für geometrische Begriffe. So nennt er die Kreisfläche „eyn runde Ebne“, das Quadrat „gefierte Ebne“, aber auch die Kugel, die Cylinderfläche „eyn kugelete Ebne“ und „eyn bogen Ebne“. Der Punkt ist ihm „eyn

---

[1]) Ueber das Leben Dürer's vergl. M. Thausing, Dürer, Geschichte seines Lebens und seiner Kunst (Leipzig 1876). Ueber Dürer als Schriftsteller: Kästner I, 684. — Chasles, *Aperçu hist.* 529—530 (deutsch 623—625). — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 26—27. — S. Günther, Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's (Ansbach 1886). — Derselbe, Unterricht Mittela. S. 354—370. — H. Staigmüller, Dürer als Mathematiker (Stuttgart 1891).

tupff", Parallelen „die alweg gleich weit von einander lauffen" oder auch „eyn barlini". Man sieht daraus, wie sein Bestreben das der Deutlichkeit war, und wie er das Werk gerade für junge Künstlerkreise verfasste, welche fremder Sprachen nicht mächtig zu sein pflegten. Für sie giebt er gleich im ersten Buche die Entstehung des Würfels durch eine Parallelbewegung einer quadratischen Grundfläche, einer Kugel durch Umdrehung eines Kreises um einen als Axe benutzten Durchmesser, für sie die Vorschriften zur Zeichnung mancherlei krummer Linien. Allerdings sind diese Vorschriften, wie die krummen Linien selbst, sehr verschiedener Natur. Schneckenlinien verschiedener Art, worunter Dürer theils Spiralen, theils die perspectivische Zeichnung von Raumschneckenlinien versteht, ferner Eigestalten werden construirt, aber nicht etwa so, dass die geometrisch richtige Figur entsteht, sondern nur eine künstlerisch gesprochen ähnliche Gestaltung, zusammengesetzt aus lauter Kreisbögen von wechselndem Mittelpunkte und Halbmesser. Bedeutsam ist dabei freilich der Gedanke, einer perspectivischen Zeichnung eine mathematische Vorschrift zu Grunde zu legen, und dass Dürer für Deutschland der Begründer einer ganzen perspectivischen Literatur wurde, ist gewiss wahr, wenn wir auch nicht so weit gehen, für ihn einen Platz unter den Begründern der descriptiven Geometrie beanspruchen zu wollen. Die Halbmesser der Kreisbögen, aus welchen jene krummen Linien sich zusammensetzen, sind durch Zahlenverhältnisse unter einander verbunden, welche theils genau, theils nicht genau erfüllt werden, und im letzteren Falle, der allerdings einer Gesetzmässigkeit darum nicht entbehrt, sollen ganz besonders schöne Curven hervorgebracht werden. Die getheilte Strecke, welche die Halbmesser zu liefern hat, ist nämlich (Figur 86) die Berührungslinie an einen in genau gleiche Theile getheilten Kreisbogen, und die allmälig sich weiter von einander entfernenden Theilpunkte der Strecke sind durch Verlängerung der Halbmesser nach den Bogentheilpunkten eingeschnitten. Dürer zeichnet sodann die drei Kegelschnitte. Deutsche Namen für dieselben kenne er nicht, wolle aber solche bilden. Die Ellipse, die einem Ei fast ähnele, wolle er Eierlinie nennen, die Parabel Brennlinie, weil aus ihr Spiegel gebildet werden, durch die man zünden könne, die Hyperbel Gabellinie, ein Name, den er nicht weiter begründet. Die Kegelschnitte zeichnet er punktweise, indem er auf einer Grundlinie in gleichen Abständen Senkrechte errichtet, deren Längen aus gewissen Verhältnisszahlen

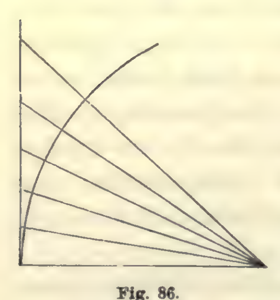


Fig. 86.

sich ergeben. Auffallenderweise scheint Dürer zu glauben, die Ellipse besitze nur die grosse Axe als Symmetrieaxe[1]). Wieder eine andere Linie, deren Entstehung nach einem geometrischen Gesetze sich ausspricht, ist die Muschellinie, wohl zu unterscheiden von der Conchoide der Alten (Bd. I, S. 334) (Fig. 87). Auf einer Geraden AB steht eine zweite CD senkrecht. Wird $AK = CL$ auf den beiden Geraden aufgetragen, KL gezogen und KM auf ihr gleich AB genommen, so gehört M der Muschellinie an, welche, wenn man AB und CD als Coordinatenaxen betrachtet, einer Gleichung 4. Grades entspricht[2]). Die Spinnenlinie entsteht folgendermassen: eine Strecke AB dient als Halbmesser eines Kreises um A; aus jeder Lage des Punktes B als Mittelpunkt ist wieder ein Kreis mit anderem Halbmesser beschrieben und auf diesem Kreise ein Punkt C dadurch bestimmt, dass BC eine ganze Umdrehung vollzieht, während das Gleiche von der AB gilt. Mit anderen Worten: Dürer hat in seiner Spinnenlinie die *Epicykloide* erfunden. Er geht sogar noch weiter und vereinigt mehr als nur zwei Zirkelstangen mit einander in Gelenken, welche verhältnissmässig selbständige Einzelbewegungen zulassen, so dass durch organische Bewegung Curven erzeugt werden können, welche sehr zusammengesetzter Entstehung sind.

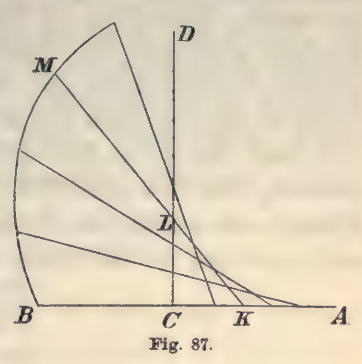


Fig. 87.

Das 2. Buch kann als Buch der vorzugsweise geradlinigen Constructionen den Curvenzeichnungen des 1. Buches gegenübergestellt werden. In ihm finden wir geschichtlich Bekanntes, aber iu wesentlich neuer Auffassung. Der rechte Winkel wird genau in der Art gezeichnet wie in der 1. Aufgabe der Geometria deutsch, das regelmässige Fünfeck und Siebeneck wie in der 2. und 3. Aufgabe jener Schrift. Deren 6. Aufgabe ist schon im ersten Dürer'schen Buche mit der gleichen Figur gelöst[3]). Die 7. Aufgabe kommt wieder im 2. Buche vor[4]). Darf man daraus den Schluss ziehen, Dürer habe die Geometria deutsch, welche zu seinen Lebzeiten sehr wohl in Nürnberg vorhanden sein konnte, in Händen gehabt und benutzt? Wir glauben kaum, dass dieser Schluss gerechtfertigt wäre. Die in der 4. Aufgabe gelehrte Achteckzeichnung hat nämlich bei Dürer keinen

[1]) Staigmüller l. c. S. 16. [2]) Ebenda S. 17, Note 1. [3]) Figur 23 bei Dürer, welcher die einzelnen Figuren in jedem Buche mit besonderen Nummern versehen hat. [4]) Buch II, Figur 28.

Eingang gefunden[1]), während diese so einfach und sinnreich ist, dass wir es für unmöglich halten, Dürer habe sie vernachlässigt, wenn er sie kannte. Statt ihrer ist bei Dürer das Achteck zwar auch aus dem Quadrate abgeleitet, aber durch die Halbirungssenkrechten vom Mittelpunkte des Umkreises auf die Quadratseiten, welche den Umkreis selbst in den vier noch unbekannten Eckpunkten des Achtecks treffen, und nach demselben Grundgedanken ist aus dem Achteck das Sechzehneck, aus dem Siebeneck das Vierzehneck abgeleitet[2]). Für das Fünfeck ist ausser der Zeichnung mit unveränderter Zirkelöffnung auch eine genaue Zeichnung gelehrt[3]), welche bereits im 9. Kapitel des 1. Buches des Almagestes vorkommt (Figur 88). Zwei zu einander senkrechte Durchmesser werden gezeichnet. Auf dem einen bc wird ac in e halbirt und von e als Mittelpunkt aus die Entfernung bis zum Endpunkte d des anderen Durchmessers in den Zirkel genommen und ein Bogen geschlagen, der den ersten Durchmesser wieder in f schneidet. Alsdann ist df die Fünfecksseite, af die Zehnecksseite des gegebenen Kreises, was durch beigesetzte Zahlen in der Figur angedeutet wird. Geht von einem und demselben Peripheriepunkte eine Dreiecksseite und eine Fünfecksseite aus, so stehen deren Endpunkte um $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ Umkreis von einander ab. Die Halbirung dieses Bogens bringt daher die Fünfzehnecksseite als Sehne hervor, und so verfährt Dürer wirklich[4]). Höchst eigenthümlich ist Dürer's Neuneckszeichnung[5]). Unter Fischblasen verstand die Ornamentzeichnung ein Zweieck von Kreisbögen, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben wurden. Werden nun (Fig. 89) in einen Kreis mit dem Halbmesser des Kreises selbst drei Fischblasen ab, ac, ad gezeichnet, welche aus Theilen von drei Kreisen sich zusammensetzen, wird der Durchmesser ab der einen Fischblase in den Punkten 1 und 2 gedrittheilt, mit dem Halbmesser $a2$ ein kleiner Kreis um a beschrieben, und werden dessen Durchschnittspunkte e und f mit der Fischblase geradlinig verbunden,

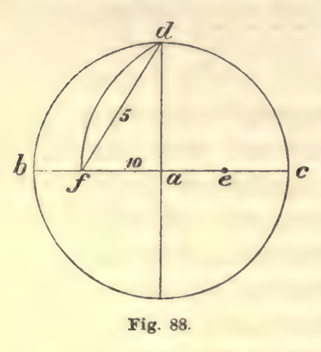


Fig. 88.

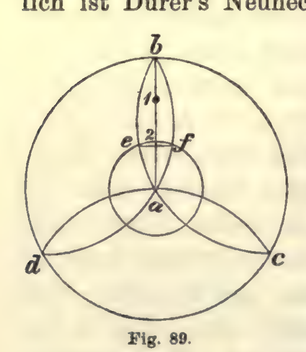


Fig. 89.

[1]) Auf Buch II, Figur 27 dafür hinzuweisen scheint uns unstatthaft.
[2]) Buch II, Figur 12 das Vierzehneck, Figur 14 das Achteck und Sechzehneck.
[3]) Buch II, Figur 15. [4]) Buch II, Figur 17. [5]) Buch II, Figur 18.

so soll ef die Neunecksseite des kleinen Kreises sein. Bogen ef müsste demnach 40^0 sein und weicht etwa um $\frac{1}{3}^0$ davon ab[1]). Diese Construction ist noch nirgend sonst als bei Dürer aufgefunden, und sie ist insbesondere durchaus verschieden von derjenigen des Lionardo da Vinci, sowie von derjenigen, welche aus dessen Achtzehneckconstruction (S. 300) sich herleiten liesse. Wenn Dürer des weiteren $\frac{9}{32}$ des Kreisdurchmessers als Elfecksseite, $\frac{1}{4}$ desselben als Dreizehnecksseite benutzt[2]), so ist die erstere Vorschrift eine sehr genaue, da der so gewonnene Kreisbogen nur um 3′ 26″ zu klein ist. Bei dem Dreizehneck dagegen wird der Bogen um mehr als $1\frac{1}{4}^0$ zu gross. Unmittelbar an die letzterwähnten Figuren schliesst sich eine Dreitheilung eines beliebigen Kreisbogens, Dürer sagt: „ytlich trum eines zirckels“, welche rechnungsmässig geprüft[3]) bei nicht allzugrossen Bögen eine sehr brauchbare Regel giebt (Figur 90). Man theilt die Sehne ab in drei gleiche Theile $ac = cd = db$ und errichtet in c und d die Senkrechten cg, dh. Dann beschreibt man aus den Mittelpunkten a und b die Kreisbögen ce, gi und df, hk. Dann ist, behauptet Dürer, arc. $ae = bf = gh$, und nur die Bogenstückchen eg, fh sind von der Theilung noch ausgeschlossen. Man begreift sie ein, indem man ci und dk drittheilt und vom zweiten Theilpunkte von c und d aus gezählt neue Kreisbögen wieder um a und b als Mittelpunkte schlägt, welche in l und m eintreffen, alsdann sei arc. $al = lm = mb$. Von den Theilungen des ganzen Kreisumfanges, welche bei der Herstellung der regelmässigen Vielecke nöthig waren, von der Dreitheilung eines Kreisbogens wendet sich Dürer zur Anfertigung von anmuthigen Mustern von Mosaikböden, gebildet aus regelmässigen Vielecken und aus Kreisbögen. Er weist dabei darauf hin, dass regelmässige Dreiecke, Vierecke, Sechsecke, aber auch die Zusammensetzung zweier regelmässiger Dreiecke zu Rauten ausreichen, die Ebene zu erfüllen, während andere Gestalten dazu nöthigen, zur Erfüllung der Ebene Figuren mehrerer Gattungen gleichzeitig anzuwenden. Am Schlusse des zweiten Buches erörtert er noch die Umwandlung eines gleichseitigen Dreiecks in ein flächengleiches

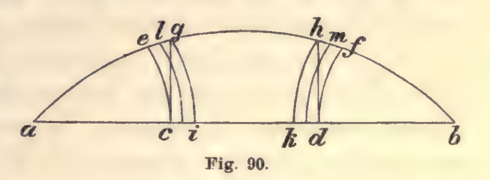


Fig. 90.

[1]) Günther, Näherungsconstructionen Dürer's S. 10—11, berechnet arc. $ef = 39^0\,39'\,52''$. [2]) Buch II, Figur 19. — Günther l. c. S. 12—13.
[3]) Kästner, Geometrische Abhandlungen. Erste Sammlung (Göttingen 1790) S. 241—248. — Günther l. c. S. 13—18. — Staigmüller l. c. S. 26, Note 1.

Quadrat, eines beliebigen Dreiecks in ein flächengleiches Rechteck, eines Quadrates in einen flächengleichen Kreis[1]). Jede dieser Aufgaben giebt uns zu einer Bemerkung Anlass. Die erste Umwandlung ist die der 7. Aufgabe der Geometria deutsch und vorhin bereits erwähnt worden. Wo zweitens ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck verwandelt werden soll (Figur 91), zieht Dürer eine Höhe des Dreiecks, welche immer der Art gewählt wird, dass sie in das Innere des Dreiecks fällt, und bildet aus ihrer Hälfte und der Grundlinie das gesuchte Rechteck, indem die oberen dreieckigen Stückchen, welche nach Ziehung einer Parallelen zur Grundlinie durch die Mitte der Höhe hervortreten, nach unten umgeklappt werden. Die gleiche Zeichnung tritt bei indischen Geometern auf (Bd. I, S. 614), ohne dass wir durch diesen Hinweis die Vermuthung einer Uebertragung hervorzurufen beabsichtigen. Gerade diese Construction liegt so nahe, dass sie leicht mehrfach hat erfunden werden können. Weit näher scheint uns ein anderer Zusammenhang zu liegen. Jener Wiener Rathsherr Johannes Tschertte, der Freund des Grammateus, der Besucher Werner's in Nürnberg, war auch zu Dürer in freundschaftliche Beziehungen getreten und ein Brief von Tschertte an Dürer wird im Britischen Museum aufbewahrt[2]). In diesem Briefe ist ein ungleichseitiges Dreieck durch eine Figur in ein Rechteck gleichen Flächeninhaltes umgewandelt, und wenn auch der Veröffentlicher die Figur mitzutheilen unterlassen hat, so liegt die Muthmassung doch nahe, es sei vielleicht die in Dürer's zweitem Buche benutzte gewesen, oder Dürer, welcher Tschertte die in dem Briefe besprochene Aufgabe gestellt hatte, habe gerade damals zu seinem zweiten Buche das Material vorbereitet. Drittens, die Circulatur des Quadrates beruht auf der Annahme $\pi = 3\frac{1}{8}$, von welcher Vitruvius[3]) (Bd. I, S. 508), von welcher Inder (Bd. I, S. 602) Gebrauch machten. So bewährt sich unser Ausspruch, dass im zweiten Buche geschichtlich Bekanntes auftrete, in ziemlich grossem Maasse. Aber wir setzten hinzu, das geschichtlich Bekannte erscheine hier in wesentlich neuer Auffassung. Wie ist das gemeint? Nirgend, wo uns auch Näherungsconstructionen schwieriger Figuren früher begegneten, war mit einem Worte darauf aufmerksam gemacht, dass eine geometrische Genauigkeit nicht erreicht werde. Offenbar wähnte man richtige Vorschriften

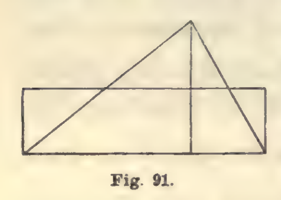


Fig. 91.

---

[1]) Buch II, Fig. 28, 32, 34. [2]) Staigmüller l. c. S. 51, Note 2 mit Berufung auf Jahrbücher für Kunstwissenschaft I, 21. [3]) Ebenda l. c. S. 29, Note 1 hält die Stelle bei Vitruvius für fehlerhaft. Dieser habe $\pi = 3$ gerechnet.

zu besitzen. Lionardo da Vinci sagte es sogar ausdrücklich bei der Siebenecksconstruction. Albrecht Dürer ist der erste, welcher die Näherungsconstructionen mit vollem Bewusstsein ausgeführt hat. Beim Siebeneck spricht er von einem „gemeinen weg den man von behendigkeyt wegen in der arbeyt braucht". Beim Elfeck heisst es „also das es sich Mechanice aber nit demonstrative findet", beim Dreizehneck „ist aber auch mechanice und nit demonstrative". Bei der Bogendreitheilung lautet Dürer's Ausspruch: „wer es will genauer haben, der such es demonstrative". Die Verwandlung des gleichseitigen Dreiecks in ein Quadrat schränkt er ein durch die Worte: „Man mag auch ein Dryangel vnd ein quadrat von der behendigkeit wegen also gegen eynander vergleychen". Bei der Circulatur des Quadrates endlich ist vollends der Satz vorausgeschickt: „Solches ist noch nit von den gelerten demonstrirt. Mechanice aber das ist beyleyfig also das es im werck nit oder gar ein kleyns felt mag dise vergleychnüss also gemacht werden". Beim Fünfeck, hergestellt unter Anwendung einer einzigen Zirkelöffnung, und beim Neuneck fehlen ähnliche Bemerkungen. Ob Dürer diese beiden Constructionen für genau hielt? Mag er in diesen Irrthum verfallen sein, den wir für möglich, aber keinenfalls für erwiesen halten, wie vielen Gelehrten ist nicht das Gleiche begegnet, dass sie gerade innerhalb ihres eigenen Gebietes einen Fehlschritt thaten! Dass er in anderen Fällen so deutlich zwischen Richtigem und nur in der Ausübung Nützlichem unterschied, stellt ihn auf eine wissenschaftliche Höhe, welche kaum ein zweiter Geometer des XVI. Jahrhunderts erreicht hat. Dieses Urtheil wird, meinen wir, noch dadurch bestärkt, dass Dürer bei vielen Constructionen Althergebrachtem sich gegenüber befand, bei welchem einen wissenschaftlichen Zweifel zu hegen weitaus nicht so nahe lag, als bei Selbsterdachtem oder durch Versuche Ermitteltem. Wir haben weiter oben von der Hand gewiesen, dass Dürer der Geometria deutsch sich bedient haben könne. Unsere damalige Begründung erscheint uns auch jetzt vollständig zutreffend, aber die Uebereinstimmung mehrerer Verfahren ist doch nicht zu verkennen. Da sind wir wohl genöthigt für beide, für Dürer wie für den Verfasser der Geometria deutsch, eine und dieselbe Quelle anzunehmen, anzunehmen (S. 452) dass hier Vorschriften vorliegen, welche im Baugewerbe üblich waren, und deren Ursprung nachzuforschen um so schwieriger ist, als gerade die sogenannte Bauhütte es immer geliebt hat, sich recht geheimnissvoll zu gebahren. Sogar das Werk des Vitruvius, wenn es auch bewusst oder unbewusst noch immer den grössten Einfluss in der Baukunst übte, gelangte erst mehr als zwanzig Jahre später als Dürer's Unterweysung in die

Oeffentlichkeit der des Lateinischen unkundigen deutschen Baumeister. Wieder ein Nürnberger war es: Walter Rivius[1]), Arzt und Mathematiker, der 1548 Vitruv in deutscher Sprache herausgab.

Das 3. Buch bietet geringen Anlass dabei zu verweilen. Es handelt von mancherlei Körpern, von aus Vielflächnern zusammengesetzten Denkmälern, von Höhenmessungen mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks mit in einem Gelenke beweglicher Hypotenuse[2]), von der Herstellung von Sonnenuhren, endlich von der Anfertigung eines Alphabetes aus lauter geometrischen Bestandtheilen. Eine solche geometrische Schönschrift, wie man die Sache ganz kennzeichnend genannt hat, ist uns schon (S. 344) bei Paciuolo begegnet.

Das 4. Buch beginnt mit einem, so viel wir wissen, ganz neuen Gegenstande, für welchen Dürer hiernach das Erfinderrecht zukommt. Regelmässige und halbregelmässige Vielflächner im Modelle herzustellen war bekannt; aber war es möglich ein zusammenhängendes Netz für solche Körper zu zeichnen, welches zusammengesetzt dieselben entstehen liess? Dürer beantwortete die Frage durch die That. Er zeichnete in dem 4. Buche die Netze der fünf regelmässigen Vielflächner, sodann diejenigen solcher Körper, deren Grenzflächen folgende sind: 1) 4 Sechsecke, 4 Dreiecke; 2) 6 Achtecke, 8 Dreiecke; 3) 6 Viereke, 8 Dreiecke; 4) 8 Sechsecke, 6 Vierecke; 5) 18 Vierecke, 8 Dreiecke; 6) 6 Vierecke, 32 Dreiecke; 7) 6 Achtecke, 8 Sechsecke, 12 Vierecke; 8) 6 Zwölfecke, 32 Dreiecke; 9) 6 Vierecke, 12 Dreiecke. Ueberall sind die Grenzflächen regelmässig gedacht, nur beim 8) Körper sind 24 unter den 32 Dreiecken nicht gleichseitig sondern nur gleichschenklig, oder wie Dürer es ausspricht, „sie haben aber nit all gleych seyten“. Nun folgt die Würfelverdoppelung oder allgemeiner Würfelvervielfachung, indem Dürer ausdrücklich hervorhebt, auch bei letzterer komme es nur auf das Einschalten zweier geometrischer Mittel an. Dürer lehrt zwei Auflösungen, die Platonische und die Heronische (Bd. I, S. 214 und 350), ohne freilich deren Erfinder zu nennen. Woher er die Methoden hatte, ist nicht schwierig zu errathen: Werner wird sie ihm mitgetheilt haben. Gelesen hat aber Dürer Werner's Buch nicht, da ihm die Kenntniss der lateinischen Sprache abging. Wieder ein anderer Gegenstand folgt, die auf einen Würfel angewandte Lehre von der Beleuchtung und vom Schattenwerfen durch mehrfache Zeichnungen erläutert, bei welchen der Stand der Sonne stets so gewählt ist, dass sie mit dem sehenden Auge auf der gleichen Seite des Würfels sich

---

[1]) Doppelmayr an verschiedenen Stellen. [2]) Buch III, Figur 19. Der erklärende Text findet sich erst drei Seiten später gegenüber von Figur 21.

befindet. Dazwischen ist kurz ausgesprochen und an einer schematischen Zeichnung[1]) (Figur 92) zur Anschauung gebracht, dass dem

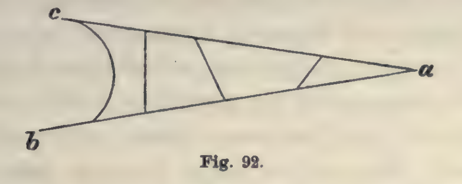


Fig. 92.

Auge in einer Grösse erscheine, was zwischen denselben Grenzstrahlen enthalten sei, „es sey nahent oder fern, aufrecht vber ort oder krum".

Am Schlusse des Werkes erscheinen zwei Holzschnitte von geometrisch-künstlerischer Bedeutung. Alberti hatte (S. 293) eines Schleiers zur Anfertigung perspectivisch richtiger Abbildungen sich bedient. Dürer veränderte Alberti's Erfindung einigermassen, und seine Vorrichtungen sind in den beiden Holzschnitten zur Anschauung gebracht. Ein Rahmen ist mit einer nach aussen sich öffnenden inwendig papierüberzogenen Thüre verschlossen. An den vier Seiten des Rahmens und mit denselben gleichlaufend befinden sich Stäbchen, längs deren ein oben und unten befestigter Verticalfaden und ein rechts und links befindlicher Horizontalfaden verschiebbar sind. Der Zeichner sitzt hinter dem Rahmen, und hinter dem Zeichner ist an einem Wandhaken ein langer Faden befestigt. Bei geöffneter Apparatthüre wird jener Faden bis zu einem abzubildenden Punkte gespannt und der Ort, wo der Faden durch den Rahmen geht, durch Kreuzung der beiden verschiebbaren Fäden bemerklich gemacht. Nun wird der lange Faden wieder zurückgezogen, der Apparat geschlossen und ein Punkt auf das Thürinnere bei der soeben bewerkstelligten Fadenkreuzung gemalt. Beliebig viele Punkte des abzubildenden Gegenstandes können so nach einander erhalten werden und geben jedenfalls ein richtiges Bild, dessen Augenpunkt der Wandhaken ist, von welchem der lange Faden ausgeht. Ein zweiter Vorschlag Dürer's, der in dem zweiten Holzschnitte verdeutlicht ist, benutzt statt des Rahmens eine Glastafel, auf welcher mit einem Stifte die Umrisse des abzubildenden Gegenstandes festgehalten werden. Wir haben behauptet, Dürer habe damit nur Alberti's Erfindung abgeändert, und darin liegt zugleich die weitere Behauptung, er habe sie gekannt. Daran kann in der That nicht gezweifelt werden. Dürer war in den Jahren 1505 bis 1507 in Venedig, um den staatlichen Schutz seines Monogramms, d. h. Schutz gegen Nachdruck seiner Holzschnitte zu

[1]) Buch IV, Figur 55.

erwirken. In einem Briefe aus Venedig hat nun Dürer von einem Abstecher erzählt, welchen er Ende 1506 nach Bologna machte, um daselbst Unterricht in der Perspective zu nehmen. Der Lehrer war natürlich ein Italiener, und dass ein italienischer Lehrer seinen Schüler mit dem seit 70 Jahren in Uebung befindlichen Verfahren Alberti's bekannt gemacht haben wird, ist gleichfalls nicht mehr als natürlich. Ungewissheit herrscht nur über einen Punkt: wer wohl Dürer's Lehrer gewesen sein mag? Man hat an Lucas Paciuolo gedacht, aber dieser lebte schon seit 1503 in Florenz und nicht mehr in Bologna[1]). Scipio Ferreus dagegen lehrte von 1496 bis 1526 ununterbrochen in Bologna. Haben wir anzunehmen, dass Dürer seinen Unterricht genoss, dass er vielleicht auch von ihm in die Kunst Constructionen mit nur einer Zirkelöffnung auszuführen eingeweiht wurde? Es ist fruchtlos solchen Vermuthungen nachzujagen, die man weder beweisen noch widerlegen kann.

Dürer's zweite Schrift von 1527 heisst Etliche vnderricht zu befestigung der Stett, Schloss und Flecken. Sie ist gradezu bahnbrechend in der Geschichte des Festungskriegs geworden, indem in ihr zum ersten Male die grossen Grundgedanken ausgesprochen sind, welche als unerlässlich bei der Anlage und Vertheidigung eines befestigten Platzes in Geltung blieben, so vielfältige Abänderungen im Einzelnen die Fortschritte der Bewaffnung hervorbrachten. Die Geschichte der Mathematik hat mit dem Werke nichts zu thun.

Nicht viel länger verweilt dieselbe bei Dürer's vier Büchern Von menschlicher Proportion von 1528. Dürer überwachte nur den Druck des 1. Buches, die drei folgenden lagen zwar bei seinem Tode handschriftlich vor, allein man hat immerhin damit zu rechnen, dass der Verfasser selbst während des Druckes starb. Dieses Werk[2]) entspricht gleichfalls einer Vorarbeit Alberti's, wie wir es für die perspectivischen Vorrichtungen behauptet haben, und die Wahrscheinlichkeit ist nicht von der Hand zu weisen, dass Dürer, nachdem er Alberti einmal als zuverlässigen Führer erkannt hatte, auch ein zweites Mal sich gern seiner Leitung anvertraute. Die Anlehnung ist besonders darin ersichtlich, dass Dürer gleich Alberti die ganze Körperlänge des Menschen in 600 Theile zerlegt hat, von welchen eine gewisse Anzahl auf jeden Körperabschnitt kommt. Daneben kennt er allerdings auch andere Verhältnisszahlen, z. B. dass der Mensch 7 Kopflängen gross sei u. s. w.

Waren Werner und Dürer unbedingt die für unsere Betrachtung

---

[1]) Staigmüller, Lucas Paciuolo in Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Histor.-literar. Abthlg. S. 94 Note 5. [2]) Kästner I, 694—697.

hervorragendsten Persönlichkeiten des Pirckheimer'schen Kreises, so sind doch zwei andere Männer noch in aller Kürze zu erwähnen: Johannes Schöner und Andreas Osiander. Ersterer, auch Schoner[1]) genannt, ist 1477 in Karlstadt in Franken geboren, 1547 in Nürnberg gestorben. Er war Priester an der St. Jacobskirche in Bamberg, als er 1526 zur Stelle des Professors der Mathematik an dem damals unter Mitwirkung von Melanchthon gegründeten Gymnasium in Nürnberg berufen wurde. Geographische und namentlich astrologische Schriften machten ihn so berühmt, dass etwa 20 Jahre nach seinem Tode ein dichterischer Lobredner des gleichfalls vor Kurzem verstorbenen Simon Jacob die drei berühmten Franken Regiomontan, Schoner, Jacob in Vergleich bringen durfte[2]), welche ihren Heimathsorten Königsberg, Karlstadt, Coburg zu gleichem Ruhme gereichten. Von diesen Uebertreibungen haben wir uns selbstverständlich fern zu halten, doch erkennt die Geschichte der Mathematik es dankbar an, dass Schöner mehrere Schriften aus Regiomontan's Nachlasse, welche ihm zu diesem Zwecke übergeben wurden, zum Druck beförderte, insbesondere das Werk *De triangulis* sammt der beigefügten Gegenschrift gegen die Kreisquadraturen des Nicolaus von Cusa. Auch Regiomontan's Schrift über die Kometen, dessen Sinustafeln, dessen Erläuterungen zum Almagest hat Schöner herausgegeben, dessgleichen Peurbach's Büchlein *De quadrato geometrico* und nicht minder den *Algorithmus demonstratus*, der sich in Regiomontan's Nachlasse vorfand, da jener ihn aus einer Wiener Handschrift abgeschrieben hatte. Das Lob dürfen wir also Schöner unbedingt zuerkennen, dass er in der Wahl der Schriften, welche er der Oeffentlichkeit übergab, sehr glücklich war. An der Drucklegung eines letzten Werkes betheiligte er sich gemeinschaftlich mit Andreas Osiander[3]) (1498—1552). Dieser streitbare Prediger der neuen Glaubenslehre ist vorzugsweise Reformator auf kirchlichem Gebiete gewesen, als solcher in zahlreiche Zwistigkeiten verwickelt, wo immer er verweilte, in Nürnberg ebensowohl als später in Königsberg am Hofe des Herzogs Albrecht. Dort zählte er z. B. Michael Stifel unter seine Gegner. Wir haben seiner hier in einer ganz anderen Eigenschaft zu gedenken. Gemeinsam mit Schöner leitete er den 1543 in Nürnberg vollendeten Druck des koppernikanischen Werkes über die Kreisbewegungen der Weltkörper, und Osiander allein fügte dem ursprünglichen Titel *De revolutionibus* die

---

[1]) Doppelmayr S. 45—50 und S. 80 Note tt. — G. A. Will, Nürnbergisches Gelehrtenlexicon III, 559—561 (Nürnberg und Altdorf 1757). [2]) Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-literar. Abthlg. S. 66. [3]) Doppelmayr S. 58—61. — Allgem. deutsche Biographie XXIV, 473—483 Artikel von W. Möller.

abschwächenden Worte *orbium caelestium* bei, unterdrückte eine Einleitung des Verfassers und ersetzte sie durch die unglückselige Vorrede, welche mit der Aeusserung, es sei nicht erforderlich, dass Hypothesen über astronomische Dinge wahr oder auch nur wahrscheinlich seien, es reiche schon allein hin, dass sie eine mit den Beobachtungen übereinstimmende Rechnung ergeben, welche mit dieser Aeusserung, sagen wir, die allerdings keineswegs beabsichtigte Veranlassung zu späterer Ketzerrichterei gegen das Werk und seine Verehrer gab.

Damit gewinnen wir selbst aber den Uebergang zu dem Verfasser des unsterblichen Werkes, welchen die Geschichte der Mathematik stolz ist nennen zu dürfen, wenn sie auch nicht gleich der Geschichte der Sternkunde einen neuen Abschnitt mit ihm zu beginnen hat. Nicolaus Koppernigk[1]), wie die wahrscheinlichste Rechtschreibung des Namens lautet, ist in Thorn am 19. Februar 1473 geboren, in Frauenburg am 24. Mai 1543 gestorben. Er studirte 1491—1494 in Krakau, 1496—1500 in Bologna. Während dieses Aufenthaltes wurde er 1497 zum Frauenburger Domherr erwählt. Auch in Rom verweilte der junge Domherr noch über ein Jahr, bevor er 1501 auf kurze Zeit nach Hause reiste. Nach Juli 1501 setzte er medicinische und juristische Studien in Italien, zunächst in Padua fort. Den juristischen Doctortitel erwarb er den 31. Mai 1503 in Ferrara. Zwischen 1505 und 1506 war die endgültige Rückkehr in die Heimath. Die verschiedensten Geschäfte erfüllten dort sein Leben, und dazwischen arbeitete er seit 1506 unablässig an dem grossen Werke, das ein neues Weltsystem begründen sollte. Gegen 1530 war es vollendet. Etwa drei Jahre später verfasste Koppernikus eine Selbstanzeige, die erst 1878 aus einer Wiener Handschrift zur Veröffentlichung gelangte. Die erste gedruckte Nachricht von dem koppernikanischen Werke gab die *Narratio prima de libris revolutionum* von 1539 aus der Feder eines Schülers, Georg Joachim von Lauchen, von welchem gleich nach Koppernikus die Rede sein wird. Eben dieser brachte 1541 das druckreife Manuscript der „Revolutionen" nach Nürnberg und überwachte den Satz der ersten Bogen, dann reiste er ab, und Schöner und Osiander übernahmen, wie wir wissen, die Besorgung. Der Druck dauerte bis 1543, und die Sage will, das erste fertige Exemplar sei dem Verfasser auf dem

[1]) Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Bd. I: Das Leben. Bd. II: Urkunden (Berlin 1883—1884). Bd. III: Die Lehre, ist in Folge des Todes des Verfassers leider unvollendet geblieben. Die beste Ausgabe des Werkes *De revolutionibus orbium caelestium* ist die sogenannte Jubiläumsausgabe (Thorn 1873), ins Deutsche übersetzt von Menzzer (Thorn 1879).

Todtenbette überreicht worden. Wir haben es mit dem grossen Werke nur soweit zu thun, als es mathematisches Wissen des Verfassers verräth und mittheilt, und das ist vorzugsweise im 12., 13., 14. Kapitel des I. Buches der Fall, welche die Ueberschriften führen: 12. Ueber die geraden Linien, welche Sehnen im Kreise sind. 13. Ueber die Seiten und Winkel der ebenen geradlinigen Dreiecke. 14. Ueber die sphärischen Dreiecke. Ursprünglich bildeten diese Kapitel ein besonderes, und zwar das II. Buch des Werkes[1]), später wurden sie von Koppernikus unter mancherlei Kürzungen zum I. Buche geschlagen und büssten so einen Theil ihrer Selbständigkeit ein, in welcher sie dem Leser ein kurzgefasstes Lehrbuch der Trigonometrie ersetzten. Wir glauben über den Inhalt[2]) genügend Rechenschaft zu geben, wenn wir bemerken, dass Koppernikus sich ziemlich streng an den Almagest des Ptolemäus anschloss, mit der Trigonometrie des Regiomontan dagegen anfangs kaum bekannt gewesen sein dürfte. Als er später diese Bekanntschaft erwarb, fügte er, wie aus der Originalhandschrift zu erkennen ist[3]), die beiden wichtigsten Aufgaben der sphärischen Trigonometrie, aus den drei Seiten die Winkel, aus den drei Winkeln die Seiten des sphärischen Dreiecks zu ermitteln, nachträglich bei, aber die Beweisführung ist ihm hier durchaus eigenthümlich. Auch an anderen Stellen der Revolutionen kommen geometrische Dinge vor, welche Beachtung verdienen, und welche eine genaue Durchforschung des koppernikanischen Werkes nach dieser Richtung als vielleicht lohnend vermuthen lassen. Man hat z. B. bemerkt[4]), dass im 4. Kapitel des III. Buches der Satz ausgesprochen und bewiesen ist, dass jeder Punkt des Umfanges eines im Innern eines Kreises von doppeltem Halbmesser längs dessen Umfang rollenden Kreises bei seiner Bewegung einen Durchmesser des grösseren Kreises beschreibt. Zur Würdigung der mathematischen Kenntnisse des Koppernikus sind ausser den Revolutionen noch die Einzeichnungen zu beachten, welche er in verschiedene nachweislich von ihm besessene Bücher machte[5]). Zu diesen Büchern gehörte ein Exemplar der *Tabula directionum* Regiomontan's in einem Augsburger Drucke, der 1490 aus Ratdolt's Werkstätte hervorgegangen war. Koppernikus hat darin die *Tabula foecunda* des Regiomontanus durch eine

---

[1]) Jubiläumsausgabe S. 34 Note. [2]) Ueber den Inhalt vergl. Fasbender, Die Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen. Programm des Thorner Gymnasiums und der Realschule erster Ordnung für 1872. [3]) Prowe l. c. Bd. I Abtheilung 2 S. 478—479 Note **. [4]) Max. Curtze in der *Biblioth. mathem.* 1888 S. 65—66 und 1895 S. 33—34. [5]) Max. Curtze, *Reliquiae Copernicanae,* Zeitschr. Math. Phys. XIX, 76—82 und 432—458. XX, 221—248. Ueber die trigonometrische Secante vergl. l. c. XX, 221—222.

neuberechnete Columne ergänzt, welche die Ueberschrift Ὑποτεινουσα führt, während die von Regiomontan herrührenden Zahlen mit Καθετος überschrieben sind. Der Sinn dieser Ausdrücke ist aus den beistehenden Zahlen mit Sicherheit zu entnehmen und entspricht auch dem Augenscheine (Fig. 93). BC ist καθετος, AC ist ὑποτεινουσα oder trigonometrisch ausgedrückt ersteres ist die Tangente, letzteres die Secante, welche durch Koppernikus in die Wissenschaft eingeführt war. Der Oeffentlichkeit gehörte aber diese trigonometrische Function vorläufig noch nicht an; wenigstens ist eine Anwendung derselben nicht einmal in den Revolutionen des Koppernikus selbst nachweisbar.

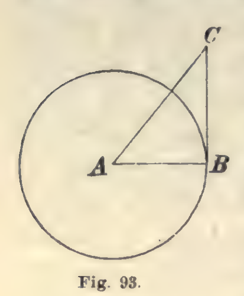


Fig. 93.

Wir erwähnen hier gelegentlich auch eine von Koppernikus aufgestellte Brodordnung, welche etwa gleichzeitig mit der durch Adam Riese berechneten Annaberger Brodordnung (S. 422) sein mag. Deren Handschrift (nicht von Koppernikus selbst gefertigt) findet sich mit einer Handwerksordnung von 1531 vereinigt in einem zu Upsala aufbewahrten Sammelbande[1]).

Es war von einem Schüler des Koppernikus Rhäticus[2]) die Rede. Wie der eigentliche Name dieses Gelehrten lautete, steht nicht fest. Er ist fast ausschliesslich als Rhäticus, der im Voralberg Geborene, bekannt nach seinem Heimathsorte Feldkirch, wo er 1514 zur Welt kam. Er starb 1576 zu Kaschau in Ungarn. Unter den verschiedenen Vermuthungen über den Familiennamen hat diejenige viel für sich, er habe Georg Joachim von Lauchen geheissen, während Andere Joachim für den Familiennamen halten. Rhäticus studirte in Zürich, Wittenberg, wo er 1535 den Grad als Magister erwarb, Tübingen, Nürnberg und trat an diesem letzteren Orte zu Johannes Schöner in engere Beziehung. Während Rhäticus in Nürnberg verweilte, starb 1536 Volmar in Wittenberg, vor wenigen Jahren sein Lehrer in Mathematik und Astronomie. Melanchthon, damals, wie wir wissen (S. 408), allmächtig in Universitätsangelegenheiten vorab so weit sie Wittenberg betrafen, setzte die Zweitheilung der einen bisher vorhandenen mathematischen Professur durch und liess für die höhere Mathematik, worunter man die Astronomie zu verstehen hat, Erasmus Reinhold[3]) ernennen, während für die

[1]) Curtze in den Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst. Heft I, S. 47—51 (Leipzig 1878). [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIV, 93—94 Artikel von Bruhns und XXVIII, 388—390 Artikel von Günther. [3]) Ebenda XXVIII, 77—79 Artikel von Günther.

niedere Mathematik, Arithmetik und Geometrie umfassend, wieder auf Melanchthon's Vorschlag, der noch nicht 23jährige Rhäticus berufen wurde. In der Antrittsvorlesung vom 5. Januar 1537 verlas dieser die von Melanchthon angefertigte Declamation über den Nutzen der Arithmetik. Zwei Jahre verwaltete Rhäticus sein Amt, da drang das Gerücht von der neuen Lehre, welche der Domherr in Frauenburg besass, zu ihm, und er zog offenbar mit Einwilligung der Universitätsbehörde, da ihm seine Stelle sonst doch nicht offen gehalten worden wäre, im Frühjahr 1539 nach Preussen, um dort einen bis zum Spätherbst 1541 dauernden Aufenthalt zu nehmen. Erste Frucht des täglichen Umganges mit Koppernikus war die noch 1539 in Danzig gedruckte *Narratio prima de libris revolutionum*, eine vorläufige aber schon ziemlich ausgedehnte Mittheilung über das zu erwartende Werk. Ein *Encomium Borussiae* war angehängt, eine im Humanistenstyle verfasste, etwas überschwängliche Schilderung des Landes, in welchem Rhäticus sich befand. Er trat dadurch zu Herzog Albrecht in persönliche Beziehung und verfasste für diesen eine im August 1541 vollendete Chorographie Preussens [1]). Inzwischen wurden die Revolutionen des Koppernikus vollendet. Rhäticus brachte die fertig gestellte Handschrift Ende 1541 nach Nürnberg, wo der Druck bei Petreius begann, zuerst, wie wir gesehen haben, unter des Rhäticus eigener Ueberwachung, dann unter der Schöner's und Osiander's. Die Originalhandschrift hat sich bis auf den heutigen Tag erhalten. Mit dem Druck verglichen zeigt sie einestheils erhebliche Abweichungen von demselben, anderntheils durchaus keinerlei Strichelchen oder dergleichen, wodurch der Setzer sich bemerklich gemacht haben könnte, wie weit er im Satze gelangt war. Beide Umstände vereinigt nöthigen dazu anzunehmen, es sei von der Originalhandschrift noch eine Abschrift genommen worden, welche beim Drucke selbst diente. Diese Setzerabschrift, wie man sie wohl genannt hat, muss von einem humanistisch Gebildeten angefertigt worden sein, der z. B. viele in der Handschrift des Koppernikus lateinisch geschriebene Wörter mit griechischen Lettern schrieb, der die bei Koppernikus regelmässig auftretende Wortform *caelum* eben so regelmässig in *coelum* umwandelte u. s. w. Letztere Schreibweise ist in der Narratio prima des Rhäticus in fortwährender Uebung und hat wesentlich zu der Vermuthung geführt, Rhäticus werde die Setzerabschrift hergestellt haben [2]). Es ist um so auffallender, dass Osiander, der doch die Fortsetzung des Druckes leitete, in seiner unterschriftlosen Vorrede nicht bloss

---

[1]) F. Hipler hat den Abdruck in der Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor.-literar. Abthlg. veranlasst. [2]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung 2, S. 504 Note *

zu der Form *caelum* zurückkehrte, sondern sie sogar mit Plinius durch Ableitung von *caelare* rechtfertigte.

In jenen zweiten Nürnberger Aufenthalt fällt die von Rhäticus gehegte, aber nicht zur Ausführung gebrachte Absicht, die Kegelschnitte des Apollonius herauszugeben, von welchen ein griechischer Text aus Regiomontan's Nachlasse in Nürnberg vorhanden war.

Folgenden Jahres 1542 war Rhäticus wieder in Wittenberg und gab dort die Schrift *De lateribus et angulis triangulorum libellus* im Drucke heraus[1]). Regiomontan habe, so erklärt Rhäticus in einer Vorrede, über Dreiecke geschrieben, und diese Schrift sei unlängst veröffentlicht worden, aber lange vor dieser Veröffentlichung habe Koppernikus unabhängig davon die gleichen Gegenstände behandelt, indem er an Ptolemäus vielmehr sich anlehnend dieser Sätze bei der wissenschaftlichen Begründung der Lehre von der Bewegung der Himmelskörper bedurfte, und dessen Untersuchungen übergebe er nun dem Drucke. Der *libellus triangulorum* von 1542 ist in der That nicht mehr und nicht weniger als das 13. und 14. Kapitel des I. Buches der Revolutionen, welche losgetrennt aus dem Uebrigen früher in die Oeffentlichkeit gelangten. Sie wurden allerdings mannigfach von Rhäticus, wie man annehmen muss, abgeändert und auch eine wesentliche Anordnungsänderung hat dieser sich gestattet. Koppernikus hat seinem 13. und 14. Kapitel im 12. Kapitel eine Tafel der halben Sehnen des doppelten Bogens — des Wortes *Sinus* bedient er sich nicht — für die um je 10′ wachsenden Winkel von 0 bis zu 90° vorausgeschickt und den Kreishalbmesser zu 100000 angenommen. Rhäticus hat eine Tabelle verwandter Natur den beiden trigonometrischen Kapiteln nachfolgen lassen, die offenbar seine eigene Arbeit gewesen ist. Das Wort *Sinus* vermied er, wie es in den Revolutionen vermieden ist, aber die Winkel liess er, statt um 10′, um je 1′ wachsen, und sein Kreishalbmesser war hundertmal grösser, also 10000000. Jeder Winkelspalte ist die Angabe der Grade am Kopfe beigedruckt, die der Minuten am Rande von oben nach unten zunehmend. Aber eine zweite Angabe von Graden und Minuten findet sich unten am Fusse der Spalte und am anderen Rande von unten nach oben zunehmend und jene erstere Angabe zu 90° ergänzend, so dass es möglich ist abzulesen, welcher Winkel der jedesmalige Complementwinkel ist, der den aufgefundenen Sinus, wie wir heute sagen, zum Cosinus hat. Diese Einrichtung rührt mit grösster Wahrscheinlichkeit von Rhäticus her. Was wir aus der Vorrede zum Libellus triangulorum anführten, bestätigt das (S. 471) Gesagte, dass

---

[1]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung 2, S. 480—489.

Koppernikus bei der ersten Niederschrift seiner Trigonometrie mit der des Regiomontanus wohl nicht bekannt war. Auch die weitere Behauptung, er habe später diese Kenntniss erlangt, sind wir in der Lage bestätigen zu können. Ein Exemplar von Regiomontan's De triangulis hat sich erhalten[1]), welches die eigenhändige Widmung des Rhäticus an Koppernikus trägt. Leider ist dieselbe nicht datirt, so dass es unmöglich ist genau zu bestimmen, ob dieses Geschenk in Frauenburg während des Rhäticus Aufenthalt daselbst von Hand zu Hand erfolgte, oder ob es von Nürnberg oder Wittenberg aus als Zeichen der Dankbarkeit dem fernen Lehrer zugeschickt wurde. Wahrscheinlicher ist das erstere, denn wie wollte man sonst die ebenfalls (S. 471) erwähnte Einschaltung zweier Sätze des Regiomontan in die koppernikanische Originalhandschrift erklären, welche doch Rhäticus aus Preussen nach Nürnberg brachte.

Des Rhäticus Bleiben in Wittenberg war nicht von langer Dauer. Noch im gleichen Jahre 1542, in welchem er heimgekehrt war, verliess er diese Universität, um nach Leipzig überzusiedeln, wohin er einem Rufe folgte. Hier beginnt die zweite Periode seiner Wirksamkeit, von welcher wir in dem XIV. Abschnitte zu reden haben. Wenn wir auch sonst kein Bedenken tragen und im 66. Kapitel den Beweis dafür reichlich liefern werden, die Grenzen der als Ueberschriften der Abschnitte gewählten Zeiträume ziemlich weit zu überschreiten, wenn es darauf ankommt, das Bild einer Persönlichkeit nicht zu zerreissen, bei Rhäticus ist es anders. Seine seit 1542 entfaltete Thätigkeit gipfelt in einem erst 1596 fast 20 Jahre nach seinem 1577 erfolgten Tode unter anderen Händen vollendeten Werke und hängt mit weiteren Arbeiten ähnlicher Natur eng zusammen, welche alsdann auch im Zusammenhange behandelt werden müssen.

Wir dürfen jetzt, nachdem wir Werner und Dürer, Koppernikus und Rhäticus kennen gelernt haben, mit grösserer Befriedigung als am Anfange des Kapitels auch Apian's und des Gemma Frisius uns erinnern, sechs würdige Vertreter geometrisch-trigonometrischer Bestrebungen in Deutschland, von denen allerdings vier eher den Trigonometern als den Geometern angehören, einer, Werner, eine Mittelrolle spielt, Dürer endlich das volle Zeug zum wirklichen Geometer besass: Sinn für geometrische Strenge, verbunden mit der dem Geometer und dem Künstler gemeinsamen Freude an der Gestalt.

Wir würden ein neues Kapitel hier zu beginnen haben, wenn nicht ganz äusserliche Gründe uns veranlassten noch fortzufahren. England, wohin wir unsere Blicke zu wenden haben, liefert uns

---

[1]) Prowe l. c. Bd. I, Abtheilung II, S. 408.

am Anfange des XVI. Jahrhunderts nur etwa drei Persönlichkeiten, welche unsere Aufmerksamkeit fesseln, aber nicht genügen ein ganzes Kapitel zu füllen, und welche immerhin leichter an Deutschland als an Italien, wohin wir im Nachfolgenden übergehen, sich angliedern lassen.

Cuthbert Tonstall[1]) (1474—1559) studirte in Oxford, dann in Cambridge, später in Padua, wo er den Grad eines Doctors der Rechte sich erwarb, wo er aber auch mathematische Kenntnisse in sich aufnahm, insbesondere aus den Werken von Regiomontanus und Paciuolo. Seine vielseitige Bildung warf ihn 1522 mitten ins politische Leben. Er wurde Bischof von London, Mitglied des geheimen Raths, seit 1530 war er Bischof von Durham. Bald als Botschafter zu diplomatischen Verhandlungen entsandt, bald unter dem Verdachte heimlicher Verschwörung in den Tower geworfen, durch Königin Maria befreit und seinem Amte wiedergegeben, durch Königin Elisabeth neuerdings abgesetzt, lernte er Gunst und Ungunst seiner Fürsten in rascher Abwechslung kennen. Bevor er 1522 zu Amt und Würde gelangte, gab er als Lebewohl an die Wissenschaft, *a farewell to the science*, eine Arithmetik in vier Büchern heraus: *De arte supputandi libri quatuor*, welche auch ausserhalb England sich grossen Beifalls erfreute und 1544 in Strassburg von dem eifrigen Pädagogen jener Stadt, Johannes Sturm, neu herausgegeben wurde. Viel Neues ist in dem Werkchen nicht vorhanden, und Tonstall selbst beruft sich gegen Ende des II. Buches auf Paciuolo als seine Quelle[2]). Man kann dagegen Tonstall das Lob klarer Darstellung, geschickter Anordnung, glücklicher Auswahl von Beispielen nicht vorenthalten.

Wir heben einige wenige Einzelheiten hervor, die bemerkenswerth sein möchten. Tonstall ordnet an verschiedenen Stellen eine Anzahl von Ergebnissen, deren man öfters bedarf, in Tabellen. Eine Einsundeins-, sowie eine Einsvoneinstabelle, ein quadratisch gedrucktes Einmaleins fehlt so wenig als eine Tafel der zehn ersten Kubikzahlen[3]). Bruchbrüche werden so geschrieben, dass nur bei dem ersten ein Bruchstrich steht[4]), z. B. $\frac{3}{4}\,\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\,\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$ bedeutet $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$. Beim Quadratwurzelausziehen sucht man Näherungswerthe nach der Regel[5]) $\sqrt{A} = \frac{1}{a}\sqrt{A \cdot a^2}$. Getreidepreis und Brodpreis sollen im

---

[1]) Kästner I, 94—96. Poggendorff II, 1117. W. W. Rouse Ball, *A History of the study of Mathematics at Cambridge* (Cambridge 1889) pag. 10. [2]) *Ea autem rudimenta ex Arithmetica Lucae de Burgo, cuius nomen in ea arte non parum, neque abs re celebratur: excerpsimus.* pag. 175 der Strassburger Ausgabe, welche uns vorlag. [3]) Ebenda pag. 25, 39, 50, 106—107. [4]) Ebenda pag. 119. [5]) Ebenda pag. 167.

Verhältnisse zu einander stehen und können tabellarisch übersichtlich gemacht werden[1]. Die Fassung der Regel zur Auffindung der Summe einer geometrischen Reihe[2] ist die gleiche, welche Prodocimo di Beldomandi (S. 207) lehrte. Neu scheint uns eine Regel zur Auffindung des harmonischen Mittels[3] zweier Zahlen. In Buchstaben, die freilich bei Tonstall nicht vorkommen, läuft sie auf die Formel hinaus, das harmonische Mittel zwischen a und b sei $\frac{(b-a)\cdot a}{b+a}+a$. Tonstall hat seine Arithmetik dem späteren unglücklichen Kanzler Thomas Morus gewidmet und denselben gebeten, Gedächtnissverse zum leichteren Behalten der Regeln des doppelten falschen Ansatzes anzufertigen. Diese Verse lauten[4]:

A plure deme plusculum.
Minus minore subtrahe,
Pluri minus coniungito.
Atque ad minus plus adiice.

Der zweite Schriftsteller, den wir nennen, ist Robert Recorde[5] (1510—1558). Er war Leibarzt König Eduard VI. und nachmals der Königin Maria, muss aber in seinen Ausgaben die durch diese Stellung möglichen reichen Einnahmen weit überschritten haben, denn der Tod ereilte ihn im Schuldgefängnisse Kings Bench. Schriftstellerische Leistungen hat er seit 1540 veröffentlicht. Ein erstes Werk unter dem Titel *The Grounde of Artes* wurde später von John Dee vermehrt und 1582 in abermals vermehrter Auflage durch John Mellis herausgegeben[6]. Die Engländer, klagt Recorde in der Vorrede, seien zwar nur von wenigen Völkern an natürlichem Menschenverstande übertroffen, aber sie seien entsetzlich unwissend, und dem wolle er durch sein Buch einigermassen abhelfen. Er hat es in Gestalt eines Gespräches zwischen Lehrer und Schüler auf englisch verfasst. Nicht selten kommen im fortlaufenden Texte Reimzeilen vor, welche aber dnrch den Druck nicht bemerklich gemacht sind[7]. Anfangs werden Fehler des Schülers getadelt und zurechtgewiesen, in deren Auswahl nicht zu verkennen ist, dass Recorde wusste, wo und wie Rechenfehler zu befürchten sind. Einmal schreibt z. B. der Schüler eine 6 statt

---

[1] Ebenda pag. 224. [2] Ebenda pag. 378. [3] Ebenda pag. 330. [4] Ebenda pag. 390. [5] Rouse Ball l. c. pag. 15—19. [6] Uns lag nur diese 3. Auflage von 1582 vor, nach welcher wir citiren. [7] Der Schüler sagt z. B. einmal: *And I to youre authoritie my witte doe subdue, whatsoever you say, I take it for true,* worauf der Lehrer erwidert, das sei zu viel und *Thoughe I mighte of my Scholler some credence require, yet except I shew reason, I do it not desire.*

der 9; beim Addiren schreibt er ein anderesmal eine zweiziffrige Theilsumme hin, statt deren Zehner im Sinne zu behalten; einen dritten Fehler begeht er beim Kürzen von Brüchen: er war angewiesen worden, im Zähler und Nenner auftretende Randnullen zu streichen und kürzt dem entsprechend $\frac{400}{650}$ in $\frac{4}{65}$, was dem Lehrer Veranlassung giebt zu betonen, die zu streichenden Nullen müssten in Zähler und Nenner von gleicher Anzahl sein. Die Neunerprobe spielt bei allen Rechnungsverfahren eine wichtige Rolle ungleich der Tonstall'schen Arithmetik, in welcher sie nie angewandt ist. Auch beim Rechnen mit benannten Zahlen, z. B. Pfunden, Schilling, Pence ist die Neunerprobe wichtig. Da 1 £st. = 20 sh. = (18 + 2) sh. und 1 sh. = 12 ₰ = (9 + 3) ₰, so zählt bei der Neunerprobe 1 £st. für 2 sh. und 1 sh. für 3 ₰. Davon sehe ich den Grund nicht, sagt der Schüler. Von vielen anderen Dingen auch nicht, *no more doe you of manye things else*, tröstet der Lehrer, aber man müsse zuerst durch kurz gefasste Regeln die Kunst erlernen, bevor man deren Begründung verstehen könne. Nach dem Zifferrechnen wird auch das Rechnen mit Rechenpfennigen, *counters*, gelehrt, welches nicht nur den Unkundigen des Schreibens und Lesens zu empfehlen sei, sondern auch den Kundigen, wenn sie zufällig Feder oder Tafel nicht zur Hand haben[1]), und auch an den Händen kann man rechnen[2]). Die Einmaleinstabelle gibt Recorde in ihrer dreieckigen Anlage. Die goldene Regel, *the golden rule*, oder directe Regeldetri wird von der rückwärtsigen Regel, *the backer rule*, unterschieden. Wie viel Yard eines 3 Yard breiten Canvas braucht man, um 30 Yard 2 Yard breites Tuch zu füttern, fragt der Lehrer als Beispiel der zweiten Gattung. So breiten Canvas giebt es nicht, *why, there is none so broade*, antwortet der Schüler, worauf ihn der Lehrer mit einem: das gilt mir gleich, *I doe not care for that*, auf das bloss Rechnungsmässige der Aufgabe hinweist. Wir haben bei Tonstall der Tabelle für Getreide- und Brodpreis gedacht. Recorde belehrt uns, dass es eine öffentliche Liste mit Gesetzeskraft, *Statute of Assise of breade*, gab, welche das Gewicht eines Brodes von gleichbleibendem Preise zu dem wachsenden Preise des Weizens in Beziehung setzte, dass aber diese gesetzliche Liste fehlerhaft war. Wir erinnern hier an die von Riese 1533 verfertigte Annaberger Brodordnung (S. 387), welche dort einer öffentlichen Anordnung zu Grunde gelegt wurde. Zuletzt erscheint bei Recorde die Regel des doppelten falschen An-

[1]) *whiche doth not onely serve for them, that cannot write and reade, but also for them, that can doe both, but have not at some times their pen or tables readie with them.* [2]) *The arte of numbering on the hande.*

satzes, *the rule of Falsehode*, und bei dieser Gelegenheit werden die Zeichen + und — eingeführt[1]). Ersteres bedeute, dass die Annahme ein zu Grosses, letzteres dass sie ein zu Kleines geliefert habe. Welcherlei Quellen Recorde gedient haben ist nirgend angegeben. Wenn es einmal heisst *Some men* (*as Stifelius*), so ist das sicherlich ein Zusatz einer späteren Ausgabe, da 1540 die Arithmetica integra noch nicht erschienen war, Stifel's Name als Mathematiker also noch nicht bekannt sein konnte. Ob der Zusatz erst der dritten Ausgabe angehört, oder schon in der zweiten vorkommt, ist uns nicht möglich aufzuklären.

Gewiss nicht minder interessant als Recorde's erste Schrift muss seine zweite sein, welche uns nur durch einen sehr dürftigen Auszug bekannt geworden ist. Es ist eine Algebra, welche er 1556 wieder in Form eines englischen Gespräches zwischen Lehrer und Schüler veröffentlicht hat. Sie führt den Titel: *The Wetstone of witte* in Folge eines recht kühnen Wortspiels: aus *Regula Coss* wurde *cos ingenii*, daraus durch Uebersetzung der Wetzstein des Witzes. Jedenfalls hatte also Recorde die Algebra nicht als *Regula della Cosa*, sondern als *Regula Coss* d. h. aus einem in Deutschland verfassten Werke kennen gelernt. Am bekanntesten ist aus Recorde's Algebra die Einführung des Gleichheitszeichens geworden. Recorde bediente sich dazu des wenn auch nicht sofort, doch endlich zur alleinigen Uebung gewordenen =, weil nichts einander gleicher sein könne, als zwei parallele Strichelchen[2]). Es ist unbegreiflich, dass man klüger als der Erfinder hat sein wollen und die Behauptung aufstellte, = sei desshalb zu der Bedeutung gleich gekommen, weil ein mittelalterliches Abkürzungszeichen für *id est* so aussehe. Auch das Verdienst wird Recorde zugeschrieben[3]), die Ausziehung der Quadratwurzel aus algebraischen Ausdrücken zuerst gelehrt zu haben. Das „zuerst“ wird sich wohl auf England beziehen, wie Recorde auch nachgerühmt wird, er sei der erste Engländer gewesen, der der Koppernikanischen Lehre sich anschloss, denn in anderen Ländern haben wir viel früher als 1556 Quadratwurzeln aus Ausdrücken ziehen sehen, welche aus Summen von mit bestimmten Zahlen vervielfachten

---

[1]) + *whyehc betokeneth too muche, as this line,* — *plaine whitout a crosse line, betokeneth too little.* [2]) *And to avoide the tediouse repetition of these wordes: is equalle to I will sette as I do often in woorke use a pair of paralleles, or Gemove lines of one length, thus:* =, *because noe 2 thynges can be more equalle.* [3]) *Encyclopaedia Britannica* (9. Edition Edinburgh 1886) XX, 310: *The adaption of the rule for extracting the square root of an integral number to the extraction of the square root of an integral algebraical function is also said to be due to Recorde.*

Potenzen der Unbekannten bestanden, und um Anderes kann es sich nicht gehandelt haben.

Einige weitere Bücher des gleichen Verfassers werden genannt, ein *Pathway to knowledge* (1551), *Principles of geometry* (1551), eine nicht datirte *Mensuration*, verschiedenes Astrologische (1556). Eine Uebersetzung von Euklid's Elementen soll handschriftlich geblieben sein.

Im Vorübergehen nennen wir noch drittens William Buckley[1]), der am Hofe Eduard VI. in Ansehen stand und gegen 1550 starb. Er verfasste eine *Arithmetica memorativa* in lateinischen Versen. Bei Ausziehung von Quadratwurzeln lässt er dem Radicanden sechs Nullen rechts beifügen, um die Wurzel auf $\frac{1}{1000}$ genau zu erhalten. Wir wissen, dass Tonstall Aehnliches lehrte (S. 476). Ausserdem wusste Buckley[2]), wie viele Combinationen zu allen möglichen Classen aus n Elementen gebildet werden können, aus vier Elementen z. B. $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

64. Kapitel.

Italienische Mathematiker. Die kubische Gleichung.

Wir gelangen in unserer Wanderung nach Italien, dem Lande, welches den unbestritten ersten Rang der dort gemachten Erfindungen den letzten Platz in der mathematischen Entwickelungsgeschichte des Anfanges des XVI. Jahrhunderts verdankt, den wir ihm zu geben uns veranlasst sehen, da Grosses nur dann in seiner ganzen Höhe erscheint, wenn man die niedrigere Gestaltung der Umgebung in Vergleich zu ziehen vermag.

Auch in Italien hat es freilich für die Männer, welche den wesentlichen Ruhepunkt unserer Erzählung bilden müssen, an kleineren Vergleichungspersönlichkeiten nicht gefehlt. Wir müssen zu diesen sogar einen Uebersetzer zählen, Gianbattista Memmo, latinisirt Memmius[3]), einen venetianischen Edlen, welcher glaubte ohne Fachwissen, bloss auf Kenntniss der griechischen Sprache gestützt eine lateinische Uebersetzung der vier ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius anfertigen zu können, die sein Sohn 1537 im Drucke herausgab.

Ferner hat es in Italien gleichwie in Deutschland eine grosse

---

[1]) Kästner I, 48—49. — Poggendorff I, 332. [2]) Todhunter, *History of the Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 26. [3]) Vossius pag. 55.

Anzahl von Rechenmeistern geringerer Art gegeben, von denen Druckwerke sich erhalten haben, die ehemalige Verbreitung dieser Schriften bezeugend und der Zukunft die Namensnennung dieser Schriftsteller ermöglichend, aber keineswegs zur unabweisbaren Pflicht machend[1]). Eine rühmliche Ausnahme bildet Francesco Ghaligai[2]), der in seiner Summa de arithmetica von 1521, welche vielleicht von der Practica d'arithmetica von 1548 und von 1552 nicht verschieden ist, ein, so weit der Druck von 1552 dem Urtheile zu Grunde gelegt wird, vortreffliches aus 13 Büchern bestehendes Werk geliefert hat. Die ersten drei Bücher behandeln das Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen, die Ausziehung der Quadratwurzeln und die Proportionen, die folgenden vier die Regeldetri und deren Anwendung auf kaufmännische Aufgaben (Münzrechnungen, Gesellschaftsrechnungen u. s. w.). Das 8. Buch enthält Aufgaben über die Zerlegung von Zahlen in Theile von vorgeschriebenen Eigenschaften, das 9. ist der Regula falsi gewidmet. Die vier letzten Bücher behandeln recht gründlich die eigentliche Algebra, deren Gegenstände (Ausziehen der Kubikwurzel, Rechnen mit Wurzelgrössen, quadratische Gleichungen u. s. w.) an Aufgaben durchgenommen werden. Ghaligai liebt geschichtliche Notizen, insbesondere nennt er fortwährend Leonardo von Pisa, an den er sich vorzugsweise anschliesst. Ganz eigenthümlich sind wenn nicht die Namen doch die Bezeichnungen der Potenzen der Unbekannten, deren Ghaligai sich bediente. Er schreibt für x^1 = cosa = c^0, x^2 = censo = □, x^3 = cubo = ◫, x^4 = censo di censo = □ di □, x^5 = relato = ⊟. Er hat noch einen Namen für x^{13} = dromico = ⊞. Aber für Uberti, Thesoro universale de abacho (1548), Feliciano, Libro di arithmetica e geometria intitulato scala grimadelli (1550), Verini, Spechio del mercatante (1542), Catani, Pratica delle due prime matematiche (1546) werden auch von dem Geschichtsschreiber, welchem wir diese Büchertitel entnehmen, keine besonderen Verdienste in Anspruch genommen, während ein anderer Schriftsteller[3]) von Feliciano zu berichten weiss, er sei der erste, der von einer feldmesserischen Vorrichtung mit Namen *Squadro* spreche, welche auf einer Figur durch einen kleinen Kreis dargestellt sei, und welche nach einem Berichte des Feliciano über Reisen, welche er unternahm, um sich zu unterrichten, schon seit Ende des XV. Jahrhunderts in Gebrauch gewesen sein müsse. Der Name Sfortunati's begegnet uns von mitunter ihn zurechtweisenden Bemerkungen begleitet in den Schriften der wirklich hervorragenden Mathematiker

---

[1]) Libri III, 145—147. [2]) Wertheim brieflich. [3]) Giov. Rossi, *Groma e squadro* (Torino 1877) pag. 116—121.

der Zeit, von denen wir gleich zu reden haben. Der hochtrabende Titel seines Werkes lautet: Nuovo lume, libro di arithmetica (1534). Gabriel de Aratoribus aus Mailand ist der Einzige, von dessen Erfindungen uns eine ausdrücklich genannt wird[1]). Er habe zuerst bemerkt, dass $\left(b - \sqrt[3]{c}\right)\left(b + \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{b^3}}\right) = b^2 - \frac{c}{b}$, eine Bemerkung, welche dazu führt, den Bruch $\frac{a}{b - \sqrt[3]{c}}$ rational machen zu können. Natürlich ist die Regel nur an einem Zahlenbeispiele $\frac{10}{3 - \sqrt[3]{5}}$ auseinandergesetzt, an diesem aber so, dass man erkennen muss, wie dem Ergebnisse

$$4\frac{1}{11} + \sqrt[3]{12\frac{903}{1331}} + \sqrt[3]{2\frac{463}{1331}}$$

entsprechend in ähnlichen Fällen gerechnet werden soll.

Die Mathematiker, deren wir in Ausführlichkeit zu gedenken haben, sind Scipione del Ferro, Hieronimo Cardano, Nicolo Tartaglia, Luigi Ferrari.

Gleich für den Erstgenannten sind wir allerdings leider genöthigt, unsere Zusage sofort wieder wesentlich einzuschränken, nicht weil wir eine Ausführlichkeit der Darstellung seiner Verdienste für übel angebracht hielten, sondern weil wir so wenig von ihm wissen[2]). Wann und wo Scipione del Ferro, lateinisch Scipio Ferreus, geboren ist, wissen wir schon nicht. Seine Lehrthätigkeit an der Universität in Bologna dauerte 30 Jahre von 1496 bis 1526, und im letzten Jahre seiner Wirksamkeit ist er zwischen dem 29. October und 16. November gestorben, wie aus Einträgen von Besoldungsauszahlungen in Bologneser Acten hervorgeht. Am 29. October wurde noch eine Summe an ihn ausbezahlt, am 16. November ist schon von ihm als Verstorbenem die Rede. Nachfolger Del Ferro's in der Professur war während eines noch längeren Zeitraumes als dieser sie inne gehabt hatte (1526—1560) sein Schwiegersohn Annibale della Nave, der auch in Besitz der nachgelassenen Schriften des Verstorbenen kam, sie aber leider nicht durch den Druck zum Allgemeingute der damaligen mathematischen Welt machte, sondern nur Einzelnen den Einblick gewährte. Wohin der handschriftliche Nachlass Del Ferro's nach dem Tode seines Erben gekommen sein mag, ist

---

[1]) *Practica Arithmeticae generalis* von Cardanus (1537) Cap. LI, § 17.
[2]) Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze) Berlin 1871 (Separatabzug aus Grunert's Archiv Bd. LII).

auch nicht aus den leisesten Andeutungen zu errathen. Zwei Dinge werden uns in Bälde von Scipione del Ferro berichtet werden: dass er vielfach mit jener damals bei einzelnen Italienern beliebten Geometrie mit unverändert bleibender Zirkelöffnung sich beschäftigte und zur Verbreitung dieser geistreichen Spielerei das Seine beitrug, dass er eine hervorragende Stelle in der Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichung von der besonderen Form $x^3 + ax = b$ gespielt hat.

Wie er die Auflösung dieses für Paciuolo noch unmöglichen, von Anderen in verkehrter Weise behandelten Falles zu Wege brachte, ist nicht berichtet [1]), wenn wir auch glauben durch Rückschlüsse einige Kenntniss davon erlangen zu können. Wann er die Entdeckung gemacht, ist zweifelhaft, indem zwei einander widersprechende Angaben darüber im Drucke erschienen sind. Cardano erzählt in seiner *Ars magna de Regulis Algebraicis* [2]) von 1545: Scipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc invenit, tradidit vero Anthonio Mariae Florido Veneto. Er verlegt also die Erfindung etwa auf 1515 und lässt ungewiss, wann die Mittheilung an jenen Floridus erfolgte. Tartaglia dagegen in seinen *Quesiti* von 1546 erzählt [3]), jene Mittheilung an Floridus sei etwa 1506 erfolgt, denn aus einem am 10. December 1536 stattgefundenen Gespräche werden die Worte berichtet: se avantava che già trenta anni tal secreto gl era stato mostrato da un gran mathematico. Die Entdeckung selbst würde somit möglicherweise noch weiter hinaufrücken. Uns scheint, so wenig auf die Festlegung der Erfindungszeit an sich Gewicht zu legen ist, weil keinenfalls vor 1545 etwas davon in die grössere Oeffentlichkeit drang, die Angabe Cardano's die glaubwürdigere, weil sie, wie wir sehen werden, auf Mittheilungen des Schwiegersohnes des Erfinders sich stützt.

Aber dieser Widerspruch in den Zeitangaben ist nur ein kleines Beispiel von den Gegensätzen in den Darstellungen, welche über die Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichungen von einander feindseligen Schriftstellern gegeben worden sind, und wir müssen,

[1]) Der erste Versuch, die Lösung des Del Ferro nachzuerfinden, dürfte 1780 von Francis Maseres angestellt worden sein, der ihn in den Philosophical Transactions für jenes Jahr, Vol. LXX pag. 221—238, veröffentlichte. [2]) *Ars magna de Regulis Algebraicis, caput XI: De cubo et rebus aequalibus.* In der Lyoner Gesammtausgabe der Werke des Cardano von 1663, die wir als Cardano kurzweg citiren, findet sich die Stelle Bd. IV, pag. 249. [3]) *Quesito XXV fatto da M. Zuane di Tonini da Coi personalmente. l'anno 1536 adi 10. Decembrio in Venetia.* In den 1606 in Venedig gedruckten *Opere del Tartaglia* steht die Stelle in dem *Quesiti* benannten Abschnitte, den wir kurzweg als *Quesiti* citiren werden, auf pag. 235.

um zu einer unparteischen Würdigung zu gelangen, die verschiedenen Erzählungen, wie sie auf einander gefolgt sind, uns vorführen. Wir gestatten uns zur Erleichterung der Uebersichtlichkeit nur die Veränderung, dass wir die vorkommenden Gleichungen u. s. w. in der heute üblichen Form schreiben und nicht von cubo, censo, cosa, numero sprechen, um Potenzen der Unbekannten oder die Gleichungsconstante zu bezeichnen, wie es bei Cardano sowohl als bei Tartaglia alleinige Uebung war.

Im Jahre 1545 erschien in Nürnberg bei dem dortigen Buchdrucker Petreius und mit einer Widmung an Andreas Osiander versehen ein Buch des Cardano unter dem Titel *Ars magna de rebus Algebraicis.* Gleich im I. Kapitel und dann wiederholt im XI. Kapitel[1]) erzählt der Verfasser, wie die Entwickelung der Algebra geschichtlich verlaufen sei. Der Araber Muhammed habe die Lehre begründet. Die quadratischen Gleichungen seien von ihm erledigt worden, wie man aus dem Zeugnisse des Leonardo von Pisa entnehmen könne. Abgeleitete Gleichungsformen, welche Paciuolo veröffentlichte, haben dem sich fügen müssen; wer sie bewältigte, wisse man nicht. Gemeint sind diejenigen Gleichungen, welche in der allgemeinsten Form $ax^4 \pm bx^2 \pm c = 0$ enthalten sind. Andere abgeleitete Formen, in welchen eine Gleichungsconstante neben x^3 und x^6 vorkomme, seien, fährt Cardano fort, wie er gelesen habe, von einem Unbekannten behandelt worden; im Drucke seien diese Ergebnisse nicht erschienen. In der Neuzeit erfand Scipio Ferreus die Auflösung von $x^3 + ax = b$ und theilte sie seinem Schüler Floridus mit. Letzterer hatte aber einen wissenschaftlichen Wettkampf mit Nicolaus Tartalea, und bei dieser Veranlassung entdeckte Tartalea neuerdings die Auflösung. Von ihm, *seinem Freunde,* habe er mit vielen Bitten die Auflösung erlangt[2]), welche er bisher, durch Paciuolo's Aeusserungen irre geleitet, für unmöglich gehalten hatte. Jetzt in den Besitz des einen Falles gelangt habe er auf den Beweis Jagd gemacht und dabei erkannt, dass noch Mancherlei gefunden werden könne. Auch Ludovicus Ferrari, sein ehemaliger Schüler, hat Einiges hinzuentdeckt. Was diese Männer fanden werde mit ihrem Namen versehen werden, wo ein Name fehle, seien die Sätze sein Eigenthum[3]).

Die Ars magna de rebus Algebraicis war noch kein Jahr erschienen, so verliess 1546 in Venedig ein Werk des Tartaglia die

[1]) Cardano IV, 222 und 249. [2]) *qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit.* [3]) *Porro quae ab his inventa sunt illorum nominibus decorabuntur, caetera quae nomine carent nostra sunt.*

Presse, welches die Ueberschrift führte: *Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia.* Es waren zunächst acht Bücher voll von Erfindungen, welche zumeist der Mechanik mit Einschluss der Ballistik oder Lehre von den Geschossen und der Befestigungskunde angehörten. *Quesiti*, Fragen, war als Ueberschrift benutzt, weil die Auseinandersetzung immer an Fragen anknüpfte, welche zu bestimmt angegebenen Zeiten von bestimmt genannten Persönlichkeiten vorgelegt worden waren, eine untrügliche Sicherstellung der betreffenden Erfindung und der angeführten Thatsachen, wenn die Personen, auf welche Bezug genommen wurde, noch am Leben und erreichbar waren. Als 9. Buch schloss sich genau in der gleichen Darstellungsform, wie wir sie als die der acht ersten Bücher geschildert haben, eine Reihe von 42 quesiti an, worin von mathematischen Dingen, hauptsächlich von kubischen Gleichungen und deren Auflösung die Rede ist. Das Bild, welches hier von dem geschichtlichen Gange gegeben ist, ergänzt Cardano's Zeichnung durch sehr wesentliche Züge. Im Jahre 1530, so weit greift Tartaglia's Darstellung zurück, legte ein gewisser Zuane de Tonini da Coi, mit lateinischer Namensform Colla, ihm zwei Aufgaben vor: Eine Zahl zu finden, welche mit ihrer um 3 vermehrten Quadratwurzel vervielfacht das Product 5 gebe ($x^3 + 3x^2 = 5$), und drei Zahlen zu finden, von welchen jede folgende um 2 grösser sei als die vorhergehende und die als Product 1000 geben ($x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$). Tartaglia hielt es nicht für unmöglich die zweite Aufgabe zu lösen, wenn er auch keine Regel dafür kannte; für die Auflösung der ersten Aufgabe vollends war er überzeugt eine allgemeine Regel gefunden zu haben, die er aus verschiedenen Gründen noch zu verschweigen für gut halte[1]). Trotz dieses absichtlichen Schweigens können wir aus anderen Angaben wenigstens die Richtung erkennen, wohin Tartaglia's *regola generale* zielte. In den ersten Monaten des Jahres 1535 stellte nämlich Tartaglia seinerseits die Aufgaben[2]), eine irrationale Grösse zu finden, welche mit ihrer um 40 vermehrten Quadratwurzel vervielfacht ein rationales Product gebe, und gleichermassen eine zweite irrationale Grösse, welche mit dem Unterschiede zwischen 30 und ihrer Quadratwurzel vervielfacht Rationales liefere. Darnach vermochte er $x^3 + 40x^2$ und $30x^2 - x^3$, wahrscheinlich allgemein $x^3 + ax^2$ zu einem rationalen Werthe zu machen, aber das war noch lange nicht die Auflösung von $x^3 + ax^2 = c$, d. h. Auflösung der vorgenannten Aufgabe

---

[1]) *Quesiti* pag. 224: *quello de cubo e censo equal a numero io me persuado di hauervi trovato la sua regola generale, ma per al presente la voglio tacere per piu rispetti.* [2]) Ebenda pag. 236.

mit Angabe desjenigen rationalen Werthes, den $x^3 + ax^2$ erhalten sollte. Am 15. December 1536 gab Tartaglia den Werth von x an, welcher $x^2(x + 40)$ rational zu machen geeignet sei. Nehme man $x^2 = 78 - \sqrt{308}$, so sei $x = \sqrt{78 - \sqrt{308}} = \sqrt{77} - 1$ und

$$(78 - \sqrt{308}) \cdot (\sqrt{77} - 1 + 40) = 2888.$$

Da Coi erhob den Einwand, welchen wir grade geäussert haben; er sagte, Tartaglia's Beispiel gründe sich darauf, dass $x^3 + ax^2$ mittels $x^2 = 2a - 2 - \sqrt{8a - 12} = (\sqrt{2a - 3} - 1)^2$ rational werde, aber Tartaglia behauptet in einem Briefe an Cardano vom 12. Februar 1539, Da Coi habe seine Aufgabe nur für den besonderen Fall der Form $x = \sqrt{m} - n$ zu lösen verstanden[1]). Worin seine regola generale bestehe, oder auch nur wie weit er, Tartaglia, die Leistung Da Coi's zu überbieten vermöge, erfahren wir 1539 so wenig als 1530. Es war hier von Aufgaben aus dem Jahre 1535 die Rede. Damals trat eine weitere Persönlichkeit in den Kreis der von Tartaglia Genannten: Antoniomaria Fior, der Floridus des Cardanischen Berichtes. Dieser habe in einen mathematischen Wettkampf auf 30 Aufgaben, welche jeder dem Gegner zu stellen berechtigt sein sollte, mit Tartaglia sich eingelassen, und der Verlauf des Wettkampfes wird in einem Gespräche mit Da Coi vom 10. December 1536 erzählt[2]). Die Aufgaben Fior's waren sämmtlich von der Form $x^3 + ax = b$, und Fior gab dabei an, er sei, wenn auch einfacher Praktiker, schon seit 30 Jahren im Besitze der ihm von einem grossen Mathematiker anvertrauten Auflösungsmethode[3]). Tartaglia strengte sich nun aufs Höchste an, die Regel sich zu verschaffen, und durch sein gutes Geschick fand er sie, *per mia bona sorte la ritrovai*, acht Tage vor Ablauf des Termins, an welchem die Auflösungen einem Notare übergeben werden mussten, nämlich am 12. Februar 1535. Folgenden Tags, am 13. Februar, fand Tartaglia auch die Auflösung des Falles $x^3 = ax + b$. So war Tartaglia im Stande, sämmtliche 30 Auflösungen rechtzeitig und richtig einzuliefern. Fior dagegen rühmte sich, auch die ihm gestellten Aufgaben gelöst zu haben, verlangte aber, einige seiner Freunde sollten zur Prüfung seiner Auflösungen auserwählt werden, worauf Tartaglia, so erzählt dieser wenigstens[4]), ihm öffentlich ein Geschenk mit dem Wettbetrage

---

[1]) *Quesiti* pag. 239, 243, 262. [2]) Ebenda pag. 234—237. [3]) *anchor che non havesse theorica, se avantava che già trenta anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran mathematico.* [4]) *lui voleva che se elegesse alcuni suoi amici, che giudicassero se lui gli haveva ben risolti, over non, la qual cosa vedendo, che da ognuno era giudicato per perdente, io gli feci publicamente un presente del precio giocato.*

machte, da Fior von Jedem als besiegt betrachtet wurde. In Briefen vom 8. Januar, vom 17. Februar 1537 drängte nunmehr Da Coi, dass Tartaglia seine Entdeckungen veröffentlichte. Sein könne er sie ohnedies nicht nennen, da Fior sie gleichfalls besitze und aus verletzter Eigenliebe leicht dahin geführt werden könne, etwaigen Gegnern von Tartaglia bei Wettkämpfen beizustehen. Nach zwei weiteren Jahren liegen die Sachen noch genau ebenso, wie sie 1537 lagen[1]). Cardano, der nach Tartaglia's Darstellung jetzt zum ersten Male in Scene trat, wandte sich am 12. Februar 1539 brieflich an Tartaglia um dessen Entdeckungen. Er stellte dabei die Frage[2]) nach vier in stetiger geometrischer Progression gebildeten Zahlen, deren Summe 10 und deren Quadratsumme 60 sei; eine ähnliche Aufgabe habe Paciuolo schon gestellt, aber nicht beantwortet. Ausserdem war in dem Briefe die Rede von einem gewissen an Geld und Einfluss reichen Marchese, welcher die grösste Sehnsucht besitze, Tartaglia's Untersuchungen kennen zu lernen. Schon am 18. Februar antwortete Tartaglia. Die sehr elegante Auflösung der Aufgabe von der geometrischen Progression kommt im Wesentlichen auf Folgendes heraus[3]). Seien a, ae, ae^2, ae^3 die Reihenglieder und A ihre Summe; sei ferner $ae + ae^2 = x$, mithin $a + ae^3 = A - x$. Man findet leicht

$$x^3 = (A + 2x)\, a \cdot ae^3$$

oder in anderer Form

$$x^3 = (A + 2x)\, ae \cdot ae^2.$$

So gewinnt man zwei Gleichungspaare

$$ae + ae^2 = x \quad \text{nebst} \quad ae \cdot ae^2 = \frac{x^3}{A + 2x},$$

$$a + ae^3 = A - x \quad \text{nebst} \quad a \cdot ae^3 = \frac{x^3}{A + 2x}.$$

Die als Summe und Product gegebenen Grössen sind aber dadurch noch einzeln gegeben und somit erhält man in von x abhängenden Werthen die vier Glieder der Reihe

$$ae = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{\frac{1}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

$$ae^2 = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

---

[1]) *Quesito* XXXIII, pag. 254—263. [2]) Ebenda pag. 256. [3]) Ebenda pag. 259—260.

$$a = \frac{A}{2} - \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}$$

$$ae^3 = \frac{A}{2} - \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}A^3 - \frac{3}{4}Ax^2 - \frac{1}{2}x^3}{A + 2x}}.$$

Werden die einzelnen Glinder quadrirt und dann addirt, und heisst B die bekannte Quadratsumme, so findet man $\frac{A^3 - 2Ax^2}{A + 2x} = B$, und nun ist x und sind durch x die Reihenglieder als gefunden zu betrachten. Bezüglich der kubischen Gleichung aber antwortete Tartaglia entschieden ausweichend. Er mache es nicht wie Andere, die ihre Bücher mit breitgetretenen Geschichten füllen; er liebe es, nur Entdeckungen in denselben zu veröffentlichen. Wann freilich das sein werde, sagte Tartaglia in diesem Briefe nicht, aber Da Coi gegenüber hatte er sich am 15. December ausgesprochen[1]), und im gleichen Sinne äusserte er sich in einer mündlichen Unterredung mit Cardano, welche am 25. März 1539 in Mailand stattfand[2]); er sei mit einer Euklidübersetzung beschäftigt, und bevor diese vollendet sei, gebe er seine Auflösung von $x^3 + ax = b$ nicht her; sie bilde nämlich den Schlüssel zu zahlreichen weiteren Entdeckungen, welche er sich nicht von Anderen wegnehmen lassen wolle, was zu befürchten stehe, wenn er gegenwärtig schon diesen Schlüssel aus der Hand gebe. So wohlbegründet diese Abweisung war, so liess sich Tartaglia doch in der gleichen Unterredung, in welcher wieder von dem bewussten, nie mit Namen genannten, im Augenblicke zufällig abwesenden Marchese die Rede war, und in welcher Cardano einen heiligen, später in einem Briefe vom 12. Mai 1539 bestätigten[3]) Eid schwur, das ihm Anvertraute geheim zu halten, so weit breitschlagen, dass er in Versen seine Methode aussprach.

Quando che'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trouan dui altri, differenti in esso.
Dapoi terrai, questo per consueto,
Che'l lor produtto sempre siá eguale
Al terzo cubo, delle cose neto.
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi, ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesti atti;
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu osserverai quest' altri contratti,

[1]) *Quesiti* pag. 237. [2]) Ebenda pag. 265. [3]) Ebenda pag. 269.

Del numer farai due, tal part' à uolo,
Che l'una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo della cose in stolo;
Delle qual poi, per commun precetto,
Torrai li lati cubi, insieme gionti
Et cotal somma, sarà il tuo concetto:
El terzo, poi de questi nostri conti,
Se solue col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' è quattro è trenta;
Con fondamenti ben saldi, e gagliardi.
Nella Città dal mar' intorno centa [1]).

Der scheinbare Widerspruch gegen die frühere Datumsangabe des 12. Februar 1535 (S. 486) beruhte auf der venetianischen Zeitrechnung mit späterem Jahresanfange, so dass der Monat Februar dem Jahresende von 1534 angehörte. Nach der Unterredung, beziehungsweise der Mittheilung der Verse, die man kaum als Stegreifverse wird betrachten dürfen, so dass es beinahe aussieht, als habe Tartaglia sich darauf vorbereitet, sich überrumpeln zu lassen, reiste dieser schleunigst ab. Cardano verstand den Sinn der Verse nicht, was man ihm kaum wird verübeln können, und wandte sich am 9. April abermals brieflich an Tartaglia um Erläuterung, welche dieser in seiner Antwort vom 23. April 1539 nunmehr auf's Deutlichste gab [2]). Man müsse, um $x^3 = ax + b$ aufzulösen, die beiden Gleichungen $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ behandeln, dann sei $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Auch hier bedarf es kaum der Bemerkung, dass unsere Darstellung den Sinn, aber nicht die Form von Tartaglia's Auseinandersetzungen wiedergiebt, in denen allgemeine Buchstabenausdrücke überhaupt nicht vorkommen. Nun machte Cardano sich neuerdings an die Untersuchung und bemerkte [3]) am 4. August 1539 die Schwierigkeit des Falles, welchen man später den irreductibeln genannt hat, und welcher zu Tage tritt, wenn $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ z. B. bei $x^3 = 9x + 10$, wo $27 > 25$. Tartaglia erkannte aus dieser Beobachtung Cardano's, dass derselbe mit eigenen Forschungen vorangegangen war und suchte in seiner Antwort ihn irre zu leiten, was ihm aber nicht gelang. Inzwischen kam Da Coi im Januar 1540 nach Mailand, verkehrte daselbst mit Cardano, gab auch einige Monate hindurch mathematischen Unterricht, dann reiste er mit Schimpf und Schande bedeckt wieder ab, um plötzlich Mitte April neuerdings dort aufzutauchen und in die dem Cardano abgenommene Professur der Mathematik einzutreten [4]).

---

[1]) *Quesiti* pag. 266. [2]) Ebenda pag. 268. [3]) Ebenda pag. 271. [4]) Ebenda pag. 275 und 278.

Noch ein letztes Gespräch aus dem Jahre 1541 ist in den Quesiti abgedruckt. Es findet zwischen Tartaglia und einem englischen Freunde Ricardo Venthuorthe vor dessen Rückreise in die Heimath statt und enthält zwei nicht unwesentliche Mittheilungen, welche wir zu späterer Benutzung uns merken wollen. Erstens behauptet Tartaglia, $ax^2 = b + x^3$ besitze zwei oder vielleicht noch mehrere Auflösungen[1]), und zweitens erzählt er[2]), er habe in der schlaflosen Nacht von Martini 1536 die Auflösung der Gleichungen $x^6 + ax^3 = b$, $x^6 + b = ax^3$ und $x^6 = ax^3 + b$ gefunden. Ueber Cardano's Buch von 1545 ist in den Quesiti keine unmittelbare Aeusserung vorhanden, aber die Erzählung von dem am 25. März 1539 geleisteten, am 12. Mai gleichen Jahres bestätigten Eide kam doch der unmittelbaren Beschuldigung, durch jenes Buch einen Eidbruch begangen zu haben, sehr nahe. Tartaglia's englischer Freund hiess in richtiger Schreibart des Namens Richard Wentworth und war der Sohn von Thomas Wentworth, der wegen seines Reichthums Gold-Thomas, *Golden Thomas*, genannt wurde und einer hohen Geldstrafe sich unterwarf, um nicht zum Ritter ernannt zu werden. Ebenderselbe Thomas erhielt 1528 das Vorrecht, in Gegenwart des Königs bedeckten Hauptes bleiben zu dürfen[3]).

Lodovico oder Luigi Ferrari, der dankerfüllte Schüler Cardano's, der sich mit seinem Lehrer so sehr eins wusste, dass er sich selbst von ihm geschaffen, *che sono creato suo*, nannte, nahm den hingeworfenen Fehdehandschuh auf, oder vielmehr beantwortete ihn durch eine öffentliche Herausforderung an Tartaglia, und bei dieser allein blieb es nicht, denn Tartaglia gab eine Erwiderung, und nicht weniger als sechsmaliger Wechsel solcher Schmähschriften liess die gelehrte Mitwelt erkennen, dass wenigstens im Gebrauche von Ausdrücken, wie man sie nur auf Fischmärkten zu vernehmen pflegt, die beiden Gegner einander vollständig gewachsen waren. Sämmtliche 6 *Cartelli* und 6 *Risposte*, Herausforderungen und Erwiderungsschreiben, haben sich erhalten[4]). Sie waren als Flugschriften gedruckt und wurden massenweise verbreitet. Alle führen neben der Unterschrift des Verfassers auch die von Zeugen, welche das Datum der Unterschrift beglaubigten. Ferrari's Cartelli sind vom 10. Februar, 1. April,

---

[1]) *Quesiti* pag. 281. [2]) Ebenda pag. 282. [3]) *Catalogue Libri* (1861) II, 737—738. [4]) *I sei cartelli di matematica disfida primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche di Lodovico Ferrari coi sei contro-cartelli in risposta di Nicolo Tartaglia comprendenti le soluzioni de' quesiti dall' una e dall' altra parte propositi. Raccolti autografati e pubblicati da Enrico Giordani.* Milano 1876. Der Ausdruck *che sono creato suo* ist von Ferrari erstmalig *Cartello I* pag. 2 gebraucht.

1. Juni, 10. August, October 1547, 14. Juli 1548. Tartaglia's Risposte sind vom 19. Februar, 21. April, 9. Juli, 30. August 1547, 16. Juni, 24. Juli 1548, so dass also durch rund anderthalb Jahre die wüste Schimpferei in Thätigkeit blieb. Wir würden sie unberücksichtigt lassen, wenn nicht zwischen dem gegenseitigen Schelten auch Thatsächliches mitgetheilt wäre, welches zu wissen nothwendig ist. Ferrari, sagten wir, trat als Kämpfer für seinen geliebten Lehrer auf. Er behauptet in den ersten Büchern der Quesiti, deren 8. Buch ein Plagiat an Jordanus Nemorarius sei (eine Anklage, welche im II. Cartello wiederkehrt)[1]) eine Menge von Fehlern nachweisen zu können; er behauptet, Tartaglia habe mit Unrecht Tadel gegen Cardano erhoben, den er zu nennen kaum würdig sei, il quale a pena sete degno di nominare; er erbietet sich, um einen zu hinterlegenden Betrag, der bis zur Höhe von 200 Scudi von Tartaglia bestimmt werden möge, mit diesem über alte und neue Schriftsteller, fremde und eigene Erfindungen öffentlich zu disputiren. Tartaglia erwiderte, er denke gar nicht daran, auf Ferrari's Herausforderung einzugehen; er habe nur mit Cardano einen Streit, und wenn dieser sich bereit finde hervorzutreten, dann sei es ihm recht. Er schlage dann vor, sich gegenseitig Aufgaben zu stellen, die Jeder in seiner Heimath, Cardano und Ferrari in Mailand, er in Venedig zu lösen habe; dadurch sei die Reise an einen fremden Ort ebensowohl als die öffentliche Disputation und die Wahl von Richtern vermieden. Im II. Cartello kam Ferrari auf die Geschichte der Auflösung der kubischen Gleichungen[2]). Tartaglia's Vorwürfe gegen Cardano beruhten darauf, dass dieser seine Erfindung preisgegeben habe. Wie aber, wenn das von Cardano Veröffentlichte die Erfindung eines Dritten war? „Vor jetzt fünf Jahren, erklärt Ferrari dadurch das Jahr 1542 bezeichnend, als Cardano nach Bologna reiste und ich ihm Begleiter war, sahen wir Annibale de Nave, einen Mann von Geist und liebenswürdigen Umgangsformen, der uns ein von der Hand seines Schwiegervaters Scipione del Ferro vor langer Zeit geschriebenes Büchlein zeigte, in welchem jene Erfindung mit Eleganz und Gelehrsamkeit entwickelt niedergelegt ist. Ich würde Solches nicht schreiben, um nicht den Schein auf mich zu laden, dass ich, wie es Deine Gewohnheit ist, Gespräche erfinde, wenn nicht Annibale noch am Leben wäre, und als Zeuge beigezogen werden könnte. Und überdies was bedarf es äusseren Zeugnisses? Gestehst Du am Ende Deines Buches, in eben jenem Abschnitte, in welchem Du in so unverschämter Weise Cardano nennest, nicht selbst zu, dass Dein Gegner Fior vor vielen

---

[1]) *Cartello I* pag. 2 und *Cartello II* pag. 6. [2]) *Cartello II* pag. 3.

Jahren die genannte Erfindung besass?" Wir lassen sofort aus Tartaglia's Risposta[1]) seine Erwiderung auf diesen Punkt folgen. „Was diese Einzelheit betrifft, so scheint es mir nicht erlaubt, sie zu bestreiten, geschweige denn zu leugnen, denn es wäre eine übergrosse Anmassung von mir, zu verstehen zu geben, dass Dinge, welche durch mich erfunden worden sind, nicht zu anderen Zeiten von Anderen erfunden worden sein können und in gleicher Weise in Zukunft von Anderen erfunden werden dürften, auch wenn sie nicht durch den genannten Herrn Hieronymo oder mich der Oeffentlichkeit übergeben worden wären. Wohl aber kann ich der Wahrheit gemäss sagen, dass ich diese Dinge niemals bei irgend einem Schriftsteller gesehen habe, dass ich sie vielmehr und zwar rasch erfunden habe, zugleich mit anderen Einzelheiten, die vielleicht von noch grösserer Bedeutung sind." Vielleicht rechnete Tartaglia zu diesen Einzelheiten die auf der gleichen Seite der II. Risposta erwähnte Erledigung der drei Fälle vom Kubus, Census und Zahl, welche er, wie vielen Leuten in Venedig bekannt sei, schon fünf Jahre vor seinen sonstigen Eröffnungen an Cardano, mithin 1534, vollzogen haben will. Wieder in der II. Risposta[2]) wendet sich Tartaglia gegen den früher erwähnten Vorwurf eines Plagiates an Jordanus Nemorarius. Jedenfalls seien die Beweise, sei die Anordnung von ihm selbst, und ein mathematischer Satz ohne Beweis sei werthlos; auch habe jeder Schriftsteller, welcher ein Werk in anderer Anordnung als sein Vorgänger herausgebe, auch bei gleichem Inhalte, das Recht von seinem Werke zu reden. Werfe man ihm vor, Jordanus gar nicht genannt zu haben, so sei das aus Schonung geschehen, denn er hätte Jordanus nicht nennen können, ohne ihm schwere Vorwürfe wegen der Dunkelheit seiner Darstellung zu machen. Abgesehen von diesen thatsächlichen Aeusserungen, denen wir nachher noch einige weitere hinzuzufügen haben werden, handelt es sich in dem II. Cartello und der zugehörigen Risposta vielfach um Formfragen, welche auch in den folgenden Streitschriften wiederkehren. Tartaglia wünscht regelmässig die Person Cardano's ins Spiel zu ziehen, Ferrari lehnt diesen Versuch eben so regelmässig ab. Ferrari will eine öffentliche Disputation in einer der vier Städte Rom, Florenz, Pisa, Bologna, die nähere Wahl der Stadt Tartaglia freistellend; die Richter sollen dann dem Orte der Disputation entnommen werden; Tartaglia besteht darauf, man wolle sich gegenseitig gedruckte innerhalb bestimmter Frist zu lösende Aufgaben vorlegen, des Ortswechsels bedürfe es so wenig wie der Richter, weil mathematische Auflösungen, wenn richtig, überall und von Jedem als

---

[1]) *Risposta II* pag. 6. [2]) Ebenda pag. 7—8.

richtig erkannt, beziehungsweise zugestanden werden müssten. Einen weiteren Streitpunkt bildet die Frage, wo und bei wem die beiden Gegner die betreffende Wettsumme in Verwahrung zu geben haben sollten, und ob baares Geld niedergelegt werden müsse, oder ob Tartaglia berechtigt sein solle, statt eines Theiles der Summe die noch in seinem Besitze befindlichen Druckexemplare der Quesiti zu benutzen. Tartaglia's Bestreben, sagten wir, ging fortwährend dahin, einer persönlichen Begegnung auszuweichen und dafür Aufgaben stellen zu lassen. Er selbst stellte schon in der II. Risposta deren 31, zu deren Beantwortung er Ferrari $2^1/_2$ Monate als Frist setzte. Ferrari stellte im III. Cartello 31 Gegenaufgaben, welche Tartaglia gleich in der III. Risposta beantwortete, von da an immer höhnend, er sei bereits Sieger, da er die ihm gestellten Aufgaben in kürzester Frist gelöst habe, Ferrari dagegen jede Beantwortung schuldig geblieben sei. Im V. Cartello begegnete Ferrari diesem Hohne in doppelter Weise. Erstlich zerpflückte er unbarmherzig die sogenannten Auflösungen Tartaglia's, von welchen er nur fünf als richtig gelten liess, vierzehn seien gar nicht, zwölf unrichtig beantwortet; zweitens schickte er die Beantwortung sämmtlicher Aufgaben des Tartaglia ein. Bei letzterer Gelegenheit ist ein Ausspruch Ferrari's nicht ohne Bedeutung. Die siebzehn ersten Aufgaben des Tartaglia bezogen sich auf Geometrie mit einer einzigen Zirkelöffnung[1]), und dieses, sagt Ferrari, freue ihn, weil er wohl wisse, dass seit etwa 50 Jahren viele schönen Geister erfolgreiche Mühe darauf verwandten, unter welchen Scipione del Ferro aus Bologna seligen Angedenkens einen grossen Antheil habe. Während die vier ersten Risposte den Cartelli innerhalb weniger Wochen nachfolgten, verging jetzt ein achtmonatlicher Zwischenraum, bevor Tartaglia antwortete, und noch überraschender als die Zeitangabe ist der Inhalt der V. Risposta. Tartaglia erklärte sich nämlich jetzt plötzlich zu der bisher von ihm abgelehnten öffentlichen Disputation bereit[2]) und sogar bereit, zu diesem Zwecke nach Mailand zu kommen. Der Umschwung ist ein zu unvermittelter, als dass nicht nach einem begründenden Zwischengliede gefragt werden müsste, und Ferrari fand dasselbe darin[3]), dass Tartaglia, der inzwischen nach Brescia übergesiedelt war, sich mit Annahme der Herausforderung einer Bedingung fügte, die man an seinem neuen Wohnsitze ihm gestellt hatte.

---

[1]) *Cartello V* pag. 25: *quella bella inventione di operare senza mutare l'apertura del compasso.* Ausführliche Auszüge bei W. M. Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung in Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 71 Nr. 3. Halle 1897. [2]) *Risposta V* pag. 7. [3]) *Cartello VI* pag. 9.

Wie dem sei, das öffentliche Zusammentreffen in Mailand fand am 10. August 1548 statt, und über dessen Verlauf ist ein Bericht von Tartaglia vorhanden[1]). Er habe sich eingefunden nur von einem Bruder begleitet, während Ferrari mit einer grossen Zahl von Freunden erschien, Cardano hatte das Weite gesucht. Als er der versammelten Menge auseinandergesetzt habe, was der Ursprung des Streites und wesshalb er nach Mailand gekommen sei, und nun begonnen habe, eine Kritik der 31 Auflösungen Ferrari's zu geben, sei er mit dem Verlangen, erst müssten Kampfrichter gewählt werden, unterbrochen worden. Er habe diesem Ansinnen widersprochen, weil er keinen der Anwesenden kenne; Alle sollten Richter sein, und mit ihnen Alle, welchen seine gedruckte Kritik zu Handen kommen werde. Endlich liess man ihn reden. Er fing mit der Kritik der Beantwortung einer auf Ptolemäus bezüglichen Frage an und brachte den Gegner dahin, nicht leugnen zu können, dass er diese Aufgabe unrichtig gelöst habe. Er habe fortfahren wollen; da sei er mit lautem Zurufe unterbrochen worden, nun müsse Ferrari zur Kritik seiner Auflösungen das Wort haben. Vergeblich habe er mit der Stimme durchzudringen versucht und beansprucht, man möge ihn vollenden lassen, dann könne Ferrari reden, was er wolle. Man verlangte auf's Ungestümste das Wort für Ferrari und dieser erhielt es. Der habe dann über eine auf Vitruvius bezügliche Aufgabe, zu deren Lösung er, Tartaglia, angeblich nicht im Stande gewesen sei, so lange geschwatzt, bis die Mittagsstunde herankam und Jeder zum Essen ging. Da habe er, Tartaglia, an diesem Verlaufe gemerkt, wie es gehen werde, habe für den folgenden Tag noch Schlimmeres befürchtet und sei schweigend und auf einem anderen Wege als der war, auf dem er gekommen, nach Brescia zurückgekehrt. Auf die Brescianer selbst ist Tartaglia in diesem seinem Berichte gleichfalls nicht sehr gut zu sprechen. Man habe ihn dorthin zur öffentlichen Erklärung des Euklid mit grossen Versprechungen und kleinen Erfüllungen berufen; man habe, als er seine Besoldung verlangte, ihn von Herodes zu Pilatus geschickt; man habe einen Rechtsstreit, den er darüber begonnen, Monate lang herumgezogen, ihn endlich mit seinen Ansprüchen auf einen der ersten Rechtsgelehrten von Brescia verwiesen, mit welchem zu processiren er nicht Lust gehabt habe, und so sei er endlich nach grossen Verlusten nach Venedig zurückgekehrt.

Damit schliessen die gedruckten Akten über den Streit wegen der Erfindung der Auflösung der kubischen Gleichung. Aussprüche von Da Coi und von Fior sind nicht vorhanden. Ob sie bei Ver-

[1]) Tartaglia, *General trattato di numeri et misure* Part. II fol. 41 (Vinegia 1556).

öffentlichung der Quesiti beide schon gestorben waren? Es hält fast eben so schwer, es zu glauben, als es in Abrede zu stellen. Denn wenn Fior noch lebte, wie kommt es, dass keiner der beiden Gegner auf ihn als Zeugen sich beruft? wenn er todt war, wie kommt es, dass wieder mit keinem Worte in den Streitschriften davon Erwähnung geschieht? Und das gleiche Dilemma gilt für Da Coi.

Genöthigt aus dem nun einmal allein Vorhandenen ein Urtheil zu begründen, müssen wir dazu noch eine, wie uns scheint, sehr wichtige, sogar unerlässliche Vorfrage beantworten: wer sind die Gegner selbst? Wir meinen, was war ihr persönlicher Charakter, was ihre durch wissenschaftliche Thaten bekundete Leistungsfähigkeit?

Die uns für diesen Zweck zu Gebote stehenden Quellen sind nicht über jeden Zweifel erhaben. Cardano hat in einer besonderen Schrift *De vita propria*[1]) von sich erzählt. Tartaglia hat Autobiographisches dem 6. Buche der Quesiti einverleibt[2]). Ueber Ferrari berichtet sein Freund und Lehrer Cardano unter der Ueberschrift *Vita Ludovici Ferrarii Bononiensis* in kurzem Lebensabrisse[3]).

Cardano hat ein jedenfalls nicht geschmeicheltes Bild seiner selbst der Nachwelt hinterlassen. Ein Widerstreit von Leidenschaften der niedrigsten Art und tiefster Frömmigkeit, von umfassendstem Wissen und blindem Aberglauben steht er vor uns. Seine äusseren Lebensschicksale zeigen ihn uns frühreif durch harte, alle körperlichen und geistigen Kräfte fast im Uebermaasse anstrengende Erziehung. Schon 1523 mit 22 Jahren lehrte Cardano in Pavia die Mathematik; drei Jahre später war er Doctor medicinae in Padua, konnte aber das durch diese Stellung ihm eröffnete einträgliche Gewerbe nicht ausüben, weil der Makel ausserehelicher Geburt an ihm haftete; erst 1539 gelang es ihm, in der Genossenschaft der Mailänder Aerzte Aufnahme zu finden. Nun schienen die Vermögensverhältnisse des auch durch zahlreiche Veröffentlichungen mathematischen, philosophischen, medicinischen Inhalts bald hochberühmten Gelehrten sich bessern zu müssen, aber es schien nur so. Nach Dänemark und Schottland wurde er berufen, Frankreich und Deutschland durchstreifte er, überall lohnenden Erfolg findend, aber auch allen Ausschweifungen sich ergebend. In Bologna, wo er von 1562 bis 1570 lehrte, führte eine Schuld von 1800 Scudi, die er nicht zu tilgen vermochte, ihn ins Gefängniss. Sein letzter Aufenthaltsort war Rom, wo er am 21. September 1576 starb.

---

[1]) Cardano I, 1—54. [2]) *Quesiti* pag. 151—153. [3]) Cardano IX, 568—569. Vergl. Gherardi, Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna S. 126—132.

Sein Schüler, im Wissenswürdigen wie im wenig Nachahmungswerthen, wurde 1537 der damals 15jährige Luigi Ferrari aus Bologna. Begabt und gelehrt in den mathematischen Wissenschaften aber von zügelloser Ausgelassenheit sei er gewesen, und für die Treue der Schilderung spricht ein Raufhandel, in welchen er mit 17 Jahren sich einliess, und bei welchem der jähzornige Jüngling sämmtliche Finger der rechten Hand einbüsste, spricht sein nicht viel späteres Auftreten als Lehrer in Mailand. Die Cartelli gegen Tartaglia schrieb er mit 25 Jahren. Wenn Cardano, welcher das Geburtsjahr 1522 ausdrücklich nennt, die Behauptung ausspricht, Ferrari habe Tartaglia besiegt, bevor er 20 Jahre alt gewesen, so ist dieses ein offenbarer Irrthum, vielleicht sogar absichtlich begangen, um Ferrari's Bedeutsamkeit zu erhöhen. In Mailand war Ferrari in der Zeit zwischen 1549 und 1556 auch Vorsteher des Katasterwesens. Eine Fistel, die er sich zuzog, und die es ihm unmöglich machte, zu Pferde zu sitzen und wie ehedem die praktischen Arbeiten seiner Untergebenen da und dort zu beaufsichtigen, veranlassten ihn wohl, die Stellung aufzugeben und nach der Heimath, nach Bologna zurückzukehren. Dort lebte er als Lehrer seiner Wissenschaft bis 1565. Ueber seinem Tode schwebt ein geheimnissvolles Dunkel. Seine Schwester, so wird kurz berichtet, habe ihn muthmasslich vergiftet.

Tartaglia endlich erzählt, sein Vater Micheletto — einen Familiennamen will er von ihm niemals gekannt haben — sei 1506 etwa gestorben und habe es der Wittwe überlassen, sich mit ihren drei Kindern, unter welchen Nicolo, der damals sechs Jahre alt war, aber bereits lesen konnte, zu ernähren. Der etwa zwölfjährige Knabe wurde 1512 bei der Einnahme Brescias durch die Franzosen im Dome, wohin die Mutter sich mit den Kindern geflüchtet hatte, schwer verwundet. Ein furchtbarer Hieb über die unteren Theile des Gesichts heilte nur mangelhaft, die Zähne blieben wacklig, die Sprache wurde stotternd, und um ihretwillen legten Nicolo's Altersgenossen ihm einen Spottnamen bei, den er später freiwillig als Namen behielt: der Stammler, Tartaglia. Als er 14 Jahre alt geworden war, brachte die Mutter ihn zu einem Schreiblehrer. Es war Sitte, das Schulgeld in drei Abtheilungen zu entrichten. Das erste Drittel musste voraus erlegt werden, das zweite, wenn die Hälfte der Buchstaben, also A bis K, erlernt war, das letzte Drittel am Ende des Unterrichts. Tartaglia's Mutter hatte nur das erste Drittel aufzubringen gewusst. Der Knabe wurde desshalb entlassen, noch ehe er die Anfangsbuchstaben seines Namens zu schreiben erlernt hatte, wie er mit bitterer Selbstverhöhnung erzählt, und war von da an in Allem sein eigener Lehrer, sich stets nach den Vorschriften der Verstorbenen richtend, *sopra le opere*

degli huomini defonti continuamente mi son travagliato. Die Erzählung ist jedenfalls sehr geschickt angelegt, das Mitleid und damit auch das Wohlwollen der Leser anzuregen. Ob sie überall wahrheitsgetreu ist, ist eine andere Frage. Einen Familiennamen seines Vaters will Tartaglia z. B. 1546 nie gekannt haben. Als er elf Jahre später am 10. December 1557 in Venedig sein Testament machte[1]), wird in diesem amtlichen Actenstücke als Familiennamen Fontana angegeben. Ist das der Name der Mutter gewesen, oder hat ihn Tartaglia sich selbst beigelegt, weil etwa ein Brunnen bei seinem Hause stand, oder hat die Nothwendigkeit, ein Testament genau anfertigen zu lassen, sein Gedächtniss so sehr geschärft, dass der väterliche Name ihm nun doch einfiel? Alle drei Möglichkeiten sind vorhanden. Eine Zusatzbemerkung des Notars zum Testamente giebt an, der Erblasser sei in der Nacht vom 13. auf den 14. December 1557 verstorben. Aus unseren Auszügen aus den Streitschriften wissen wir überdies, dass Tartaglia eine mathematische Lehrthätigkeit abwechselnd in Venedig, in Brescia, dann wieder in Venedig ausübte; die wesentlichsten Umstände auch seines Lebens sind uns mithin bekannt.

65. Kapitel.

Cardano's ältere Schriften.

Weit wichtiger für die abschliessende Beurtheilung des grossen Streites, wichtiger unter allen Umständen für die Geschichte der Mathematik ist es, kennen zu lernen, was jeder Einzelne unter den Männern, mit welchen wir uns beschäftigen, wissenschaftlich geleistet hat. Allerdings werden wir uns dabei entschliessen müssen, bei Aufzählung der Verdienste Cardano's die Zeitgrenze von 1550 weiter zu überschreiten, als wir es uns irgend seither gestatteten. Der Zusammenhang seiner Leistungen muss gewahrt bleiben, wenn man die ganze Bedeutung des Mannes erkennen will.

Wir beginnen mit einer Schrift recht untergeordneter Bedeutung, mit Cardano's *Libellus qui dicitur Computus minor*[2]) von 1539. Kaum dass wir Zinsrechnungen und ein grosses Einmaleins mit der Ausdehnung bis zu 20 mal 20 darin erwähnenswerth finden.

Dem gleichen Jahre 1539 gehört die *Practica Arithmeticae gene-*

---

[1]) Veröffentlicht durch Fürst Bald. Boncompagni in dem Bande *In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica* (Milano 1881) pag. 363—412. [2]) Cardano IV, 216—220.

ralis[1]) an. Im Grossen und Ganzen der Summa des Paciuolo nachgebildet, enthält sie doch manches Eigenthümliche. Der Gedanke, Gleichungen dadurch in ihrem Grade zu erniedrigen und damit einer Auflösung fähig zu machen, dass man auf beiden Seiten Gleiches addirt und dann durch einen sich kund gebenden Gemeintheiler dividirt, ist wiederholt in Anwendung gebracht[2]). Aus

$$2x^3 + 4x^2 + 25 = 16x + 55$$

wird durch beiderseitige Addition von $2x^2 + 10x + 5$ die neue Gleichung $(2x + 6)(x^2 + 5) = (2x + 6)(x + 10)$ und daraus $x^2 = x + 5$, aus welcher $x = \frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$ sich ergiebt. Umständlicher verfährt Cardano bei $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$. Zunächst addirt er beiderseitig $6x^3 - 4x^2$ und erhält $2(6x^3 - 4x^2) = 6x^3 - 4x^2 + 34x + 24$. Dann addirt er nochmals links $2(12x^2)$, rechts $24x^2$ und erhält

$$2(6x^3 + 8x^2) = 6x^3 + 20x^2 + 34x + 24$$

oder

$$2 \cdot 2x^2(3x + 4) = (3x + 4)(2x^2 + 4x + 6),$$

woraus $x^2 = 2x + 3$ und $x = 3$ sich ergiebt. Auch darauf wird aufmerksam gemacht[3]), dass die Division $a^3x^3 - a^3$ durch $a(x - 1)$, sowie die von $a^3x^3 + a^3$ durch $a(x + 1)$ aufgehe, und dass man dieses sich wohl merken müsse, um Gleichungen von der Form

$$\alpha x^3 = \beta x + \gamma \quad \text{und} \quad \alpha x^3 + \gamma = \beta x$$

durch beiderseitig vollzogene Additionen in eine durch $x \pm 1$ theilbare Gestalt zu bringen. Irgend eine Aufgabe kaufmännischer Natur dadurch in Gleichungsgestalt zu bringen, dass man eine unbekannte Grösse als res betrachte und als solche in die Rechnung einbeziehe, nennt Cardano *Regula de modo*[4]). Es ist im Grunde die gleiche Vorschrift, welche einige Jahre später Michael Stifel bei jeder Gelegenheit breittrat (S. 440), und in welcher wir Cardano's Einfluss gemuthmasst haben. Jedenfalls hat nämlich Stifel die Practica Arithmeticae generalis gekannt, welcher er einige am Ende des 3. Buches der Arithmetica integra mitgetheilte Aufgaben ausdrücklich entnahm[5]). Gleichungen mit mehreren Unbekannten behandelt Cardano nach der von ihm erfundenen *Regula de duplica*[6]), welche in der Einsetzung neuer, die Rechnung erleichternder Hilfsgrössen besteht. Die beiden Gleichungen, welche wir heute $x^2 + y^2 = a$ und $xy + x + y = b$ schreiben würden, bringt Cardano z. B. durch $xy = z$ zur Auflösung.

---

[1]) Cardano IV, 14—215. [2]) Ebenda IV, 29 und 61. [3]) Ebenda IV, 83. [4]) Ebenda IV, 79. [5]) Beispielsweise ist *Arithmetica integra* fol. 306 recto identisch mit Cardano IV, 139 Nr. 14 u. s. w. [6]) Cardano IV, 86.

$x + y = b - z$, $(x + y)^2 = (b - z)^2$. Abera uch $(x + y)^2 = a + 2z$ und daher

$$b^2 - 2bz + z^2 = a + 2z, \quad z = b + 1 - \sqrt{a + 2b + 1},$$
$$x + y = b - z = -1 + \sqrt{a + 2b + 1}.$$

Dieses letzte Ergebniss lässt erkennen, warum bei Auflösung der nach z quadratischen Gleichung die Wurzelgrösse mit dem Minuszeichen genommen werden musste. Weiter ist

$$(x - y)^2 = a - 2z = a - 2b - 2 + \sqrt{4a + 8b + 4},$$

also auch

$$x - y = \sqrt{a - 2b - 2 + \sqrt{4a + 8b + 4}}$$

bekannt, und nun sind die Werthe x und y sofort zu finden.

Quadratwurzeln, deren Ausziehung bei den Gleichungsauflösungen vielfach verlangt wird, sind schon vorher nach zwei Methoden näherungsweise berechnet[1]). Die erste Methode geht aus von $\sqrt{a} \sim b$, wo b die ganzzahlige Annäherung bedeutet; ist dann $a - b^2 = r_1$, so ist die zweite Annäherung $\sqrt{a} \sim b_1$ mit $b_1 = b + \frac{r_1}{2b}$; dann wird weiter

$$b_1^2 - a = \frac{r_1^2}{4b^2} = r_2, \quad a = b_1^2 - r_2$$

gesetzt und

$$\sqrt{a} \sim b_2 \text{ mit } b_2 = b_1 - \frac{r_2}{2b_1} \text{ u. s. w.}$$

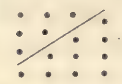
als neue Annäherungen. Die zweite Methode dient für Quadrat- und Kubikwurzeln in gemeinschaftlich erkannter Weise; man hängt dem Radicanden rechts 2, 4, 6 ..., beziehungsweise 3, 6, 9 ... Nullen an, begnügt sich dann bei Ausziehung der Wurzel mit ganzzahliger Annäherung, deren Ganze aber nur Zehntel, Hundertel, Tausendstel ... sind.

Das 42. Kapitel von den wunderbaren Eigenschaften der Zahlen[2]), *de proprietatibus numerorum mirificis* enthält vieles, was auf Leonardo von Pisa zurückgeht. Cardano hat den Gegenstand später ungefähr in gleicher Ausdehnung, aber als besondere kleine Schrift[3]): *De numerorum proprietatibus caput unicum* wiederholt behandelt und hierbei nicht Unwichtiges hinzugefügt. Die Bearbeitung von 1539 lehrt die Entstehung der vollkommenen Zahlen nach der euklidischen Regel und spricht den Satz aus[4]), die Randziffer sei immer 6 oder 8, was allerdings Nikomachus[5]) schon bemerkt hatte; die spätere Bearbeitung beweist diesen Satz[6]). Nach Euklid (Bd. I, S. 253—254) ist $(1 + 2 + \cdots + 2^n)2^n$ eine vollkommene Zahl, sofern

[1]) Cardano IV, 30—31. [2]) Ebenda IV, 51—63. [3]) Ebenda IV, 1—13. [4]) Ebenda IV, 52. [5]) Nikomachus, *Introductio etc.* (ed. Hoche) pag. 40 lin. 20—21 (Buch I, Kap. XVI, § 3). [6]) Cardano IV, 3.

$$1 + 2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Primzahl ist. Die Randziffer von 2^n ist stets 2, oder 4, oder 8, oder 6, die von $2^{n+1} - 1$ also 3, oder 7, oder 5, oder 1. Die dritte Möglichkeit fällt weg, weil $2^{n+1} - 1$ Primzahl sein muss, also entsteht die Randziffer der vollkommenen Zahl ausschliesslich durch $2 \cdot 3$, oder $4 \cdot 7$, oder $6 \cdot 1$ und ist 6, 8, 6. In der ersten Bearbeitung sind Dreieckszahlen und Quadratzahlen durch Punkte dargestellt[1]), in der zweiten ist hinzugefügt[2]), dass zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen eine Quadratzahl geben, wenn man sie *iunctis capitibus adversis* d. h. über Kopf aneinanderfüge, womit offenbar eine Punktenvereinigung gleich der folgenden



gemeint ist. Der zweiten Bearbeitung gehört auch die wichtige Behauptung an[3]), dass die Wurzel einer ganzen Zahl niemals ein Bruch sein könne, was am Anfange des dritten Tractates gezeigt werde.

Diesen in den gedruckten Werken Cardano's unauffindbaren dritten Tractat sind wir im Stande zu bezeichnen und zugleich eine obere Grenze für die Zeit der Niederschrift der zweiten Bearbeitung anzugeben. In der Abhandlung über die eigenen Bücher, *De libris propriis,* welche selbst in mehrfacher Bearbeitung erhalten ist, erzählt Cardano, dass er nach Bemeisterung der kubischen Gleichung, mithin nicht wohl vor der 1542 vorgenommenen Reise nach Bologna, ein mathematisches Gesammtwerk als *Opus perfectum* zu schreiben beabsichtigte, welches aus 14 Büchern bestehen sollte[4]). Die Ueberschriften der 14 Bücher sollten heissen:

1. Von den ganzen Zahlen. 2. Von den Brüchen. 3. Von den Quadrat- und Kubikwurzeln. 4. Von den Unbekannten. 5. Von den Proportionen. 6. Von den Eigenschaften der Zahlen. 7. Vom Handel. 8. Von den Erträgen (*De redditibus*, vermuthlich Zinsrechnung). 9. Von den aussergewöhnlichen Aufgaben (*De his quae sunt extra ordinem*). 10) Von den grossen Regeln oder der sogenannten Ars magna. 11. Von der Ausmessung ebener Figuren. 12. Von Körpermessungen. 13. Arithmetische Aufgaben. 14. Geometrische Aufgaben.

Ausser den Ueberschriften giebt Cardano auch die Anfänge einzelner dieser 14 Bücher an, welche demnach schon in der Ausarbeitung ziemlich weit vorgeschritten gewesen sein müssen. Das erste Buch *De integris* sollte mit den Worten anfangen: *Si ab antiquitate aut necessitate disciplina ulla nobilis dici potest*, und ein so beginnen-

---

[1]) Cardano IV, 53. [2]) Ebenda IV, 6. [3]) Ebenda IV, 8. [4]) Ebenda I, 103.

des Bruchstück ist vorhanden[1]). In dem dritten Buche von den Quadrat und Kubikwurzeln konnte sehr gut der Satz vorkommen, von welchem wir oben mit Cardano sagten, dass er am Anfange des dritten Tractates gezeigt sei. Ueber das sechste Buch äussert er sich, er habe 96 Blätter davon geschrieben, welche anfangen: *Numerorum alii dicuntur primi,* und genau so beginnt jenes Kapitel, welches wir bisher als zweite Bearbeitung eines Kapitels der Practica Arithmeticae generalis benannt haben. Es ist daher nichts Anderes als wieder ein Bruchstück des leider unvollendet gebliebenen Opus perfectum und kaum vor 1542 geschrieben.

Wir kehren zu dem Werke von 1539, zur Practica Arithmeticae generalis zurück. Eine nicht unbedeutsame Bemerkung desselben, die bei einer unbestimmten Aufgabe gemacht ist, lautet[2]): „Ich habe nicht gesagt in ganzen oder gebrochenen Zahlen, weil jede Frage, deren Erledigung in Brüchen erfolgt, auch ganzzahlig erfüllt werden kann und ich desshalb Eines von dem Anderen nicht trennen wollte.“ Eine von Georg Valla herrührende Aufgabe[3]) (S. 345) unbestimmter Natur ist die, zwei Rechtecke von gleicher Seitensumme zu finden, deren Flächen Vielfache von einander sind. Cardano giebt a und $ab(b+1)$ als die Seiten des einen, $a(b+1)$ und ab^2 als die Seiten des anderen b-fachen Rechtecks. Eine andere von Cardano behandelte Aufgabe[4]) ist die von den 2 mal 15 Männern, die in einem Kreise so zu ordnen sind, dass ein gewisses Abzählen uur immer auf eine Persönlichkeit der einen Gruppe trifft, während die andere Gruppe verschont bleibt. Sie begegnete uns schon in einer französischen Sammlung (S. 362), Cardano giebt ihr einen Namen. Er nennt sie *Ludus Joseph*, das Josephsspiel, weil sie einst von Josephus zur Rettung seines Lebens ersonnen worden sei. Näheres werden wir von zwei Schriftstellern unseres XV. Abschnittes erfahren.

Auch Reihen sehr verschiedener Art kommen vor, z. B. arithmetische Reihen von gleichen Unterschieden, welche in einander geschoben eine einzige Reihe bilden[5]). Aus 1, 7, 13,... und 3, 9, 15... entsteht nach dieser Bildungsweise 1, 3, 7, 9, 13, 15... Die Reihe $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \cdots$ sei leicht zu summiren, dagegen stelle $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$ eine schwierige Summenbildung dar[6]).

Eine Anzahl von Aufgaben gehört der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Paciuolo (S. 327) beantwortete die Frage nach der richtigen Theilung zwischen zwei Spielern, von denen der eine s_1, der andere s_2 Spiele gewonnen hatte, und die sich trennen, bevor die s Gewinnspiele, auf welche die ganze Entscheidung geht, von Einem

[1]) Cardano IX, 117—128. [2]) Ebenda IV, 57 (§ 78). [3]) Ebenda IV, 179. [4]) Ebenda IV, 113. [5]) Ebenda IV, 33. [6]) Ebenda IV, 37.

erreicht sind, dahin, sie müsse nach dem Verhältnisse $s_1 : s_2$ sich richten. Cardano erkannte es als wesentlichen Mangel dieses Theilungsvorschlags, dass die Zahl s, welche die wichtigste ist, gar nicht berücksichtigt werde[1]). Sein Gegenvorschlag ist allerdings wenig glücklich. In dem besonderen Beispiele, von welchem Cardano redet, ist $s = 10$, $s_1 = 7$, $s_2 = 9$, der erste Spieler hätte also noch dreimal, der zweite einmal zu gewinnen. Um nun ein erstes Spiel zu gewinnen, bedarf der zweite wie der erste Spieler eines Gewinnspiels. Um ein zweites Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten zwei Gewinnspiele nöthig, denn ohne einen ersten Gewinn gelangt er nicht zum zweiten. Um ein drittes Spiel als solches zu gewinnen, sind dem ersten drei Gewinnspiele erforderlich, deren Begründung in der Nothwendigkeit liegt, überhaupt zu einem dritten Gewinne zu gelangen. Um das erste, zweite und dritte Spiel zu gewinnen, bedarf es somit $1 + 2 + 3 = 6$ Gewinnspiele und das Theilungsverhältniss der beiden Spieler muss wie $1 : 6$ sein, allgemein wie

$$(1 + 2 + \cdots + (s - s_2)) : (1 + 2 \cdots + (s - s_1)).$$

Anschliessend an diese Aufgabe und des gleichen Gedankenganges sich bedienend, besprach Cardano eine andere, welche hiermit in die Wissenschaft eingeführt war, um erst etwa zwei Jahrhunderte später als sogenannte Petersburger Aufgabe zur richtigen Geltung zu gelangen. Ein Reicher und ein Armer spielen um gleichen Einsatz. Gewinnt der Arme, so wird am folgenden Tage um verdoppelten Einsatz gespielt und dieses Verfahren fortgesetzt, während ein einmaliges Gewinnen des Reichen dem Spiele ein für alle mal ein Ende macht. Cardano begründete hier den grossen Nachtheil, in welchem der Reiche bei diesen Spielbedingungen sich befinde.

Endlich gedenken wir noch mit einem Worte der Stellung, welche Cardano 1539 zu nichtpositiven Gleichungswurzeln einnahm. Negativen Wurzeln (*fictae*) erkannte er die Bedeutung zu[2]), dass für einen Gegenstand nicht nur nichts erlöst wird, sondern für dessen Beseitigung noch gezahlt werden muss. Imaginäres nennt er einfach unmöglich[3]): *cum numerus non possit detrahi a quadrato dimidii radicum, tunc casus est impossibilis*, d. h. wenn in der Auflösung der Gleichung $x^2 + b = ax$, bei welcher $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ herauskommt, b von $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ nicht abgezogen werden kann, so ist es ein Zeichen von der Unmöglichkeit des Geforderten.

---

[1]) Cardano IV, 112: *Ad rationem ludorum sciendum est quod in ludis non habet considerari nisi terminus ad quem, et hoc in progressione dividendo totum per easdem partes.* [2]) Ebenda IV, 157. [3]) Ebenda IV, 72.

Diese Auszüge dürften genügend erkennen lassen, dass die Veröffentlichung von 1539 bereits einen hohen Grad mathematischer Befähigung Cardano's bewies, dass sie ahnen liess, es stehe Grosses von ihm zu erwarten, wenn er mit erweitertem Wissen noch unbetretene Bahnen einschlage. Diese Ahnung wirkte vielleicht bei Tartaglia, welcher die Practica Arithmeticae generalis schon kannte, mit, als er sich 1539 des Eides Cardano's versicherte, bevor er ihm die Regel zur Auflösung von $x^3 + ax = b$ anvertraute.

Den Eid der Verschwiegenheit hat Cardano in seiner Veröffentlichung von 1545 unzweifelhaft gebrochen. Das Unrecht, welches er Tartaglia gegenüber dadurch beging, mag durch die rühmende Nennung des Verletzten einestheils, durch den Umstand, dass Cardano inzwischen von Del Ferro's schriftlich erhaltenen früheren Arbeiten Kenntniss erhalten hatte, anderntheils gemindert sein, aus der Welt geschafft ist es nicht. Aber die Geschichte der Mathematik sitzt weniger über den Menschen als über den Mathematiker zu Gericht, und desshalb ist es unter allen Umständen nothwendig, zuzusehen, ob etwa in dem Werke von 1545 nur die Entdeckung von Tartaglia, beziehungsweise von Del Ferro sich vorfindet, oder was Cardano selbst zugeschrieben werden muss.

Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus[1]) ist der Titel des, wie wir schon wissen, in Nürnberg gedruckten und Osiander zugeeigneten Buches. Das 10. Buch des Opus perfectum sollte (S. 500) die Ueberschrift *Ars magna* führen. Seine Anfangsworte sind in der Abhandlung über die eigenen Bücher angegeben[2]). Beides stimmt mit dem Drucke von 1545 genau überein. Eine weitere Uebereinstimmung liegt darin, dass in diesem Drucke von einem 3. und 4. Buche die Rede, welche ihrem Inhalte nach mit Wurzelgrössen, mit Unbekannten es zu thun haben müssen, also mit den ebenso bezifferten Büchern des Opus perfectum sich decken. Kein Zweifel ist daher möglich: die Ars magna von 1545 ist das 10. Buch des Opus perfectum, und wenn wir vorher sahen, dass der Plan zu diesem grossartig gedachten Werke kaum vor 1542 entstanden sein kann, so wissen wir jetzt, dass er 1545 mit Einschluss eines ganz vollendeten Buches in fertiger Gestalt vorgelegen haben muss.

Die kubischen Gleichungen nebst ihrer Auflösung bilden gewiss den wesentlichen Inhalt der Ars magna, aber Zusätze Cardano's sind deutlich zu erkennen, um welche er das von Tartaglia Erlernte vermehrt hat[3]). Die Gleichungen $x^3 + ax = b$, $x^3 = ax + b$ aufzulösen

[1]) Cardano IV, 221—302. [2]) Ebenda I, 103. [3]) Das Cardano Eigenthümliche ist vortrefflich hervorgehoben bei Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* (Parma 1797—1799) Vol. II, pag. 159 sqq.

hatte Tartaglia ihn deutlich gelehrt, und wenn er die so erhaltenen Auflösungen in eine geometrische Form kleidete[1]), so ist damit nicht das geringste Verdienst verbunden. Die Form $x^3 + b = ax$ war in Tartaglia's Terzinen (S. 489) sehr stiefmütterlich behandelt. *Se solve col secondo* hiess es im 20. Verse, sie sei mittels $x^3 = ax + b$ zu lösen; mehr war nicht gesagt. Cardano's Auflösung[2]) kam auf folgende Betrachtung hinaus. Sei $y^3 = ay + b$ zugleich mit $x^3 + b = ax$, so ist $b = ax - x^3 = y^3 - ay$. Daraus folgen aber Proportionen und Gleichungen:

$$(y^2 - a) : (a - x^2) = x : y,$$
$$(y^2 - a + a - x^2) : (a - x^2) = (x + y) : y,$$
$$(y^2 - x^2) : (y + x) = (a - x^2) : y,$$
$$(y - x) : 1 = (a - x^2) : y,$$
$$y^2 - xy = a - x^2,$$
$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4} y^2},$$

so dass, sobald man y kennt, nicht bloss ein Werth von x ermittelt ist, sondern gleich deren zwei. Demnächst werden die Gleichungen in Angriff genommen, welche Kubus, Census und Zahl enthalten[3]),

$$x^3 = ax^2 + b, \quad x^3 + ax^2 = b, \quad x^3 + b = ax^2.$$

Die beiden ersten Formen werden durch $x = y + \frac{a}{3}$, $x = y - \frac{a}{3}$ vom quadratischen Gliede befreit. Ein Beispiel lautet

$$x^3 + 6x^2 = 100$$

und führt zu

$$x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2.$$

Die dritte Form $x^3 + b = ax^2$ behandelt Cardano mittels $x = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{y}$, wodurch sie in $y^3 + b = ya\sqrt[3]{b}$ übergeht und diese liefert, wie erst gezeigt worden ist, unter Benutzung von $z^3 = za\sqrt[3]{b} + b$ zwei Werthe von y, also auch von x. Bei kubischen Gleichungen mit allen vier möglichen Gliedern[4]) führen Substitutionen, welche immer auf $x = y \pm \frac{a}{3}$ hinauslaufen (a als Coefficient des quadratischen Gliedes gedacht) auf früher behandelte Gleichungsformen zurück, auch ist nicht ausser Auge zu lassen, dass die Anordnung der Ars magna der Art getroffen ist, dass von solchen Umformungen, *de capitulorum trans-*

---

[1]) *Ars magna*, Cap. XI und XII. [2]) Ebenda, Cap. XIII. [3]) Ebenda, Cap. XIV, XV, XVI. [4]) Ebenda, Cap. XVII—XXIII.

mutatione[1]), die Rede ist, bevor Cardano den kubischen Gleichungen sich zuwendet.

Von grosser Wichtigkeit ist ein Ausspruch Cardano's, der sich im XVIII. Kapitel findet[2]). Er hatte die drei Gleichungen

$x^3 + 10x = 6x^2 + 4, \quad x^3 + 21x = 9x^2 + 5, \quad x^3 + 26x = 12x^2 + 5$

behandelt. Er hatte gefunden, dass jede derselben drei Wurzeln besitze, die erste $2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$, die zweite $5, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$, die dritte $2; 5 + \sqrt{19}, 5 - \sqrt{19}$. Schon darin lag ein ungeheurer Fortschritt, da noch niemals Gleichungen mit mehr als zwei Wurzelwerthen bekannt geworden waren. Aber Cardano geht viel weiter. Er addirt die jedesmaligen Wurzelwerthe und bemerkt, dass in allen drei Fällen die Summe der Wurzelwerthe den Coefficienten des quadratischen Gliedes bilde. Er verweist dabei zugleich rückwärts auf das I. Kapitel, welches jetzt erst dem dem Leser vollkommen deutlich wird. Dort findet sich unter Anderem die Bemerkung[3]), $x^3 = 12x + 16$ habe die Wurzeln $x = 4$ und $x = -2$, die positive Wurzel (*vera*) sei das Doppelte der negativen (*ficta*). Kann es, bei Beachtung der Rückverweisung im XVIII. Kapitel, einem Zweifel unterworfen sein, dass Cardano das Vorhandensein zweier gleichen negativen Wurzeln zum mindesten ahnte, dass er das Nichtvorkommen eines quadratischen Gliedes auf das gegenseitige Aufheben der drei Wurzelwerthe zurückführte?

An die Auflösung der kubischen Gleichungen mit wie immer gearteten Coefficienten schliessen sich Untersuchungen über besondere Fälle an[4]). Wir erwähnen davon nur die beiden ersten, wonach

$$x^3 = (a + b^2)x + ab$$

durch

$$x = \frac{b}{2}\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$$

und $x^3 = (a^2 + b^2)x + 2ab(a + b)$ durch $x = a + b$ erfüllt wird.

Wir können aber der Ars magna auch solche Dinge entnehmen, welche nicht im Geringsten mit der von Tartaglia empfangenen Belehrung zusammenhängend nur um so gewisser Cardano's geistiges Eigenthum bilden. Das XXX. und das XXXVII. Kapitel sind in dieser Beziehung ganz besonders reicher Ausbeute. Das XXX. Kapitel[5]) führt die Ueberschrift *De regula aurea* und enthält eine Methode zur näherungsweisen Auflösung numerischer Gleichungen, die erste, welche in Europa zur Veröffentlichung gelangte. Wohl

[1]) *Ars magna*, Cap. VII. [2]) Cardano IV, 259, letztes Alinea der zweiten Columne. [3]) Ebenda IV, 223. [4]) *Ars magna*, Cap. XXV. [5]) Cardano IV, 273—274.

hatte ein Araber (Bd. I, S. 736) $x^3 + b = ax$ unter der Voraussetzung, dass a gegen b sehr gross sei, näherungsweise lösen gelehrt. Wohl hatte Leonardo von Pisa (S. 46—47) eine sehr nahezu genaue Wurzel von

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

erkannt, aber wie er sich dieselbe verschafft, ist nirgend angedeutet, und anzunehmen, Cardano's Regula aurea sei gerade Leonardo's Methode gewesen[1]), ist eine Vermuthung, welche nicht die geringste Stütze besitzt. Cardano's Verfahren, welches wir als seine Erfindung rühmen zu müssen glauben, ist allerdings von ihm nur an Gleichungen dritten und vierten Grades geübt, doch liegt nichts in dem Verfahren selbst, was diese Beschränkung nothwendig machte. Wir erlauben uns daher zur besseren Würdigung der goldenen Regel sie in ganz allgemeinen Buchstaben zu schildern. Es sei $f(x)$ eine ganze algebraische Function von x, welche von der $n$ten bis zur 1. Potenz der Unbekannten mit positiven Coefficienten (dieses Positivsein der Coefficienten bildet die einzige Einengung der goldenen Regel), welche theilweise auch 0 sein können, herabsteigt, und es sei eine Wurzel der Gleichung $f(x) = k$ zu suchen. Nun seien a und $a + 1$ zwei auf einander folgende positive ganze Zahlen von der Eigenschaft, dass $f(a) = k - b$, $f(a + 1) = k + b'$, so ist x zwischen diesen beiden ganzen Zahlen enthalten, d. h. wir können nach Belieben

$$x = a + ((a + 1) - a)\vartheta \quad \text{oder} \quad x = (a + 1) - ((a + 1) - a)\varepsilon$$

setzen mit ϑ und ε als positiven echten Brüchen. Ersteres Verfahren wollen wir das additive, letzteres das subtractive Ergänzungsverfahren nennen. Wegen

$$f(a + 1) > f(x) > f(a) \quad \text{ist} \quad f(a + 1) - f(a) > f(x) - f(a)$$

und

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(a + 1) - f(a)} = \frac{k - (k - b)}{(k + b') - (k - b)} = \frac{b}{b + b'} < 1.$$

Diesen Bruch benutzen wir als ϑ, d. h. wir wählen in zweiter Annäherung $x \backsim a + \frac{b}{b + b'}$. Nehmen wir nun an, es würde etwa $f\left(a + \frac{b}{b + b'}\right) = k - b'' < k$. Wir wenden nun weiter das subtractive Ergänzungsverfahren an; wir setzen

$$x = (a + 1) - \left((a + 1) - \left(a + \frac{b}{b + b'}\right)\right)\varepsilon = a + 1 - \frac{b'\varepsilon}{b + b'},$$

wo es nur darauf ankommt, ein geeignetes $\varepsilon < 1$ einzusetzen. Als solches dient

---

[1]) Genocchi in den von Tortolini herausgegebenen *Annali di scienze matematiche e fisiche* VI, 165—168.

$$\varepsilon = \frac{f(a+1) - f(x)}{f(a+1) - f\left(a + \frac{b}{b+b'}\right)} = \frac{(k+b') - k}{(k+b') - (k-b'')} = \frac{b'}{b'+b''}$$

und die dritte Annäherung wird

$$x \sim a + 1 - \frac{b'}{b+b'} \cdot \frac{b'}{b'+b''},$$

worauf

$$f\left(a + 1 - \frac{b'}{b+b'} \cdot \frac{b'}{b'+b''}\right)$$

ausgerechnet und der Betrag mit k verglichen wird. Je nachdem k zwischen dem neuen Substitutionswerthe und $f(a)$ oder zwischen demselben und $f(a+1)$ liegt, wird nach additivem oder subtractivem Ergänzungsverfahren weiter gerechnet, wodurch man dem wahren x so nahe kommen kann, als man nur will. Wir haben weiter oben die Beschränkung hervorgehoben, nach welcher $f(x)$ nur positive Coefficienten enthalten darf. Cardano lässt sie nachträglich fallen, indem er eine Gleichung $x^4 + nx^2 + q = mx^3 + p$ nach der goldenen Regel behandelt. Er setzt auch in solchem Falle $x = a$ und $x = a + 1$ und zieht das Substitutionsergebniss der rechten Seite von dem der linken ab, um die beiden dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Zahlen $-b$ und b' zu finden, welche den zweiten Näherungswerth $x \sim a + \frac{b}{b+b'}$ herstellen lassen u. s. w. Man darf gewiss nicht sagen, dass mit dieser Erweiterung die Nullsetzung eines Gleichungspolynoms an die Stelle der bisherigen Gleichungen mit nur positiven Gliedern auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens getreten sei, aber ebenso gewiss war Cardano damit auf dem Wege zu dieser wichtigen Neuerung, und keinenfalls verdient die goldene Regel den wegwerfenden Namen eines wilden Näherungsverfahrens. Wie Cardano zu ihr geführt wurde, ist unschwer zu errathen[1]). Sie entstand in seinem an weittragenden Gedanken überreichen Geiste aus der alten Methode des doppelten falschen Ansatzes, welche sie zu ersetzen bestimmt war, und welche von nun an auch wirklich ihren Jahrhunderte hindurch behaupteten Platz in den Lehrbüchern räumt und wahre Näherungsverfahren an ihre Stelle treten lässt.

Noch weit merkwürdiger ist das XXXVII. Kapitel[2]) *De regula falsum ponendi.* Negatives hat, wie wir früher gesagt haben, nicht die Berechtigung, eine wahre Gleichungswurzel darzustellen. Gleichwohl rechnet Cardano mit solchen Zahlen, und weiss ihnen mit Hilfe des Begriffes einer Schuld statt eines Besitzes oder einer Bezahlung statt eines Ertrags einen Sinn abzugewinnen. Aber so weit hatte er

---

[1]) Vergl. Cossali l. c. II, 321. [2]) Cardano IV, 286—288.

vielfache Vorgänger, welche wir an verschiedenen Stellen dieses wie des I. Bandes nennen konnten. Wie verhielt es sich dagegen mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen? Einmal haben wir (S. 360) in einer französischen Aufgabensammlung mit solchen Ausdrücken rechnen sehen; eine Randnote macht darauf aufmerksam, diese Ausdrücke forderten Unmögliches, aber ob die Randnote auch dem XV. Jahrhunderte angehörte, ob sie jünger war, ist nicht sichergestellt, und unter allen Umständen blieb jenes vereinzelte Vorkommen, so viele Ehre es dem Schreiber in unseren Augen macht, ungedruckt und damit wirkungslos. Bahnbrechend dagegen für alle Zukunft wurde Cardano's Kühnheit, in der Ars magna mit Quadratwurzeln aus Negativem zu rechnen, also mit solchen Zahlen, welche er früher als ganz unmögliche bezeichnet hatte. „Die zweite Art einer falschen Annahme, sagt Cardano[1]), ist die durch eine Wurzel aus Minus, per radicem $\tilde{\text{m}}$. Soll z. B. 10 in zwei Theile getheilt werden, deren Product 40 sei, so ist das offenbar eine unmögliche Forderung, aber wir verfahren so: nimm die Hälfte von 10, also 5; vervielfache sie mit sich selbst, giebt 25; ziehe 40, das verlangte Product davon ab, so bleibt -15, dessen Wurzel zu 5 addirt und von 5 abgezogen die gewünschten Theile $5+\sqrt{-15}$ und $5-\sqrt{-15}$ liefert. Vervielfache $5+\sqrt{-15}$ mit $5-\sqrt{-15}$. Die kreuzweise entstehenden Producte fallen weg, *dimissis incruciationibus*, und es entsteht 25 minus -15, was so viel ist wie $+15$. Das Product ist also 40.“ Etwas weiter unten fährt er dann fort: *quae quantitas vere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m. nec in aliis operationes exercere licet, nec venari quid sit*, d. h. es ist dieses eine auf formaler Logik beruhende Grösse, weil es nicht gestattet ist, die Rechnungsverfahren an ihnen wie an reinen Minusgrössen oder an anderen zu üben, noch einem Sinne derselben nachzustellen.

Wahrlich, es waren nicht geringe Entdeckungen, denen der aufmerksame Leser in der Ars magna des Cardano begegnete, aber es bedurfte schon eines mehr als gewöhnlichen mathematischen Geistes, um alle diese Dinge zu würdigen oder auch nur zu verstehen. Dem gewöhnlichsten Leser dagegen musste eine Leistung in die Augen fallen, welche wir darum zum Schlusse unserer Darstellung aufgespart haben: die Auflösung der Gleichung vierten Grades. Schon im XXVI. Kapitel zeigt Cardano, dass die Gleichung

$$x^4 \pm ax = bx^2 + \frac{a^2}{4b}$$

leicht aufzulösen sei. Er führt sie nämlich in die Form $x^4 = b\left(x \mp \frac{a}{2b}\right)^2$

---

[1]) Cardano IV, 287.

über, welche die Quadratwurzelausziehung gestattet und dann nur noch eine quadratische Gleichung zu behandeln verlangt. Aehnlich verhält es sich mit anderen Formen. Aber das sind doch nur ganz besondere Fälle. Allgemeinerer Natur sind die Fragen des XXXIX. Kapitels, auf welche Cardano durch die von Da Coi gestellte Aufgabe, $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ aufzulösen, aufmerksam gemacht worden war. Er selbst gesteht zu, nicht im Stande gewesen zu sein, diese Aufgabe zu bewältigen. Luigi Ferrari ist der Erfinder, der erst 23 Jahre alte Erfinder, setzen wir hinzu. Ferrari ging aus[1]) von der Quadrirung einer dreitheiligen Grösse, deren beide ersten Theile, sofern sie nicht zu dem dritten in Beziehung treten, vereinigt aufgefasst werden, also von der Formel

$$(A + B + C)^2 = (A + B)^2 + 2AC + 2BC + C^2.$$

Ist nämlich, wie in Da Coi's Aufgabe

$$x^4 + ax^2 + c = bx$$

vorgelegt und addirt man beiderseitig $(2\sqrt{c} - a)x^2$, so entsteht

$$(x^2 + \sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c} - a)x^2 + bx.$$

Der Ausdruck links als $(A + B)^2$ aufgefasst und $C = t$ gesetzt zeigt, dass wieder linker Hand ein Quadrat auftreten muss, wenn

$$2AC + 2BC + C^2 = 2x^2t + 2\sqrt{c} \cdot t + t^2$$

beiderseitig addirt wird, oder dass man erhält

$$(x^2 + \sqrt{c} + t)^2 = (2\sqrt{c} - a + 2t)x^2 + bx + (t^2 + 2t\sqrt{c}).$$

Wäre auch der Ausdruck rechter Hand ein Quadrat, so könnte man die Wurzelausziehung auf beiden Seiten vornehmen und würde damit die Aufgabe auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt, d. h. aufgelöst haben. Nun wird aber der Ausdruck rechter Hand wirklich ein Quadrat, wenn nur $4(2\sqrt{c} - a + 2t)(t^2 + 2t \cdot \sqrt{c}) = b^2$ oder anders geschrieben, wenn

$$t^3 + \left(3\sqrt{c} - \frac{a}{2}\right)t^2 + \left(2c - a\sqrt{c}\right)t = \frac{b^2}{8}.$$

Man muss also t aus einer kubischen Gleichung finden, und das ist wieder eine Zurückführung einer noch ungelösten Aufgabe auf eine schon gelöste. Wir lassen den lateinischen Wortlaut der hier erläuterten Entwickelung folgen, der nunmehr unseren Lesern verständlicher sein dürfte, als ohne die vorausgeschickte Auseinandersetzung:

Semper reduces partem quad. quadrati ad ℞ addo tantum utriqendue parti, ut 1 quadr. quadratum cum quadrato et numero habeant radicem, hoc facile est cum posueris dimidium numeri quadratorum radicem numeri;

[1]) Eine sehr klare Darstellung des Ferrari'schen Verfahrens bei Cossali l. c. II, 299—305.

item facies, ut denominationes extremae sint plus in ambabus aequationibus, nam secus trinomium seu binomium reductum ad binomium necessario careret radice. Quibus iam peractis addes tantum de quadratis et numero uni parti, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciant trinomium habens ℞ quadratam per positionem, et habebis numerum quadratorum et numeri addendi utrique parti, quo habito ab utroque extrahes ℞ quadratam quae erit in una 1 quadratum p̄ numero (vel m̄ numero), ex alia 1 positio vel plures p̄ numero (vel m̄ numero, vel numerus m̄ positionibus), quare habes propositum.

Wesentlich ist das Fehlen des kubischen Gliedes in der Gleichung vierten Grades. Nun sollte man denken, der Erfinder der Befreiung der kubischen Gleichung vom quadratischen Gliede werde auch hier die zweckentsprechende Substitution leicht erkannt und die Unbekannte einer neuen Unbekannten weniger dem Viertel des Coefficienten des früheren kubischen Gliedes gleich gesetzt haben; aber hier ist eines jener deutlich sprechenden Beispiele dafür, dass das Naheliegende mitunter längere Zeit übersehen wird. Cardano zog die so naturgemässe Folgerung aus seiner früheren Erfindung keineswegs. Er verwandelte[1]) z. B.

$$x^4 + 6x^3 = 64 \text{ durch } x = -\frac{\sqrt[3]{64}}{y} \text{ in } y^4 + 6y = \sqrt[3]{64} = 4,$$

d. h. allgemein, er liess $x^4 + ax^3 = c$ durch $x = -\frac{\sqrt[3]{c}}{y}$ in

$$y^4 + ay = \sqrt[3]{c}$$

übergehen.

Wir sind mit unseren Auszügen aus der Ars magna von 1545 zu Ende. Was erwartet man von Tartaglia, was muss man von ihm erwarten, sobald er das grossartige Werk gelesen? Entweder dass er vor dem Genius des Verfassers in Bewunderung sich beugte und schweigend sich mit den ihm gewordenen Lobeserhebungen begnügte, oder wenn sein Charakter kleinlicher war, beziehungsweise wenn seine Verhältnisse es mit sich brachten, dass er aus seiner Erfindung so viel als möglich für sich herauszuschlagen suchen musste, dass er in diesem letzteren Falle schleunigst die Ars magna zu überbieten suchte und seine eigenen Entdeckungen der Oeffentlichkeit übergab. Vergleichen wir damit neuerdings den schon geschilderten Inhalt der Quesiti[2]).

Tartaglia behauptet, schon längst in Besitz vieler Dinge zu sein,

---

[1]) Cardano IV, 297. *Quaesito VII.* [2]) Wir stehen in dieser Darstellung in wesentlicher Uebereinstimmung mit Gherardi, der in seinen schon wiederholt genannten Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna (deutsch von Max. Curtze, Berlin 1871) zum ersten Male die Tartaglia-Legende prüfte und ihre Unglaubwürdigkeit darthat.

welche er nennt, welche aber auch in der Ars magna stehen, er behauptet auch noch vieles Andere zu wissen. Den Beweis für das Eine bleibt er schuldig, die leiseste Andeutung, worin seine sonstigen Entdeckungen bestehen, vermeidet er. Oder soll es als Beweis gelten, wenn er 1547 Gespräche, die er geführt haben will, mit Zeitangaben versieht, denen jede Bestätigung abgeht? Ob Da Coi damals, wie wir (S. 495) als möglich hinstellten, gestorben oder verschollen war, ob das Gleiche für Fior gilt, kommt nicht gar sehr in Betracht. Die von diesen beiden etwa zu erhärtenden oder zu widerlegenden Thatsachen sind nicht so erheblich. Bedeutsam ist nur das Gespräch von 1541 mit Ventuorthe, und dieser Engländer war nach Tartaglia's eigener Aussage eben 1541 in sein Vaterland zurückgekehrt, sein Zeugniss in Italien somit 1547 so gut wie unbeibringlich, wenn man die damaligen Verkehrsverhältnisse berücksichtigt. In diesem Gespräche will Tartaglia behauptet haben, $ax^2 = b + x^3$ besitze zwei oder vielleicht noch mehr Auflösungen, eine Wahrheit, die er sehr gut erst durch Cardano's Ars magna kennen gelernt haben kann. In diesem Gespräche giebt er die Lösung der Gleichung $x^3 + 6x^2 = 100$ mit $x = \sqrt[3]{42 + \sqrt{1700}} + \sqrt[3]{42 - \sqrt{1700}} - 2$, in welcher die Befreiung der kubischen Gleichung vom quadratischen Gliede durch das in jenem Wurzelwerthe vorkommende -2 mittelbar gesichert ist, aber gerade dieses Beispiel nebst seiner Auflösung waren wir in der Lage (S. 504) aus der Ars magna anzuführen. Will man glauben, Cardano habe auch dieses von Tartaglia besessen, und Tartaglia habe in den Quesiti nur versäumt, auf den weiteren Diebstahl aufmerksam zu machen? Nein, Tartaglia war im Stande $x^3 + ax^2 = b$ mit rationalen Coefficienten a und b zu versehen, indem er von einem quadratisch-irrationalen x ausging (S. 486), aber die Befreiung der allgemeinen kubischen Gleichung von ihrem quadratischen Gliede hat er nie besessen, hat er, als er sie in der Ars magna las, nicht einmal verstanden, sonst hätte er in den Quesiti ganz anders darüber sich ausdrücken müssen. Von allen Ruhmredigkeiten Tartaglia's über seine Verdienste um die Erweiterung der Lehre von den Gleichungen bleibt für's erste nur die Thatsache, dass er 1539 die Auflösung der eines quadratischen Gliedes entbehrenden kubischen Gleichung besass. Weiteres wollte Tartaglia seiner in den Streitschriften von 1547 bis 1548 wiederholt auftretenden Zusicherung gemäss dann der Welt mittheilen, wenn er in späterer Zeit die Arbeit, deren Vollendung ihn jetzt voll beschäftigte, die Uebersetzung des Euklid, abgeschlossen haben werde. Und wie verhält es sich mit der späteren Zeit? Tartaglia hat von 1556 ab seinen *General Trattato de' numeri e misure*

dem Drucke übergeben. Der 1. Band erschien 1556, der 2. Band 1558, der 3. Band 1560, nachdem Tartaglia schon gestorben war. Nirgend ist auch nur eine weitere Entdeckung im Gebiete der Gleichungslehre mitgetheilt. Wir werden Tartaglia's Schriften im nächsten Kapitel genauer Besprechung unterziehen, aber schon jetzt dürfen wir unsere Verwunderung aussprechen, dass er, auch nachdem der öffentliche Streit gegen Ferrari und Cardano durch die Disputation vom 10. August 1548, wie sie auch betrachtet werden mag, zu Ende geführt war, nachdem also aus dem Besitze algebraischer Geheimnisse ein klingender Vortheil für Tartaglia nicht mehr in Aussicht stand, gar nicht eilte, die Entdeckungen zu veröffentlichen, welche ihn zum grössten Mathematiker seiner Zeit stempeln mussten, sondern Jahr um Jahr der Niederschrift von verhältnissmässig unbedeutenden Dingen widmete. Mit dieser Verwunderung regt sich zugleich auch der Zweifel, wie es mit jenen erwähnten nachweisbaren Kenntnissen von 1539 sich verhielt.

Nicht ob er sie besass, können wir anzweifeln, aber woher er sie besass? Wir haben Scipione del Ferro als ersten Auflöser der Gleichung $x^3 + ax = b$ kennen gelernt, wir haben (S. 483) gesagt, es sei zwar nirgend berichtet, wie er verfuhr, aber gewisse Rückschlüsse seien berechtigt. Hier ist der Ort, sie zu ziehen. Cardano und Ferrari nahmen 1542 Einsicht von Del Ferro's Buche. Cardano nannte am Anfange des XI. Kapitels der Ars magna von 1545 den ersten Erfinder, nannte Tartaglia als zweiten[1]). Die Auflösungsmethode, welche er mittheilt, ist genau die des Tartaglia, wie wir sie aus dessen Terzinen und aus dessen an Cardano gerichtetem Briefe vom 23. April 1539 kennen. Folgt daraus nicht mit an Gewissheit grenzender Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Verfahren, das des Del Ferro und das des Tartaglia, nur eines und dasselbe waren? Findet diese Annahme nicht eine weitere Bestätigung in Ferrari's Worten, welche er im sechsten Cartello[2]) Tartaglia entgegenschleudert: „Herr Hieronymus konnte diesen Gleichungsfall dem ersten Erfinder, d. i. Herrn Scipio del Ferro aus Bologna zuschreiben und ausser diesem noch Herrn Antonio Maria Fiore, welcher — Ihr gesteht es in Eurem Buche ein — die Sache früher als Ihr wusste. Nichtsdestoweniger war er so höflich, Euch glauben zu wollen, dass auch Ihr das Verfahren erfunden habet, ohne es von einem von diesen oder von einem ihrer Schüler erhalten zu haben und hat Euren Ruhm zugleich mit dem

[1]) *Scipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc invenit, tradidit vero Anthonio Mariae Florido Veneto, qui cum in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit ut Nicolaus invenerit.* [2]) *Cartello VI,* pag. 4—5.

jener Beiden verkündet. Und Ihr? Für diese Wohlthat, an die ich Euch in meinem zweiten Cartello erinnerte[1]), für viele andere, welche ich bezeugen kann, habt Ihr zur Unzeit so bäuerisch über ihn geschrieben, dass Ihr verrückt erscheint." Wir nageln den Ausdruck „er war so höflich Euch glauben zu wollen", *e stato si cortese, che vi a voluto credere,* fest, welcher Ferrari's Zweifel an Tartaglia's Erfinderrecht ausspricht.

Ist es denn nur in einer Weise möglich, die kubischen Gleichungen aufzulösen? Die Geschichte hat diese Frage mit lautem Nein beantwortet. Eine 1615 gedruckte Auflösung von Vieta, von welcher noch in diesem Bande die Rede sein wird, eine 1683 veröffentlichte Auflösung von Tschirnhausen, Dutzende von späteren Auflösungen weichen alle unter einander und von der, wie wir begründet haben, Tartaglia und Del Ferro gemeinschaftlichen ab. Ist es unter diesen Umständen nicht gestattet, Zweifel daran zu hegen, dass beide untereinander übereinstimmende Gedankenfolgen ganz unabhängig in zwei verschiedenen Köpfen sich bildeten?

Nur zwei wichtige Bedenken stehen diesem Zweifel wiederum gegenüber. Erstlich wer sollte Tartaglia die Del Ferro'sche Entdeckung mitgetheilt haben? Diesem Bedenken gegenüber haben wir keine andere Entgegnung als: wir wissen es nicht, und wir empfinden selbst diese Lücke aufs Unangenehmste. Nur das könnte gesagt werden, dass wo eine Handschrift vorhanden war, wo Fior die Methode kannte, es wenigstens nicht ausgeschlossen erscheint, dass auch ein Zweiter, ein Dritter heimliche Kenntniss erhielt und sie ebenso heimlich weiter verbreitete[2]). Dann muss man freilich auf den neuen Einwurf gefasst sein, warum dieser Zweite, dieser Dritte nicht hervortrat und für sich und seinen eigenen Nutzen das Geheimniss verwerthete ähnlich wie Fior es that? Diesem Einwurfe gestehen wir die kräftigste Wirkung zu. Das zweite Bedenken äussert sich in der Frage, ob Tartaglia denn zuzutrauen war, dass er, auf eine oder die andere Art in den Besitz von Del Ferro's Geheimniss gelangt, doch immer nur von seiner eigenen Entdeckung sprach? Wir müssen die Beantwortung aufschieben, bis wir Tartaglia's Schriften besprochen haben, eine Aufgabe, welcher wir uns jetzt zuwenden.

---

[1]) *Cartello II*, pag. 3: *Te inventorem celebravit, te exoratum sibi tradidisse commemoravit. Quid vis amplius?* [2]) So ist die Ansicht Gherardi's l. c. S. 115—116.

66. Kapitel.

Tartaglia's Schriften. Cardano's spätere Schriften.

Tartaglia eröffnete seine schriftstellerische Laufbahn 1537 mit der Nuova scienza, einem Versuche die Lehre von dem Wurfe auf theoretischer Grundlage aufzubauen. Hervorzuheben ist daraus die Behauptung, dass die Bahn des geworfenen Körpers eine in jedem ihrer Theile krumme Linie bilde, während die Schulmeinung dahin ging, der Anfang und das Ende der Bahn sei eine gerade Linie[1]. Ausserdem wusste Tartaglia, dass der unter einem Winkel von 45° geworfene Körper am weitesten fliege. Im dritten Buche der Nuova scienza ist ausschliesslich von Aufgaben der Feldmessung die Rede, wobei ein rechtwinklig hergestelltes Viereck das Hauptwerkzeug bildet. Um die rechten Winkel selbst zu prüfen, solle man durch längs den Seiten gezogene Striche einen solchen zur Abbildung bringen, dann um den Scheitel als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben und schliesslich messen, ob der von den Schenkeln begrenzte Kreisbogen sich viermal auf dem Kreise herumtragen lasse.

Demnächst veröffentlichte Tartaglia 1543 eine lateinische Ausgabe des Archimed[2]. Die Vorrede, natürlich gleichfalls in lateinischer Sprache geschrieben, enthält folgende Erzählung: „Nachdem durch einen Glückszufall eine zerrissene und kaum lesbare griechische Handschrift des Archimed in meine Hände gekommen war, wandte ich alle Arbeit, alle Mühe und Sorgfalt auf die Theile, die sich lesen liessen, sie in unsere Sprache zu übertragen, was freilich schwer war“[3]. Deutlicher und bestimmter kann man sich nicht ausdrücken, und nun hat die wörtliche Uebereinstimmung insbesondere solcher Stellen, deren Uebersetzung verfehlt und zum Theil ganz sinnlos ist, zur Gewissheit erhoben, dass Tartaglia die ganze Uebersetzung abgeschrieben hat, dass es die Arbeit Wilhelm's von Moerbecke (S. 99) war, die der freche Herausgeber als seine eigene rühmte!

Noch im gleichen Jahre 1543 erschien die italienische Uebersetzung des Euklid[4]) von Tartaglia, ein Werk, mit welchem er

---

[1]) Libri III, 160—161. — Heller, Geschichte der Physik I, 326—327.
[2]) Heiberg's Archimedausgabe (1880—1881) Bd. III *Prolegomena* pag. XXIX sqq. und Heiberg, Neue Studien zu Archimedes. Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, Supplementheft, besonders S. 6—7. [3]) *Cum sorte quadam ad manus meas pervenissent fracti et qui vix legi poterant quidam libri manu graeca scripti illius celeberrimi philosophi Archimedis . . . omnem operam meam omne studium et curam adhibui, ut nostram in linguam, quae partes eorum legi poterant, converterentur, quod sane difficile fuit.* [4]) *Euclide Meg. Philos. solo introduttore delle*

offenbar grossen Erfolg gehabt haben muss, da nicht weniger als fünf Auflagen innerhalb 42 Jahren bekannt sind. Die italienische Uebersetzung ist, wie der Titel ausdrücklich erklärt, aus zwei lateinischen Texten, nämlich aus denen von Campano und von Zamberti, abgeleitet, während der griechische Euklid bereits seit zehn Jahren im Drucke vorhanden war. Das gleicht so ziemlich einem Eingeständnisse, dass Tartaglia nicht im Stande war, des griechischen Textes sich zu bedienen, und kann dadurch als Bestätigung gelten, dass Tartaglia noch viel weniger befähigt war, einen griechischen Archimed zu übersetzen. Im Uebrigen ist Tartaglia's Bearbeitung nicht ohne Verdienst. Sie ist mit vielen eingehenden Erläuterungen versehen, auch ist die Nummerirung der Sätze und die Anordnung des Stoffes zuweilen eine andere als bei Campano und Zamberti. Am Rande sind stets die Nummern jener beiden Ausgaben angegeben auch in den Fällen, in welchen alle drei Ausgaben übereinstimmen[1]).

Die Quesiti et invenzioni diverse sind von 1546. In deren V. Buche ist die Aufnahme topographischer Pläne mittels der Bussole gelehrt. Den sonstigen mathematischen Inhalt bildet ausschliesslich die Geschichte der Entdeckung der Auflösung kubischer Gleichungen. Sie ist von uns bereits ausführlich in Tartaglia'schem Sinne erzählt, aber auch dahin erläutert worden, dass irgend Neues, was der Leser, beziehungsweise also auch der Schreiber, nicht aus der Ars magna Cardano's wissen konnte, durchaus nicht vorkommt. Im Anschlusse an die Quesiti nennen wir der Vollständigkeit der Aufzählung wegen Tartaglia's Risposte auf die Cartelli Ferrari's.

Dann folgte 1551 La travagliata invenzione und kurz darauf Ragionamenti sopra la travagliata invenzione. Beide Schriften sind der Mathematik fremd. Wir müssen gleichwohl Weniges über sie bemerken und zugleich auf ein etwas älteres Werk Cardano's zurückgreifen. Cardano nämlich, dessen Vielseitigkeit als Arzt, als Astrolog, als Physiker, als Philosoph, als Mathematiker ihn zu einem der fruchtbarsten Schriftsteller seines Zeitalters machte, wovon zehn Foliobände erhaltener Werke ausreichendes Zeugniss liefern, hatte auch eine Schrift De subtilitate verfasst, welche 1550 in Nürnberg, 1552 abermals und zwar in Paris gedruckt worden ist. In XXI Bücher eingetheilt[2]) enthält sie Dinge aus fast allen Wissensgebieten. Im XI. Buche z. B. ist eine Zusammenstellung der ästhe-

---

Scientie Matematiche diligentamente reassetato et alla integrità ridotto per etc. Nic. Tartalea etc. et per commune commodo et utilita di latino in volgar tradotto 1543 in fol., 1544, 1545 in fol., 1565, 1569, 1585 in 4°.

[1]) Wertheim brieflich. [2]) Cardano III, 353—672.

tisch wirksamsten Verhältnisszahlen der menschlichen Gliedmassen zu finden[1]), im XVII. Buche die Beschreibung eines Schlosses, welches nur dann sich öffnet, wenn gewisse Wortstellungen drehbarer Buchstabenvereinigungen hervorgebracht sind[2]). Gleichfalls im XVII. Buche ist von einer Vorrichtung die Rede[3])., welche mittels dreier in einander greifender Stahlringe bewirkt, dass aus einer offenen Lampe, wie man sie auch halte, kein Oel herauslaufe. Das ist die sogenannte Cardanische Aufhängung, welche aber mit Unrecht diesen Namen führt, da nach dem Wortlaute bei Cardano selbst er hier über eine schon sehr alte Erfindung berichtet[4]). Von anderen Stellen der Bücher De subtilitate wird noch in anderem Zusammenhange die Rede sein. Hier nennen wir nur noch eine Erfindung gleich aus dem I. Buche. Dort[5]) ist eine Vorrichtung zur Hebung gesunkener Schiffe beschrieben, welche auf dem Gedanken beruht, das gesunkene Schiff mittels von Tauchern daran befestigten und straff angezogenen Tauen mit so schwer als möglich beladenen Kähnen in Verbindung zu setzen. Werden alsdenn die Kähne erleichtert, so hebt das Wasser sie und zugleich das an ihnen befestigte Schiff. Kein anderer Gedanke als dieser ist es, welcher der Travagliata invenzione Tartaglia's zu Grunde liegt, während der Name Cardano's vergeblich gesucht wird, und wenn auch nicht zu verkennen ist, dass zwischen einem hingeworfenen und einem ausführlich entwickelten Gedanken ein erheblicher Unterschied ist, so ist doch Tartaglia's Verschweigen des Namens dessen, der den Gedanken zuerst äusserte, um so bezeichnender, als der Streit über die kubischen Gleichungen zwischen Beiden vorhergegangen war. Gleichwie in der Travagliata invenzione fehlt Cardano's Name auch in den Ragionamenti, welche der Hauptsache nach eine weitere Ausführung der eben genannten Schrift sind. Dabei ist unter anderen das specifische Gewicht einer ganzen Anzahl von Stoffen auf das Gewicht des Regenwassers als Einheit zurückgeführt. Die Versuche Tartaglia's müssen indessen an einem bisher noch nicht ermittelten einheitlichen Fehler gelitten haben, da sämmtliche specifische Gewichte, die er angiebt, zu klein sind. Die Ragionamenti von 1551 sind in Gestalt von Gesprächen mit Richard Ventuorthe gedacht. Selbstverständlich kann diese Gesprächsform nicht gegen unsere Bemerkung (S. 490), jener Engländer sei 1541 in seine Heimath zurück-

---

[1]) Cardano III, 555—556. [2]) Ebenda pag. 623. [3]) Ebenda pag. 612. [4]) Breusing, Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten (Bremen 1890) S. 16—17. Berthelot hat in den Compt. Rend. CXI, 940 (Paris 1890) das Vorkommen der Cardanischen Aufhängung in einer Handschrift des XII. S. nachgewiesen. [5]) Cardano III, 364—365: *Modus quo naves demersae gurgitibus recuperantur.*

gekehrt, verwerthet werden, denn man hat es sicherlich mit erdichteten Gesprächen zu thun, wie Tartaglia sie in allen neun Büchern der Quesiti als stylistische, auch sonst vielfach beliebte und gebrauchte Form benutzt hatte, und von einem neuen wirklichen Aufenthalte des „Gevatters" (mio Compare) in Italien ist nirgend eine Andeutung zu finden.

Nun gelangte der General Trattato di numeri et misure zur Veröffentlichung, das mathematische Hauptwerk Tartaglia's, welchem wir einen ausführlichen Bericht zu widmen haben, ebensowohl weil es an und für sich eines solchen würdig erscheint, als weil eine parteilose Beendigung der von uns begonnenen Untersuchung ihn nothwendig macht. Der I. Band, die 1. Parte enthaltend, trägt die Jahreszahl 1556. Der II. Band trägt die gleiche Jahreszahl und enthält die 2. Parte. Im III. Bande sind die 3., 4., 5., 6. Parte vereinigt, wenn auch jede mit neu beginnender Blattbezifferung; die Jahreszahl der Titelblätter dieser vier letzten Abtheilungen ist 1560. Jede einzelne Parte ist mit einer besonderen Widmung versehen, auf welche gleichfalls geachtet wird werden müssen, da geschichtlich Verwerthbares dort sich findet.

Die Parte 1 ist wieder dem englischen Edelmanne Ricardo Ventvorth zugeeignet, von dessen derzeitigem Aufenthaltsorte abermals keine Andeutung sich findet. Tartaglia beklagt die kostbare Zeit, welche er durch die Cartelli und Risposte verloren habe, jammert über Aerger und Zeitverlust in Brescia und setzt hinzu, dass er seit zwei Jahren — mithin seit 1554 — mit eisernem Fleisse an eine grosse Arbeit sich gemacht habe. Schnelligkeit habe nothgethan, weil er befürchten musste, durch Tod, Krankheit oder sonstige Zufälle wieder gestört zu werden. Jetzt sei er mit der Arbeit fertig, und sie sei in sechs Abtheilungen getheilt[1]). So schreibt Tartaglia am 23. März 1556. Nicht anders drückt er sich am 3. April 1556 in der an den Grafen L'Andriano gerichteten Widmung der Parte 2 aus. Er habe in den letzten zwei Jahren einen sechstheiligen Tractat verfasst, dessen zweiter Theil hier vorliege[2]). Die Widmungen der vier weiteren Theile hat Tartaglia, der, wie wir uns erinnern, im December 1557 starb, nicht mehr verfasst. Sie rühren vom Verleger Curtio Trojano dei Navo her, und deren erste trägt die Zeitangabe des 1. Januar 1560, die anderen sind nicht datirt. Die Widmung der Parte 6 enthält die Mittheilung, der Verfasser sei

[1]) *La ho ridutta a fine, & questa mia cosi longa fatica mi e parso da dividere in sei parti distinte.* [2]) *Havendo questi duoi anni passati composto un general Trattato di numeri & misure, ma in sei parti divisi per la diversita di lor soggetti, delle quali sei parti questa e la seconda.*

vor Vollendung dieser Schlussabtheilung vom Tode betroffen worden, aber so weit sei das Geschick gütig gewesen, dass es ihn nicht wegraffte, bevor in verschiedenen Bruchstücken und vielen Notizbüchern seine Absichten soweit schriftlich niedergelegt waren, dass er nur noch in einem Bande und in fortlaufender Darstellung zu vereinigen hatte, was auf viele Blättchen in lückenhafter Form geschrieben war; dieser Mühe aber konnte Jeder sich unterziehen, der nur mässiges Verständniss von mathematischen Dingen besass[1]). Ein gewisser Widerspruch zwischen diesen drei Aeusserungen und einem Zwischensatze der Parte 5, in welchem auf eine noch in Aussicht stehende neue Algebra verwiesen ist[2]), lässt sich nicht leugnen, aber so weit glauben wir mindestens den Worten des Verlegers trauen zu müssen, dass, als Tartaglia starb, in seinem Nachlasse nichts weiter sich vorfand, was auf Algebra sich bezog, als was nachher in der Parte 6 des General Trattato gedruckt wurde. Wir berufen uns dafür auf Tartaglia's Testament vom December 1557. Damals waren die vier ersten Abtheilungen des General Trattato im Drucke vollendet, und Exemplare derselben waren in Tartaglia's Besitz[3]), über welche letztwillig verfügt wird. Vom schriftlichen Nachlasse ist nicht in bestimmten Worten die Rede, aber der Verleger Trojan Navo ist ausdrücklich zum Testamentsvollstrecker ernannt[4]), und diese Thatsache verstärkt wesentlich unseren Glauben an die Erklärung dessen, der sicherlich alle vorhandenen Papiere durchstöberte, wie er sie durchstöbern musste. Gab doch grade dieser Verleger 1565 aus Tartaglia's Nachlasse das Werkchen des Jordanus Nemorarius *De Ponderositate* heraus[5]), eine Ausgabe, welche mit ihren 46 Sätzen zwar nicht alle 50 Sätze der Handschriften der Oeffentlichkeit übergab, aber doch weit über die 13 Sätze hinausging, welche Peter Apianus 1533 bei Petreius in Nürnberg zum Drucke beförderte. Und eine Nova Algebra, verschieden von dem, was als Parte 6 im General Trattato gedruckt ist, sollte er übersehen haben? Kaum glaublich. Tartaglia's „neue Algebra" ist aufzufassen, wie so viele Aeusserungen des gleichen Schriftstellers, als ein auf die Zukunft ausgestellter

---

[1]) . . . *che non cel tolse prima, ch'egli havesse in diversi fragmenti & in molti memoriali scritta tutta intorno a tal parte l'intentione sua tanto, che non li restava a far altro se non quello, che egli haveva in molte carte scritto & con ragionamento interrotto, racogliere in un volume, & con continuato discorso, fatica ch'ogni mediocre intendente delle Matematiche poteva condurla a fine.* [2]) Parte 5 fol. 88 verso l. 7 v. u.: *si narrara nella nostra nova Algebra.* [3]) *Mi attrovo libri del mio general trattato de numeri et misure p.a 2.da 3.a et 4.a parte.* [4]) *Mio commissario et executor di questo mio ultimo testamento lasso it sopto M. Troian Navo librer.* [5]) Gherardi l. c. S. 96 Note 2.

Wechsel, zu dessen Einlösung keine oder doch nur geringe Mittel bereit lagen.

Der General Trattato ist ein ganz vortreffliches Lehrbuch der Rechenkunst, von einer Reichhaltigkeit, welche auch hinter der der Summa des Paciuolo in keiner Weise zurücksteht, von grösster Klarheit und sogar einer gewissen Eleganz der Darstellung. Natürlich ist Vieles, man kann getrost sagen das Allermeiste, der Sache nach alt und nur in der Form neu, allein auch ganz Neues, uns wenigstens aus den Schriften keines anderen Verfassers bekannt, begegnet an verschiedenen Stellen den Blicken des aufmerksamen Lesers. Eine ganz besondere Neigung besitzt Tartaglia, frühere Schriftsteller tadelnd zu erwähnen, während er ihre Namensnennung da, wo er sich ihnen streng anschliesst, ziemlich regelmässig unterlässt. Ganz besonders Paciuolo und Cardano gegenüber ist diese doppelte Gewohnheit auffällig. Wir heben nunmehr Einzelheiten hervor, indem wir nach der Reihenfolge der Abtheilungen uns richten.

Parte 1. Die Campano'sche Euklidübersetzung nennt das Vervielfältigen unterschiedslos bald *multiplicare*, bald *ducere*[1]). Das hält Tartaglia für unrichtig. *Multiplicare* beziehe sich nur auf abstracte Zahlen, und der kleinste Multiplicator sei 2, *ducere* dagegen müsse bei geometrischen Quantitäten gesagt werden, wie bei der Vervielfältigung von Linien mit Linien oder von Linien mit Oberflächen[2]). Ganz ähnlich sei bei der entgegengesetzten Operation das *misurare*, welches bei Raumgrössen stattfinde, von dem auf Zahlen sich beschränkenden *partire* zu unterscheiden[3]). Diese Begriffsbestimmungen auf Brüche angewandt führen dazu, dass bei ihnen als an sich continuirlichen Grössen nur die Ausdrücke *ducere* und *misurare* in Anwendung kommen sollten[4]). Beim Multipliciren und Dividiren sind alle die zahlreichen Regeln gelehrt, welche dafür bekannt waren, insbesondere erscheint das *partire a danda* d. h. das Dividiren unterwärts[5]), welches von nun an gegen das alte Dividiren überwärts sich siegreich behauptet. Tartaglia lehrt es an dem Beispiele 912345 : 1987 mit dem *avenimento* (Quotient) 459 und dem *avanzo* (Rest) 312. Die *Pratica* d. h. dasjenige Verfahren, welches bei den deutschen Rechenmeistern die welsche Praktik hiess, und welches insbesondere beim Rechnen mit benannten Zahlen beliebt war, wird aufs Ausführlichste gelehrt[6]). Für das Zurückführen verschiedener Brüche auf den kleinsten Gemeinnenner, beziehungsweise für die Auffindung der

---

[1]) *Ducere* heisst es z. B. bei der Ausmessung der Rechtecke. Vgl. Kästner I, 294—295. [2]) *General Trattato*, Parte 1 fol. 17 verso. [3]) Ebenda fol. 27 recto. [4]) Ebenda fol. 119 recto und verso. [5]) Ebenda fol. 35 recto und verso. [6]) Ebenda fol. 53 verso bis 106 recto.

kleinsten ganzen Zahl, deren Bruchtheile von gegebenem Nenner ganzzahlig ausfallen, ist ein besonderer Name angegeben, *accatare* [1]) (wörtlich: betteln, borgen). Tartaglia lehrt, wie man einen Brodtarif anfertigen könne, der den Veränderungen des Fruchtpreises sich anpasse [2]). Seine Bemerkung, daran habe noch kein Verfasser einer Arithmetik gedacht, ist gegenüber den Vorgängern, von welchen wir wissen (S. 478), höchstens für Italien keine eitle Ruhmredigkeit. Die zeitliche Entfernung zweier bestimmter Tage wird durch eine Subtraction gefunden [3]), die derjenigen von benannten Zahlen nachgebildet ist. Die Zeit vom 17. des dritten Monats 1552 bis zum 23. des ersten Monats 1555 wird z. B. nach folgendem leichtverständlichen Schema berechnet:

	23	I	1555
	17	III	1552
differentia	6	X	2

Terminrechnung d. h. Abtragung verschiedener an verschiedenen Tagen fälligen Zahlungen an einem mittleren Tage heisst *reccare a un di* [4]). Die Rechnung wird so geführt, dass, wenn die Zahlungen $z_1, z_2, \ldots z_n$ nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ Zeit zu leisten waren, die Entfernung T des mittleren Tages sich durch $T = \frac{t_1 z_1 + t_2 z_2 + \cdots + t_n z_n}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}$ ergiebt. Nicht uninteressant ist eine Polemik gegen Paciuolo und Cardano über Zinseszins bei Bruchtheilen von Jahren [5]), eine Polemik, auf welche wir schon (S. 325) mit dem Bemerken hingewiesen haben, es handle sich dabei nicht um eigentlich Mathematisches. Die Frage heisst: Was wird aus 100 in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu 20% mit Zinseszinsen? Darüber ist Tartaglia mit den beiden anderen Schriftstellern einig, dass 100 zu 20% mit Zinseszinsen in 1 Jahre zu 120, in 2 Jahren zu 144, in 3 Jahren zu $172\frac{4}{5}$, in $\frac{1}{2}$ Jahre zu 110 anwachse. Den Betrag nach $2\frac{1}{2}$ Jahren berechnen aber Paciuolo und Cardano vom dritten Jahre rückwärts mittels des Dreisatzes $110 : 100 = 172\frac{4}{5} : x$, $x = 157\frac{1}{11}$, Tartaglia dagegen vom zweiten Jahre vorwärts mittels des Dreisatzes $100 : 110 = 144 : x$, $x = 158\frac{2}{5}$. Der Zinseszins, sagt er, werde immer vom Gläubiger auferlegt, und dieser stelle die Bedingung zu seinem Vortheile, welcher demnach bei der Rechnung zu wahren sei. Auch eine Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und zwar wieder die Theilungsfrage bei unterbrochenen Spielen (S. 501), wird unter-

---

[1]) *General Trattato*, Parte 1 fol. 109 verso. [2]) Ebenda fol. 171 recto. [3]) Ebenda fol. 182 recto. [4]) Ebenda fol. 185 verso. [5]) Ebenda fol. 191 verso bis 192 verso.

sucht[1]). Eine streng beweisbare Auflösung gebe es nicht, weil die Frage mehr nach Recht als nach Vernunftgründen zu behandeln sei, *la risoluzione di una tal questione e piu presto giudiciale che per ragione.* Am wenigsten Anstoss errege folgende Theilung. Das Spiel soll wieder auf s Spiele gehen, und s_1, s_2 sind die von beiden Spielern erreichten Gewinnspiele. Der Erste ist dem Zweiten um $s_1 - s_2$ Gewinne vor. Da er bei s Gewinnen den ganzen Einsatz des Gegners ausser dem eigenen an sich zieht, so gebühren ihm jetzt $\frac{s_1 - s_2}{s}$ von dessen Einsatz, während Jenem nur $\frac{s + s_2 - s_1}{s}$ desselben bleibt. Der Erste behält überdies $\frac{s}{s}$ des eigenen Einsatzes, und da beide Einsätze als gleich vorausgesetzt werden, so verhalten sich die beiderseitigen Theile wie $(s + s_1 - s_2) : (s + s_2 - s_1)$. Bei $s = 60$, $s_1 = 50$, $s_2 = 30$ werden die Verhältnisszahlen $80 : 40$ oder der Erste nimmt $\frac{2}{3}$, der Zweite $\frac{1}{3}$ des Gesammteinsatzes.

Parte 2. Sehr verschiedenartige Reihen werden der Summirung unterworfen, unter anderen solche, deren Glieder nach dem Gesetze wachsen, dass jedes Glied das Doppelte der Summe sämmtlicher vorhergehender Glieder vorstellt[2]), mithin die Reihe

$$1 + 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + \cdots.$$

Ist s_n die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe, so ist s_n^2 die Summe der ersten $2n - 1$ Glieder oder $s_{2n-1} = s_n^2$. Ein Beweis ist der Behauptung nicht beigefügt, lässt sich aber leicht erbringen. Weil $1 + 2 = 3 = s_2$, so ist das dritte Glied $2 \cdot 3$ und

$$s_3 = 3 + 2 \cdot 3 = 3^2;$$

ähnlicherweise ist $s_4 = 3^2 + 2 \cdot 3^2 = 3^3$ und

$$s_n = 3^{n-1}, \; s_{2n-1} = 3^{2n-2} = s_n^2.$$

Die Anzahl aller Versetzungen aus n von einander verschiedenen Elementen[3]) ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Die arithmetischen Reihen auf einander folgender Ordnung werden gebildet, und zwar jede auf sechs Glieder, deren letztes der Bildungsweise entsprechend regelmässig die Summe sämmtlicher Glieder der unmittelbar darüber stehenden Reihe liefert[4]).

---

[1]) *General Trattato*, Parte 1, fol. 265 verso. [2]) Ebenda Parte 2, fol. 16 verso. [3]) Ebenda fol. 16 verso. [4]) Ebenda fol. 17 recto.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Auffallend ist der Zweck, der mit diesen Reihen sich verbindet. Sie sollen die Anzahl der mit 1 bis 8 gewöhnlichen sechsflächigen Würfeln möglichen Würfe zählen, so dass es bei 6 Würfeln 462 solcher verschiedenen Würfe gebe, bei 8 Würfeln

$$1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 = 1287.$$

Andere Schriften des XVI. Jahrhunderts lassen die etwas dunkle Stelle verstehen lernen. Man gab damals viel auf Würfel, die nicht nur zu Glücksspielen verwandt wurden, sondern auch zu regelmässiger Beantwortung von Fragen. Bücher, welche in deutscher Sprache diesem Gegenstande gewidmet sind, führen den Namen Loossbuch. Ihrer Beschreibung[1]) entnehmen wir Folgendes. Ist nur ein I. Würfel in Gebrauch, so können mit demselben sechs von einander verschiedene Würfe erzielt werden. Tritt ein II. Würfel hinzu, so mag man nur die Würfe als verschieden erachten, bei welchen II nicht weniger Augen zeigt als I, denn der Wurf I = 3 Augen, II = 1 Auge war alsdann in der Form I = 1 Auge, II = 3 Augen schon da, ist mithin kein neuer Wurf. Der verschiedenen Würfe mit den Würfeln I und II sind es daher $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ oder in der Sprache der Combinatorik: Die Anzahl der mit zwei sechsflächigen Würfeln möglichen wesentlich verschiedenen Würfe ist gleich der Anzahl der Combinationen mit Wiederholung aus 6 Elementen zur Classe 2. Durch Fortsetzung der gleichen Betrachtung erkennt man, dass mit k Würfeln von je n Flächen so viele wesentlich verschiedene Würfe möglich sind, als durch die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur Classe k angegeben ist, mithin $\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdots k}$. Bei $n = 6$, $k = 8$ erscheint $\frac{6\cdot 7\cdots 13}{1\cdot 2\cdots 8} = 1287$. Dieselbe Zahl ist aber auch die Summe der sechs ersten Glieder der aus den Zahlen 1, 8, 36, 120, 330, 792 bestehenden arithmetischen Reihe 7. Ordnung, und Tartaglia's Behauptung ist damit bestätigt. Eine Anwendung dieser Anzahl der wesentlich verschiedenen Würfe

[1]) Kästner I, 226—241.

bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben ist allerdings unstatthaft, weil die Häufigkeit, in welcher jeder als wesentlich verschieden bezeichnete Einzelwurf vorkommt, nicht berücksichtigt ist. — Näherungsweise Ausziehung von Quadratwurzeln hatte Cardano in der Practica Arithmeticae generalis von 1537 gelehrt (S. 499). Auch Tartaglia beschreibt die gleichen Verfahrungsweisen[1]), indem er nicht mit Unrecht die eine, welcher in fortgesetzter Anwendung von $\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a}$ besteht, auf die alten Araber zurückführt, während er für die andere — Anhängung von Nullen vor der Wurzelausziehung — auf Orontius Finaeus verweist. Quadratwurzeln aus Brüchen[2]) werden gewöhnlich, *piu commune*, durch annähernde Wurzelausziehung aus Zähler und Nenner, besser aber so gefunden, dass man dem Bruche durch Erweiterung einen quadratischen Nenner verschafft, um nur im Zähler einer angenäherten Wurzel zu bedürfen. Eine ganz feine Bemerkung hebt hervor[3]), dass jede angenäherte Wurzelausziehung einen Fehler mit sich führe, die Einsetzung solcher Werthe dürfe also immer erst am Ende einer ganzen Rechnung eintreten, damit die Fehler sich nicht vervielfältigen. Näherungsweise Ausziehung von Kubikwurzeln[4]) haben manche Schriftsteller, wie Sacrobosco, gar nicht, andere, wie Cardano, grundfalsch gelehrt. Michael Stifel hat für Wurzelausziehungen Vortreffliches geleistet, *nelle estrattioni delle radici rationali & discrete si e mostrato molto eccelente*, Näherungsverfahren aber nicht angegeben. Tartaglia behauptet alsdann 1514, das wäre demnach im Alter von 14 Jahren, etwa zur gleichen Zeit als er Schreibunterricht nahm, was die Glaubwürdigkeit der Behauptung nicht gerade erhöht, gefunden zu haben, dass in erster Annäherung

$$\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A - a^3}{3a + 3a^2} \quad (= a_1)$$

in zweiter Annäherung $\sqrt[3]{A} \sim a_1 + \frac{A - a_1^{\,3}}{3a_1 + 3a_1^{\,2}}$ zu setzen sei. Cardano und Ferrari, heisst es an einer späteren Stelle[5]), hätten aus dem Werke Stifel's gelernt, wie man auch höhere Wurzeln zu ziehen habe, ein eigentliches Näherungsverfahren fehle jedoch bei Stifel, so dass dessen Nachbeter hier rathlos gewesen seien und Fehler über Fehler machten. Dem Lobe Stifel's, dem damit verbundenen Eingeständnisse, die Arithmetica integra selbstverständlich gelesen zu haben, gegenüber musste man die eiserne Stirn Tartaglia's besitzen, um die Erfindung der Binomialcoefficienten, deren Bildungsgesetz

---

[1]) *General Trattato*, Parte 2, fol. 19 verso und 22 recto (durch einen Druckfehler sind diese Blätter mit 25 und 28 bezeichnet). [2]) Ebenda fol. 25 recto. [3]) Ebenda fol. 26 verso. [4]) Ebenda fol. 27 recto bis 28 verso. [5]) Ebenda fol. 42 recto l. 16 sqq.

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+k}{k+1},$$

deren Anwendung zur Ausziehung von Wurzeln mit beliebig hohem Wurzelexponenten ganz unbefangen für sich in Anspruch zu nehmen[1]), ohne bei dieser Gelegenheit Stifel's Namen auch nur zu erwähnen. Einen Hauptbestandtheil der Parte 2 bildet das Rechnen mit Proportionen, wie wir es von früheren arithmetischen Schriftstellern her zur Genüge kennen. Vielleicht zum ersten Male bediente sich Tartaglia hier des Wortes Dignität[2]), welches geraume Zeit der Kunstausdruck für Potenz geblieben ist. — Auch zahlentheoretische Bemerkungen treten auf, darunter solche über vollkommene Zahlen[3]). Tartaglia geht dabei von der ausgesprochenen, irrigen — vermuthlich Stifel (S. 435) entnommenen — Meinung aus, $2^{2n+1} - 1$ sei immer Primzahl, mithin auch immer $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ eine vollkommene Zahl. Beweislos fügt Tartaglia hinzu, alle vollkommenen Zahlen mit Ausschluss der 6 liessen durch 9 getheilt 1 zum Reste. Wir sind diesem Satze bei Bovillus (S. 385) begegnet. — Dem Rationalmachen von Brüchen, deren Nenner Summe oder Differenz zweier irrationaler Grössen ist, wird besonderes Gewicht beigelegt. Dabei ist die Vorschrift ausgesprochen[4]), welche allein das blinde Umhertasten zu einem verständigen Verfahren umzuwandeln im Stande ist, man müsse zunächst die im Nenner auftretenden Irrationalitäten zu Wurzelgrössen gleicher Benennung machen, also z. B. $\frac{10}{\sqrt[5]{5} + \sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt[10]{25} + \sqrt[10]{243}}$ setzen; dann habe man mit $\frac{243 - 25}{\sqrt[10]{243} + \sqrt[10]{25}}$, welches immer eine aufgehende Division darstelle, den Bruch zu erweitern.

Parte 3 ist geometrischen Untersuchungen gewidmet. Für einen Uebersetzer des Euklid, wie Tartaglia es war, klingt es da recht auffallend, wenn als *euklidische Definitionen*[5]) angegeben wird, die gerade Linie sei die kürzeste Ausdehnung von einem Punkte zum andern, die Ebene die kürzeste Ausdehnung von einer Linie zur anderen. Auf Nachlässigkeit eines fremden Herausgebers kann man die Schuld nicht schieben, da Tartaglia's Testament zeigt, dass der Druck von Parte 3 und 4 noch während seines Lebens vollendet war (S. 517).

---

[1]) *General Trattato*, Parte 2, fol. 69 recto: *Regola generale dal presente auttor ritrovata da sapere in tale estrattioni di radici in infinito piu oltra procedere nelle altri sequenti specie.* Die Tabelle der Binomialcoefficienten steht fol. 69 verso und fol. 71 verso und an letzterer Stelle auch das Bildungsgesetz. [2]) Ebenda fol. 138 verso: *Li numeri signalati detti quadri, cubi, censi di censi . . . che si chiamano dignita.* [3]) Ebenda fol. 146 verso. [4]) Ebenda Parte 2, fol. 153 recto. [5]) Ebenda Parte 3, fol. 3 verso und fol. 4 verso.

Er wird mithin selbst für diese und manche andere Versehen verantwortlich sein, entschuldigt durch zunehmende Kränklichkeit. Nur so ist es begreiflich, dass einmal von einem Rhombus mit der Seite 6 und den Diagonalen 10 und 20 die Rede ist[1]), als ob 5 und 10 die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse 6 sein könnten, während an einer anderen Stelle des folgenden Abschnittes[2]) vollkommen richtig ein Rhombus von der Seite 13 und den Diagonalen 10 und 24 besprochen wird. — Die durch eine Zeichnung unterstützte Beschreibung des *squadro*[3]), jenes von Feliciano (S. 481) genannten Winkelkreuzes zur Absteckung senkrechter Linien auf dem Felde, dürfte die erste sein, welche in einem Druckwerke vorkommt. Die Prüfung dieser Rechtwinkligkeit durch Wiederholung des Verfahrens, welches nach Drehung der Vorrichtung um 90^0 genau die gleichen Signalstangen wie vorher als richtig aufgestellt ergeben muss, und Anwendungen des Winkelkreuzes werden gelehrt. Das Ausmessen beliebig begrenzter Felder[4]) erfolgt durch Theilung in geradlinige Figuren mittels Hilfslinien, die man auf den Feldern selbst absteckt, oder bei Unzugänglichkeit der Felder um diese herum zu legen hat. Weitere im Leben nützliche Aufgaben beziehen sich auf Körperinhalte, woraus wir die Berechnung des Mauerwerkes rechtwinkliger und kreisrunder Thürme[5]) hervorheben. Ist d die Dicke, h die Höhe der Mauer, u_a und u_i der äussere beziehungsweise innere Umfang, so ist in beiden Fällen der Mauerinhalt $h \cdot d \cdot \frac{u_a + u_i}{2}$, wofür indessen eine Ableitung nicht gegeben ist.

Parte 4. Hauptinhalt dieser Abtheilung ist Flächen- und Körperberechnung. Bei der letzteren schliesst sich Tartaglia anfangs an Euklid, später an Archimed an, welche er als seine Quellen nennt. Bei den Flächenberechnungen ist auch auf andere Schriftsteller Rücksicht genommen, insbesondere werden Irrthümer von solchen bemerkt[6]). Boethius irrte, indem er Dreiecksfläche und Dreieckszahl mit einander verwechselte; Orontius Finaeus beging mannigfache geometrische Irrthümer; Stifel's Würfelverdoppelung ist falsch; Bovillus und ebenso Albrecht Dürer haben das Quadrat in einen flächengleichen Kreis verwandelt, indem sie diesem $\frac{8}{10}$ der Diagonale zum Durchmesser gaben u. s. w. Zeigt schon dieser mehr kritische Abschnitt, dass Tartaglia's unleugbare mathematische Begabung vielleicht vorzugs-

[1]) *General Trattato*, Parte 3, fol. 26 verso. [2]) Ebenda Parte 4, fol. 9 verso. [3]) Ebenda Parte 3, fol. 24 recto. [4]) Ebenda fol. 29 verso. [5]) Ebenda fol. 47 verso. [6]) Ebenda Parte 4, fol. 5 recto, 19 recto bis 20 recto, 21 recto, 22 recto und verso.

weise auf geometrischem Gebiete lag, so gewinnt diese Auffassung fast Gewissheit, wenn wir zur folgenden Abtheilung übergehen.

Parte 5. Hier sind Auflösungen von durch Zeichnung erfüllbaren Aufgaben unter Anwendung von Lineal und Zirkel mit beliebiger, mitunter auch mit unveränderlicher Zirkelöffnung[1]) vereinigt, welche unsere Achtung vor dem Erfinder auf hohe Stufe bringen. Vielfach giebt Tartaglia ganz bestimmte Zeitpunkte an, wann er diese, wann er jene Auflösung zu Wege gebracht haben will, freilich ohne diesen Angaben irgend einen äusseren Beleg hinzuzufügen, so dass wir bei der wiederholt erkannten Unglaubwürdigkeit Tartaglia's diesen Zeitbestimmungen kaum Gewicht beizulegen haben. Im Jahre 1530 z. B. will er die Aufgabe gelöst haben, in ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat einzuzeichnen, dessen eine Seite auf einer Dreiecksseite liegen sollte, und diese Aufgabe habe er alsdann auf den Fall eines ungleichseitigen Dreiecks erweitert[2]) (Fig. 94). Sei bc die grösste Seite des Dreiecks abc. Man ziehe die zu ihr senkrechte Höhe ad des Dreiecks und ferner in den Endpunkten b, c die Senkrechten bf und ce, beide von gleicher Länge mit bc. Die Geraden fd, ed schneiden alsdann ab, ac in h, g, und diese Punkte sind zwei Eckpunkte des Quadrates, dessen zwei andere Eckpunkte i, k gefunden werden, indem man von h, g Senkrechte hi, gk auf die Grundlinie bc fällt. Es ist $\triangle cge \backsim agd$ und $\triangle bhf \backsim ahd$. Folglich $gc : ce = ga : ad$ und $fb : bh = da : ah$, welche letztere Proportion wegen $fb = ce$ auch $ce : bh = da : ah$ geschrieben werden kann. Vervielfacht man beide Proportionen mit einander, so entsteht $gc : bh = ga : ah$ und folglich ist $gh \parallel bc$. Die Rechtwinkligkeit des Vierecks $ghik$ ist damit bewiesen, die Gleichseitigkeit bleibt noch fraglich. Nun ist

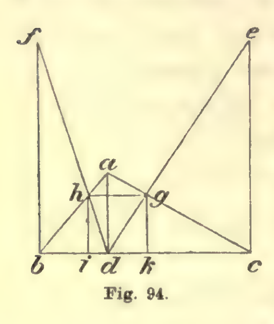


Fig. 94.

$$cd : ce = dk : gk, \quad db : bf = di : ih$$

oder wegen $ce = bf$ und $gk = ih$ auch $db : ce = di : gk$. Vereinigung der beiden Proportionen liefert $(cd + db) : ce = (dk + di) : gk$ d. h. $bc : ce = ik : gk$. Aber $bc = ce$, also auch $ik = gk$. Die nächste Aufgabe verlangt statt des eingezeichneten Quadrates ein Rechteck, dessen Seiten im Verhältnisse von $1 : 2$ stehen, und dessen eine

[1]) Ausführliche Auszüge bei W. M. Kutta, Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung in Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol Deutschen Academie der Naturforscher. Bd. 71 Nro. 3. Halle 1897. [2]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 18 recto und verso.

grössere Seite auf der grössten Dreiecksseite liege. Der einzige Unterschied in der Zeichnung gegen vorhin besteht (Fig. 95) darin, dass die Senkrechten bf, ce in den Endpunkten der Grundlinie nicht mehr der ganzen, sondern der halben Grundlinie gleich gemacht werden. Im Uebrigen ist auch die Beweisführung bis zur Herstellung der Proportion $bc:ce = ik:gk$ buchstäblich abzuschreiben, dann heisst es weiter $bc = 2ce$, also auch $ik = 2gk$, und das Verlangte ist erfüllt. Die Bedeutung dieser zweiten Aufgabe besteht darin, dass sie die Lösung einer dritten Aufgabe vermittelt, der Aufgabe, in ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck ein Quadrat derart einzuzeichnen, dass dessen vier Ecken auf ebensovielen Fünfecksseiten liegen. Werden (Fig. 96) die Fünfecksseiten bc, ed bis zum Durchschnitte in g verlängert, werden sodann in die Dreiecke abg, aeg die Rechtecke $hilk$, $ilmn$ mit Seiten

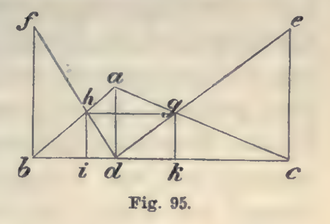


Fig. 95.

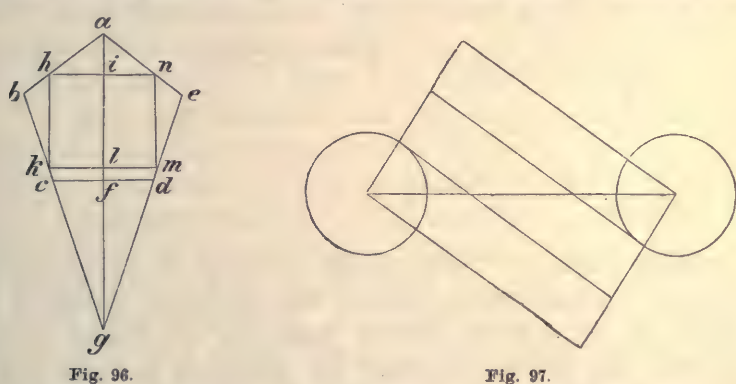


Fig. 96.

Fig. 97.

im Verhältnisse von 1 : 2 eingezeichnet, so muss $hkmn$ das verlangte Quadrat sein. Diese Aufgabe ist die sechste von denen, welche Ferrari am 1. Juni 1547 in seinem dritten Cartello stellte, und Tartaglia gab die Auflösung schon in seiner dritten Risposta am 9. Juli 1547, allerdings ohne einen Beweis beizufügen, doch ist nicht denkbar, dass er zufällig und ohne den Grund des Verfahrens einzusehen auf dasselbe verfallen sein sollte. — Unter den mit unveränderter Zirkelöffnung zu lösenden Aufgaben verlangt die erste: eine Strecke in eine beliebig gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen[1]). Um die Endpunkte der Strecke werden (Fig. 97) mit dem gegebenen Zirkel Kreise gerissen und auf denselben Bögen von 60^0 vom Durchschnittspunkte der Strecke aus aufgetragen, auf dem einen Kreise nach oben, auf dem anderen nach unten. Die Mittelpunkte der Kreise verbindet man

[1]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 22 verso.

mit den so auf den Kreisen selbst bestimmten Punkten durch Halbmesser, welche einander parallel verlaufen, und welche bis zu n-facher z. B. dreifacher Länge verlängert werden. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte auf beiden verlängerten Halbmessern schneiden, wie man erkennt, die gegebene Strecke in den gesuchten Punkten. Eine ganze Menge, nämlich 67 von den im Ganzen 75 in den euklidischen Elementen gelösten Aufgaben werden unter gegenseitiger Benutzung und mit unveränderter Zirkelöffnung behandelt[1]). Wir begnügen uns damit, die Behandlung der beiden ersten Aufgaben anzudeuten. Erstens sei (Fig. 98) über einer gegebenen Strecke ab ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Von a aus in der Richtung gegen b schneidet man mit der gegebenen Zirkelöffnung auf der, wenn nothwendig verlängerten ab die ad ab, und ebenso von b aus die bc in

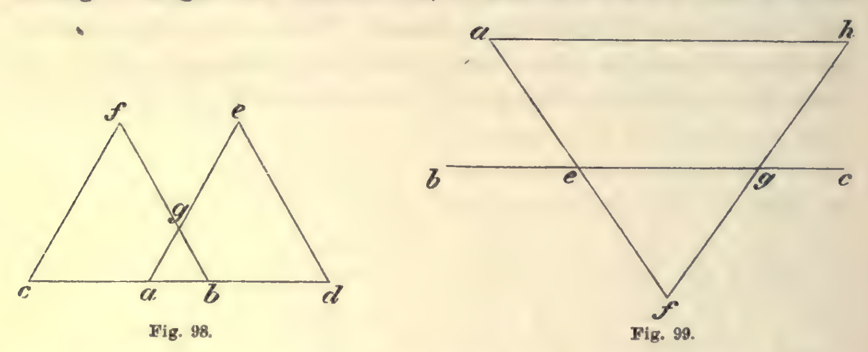


Fig. 98. Fig. 99.

der Richtung gegen a. Ueber ad und bc die gleichseitigen Dreiecke ade, bcf zu zeichnen gelingt sofort, und mit diesen Dreiecken sind die Seiten bf, ae gegeben, welche beide mit ab Winkel von 60^0 bilden, also den dritten Eckpunkt des gesuchten Dreiecks abg als Durchschnittspunkt besitzen. Zweitens sei von einem Punkte a aus eine Parallele zu einer gegebenen Geraden bc zu ziehen. Die gegebene Zirkelweite reiche (Fig. 99) von a bis zu dem Punkte e auf bc. Man zieht ae und verlängert um $ef = ac$. Dann schneidet man von f aus den Punkt g der bc ein, so dass $fg = ef$, verlängert um $gh = fg$ und zieht ah als die gewünschte Parallele. Ist die Zirkelweite so gering, dass mit ihr von a aus kein Punkt e der Geraden bc getroffen wird, so zieht man eine ganz beliebige ae und wählt auf ihr einen, oder wenn nothwendig mehrere Zwischenpunkte a_1, a_2 . . ., die alle weniger von einander und zuletzt von e entfernt sind, als die gegebene Zirkelweite, worauf man Hilfsparallelen zieht, bis man zuletzt zu derjenigen Parallelen gelangt, welche durch a hindurchgeht.

---

[1]) *General Trattato* Parte 5, fol. 64 recto bis 81 recto.

Wir stellen diesen geistreichen Constructionen Tartaglia's eine von denen gegenüber, die Ferrari im October des Jahres 1547 veröffentlichte[1]). Von dem grösseren Schenkel eines Winkels, und zwar vom Scheitelpunkte aus, ein Stück abzuschneiden, welches dem kleineren Schenkel gleich sei. Zunächst wird (Fig. 100) $\sphericalangle\, bac$ durch die ad halbirt, was mit jeder Zirkelweite möglich ist, dann wird mit der gegebenen Zirkelweite be von b aus der Punkt e auf der ad, von e aus durch $ef = be$ der Punkt f auf der ac bestimmt, so ist $af = ab$. Diese Construction versagt allerdings, wenn die Zirkelweite be kleiner als die senkrechte Entfernung von b nach ad ist. Dann wird $\sphericalangle\, bad$ wiederholt durch ad_1, vielleicht auch noch $\sphericalangle\, bad_1$ durch ad_2 u. s. w. halbirt und einzigweis $ab = \cdots = af_2 = af_1 = af$ hervorgebracht, wo $f_1, f_2, \ldots$ Punkte jener Hilfslinien sind. Dass Ferrari sich mehrfach mit der Geometrie mit unveränderter Zirkelweite beschäftigte, hat auch Cardano im XV. Buche seines Werkes De subtilitate von 1550 bezeugt[2]).

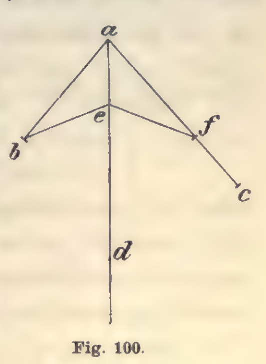


Fig. 100.

Die Leistungen Tartaglia's auf dem gleichen Gebiete gehen indessen um einen bedeutenden Schritt über alles, was von Anderen geliefert wurde, hinaus. Er war der Einzige, welcher auch auf Kegelschnitte bezügliche Aufgaben mittels unveränderter Zirkelöffnung zu lösen wusste[3]). In dem gleichen 5. Abschnitte, aus welchem wir wie aus dem 3. und 4. nur Geometrisches berichten konnten, begegnet dem Leser sehr unvermuthet eine Aufgabe ganz anderer Art[4]). Die Zahl 8 soll in zwei Theile zerlegt werden, welche mit einander und überdies mit ihrer Differenz vervielfacht das grösstmögliche Product hervorbringen; eine Aufgabe aus der Lehre von den Maximalwerthen einer Function ist also gestellt und, fügen wir hinzu, richtig gelöst. Die Regel, sagt Tartaglia, sei folgende: Man müsse 8 halbiren, das Quadrat der Hälfte um sein Drittel vermehrt sei alsdann das Quadrat der Differenz der beiden Theile. In Buchstaben kleidet sich die Regel folgendermassen. Sei a als Summe der beiden Theile $x + y$ gedacht, so wird

$$(x-y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$$

und

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}};$$

[1]) *Cartello V*, pag. 29. [2]) Cardano III, 589—592. [3]) *General Trattato*, Parte 5, fol. 81 verso bis 83 verso. [4]) Ebenda fol. 88 verso.

im gegebenen Einzelfalle $a = 8$ sind die beiden Theile $4 + \sqrt{5\frac{1}{3}}$, $4 - \sqrt{5\frac{1}{3}}$. Das ist vollständig richtig, denn prüfen wir nach dem heutigen Verfahren und setzen $\frac{a}{2} + z$, $\frac{a}{2} - z$ als die beiden Theile, $2z$ als die Differenz, so soll $2z\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \frac{a^2 z}{2} - 2z^3$ zum Maximum werden. Das bedingt $\frac{a^2}{2} - 6z^2 = 0$ und

$$z = \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad \frac{a}{2} + z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

Wie hat aber Tartaglia die Regel gefunden? Der Grund, sagt er, hänge von der „neuen Algebra" ab, und darunter ist wohl die Algebra der kubischen Gleichungen verstanden. Ein sehr geistreicher Wiederherstellungsversuch von Tartaglia's Verfahren ist folgender[1]). Wenn $\frac{a^2 z}{2} - 2z^3$ einen Maximalwerth m besitzen soll, so kommt es auf die Auflösung der Gleichung $\frac{a^2 z}{2} - 2z^3 = m$ oder $z^3 + \frac{m}{2} = \frac{a^2}{4} z$ an. In der Ars magna des Cardano war gelehrt (S. 504), dass diese Gleichung mittels $y^3 = \frac{a^2}{4} y + \frac{m}{2}$ gelöst werde, indem

$$z = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}}$$

sei. Der grösste Werth, den y annehmen darf, so dass z reell bleibt, geht aus $\frac{a^2}{4} - \frac{3y^2}{4}$ hervor, d. h. ist $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$, und dieser liefert $z = \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{12}}$, wie oben. Der grösste Werth von y liefert aber m als Maximum, denn $m = 2y^3 - \frac{a^2}{2} y = 2y\left(y^2 - \frac{a^2}{4}\right)$ muss mit y gleichzeitig wachsen, also auch gleichzeitig mit y seinen grösstmöglichen Werth erhalten.

Parte 6. Die Algebra bildet die letzte Abtheilung des General Trattato. Jeder Leser wird mit besonderer Begierde dieser Abtheilung sich zuwenden, denn Tartaglia, welcher (S. 488) Anderen, d. h. Cardano, den Vorwurf machte, sie füllten ihre Bücher mit breitgetretenen Geschichten, was er nicht wolle, wird doch diesem Grundsatze treu geblieben sein, wird doch Jahre hindurch Materialien aufgespeichert haben, von welchen er wiederholt versicherte, dass er sie besitze, und wird als Ort ihres Erscheinens die letzte Abtheilung seines grossen

---

[1]) H. G. Zeuthen, *Notes sur l'histoire des mathématiques. II. Tartalea contra Cardanum.* Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1893.

Handbuches ausersehen haben. Jeder Leser, sagen wir, wird mit solcher Erwartung an Parte 6 herantreten, wird beim Lesen die grösste Enttäuschung empfinden. Ausschliesslich quadratische Gleichungen oder solche, die auf quadratische sich zurückführen, wenn man eine Potenz der Unbekannten als neue Unbekannte wählt, sind behandelt. Dann folgt das Rationalmachen von Gleichungen, das Wegschaffen von Brüchen, Wurzelausziehungen aus beiden Seiten, schliesslich 56 Aufgaben zur Einübung aller Vorschriften, aber wesentlich Neues, Dinge, die vor dem General Trattato nicht auch schon bekannt gewesen wären, sucht man vergebens.

Tartaglia's schriftstellerische Laufbahn war beendet. Wir haben das Verdienstliche aus seinen theils während seines Lebens, theils nach seinem Tode erschienenen Schriften hervorgehoben. Wir haben wahrscheinlich gemacht, dass in Form von niedergeschriebenen Notizen nichts Weiteres von ihm vorhanden war. In das Innere seines Geistes einzudringen, zu ermitteln, welcherlei grosse oder kleine Entdeckungen dadurch zu Grunde gingen, dass Tartaglia sie nicht zu Papier brachte, ist ein Ding der Unmöglichkeit; aber denken wir uns Tartaglia's Schriften, so wie sie im Drucke vorliegen, seien niemals erschienen, so bleibt die Mathematik das, was sie ist, um keinen einzigen grösseren und fruchtbaren Gedanken ärmer. Sogar mit Bezug auf kubische Gleichungen gilt diese Wahrheit, insofern deren Behandlung durch Cardano der nachgelassenen Schrift Del Ferro's hätte entnommen werden können und dann gleiche Vervollkommnung durch ihn zu erfahren fähig war, wie es mit den Mittheilungen Tartaglia's erging. Und kommen wir auf die (S. 512) gestellte Frage zurück, ob Tartaglia wirklich fremde Erfindungen Cardano als seine eigenen mitzutheilen im Stande war, so müssen wir jetzt dieselbe voll und ganz bejahen. Wir glauben nicht an eine selbständige Auflösung der kubischen Gleichung durch Tartaglia. Ob Cardano freilich, ohne dass sein Geist durch die Begierde, dem Nebenbuhler es zuvorzuthun, zu übermenschlicher Anstrengung angespornt worden wäre, alles das vollbracht hätte, was er wirklich vollbrachte, ist eine andere Frage, und hier liegt ein, wenn auch sehr mittelbares Verdienst Tartaglia's um die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften vor. Als unmittelbares Verdienst haben wir nur zu bezeichnen, dass Tartaglia in seinem General Trattato das für lange Jahre unerreicht beste Handbuch schuf, fähig und bestimmt Paciuolo's Summa abzulösen und zu verdrängen.

Wir haben von Vervollkommnungen gesprochen, welche Cardano zu Tartaglia's Mittheilungen hinzufügte. Schon unser Bericht über die Ars magna gestattet diesen Ausdruck, aber Cardano's wissen-

schaftliche Thätigkeit war noch lange nicht beendigt, und wir müssen nunmehr seinen mathematischen Schriften uns zuwenden, welche er nach 1560 herausgab, und zu denen, welche erst nach seinem Tode aus seinem Nachlasse an die Oeffentlichkeit gelangten.

Im Jahre 1570 erschien in Basel ein stattlicher Folioband, welcher drei Schriften Cardano's in sich vereinigte. Die erste war das Opus novum de proportionibus, die zweite ein neuer Abdruck der Ars magna von 1545, die dritte führte den nie und nirgend erklärten Titel De regula Aliza, der durch unrichtige Transscription aus dem arabischen Worte *aʿizzâ* (schwierig anzustellen, mühselig, beschwerlich) entstanden sein kann[1]), und alsdann Regel der schwierigen Fälle bedeuten würde. Die *Ars magna* ist nach der ersten Nürnberger Ausgabe schon zur Genüge besprochen worden, wir haben es also nur mit den beiden anderen Schriften zu thun. Aus dem *Opus novum de proportionibus*[2]) dürfte Folgendes zu erwähnen sein. Die Schrift ist in Sätze, nicht wie andere Cardanische Werke in Kapitel getheilt. Im 137. Satze[3]) sind die Binomialcoefficienten als Erfindung Michael Stifel's bezeichnet und genau so wie in dessen Arithmetica integra zum Abdrucke gebracht. Man mag hierin eine Abfertigung der unbegründeten Anmassungen Tartaglia's (S. 524) von 1556 erkennen. Im 3. Satze[4]) sind die 15 zweielementigen Combinationen aus sechs von einander verschiedenen Elementen der Reihe nach gebildet. Im 170. Satze[5]) ist als Erfindung in Anspruch genommen, dass die Anzahl sämmtlicher Combinationen aus n von einander verschiedenen Elementen zu allen möglichen Classen von der 1. bis zur $n$ten einschliesslich durch $2^n - 1$ ermittelt werden. Dieser Satz veranlasst uns zu einer eigenthümlichen Frage. Michael Stifel[6]) führt ihn nämlich schon in seiner Arithmetica integra ausdrücklich als dem Cardano angehörend an. Demnach müsste der Satz 1544 veröffentlicht gewesen sein, was nur in der Arithmetik von 1539 der Fall sein konnte, wo wir aber vergeblich darnach gesucht haben. Auffallend genug ist es Cardano genau so wie uns ergangen, denn er bemerkt ausdrücklich[7]): Ich habe dieses schon anderwärts gelehrt, glaube aber bei der Rechnung mich geirrt zu haben; die Stelle selbst kann ich nicht auffinden. Der 70. Satz[8]) vergleicht zwei geometrische Progressionen von je drei Gliedern mit einander und behauptet, dass die Glieder der einen um die ausser der Reihe benutzten Glieder der

---

[1]) Diese Vermuthung rührt von H. Armin Wittstein her. [2]) Cardano IV, 463—601. [3]) Ebenda IV, 529. [4]) Ebenda IV, 467. [5]) Ebenda IV, 557. [6]) *Arithmetica integra* fol. 101 recto: *De regula quadam Hieronymi Cardani.* [7]) *Et hoc alias docui, quanquam credam me errasse in supputatione nam locum invenire non possum.* [8]) Cardano IV, 495.

anderen vermehrt eine arithmetische Progression liefern können, nicht aber wenn man die Glieder so zusammenfasse, wie ihre Anordnung in den geometrischen Progressionen es verlange; aus 2, 4, 8 und 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$ könne beispielsweise die arithmetische Progression $2+1$, $4+\frac{9}{4}$, $8+\frac{3}{2}$ gebildet werden. Cardano's Beweis in Buchstaben umgesetzt, sonst aber unverändert, ist folgender. Seien α, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\varepsilon^2$ und β, $\beta\eta$, $\beta\eta^2$ die gegebenen Progressionen, sei zugleich $\varepsilon > 1$ und $\eta > 1$, so kann $\alpha+\beta$, $\alpha\varepsilon+\beta\eta$, $\alpha\varepsilon^2+\beta\eta^2$ keine arithmetische Progression sein. Wegen der für ε und η ausgesprochenen Bedingung ist

$$\alpha\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon > \alpha\varepsilon - \alpha,$$
$$\beta\eta^2 - \beta\eta > \beta\eta - \beta$$

und durch Addition

$$(\alpha\varepsilon^2+\beta\eta^2) - (\alpha\varepsilon+\beta\eta) > (\alpha\varepsilon+\beta\eta) - (\alpha+\beta).$$

Ebensowenig kann aber $\alpha+\beta\eta^2$, $\alpha\varepsilon+\beta\eta$, $\alpha\varepsilon^2+\beta$ eine arithmetische Progression sein. Diesen letzteren Beweis führt allerdings Cardano nicht aus, er lässt sich aber leicht ergänzen:

$$(\alpha+\beta\eta^2) - (\alpha\varepsilon+\beta\eta) = \beta\eta(\eta-1) - \alpha(\varepsilon-1),$$
$$(\alpha\varepsilon+\beta\eta) - (\alpha\varepsilon^2+\beta) = \beta(\eta-1) - \alpha\varepsilon(\varepsilon-1).$$

Sollten beide Differenzen einander gleich sein, so müsste

$$\beta(\eta-1)^2 = -\alpha(\varepsilon-1)^2$$

oder eine Gleichung zwischen Positivem und Negativem stattfinden. Dass nämlich Cardano α, ε, β, η sämmtlich als positiv voraussetzt, geht schon aus seinem Beweise des ersten Falles hervor.

Auch Geometrisches und Mechanisches kommt in dem *Opus novum de proportionibus* vor. Die Sätze 159, 160, 161 stehen in innigem Zusammenhange[1]) und handeln von den Winkeln, welche Kreisbögen mit geraden Linien bilden. Diese Winkel hatten Campanus (S. 104) Schwierigkeiten bereitet, aber seither, also etwa 300 Jahre lang, hatte man sich nicht weiter darum gekümmert. Im XVI. Buche De subtilitate[2]) berührte Cardano den Gegenstand. Dann ging ein französischer Geometer, Peletier, von welchem erst im XIV. Abschnitte unseres Buches die Rede sein wird, wohin nach streng eingehaltener Zeitordnung auch Cardano's hierauf zielende Betrachtungen gehören würden, auf den Gegenstand genauer ein. Dann kamen eben die Cardano'schen Untersuchungen von 1570. Der Winkel, welchen (Figur 101) der Kreisbogen be mit der Geraden bc bildet, sagt

[1]) Cardano IV, 543—546. [2]) Ebenda III, 600—601.

Cardano, kann einem geradlinigen Winkel a nicht gleich sein. Jedenfalls kann man nämlich einen zweiten geradlinigen Winkel $cbd = a$ machen, so dass entweder bd innerhalb des Winkelraumes cbe fällt oder ausserhalb, letzteres wenn etwa $\sphericalangle\, cbd' = a$ wäre. In beiden Fällen müsste, wenn auch $\sphericalangle\, cbe = a$ wäre, der Theil gleich dem Ganzen sein. Daraus folgt weiter, dass ein solcher gemischtliniger Winkel durch eine Gerade nicht halbirt werden kann, weil

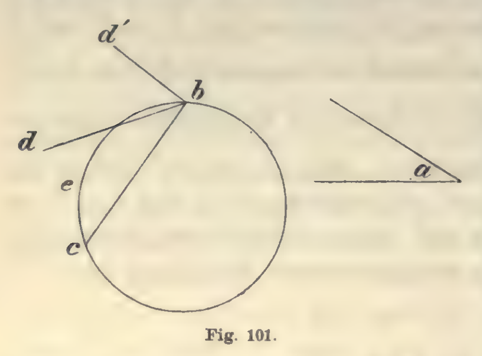


Fig. 101.

die Halbirungsgerade ihn in einen geradlinigen und einen wiederum gemischtlinigen Winkel zerlegen würde, die einander nicht gleich sein können. Weiter ist gewiss, dass zwischen zwei einander berührende Kreise eine Gerade nicht gezogen werden kann (Figur 102). Die Be-

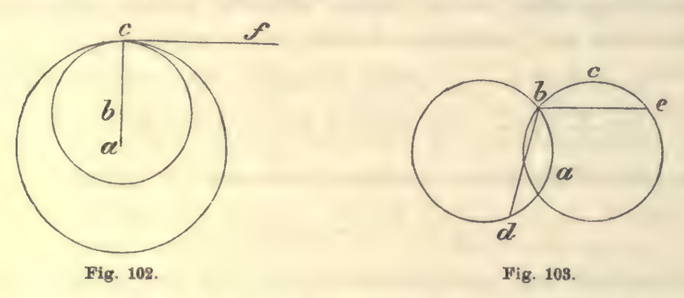


Fig. 102. Fig. 103.

rührungslinie cf an beide Kreise steht auf den zusammenfallenden Halbmessern ac und bc senkrecht. Jede Gerade, die mit cf einen noch so kleinen Winkel in der Drehungsrichtung gegen cb einschliesst, liegt innerhalb des Kreises um b, also nicht zwischen beiden Kreisen. Dem Winkel zweier gleichen, sich schneidenden Kreise ist ein geradliniger Winkel allerdings gleich (Figur 103). Sind die Sehnen bd, be einander gleich, so ist $\sphericalangle\, dba = ebc$, also auch $\sphericalangle\, dbe = abc$ durch gleichmässige Veränderung gleicher Grössen. Zwischen zwei gerade Linien, welche einen Winkel bilden, kann man Kreisbögen in beliebiger Anzahl einschalten, denn man braucht nur den geradlinigen Winkel durch irgend eine Gerade zu theilen und diese Gerade als Tangente des zu zeichnenden Kreises im Scheitelpunkte des Winkels zu benutzen. Schon diese Dinge seien alle wahr, aber schwer zu begreifen, und mit ihnen sind die Schwierigkeiten keineswegs abgeschlossen. Man behauptet z. B., durch fortgesetzte Halbirung einer Grösse müsse man zu einer solchen gelangen, die kleiner sei als irgend eine ge-

gebene Grösse und diese Wahrheit versage beim geradlinigen Winkel verglichen mit dem Winkel, welchen der Kreisbogen mit seiner Berührenden bildet, dem *angulus contactus*, wie Cardano ihn nennt, während anderwärts vom Contingenzwinkel gesprochen zu werden pflegte. Eine andere Schwierigkeit entsteht (Figur 104) bei in a sich berührenden Kreisen durch Ziehen der Sehnen afd und age. Der geradlinige Winkel ead ist gleich dem doppelt krummlinigen Winkel gae, und doch ist die Basis ge des letzteren wesentlich grösser als die Basis de des ersteren, kann wenigstens wesentlich grösser gemacht werden dadurch, dass man mit age beliebig nahe an afd heranrückt. Die Schwierigkeiten, zumal die der Untheilbarkeit des Contingenzwinkels (sei es zwischen Kreisbogen und Tangente, sei es zwischen zwei einander berührenden Kreisbögen) beruhen der Hauptsache nach darauf, dass, wenn auch der Satz richtig ist, ein Vermindertes müsse schliesslich kleiner werden als ein Bleibendes, hier eine Ausnahme eintritt, weil[1]) das Bleibende die Krümmung des Kreises ist, das sich Vermindernde ein bis zum Punkte abnehmender Winkel; die Krümmung des Kreises verhindere mithin rechtmässig die Theilung. Wir kommen, wie gesagt, im folgenden XIV. Abschnitte wiederholt auf diese Dinge zu reden und wollen hier nur Cardano's keineswegs einwandfreie Aeusserungen aufbewahren.

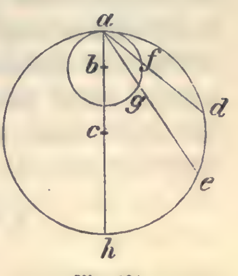


Fig. 104.

Der 173. Satz[2]) des *Opus novum de proportionibus*, bei welchem wir noch einen Augenblick verweilen, lehrt die Herstellung einer hin- und hergehenden geradlinigen Bewegung durch Drehungen. Es sei, erklärt Cardano, eine Erfindung des Ferrari; den Beweis aber habe dieser nicht zu führen vermocht, und er habe denselben desshalb ergänzt. Der 196. Satz[3]) beschäftigt sich mit dem sogenannten Rade des Aristoteles (Bd. I, S. 241). Cardano hilft sich mit ziemlich weitläufigen Redensarten um die Sache herum, statt dass er eine Erklärung für das nicht abzuleugnende Dilemma gäbe. Immerhin ist diese Betrachtung gleich der vorerwähnten über gemischtlinige Winkel geschichtlich bemerkenswerth. Man erkennt das erstmalig wieder auftauchende Bestreben, Fragen der Veränderung zu beantworten, neben dem Sein auch das Werden von Raumgebilden der mathematischen Betrachtung zu unterwerfen.

---

[1]) *cum ergo circuli curvitas maneat et angulus tendat in punctum perpetua diminutione, necesse est, ut curvitas circuli impediat divisionem recte.* [2]) Cardano IV, 560—561. [3]) Ebenda IV, 575—576.

Von ungleich grösserer Bedeutung ist die *Regula Aliza*[1]). Der letzte Absatz des 5. Kapitels dieses Buches spricht sich dahin aus, es sei leicht, einen, auch wohl mehrere Wurzelwerthe, *aestimationes*, zu entdecken, wenn die Gleichungsconstante eine zusammengesetzte Zahl sei; sei sie dagegen Primzahl, so sei es schwierig, eine einzige Wurzel zu finden[2]). Wenn auch nicht in klarsten Worten gesagt, ist die Entstehung der Gleichungsconstante als Product der Wurzelwerthe hier mindestens angedeutet, und das 17. Kapitel *Quot modis numerus possit produci ex non numero*[3]), d. h. auf wie viele Arten eine ganze Zahl das Product irrationaler Factoren sein kann, mit Beispielen wie

$$\left(3\tfrac{1}{5}+\sqrt{\tfrac{6}{25}}\right)\left(3\tfrac{1}{5}-\sqrt{\tfrac{6}{25}}\right)=10$$

und andere, zeigt, dass wir jene Andeutung richtig verstehen. Im 46. Kapitel[4]) ist eine Gleichung sechsten Grades, allerdings eine solche besonderer Gestalt, nämlich $x^6+ax^4+a^2x^2+a^3=bx^3$, dadurch zur Auflösung gebracht, dass Cardano sie als Eliminationsergebniss zweier Gleichungen auffasst, ein so neuer, eigenthümlicher Gedanke, dass er der Hervorhebung würdig ist. Setzt man

$$xy=a,\quad x^3+y^3+x^2y+xy^2=b,$$

so entsteht mittelst $y=\frac{a}{x}$ die vorgelegte Gleichung, aber auch eine andere Behandlung wird zulässig. Aus $xy=a$ folgt

$$2a(x+y)=2x^2y+2xy^2=(x+y)^3-x^3-y^3-x^2y-xy^2=(x+y)^3-b$$

und daraus $(x+y)^3=2a(x+y)+b$, eine Gleichung, welche nach $x+y$ aufgelöst werden kann; da überdies das Produkt $xy=a$ bekannt ist, so ist auch x und y einzeln als bekannt anzusehen. Neben der algebraischen Auflösung von Gleichungen ist Cardano auch die geometrische Construction nicht fremd, welche Wurzelwerthe mittels Durchschnitten von Kegelschnitten z. B. einer Parabel und einer Hyperbel bestimmen lässt. Weiss er doch, dass die Griechen schon dieses Verfahren übten, wo es um die Aufgabe der Würfelverdoppelung sich handelte, und dass Eutokius aus älteren Quellenschriften das Wichtigste überlieferte. Er, Cardano, sei über diesen einfachsten Fall kubischer Aufgaben weit hinausgegangen. Insbesondere steht

---

[1]) Cardano IV, 377—434. Der Erste, der dieses ebenso schwierige als inhaltreiche Buch verstand, war Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra II passim*, besonders pag. 331, 415, 441—484.
[2]) Ebenda IV, 384: *Quintum, quod videmus numerum aequationis si sit compositus, ut* 18, 12, 24 *facile habere aestimationem et plures etiam, si autem primus difficile est invenire unam solam.* [3]) Ebenda IV, 393. [4]) Ebenda IV, 421—422.

die Gleichung $x^3 + 192 = 12x^2$ dabei im Vordergrunde[1]). Den vorwiegend umfassendsten Theil des Buches *De regula Aliza* hat Cardano jedoch der Betrachtung derjenigen Fälle gewidmet, bei welchen die Formel Del Ferro's unter der Kubikwurzel Ausdrücke auftreten lässt, welche selbst Quadratwurzeln aus Negativem enthalten, und dass er dabei, sowohl wegen der noch immer fehlenden allgemeinen Symbolik, als wegen der nur sehr langsam von der griechischen Gewohnheit der Unterscheidung aller überhaupt denkbarer Sonderfälle sich losreissenden Methodik, zahllose Unterfälle zu beachten sich veranlasst sieht, macht gerade die Schwierigkeit des Buches aus, ganz abgesehen davon, dass auch nicht wenige Druckfehler dem Verständniss im Wege stehen[2]). Wie sehr Cardano das Bewusstsein hatte, dass hier ein Unentbehrliches durch ihn geliefert sei, geht aus einer Bemerkung hervor, welche dem 12. Kapitel der Ars magna in der Basler Ausgabe hinzugefügt wurde, in welcher er den Leser für die hier erwähnten Fälle der Unmöglichkeit geradezu auf die *Regula Aliza* verweist[3]).

Wir haben, wie schon (S. 532) gesagt worden ist, auch noch mathematische Schriften von Cardano, welche in seinem Nachlasse aufgefunden und des Druckes würdig erachtet worden sind. Dazu gehört das (S. 499—500) erörterte Kapitel *De numerorum proprietatibus*, das ebenda im Vorbeigehen genannte Bruchstück *De integris*, aber auch Anderes, welches uns jetzt beschäftigen soll. Dem Buche *De ludo aleae*[4]), über das Würfelspiel, entnehmen wir, dass der Verfasser, wie er von der Leidenschaft des Spieles erfasst war, wie er von den dabei möglichen Betrügereien Kenntniss besass, auch den Fragen Beachtung schenkte, welche mathematischer Beantwortung zugänglich sind. Er weiss ganz genau, dass mit zwei Würfeln 6 Paschwürfe und 15 ungleiche Würfe möglich sind, von welchen letzteren aber jeder doppelt auftritt, so das im Ganzen 36 Würfe vorhanden sind. Er weiss, dass bei 3 Würfeln es 6 Dreipasche giebt, 30 Zweipasche, deren jeder dreimal vorkommt, 20 ungleiche Würfe, deren jeder sechsmal vorkommt. Die Gesammtzahl der Würfe ist 216. Ob er diese richtigen Zahlen durch Formeln, ob mindestens theilweise durch Aufzählung der Einzelfälle sich verschafft hat, ist nicht gesagt, doch hat eben wegen dieses Schweigens das letztere viel für sich. Für zahlreich angestellte Versuche spricht jedenfalls ein Ausdruck, der das Zusammentreffen von Vermuthung und Ereigniss bei häufiger Wieder-

---

[1]) Cardano IV, 389—390, Caput 12: *De modo demonstrandi geometrice aestimationem cubi et numeri aequalium quadratis.* [2]) So ist ebenda IV, 384 im 6. Kapitel der Satz R $\bar{p}$ *est,* ℞ $\bar{m}$ *quadrata nulla est iuxta usum communem* dadurch für Viele unverständlich geworden, dass im Drucke das Komma nach *est* fehlt. [3]) Ebenda IV, 251. [4]) Ebenda I, 262—276.

holung betrifft[1]) und damit an das Gesetz der grossen Zahlen der späteren Zeit denken lässt. Noch viel deutlicher spricht aber Cardano dieses Gesetz an einer anderen Stelle aus[2]). Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln n-mal nach einander grad zu werfen, und dass darauf im Verhältnisse von $1 : (2^n - 1)$ zu wetten sei; bei unendlicher Anzahl der Würfe werde das Ergebniss mit der Erfahrung übereinstimmen, denn die Länge der Zeit ist es, welche alle Möglichkeiten zeigt.

Einem Werke *Ars magna arithmeticae*[3]) hat Cardano selbst einen hohen Werth beigelegt. Es umfasst 40 Sätze und daran anschliessend ebensoviele Aufgaben. Es werde, sagt der Verfasser in der Widmung an den Bischof von Burgo Sancti Sepulchri, ein Zeugniss von ewiger Dauer, *aeternum testimonium*, für die Trefflichkeit des Mannes abgeben, dem es zugeeignet sei. Nur zwei Dinge seien fremden Ursprunges und ihrem Erfinder ausdrücklich zugewiesen, alles Uebrige gehöre ihm selbst an. Jene fremden Erfindungen sind von Ferrari und beziehen sich auf Gleichungen 3. Grades mit allen vier Gliedern, deren Erörterung im 39. Kapitel vorgenommen ist[4]); sie besagen, dass

$$x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}a^2x = b$$

und

$$x^3 + \frac{1}{3}a^2x = ax^2 + b$$

leicht gelöst werden können. Die Meinung ist offenbar die, man solle jenen beiden Gleichungen die Umformung in

$$\left(x \pm \frac{a}{3}\right)^3 = b \pm \frac{a^3}{27}$$

geben und dann die Kubikwurzel ausziehen. Cardano fügt dann eine ebenfalls viergliedrige Gleichung 4. Grades: $x^4 + a^2x^2 = 2ax^3 + b^2$ hinzu[5]), welche durch $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ erfüllt werde. Der leicht zu erkennende Gedankengang verlangte die Umwandlung in

$$(ax - x^2)^2 = b^2,$$

woraus die Folgerung $ax - x^2 = b$ beziehungsweise $x^2 + b = ax$ gezogen wurde, welcher die gegebenen Wurzelwerthe genügen. Dass Cardano nicht auch $(x^2 - ax)^2 = b^2$, $x^2 = ax + b$ zu Hilfe nahm, um zu $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ zu gelangen, ist vielleicht darin begründet,

---

[1]) Cardano I, 265: *Haec igitur cognitio est secundum coniecturam et proximiorem, et non est ratio recta in his. Attamen contigit, quod in multis circuitibus res succedit proxima coniecturae.* [2]) Ebenda I, 267: *In infinito numero iactuum id contingere proxime necesse est, magnitudo enim circuitus est temporis longitudo, quae omnes formas ostendit.* [3]) Ebenda IV, 303—376. [4]) Ebenda IV, 352—353. [5]) Ebenda IV. 356.

dass er einem wesentlich negativen Wurzelwerthe auszuweichen wünschte, während andererseits gerade bei Cardano eine solche Scheu nicht recht begreiflich ist. Weitaus die bedeutsamste Bemerkung findet sich im 18. Kapitel[1]). Sind die äussersten Glieder, heisst es dort, einander gleich, so giebt es nur eine Wurzel, und diese ist immer positiv ohne Rücksicht auf den Grad der Gleichung; sind dagegen die äussersten Glieder Zwischengliedern gleich, so giebt es immer mehr als eine Wurzel, und in diesem Falle kommen auch Unmöglichkeiten vor. Als Beispiele des ersten Satzes sind angegeben:

$$x^2 = 3x + 10,\quad x^2 + 3x = 10,\quad x^3 = 3x^2 + 6,\quad x^3 + 3x^2 = 6,$$
$$x^3 = 4x + 10,\quad x^3 + 10x = 20,\quad x^3 + 3x^2 = 7x + 20,$$
$$x^3 = 3x^2 + 7x + 20,\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 = 10,\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 = 20x + 10;$$

als Beispiele des zweiten Satzes:

$$x^2 + 10 = 8x,\ x^3 + 10 = 6x^2,\ x^3 + 10 = 6x,\ x^3 + 10 = 10x^2 + 3x,$$
$$x^4 + 3x^3 + 10 = 2x^2 + 5x.$$

Diese Beispiele erklären, was an dem Ausdrucke der Sätze dunkel geblieben sein mag. Cardano behauptet hier, allerdings ohne irgend einen Beweis, dass, falls eine Gleichung n-ten Grades auf Null gebracht nur einen Zeichenwechsel der Glieder wahrnehmen lasse, immer eine und nur eine positive Wurzel vorhanden sei; zweimaliger Zeichenwechsel sei das Kennzeichen mehrerer positiver oder lauter imaginärer Wurzeln; auf vollständiges oder unvollständiges Vorhandensein der Gleichungsglieder kommt es nicht an. — Um auch ein Beispiel von in diesem Buche enthaltenen Aufgaben vorzuführen, wählen wir die 37.[2]) (Figur 105). Ein bei A rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Höhe AD gezogen ist, soll aus den Angaben $AB + AC = 12$, $BC - AD = 6$ gefunden werden. Nun ist bekannt aus geometrischen Gründen

Fig. 105.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

und $2AB \cdot AC = 2BC \cdot AD$. Durch Addition beider Gleichungen entsteht $(AB + AC)^2 = 144 = BC^2 + 2BC \cdot AD$. Nun sei $AD = x$, mithin $BC = x + 6$, so nimmt die gefundene Gleichung

[1]) Cardano IV, 323: *Septimum notandum est quod cum fuerint denominationes extremae aequales extremis, semper aequatio erit una tantum et casus possibilis, quotquot fuerint denominationes. Cum vero denominationes intermediae fuerint aequales extremis tunc semper erunt plures aequationes in quaesito et casus poterit cum hoc etiam esse impossibilis.* [2]) Ebenda IV, 372.

die Gestalt an $3x^2+24x+36=144$, woraus $x=AD=\sqrt{52}-4$, $x+6=BC=\sqrt{52}+2$. Ferner $AB^2+AC^2=BC^2=56+\sqrt{832}$ gemeinschaftlich mit $AB+AC=12$. Sei $AC=6+y$, $AB=6-y$, so geht die erstere Gleichung über in $72+2y^2=56+\sqrt{832}$ und $y=\sqrt{\sqrt{208}-8}$, also $AC=6+\sqrt{\sqrt{208}-8}$, $AB=6-\sqrt{\sqrt{208}-8}$. Dieser sehr einfachen Entwickelung setzt dann Cardano eine doppelte Grenzbedingung für den Unterschied 6 zwischen BC und AD hinzu. Er müsse kleiner als die Summe von AB und AC sein, und das liegt auf der Hand, denn $AB+AC>BC$, also um so mehr $AB+AC>BC-AD$. Ferner aber müsse jener Unterschied grösser sein als die Quadratwurzel aus $\frac{1}{8}$ vom Quadrate von $AB+AC$. Bei der Aufstellung dieser Grenze kann Cardano etwa folgenden Gedankengang eingeschlagen haben (Figur 106). Die Spitzen sämmtlicher über BC als Hypotenuse beschriebener rechtwinkliger Dreiecke liegen auf dem Halbkreise BA_0A_1C. Unter ihnen zeichnet sich das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck BA_0C durch folgende Eigenschaft aus: Es hat die grösste Höhe A_0D_0 und desshalb auch den grössten Flächeninhalt. Letzterer wird durch $\frac{1}{2}BC\cdot A_0D_0$,

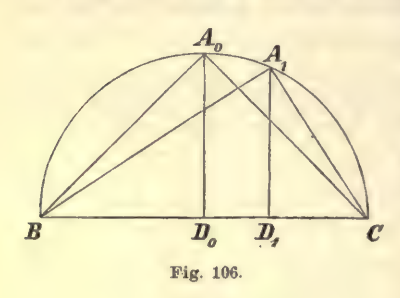


Fig. 106.

aber auch durch $\frac{1}{2}A_0B\cdot A_0C$ gemessen. Somit ist $\frac{1}{2}A_0B\cdot A_0C$ und damit zugleich $2A_0B\cdot A_0C$ ein Maximum. Weil aber $A_0B^2+A_0C^2=A_1B^2+A_1C^2=BC^2$ constant ist, muss des Weiteren $A_0B^2+A_0C^2+2A_0B\cdot A_0C=(A_0B+A_0C)^2$ ein Maximum sein, oder die Lage von A in A_0 macht das Quadrat der Kathetensumme des Dreiecks ABC zu einem Maximum. Ferner macht, wie wir schon sagten, die gleiche Lage A_0D_0 zu einem Maximum, also $BC-A_0D_0$ zu einem Minimum, so dass jedes $BC-AC\geqq BC-A_0D_0$ sein muss. Nun ist $BC-A_0D_0=D_0C=\frac{A_0C}{\sqrt{2}}=\frac{A_0B+A_0C}{2\sqrt{2}}$ $=\sqrt{\frac{(A_0B+A_0C)^2}{8}}\geqq\sqrt{\frac{(AB+AC)^2}{8}}$, folglich um so gewisser $BC-AD\geqq\sqrt{\frac{(AB+AC)^2}{8}}$.

Noch andere nachgelassene mathematische Schriften des Cardano sind dem Drucke übergeben worden, aus welchen indessen Auszüge zu veranstalten kaum verlohnt. Der *Sermo de plus et minus*[1]) würde

vielleicht trotz seiner Kürze am ersten eine Bemerkung gestatten, wenn diese kleine Schrift nicht bereits unter dem Einflusse von Bombelli's Algebra verfasst wäre, von welcher im folgenden Abschnitte die Rede sein wird. Jene Algebra erschien in erster Auflage 1572, Cardano starb 1576; der Sermo de plus et minus gehört sonach jedenfalls zu dem Letzten, was aus seiner Feder stammte.

Fassen wir nun auch den Gesammteindruck dessen zusammen, was unsere verschiedenen Auszüge aus Cardanischen Schriften uns geliefert haben, so finden wir folgende wesentliche Dinge, die als Cardano's und Ferrari's Eigenthum gesichert sind. Für Cardano erhalten wir: eine näherungsweise Auflösung von Gleichungen höherer Grade, das Bewusstsein des Vorhandenseins dreier Wurzeln einer kubischen Gleichung, die Kenntniss des Zusammenhanges des Coefficienten des quadratischen Gliedes in der kubischen Gleichung mit der Summe der Wurzeln, auch im Falle gleicher Wurzelwerthe, die Wegschaffung des quadratischen Gliedes in der kubischen Gleichung, eine Ahnung von dem Zusammenhange der Gleichungsconstanten mit den Wurzeln, eine Ahnung von dem Zusammenhange zwischen dem Zeichenwechsel innerhalb einer Gleichung und deren Wurzeln, das Rechnen mit Imaginärem, erstmalige richtige Beantwortung einzelner Wahrscheinlichkeitsaufgaben, Herumtasten an geometrischen Untersuchungen, welche das Wesen krummer Linien und ihren Gegensatz gegen Gerade betreffen. Für Ferrari bleibt: die Auflösung der ein kubisches Glied nicht enthaltenden Gleichung vierten Grades, die Umsetzung kreisförmiger Bewegung in geradlinige. Was blieb uns für Tartaglia? Grosse geometrische Gewandtheit, eine wirkliche Methode zum Rationalmachen von Brüchen mit zweigliedrigem Nenner, einige Reihenbetrachtungen, die Lösung einer Maximalaufgabe, neben zahlreichen Aneignungen fremdem geistigen Eigenthums, worunter wir die Auflösung von des quadratischen Gliedes entbehrenden kubischen Gleichungen zu rechnen schwerwiegende Gründe besassen.

Wir erachten es nicht als überflüssig, zu bekennen, dass die Werthschätzung, welche wir sonach Cardano und Ferrari angedeihen lassen müssen, und welche beide, insbesondere aber Cardano, unvergleichbar höher als Tartaglia stellt, geradezu im Gegensatze zu der Auffassung der bisherigen Geschichtsschreibung sich befindet[1]), dass aber die weitverbreiteten Irrthümer, beziehungsweise was wir für Irrthum halten, insgesammt dem Grundfehler entstammen, dass man erst die *Quesiti* des Tartaglia las und unter deren Einflusse erst die

---

[1]) Gherardi, an welchen wir uns mehrfach anlehnten, bildet selbstverständlich eine Ausnahme.

Ars magna des Cardano, während die Zeitfolge der Veröffentlichung das umgekehrte Verfahren nothwendig macht.

Eine kurze Bemerkung müssen wir uns noch gestattten, bevor wir diesen XIII. Abschnitt, welcher der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts gewidmet war, abschliessen. Schon seit Erfindung der Buchdruckerkunst begann die nationale Abschliessung wissenschaftlicher Bestrebungen mehr und mehr zu schwinden. Im XVI. Jahrhunderte ist sie schon nahezu verwischt. Die grossen Druckereien in Paris, in Nürnberg, in Basel haben eine europäische Bedeutung angenommen. Wir haben beispielsweise Schriften des Italieners Cardano an allen drei Orten in die Oeffentlichkeit treten sehen. Erleichtert, um nicht zu sagen ermöglicht, wird solches wissenschaftliche Weltbürgerthum durch die Einheit der wissenschaftlichen Sprache. Neue Dinge werden ziemlich ausschliesslich in lateinischer Mundart veröffentlicht. Damit ist aber eine andere Thatsache eng verbunden: Schriften, welche in dem einen Lande entstanden sind, werden verhältnissmässig rasch in dem anderen Lande gelesen, rufen Nachahmung oder Widerspruch hervor. Orontius Finaeus findet in Nonius einen geometrischen Gegner, während Tartaglia ihn wegen seiner Wurzelausziehungen anführt. Bouvelles und Dürer werden in Italien gelesen. Stifel wird von Cardano und Tartaglia benutzt, und er selbst benutzt Erfindungen Cardano's. Wir haben dieses schon mit Bezug auf solche Stellen der Arithmetica integra bemerkt, welche der Arithmetik Cardano's von 1539 entlehnt sind. Die Regula del modo übte ihren Einfluss auf die allgemeine Regel Stifel's zur Gleichungsansetzung und Auflösung, Cardanische Gleichungsbeispiele, welche mittels Addition derselben Glieder auf beiden Seiten behandelt werden, bilden den Schluss der Arithmetica integra. Aber auch die Cardanische Ars magna fand in Stifel einen verständnissvollen Leser, und der Ausgabe der Rudolff'schen Coss, welche Stifel 1553 besorgte, ist ein Anhang beigefügt, welcher mit den kubischen Gleichungen sich beschäftigt, welcher Del Ferro als den Erfinder der Auflösung nennt. Dass Tartaglia, den Cardano in der Ars magna Del Ferro zur Seite stellte, bei Stifel nicht einmal genannt ist, wird dahin gedeutet werden müssen, dass Stifel auch von dem Cardano-Tartaglia'schen Streite Kenntniss erhalten hatte und auf des Ersteren Seite stand.

Alle diese eingetretenen Veränderungen in der Geschichte der Wissenschaften werden in unserer Darstellung derselben ihren Wiederschein erkennen lassen müssen.

XIV. Die Zeit von 1550—1600.



67. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Classikerausgaben. Geometrie. Mechanik.

Die zum Schlusse des vorhergehenden Abschnittes angedeuteten Verhältnisse und die als Folgen derselben nicht mehr von Volk zu Volk zu trennende Entwickelung der Wissenschaften nöthigen uns, die seither von uns gebrauchte geographische Eintheilung der einzelnen Abschnitte zu verlassen. Trennt man aber nicht mehr von Volk zu Volk, ist es eben so unmöglich die chronologische Trennung von Jahr zu Jahr, oder von Jahrzehnt zu Jahrzehnt vorzunehmen, weil der Jahrgang des Druckes doch nicht übereinstimmt mit den oft langen Jahren der Vorbereitung, und weil ferner alsdann Dinge verschiedenster Gattung neben einander, getrennt dagegen von Verwandtem aufzutreten drohen, so bleibt nur übrig, den Stoff nach dem Inhalte der Schriften, welche wir zu nennen haben, zu ordnen. Recht mangelhaft ist allerdings auch diese Anordnung. Ein und derselbe Schriftsteller wird nicht selten an verschiedenen Stellen genannt werden müssen; seine eigene Bedeutung wird möglicherweise dabei nicht in einem richtigen Lichte erscheinen, insbesondere dann, wenn er das erste Mal, dass er auftritt, uns vielleicht grade seine schwächste Seite zukehrt. Wir hoffen hier dennoch eine Abhilfe treffen zu können dadurch, dass wir den wirklich bedeutenden Mathematikern am Schlusse eine Zusammenfassung widmen. Lebensschicksale derselben in so engen Grenzen, als die Anlage unseres Werkes sie fordert und gestattet, werden berichtet werden, wo der Name zuerst erscheint.

Wir beginnen mit solchen Schriftstellern, welche die Geschichte der Mathematik selbst zum Gegenstande ihrer Forschung machten.

Petrus Ramus[1]), mit französischem Namen Pierre de la

---

[1]) Ch. Waddington: *Ramus, sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris 1855). — Cantor in der Zeitschr. Math. Phys. II, 354—359; III, 133—143; IV, 314—315. — L. Am. Sédillot, Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France im *Bulletino Boncompagni* Bd. II und III (1869—1870). Ueber Ramus vergl. II, 389—418.

Ramée (1515—1572), gehörte zu den einflussreichsten Schriftstellern seiner Zeit, wozu ihn einestheils Beziehungen zu hochgestellten Persönlichkeiten, anderntheils eine ausgesprochen streitbare Geistesveranlagung machte, welche ihn in den Vordergrund von lebhaften Kämpfen stellte. Mit der These *Quaecunque ab Aristotele dicta essent commentitia esse* warf Ramus 1536 der ganzen, an allen Universitäten hochmächtigen Aristotelischen Schule den Fehdehandschuh hin. In den Hörsälen begann das geistige Ringen, aber an anderen Kampfplätzen und mit anderen als geistigen Waffen setzte es sich fort, bis die auf die Nacht des St. Bartholomäus folgende Nacht Ramus dem Dolche der Mörder überlieferte. Bis 1568 lebte Ramus in Frankreich, meistens in Paris. Dann entzog er sich den ihm dort drohenden persönlichen Gefahren durch eine mit königlicher Erlaubniss unternommene Reise nach Deutschland, die ausgesprochenermassen wissenschaftlichen Zwecken dienen sollte; Strassburg, Heidelberg, Frankfurt am Main, Nürnberg, Augsburg, Basel gehörten zu den besuchten Städten. Ueberall war Ramus im Dienste der von ihm vertretenen Sache thätig, überall knüpften sich an seinen Aufenthalt Streitigkeiten an. Im September 1570 kehrte er nach Paris zurück, welches er nicht wieder verliess. Von den zahlreichen Schriften, welche Ramus verfasste, nennen wir an dieser Stelle nur eine aus 3 Büchern bestehende von 1567, welche der Königin Katharina von Medicis gewidmet war[1]), und welche später, 1569 und häufiger, wiederholt gedruckt wurde, als die 3 ersten von 31 Büchern mathematischer Untersuchungen, *Scholae mathematicae*. Diese 3 Bücher stellen eine wirkliche Geschichte der Mathematik dar, natürlich in sehr bescheidenen Grenzen vermöge der äusserst geringen Mittel, über welche man damals noch verfügte, aber doch mit vorwiegender Benutzung solcher Quellen, welche heute noch als zuverlässige gelten. Beispielsweise hat Ramus offenbar sehr viel über griechische Mathematik aus Proklos entnommen, dessen Erläuterungen zum ersten Buche der euklidischen Elemente seit 1533, wie wir wissen (S. 406), durch Grynäus griechisch herausgegeben waren, während eine 1560 erschienene lateinische Uebersetzung weiter unten genannt werden wird. Ramus hat jedenfalls der griechischen Ausgabe sich bedient, da er wiederholt den griechischen Wortlaut anführt. Den deutschen Mathematikern hat Ramus eine fast übertriebene Bewunderung gezollt und sie insbesondere seinen Landsleuten als Muster hingestellt. Andrerseits wendet er sich freilich auch an deutsche Fürsten mit der Aufforderung, Professuren der Mathematik an ihren Universitäten zu errichten, und schlägt z. B. für Heidelberg

[1]) *P. Rami prooemium mathematicum in tres libros distributum.*

ausdrücklich Xylander als geeignete Persönlichkeit vor, einen Gelehrten, der uns bald beschäftigen wird. Der Inhalt der Geschichte der Mathematik gliedert sich für Ramus in vier Perioden. Er unterscheidet 1. eine chaldäische Periode von Adam bis zu Abraham; 2. eine egyptische Periode, beginnend von Abraham, der die Mathematik in dieses Land brachte. Beide Perioden zusammen sind auf vier Seiten abgehandelt. 3. Die griechische Periode von Thales bis zu Theon von Alexandrien füllt bei Ramus 34 Seiten. 4. Die neuere Mathematik werde, hofft Ramus, einen anderen Bearbeiter finden.

Ein zweiter Schriftsteller, welcher auf geschichtliche Untersuchungen sein Augenmerk richtete, war Bernardino Baldi[1]) (1553 bis 1617). Er ist in Urbino geboren. Sein Familienname war eigentlich Cantagallina, während der Name Baldi sich von einem Urgrossvater auf ihn vererbte. Baldi war in neuen und alten Sprachen hochgelehrt; er sprach z. B. französisch und deutsch und las geläufig arabisch. In der Mathematik war er Schüler des Commandinus, von welchem wir noch zu reden haben. Im Jahre 1586 zum Abte von Guastalla gewählt, beschäftigte Baldi sich von da an wesentlich mit theologischen und kirchenrechtlichen Fragen. Seine mathematisch-wissenschaftliche Thätigkeit war aber damit doch nicht abgeschlossen. Früchte derselben sind eine *Cronica de' Matematici* und *Vite de' Matematici* aus der Zeit bis 1596. Erstere erschien 1707 in Urbino im Drucke, letztere befanden sich handschriftlich in der reichen Sammlung des Fürsten Boncompagni in Rom; eine gewisse Anzahl der in ihnen enthaltenen Lebensbeschreibungen ist veröffentlicht[2]). Leicht hat sich Baldi, welcher zwölf Jahre sammelte, dann zwei Jahre zur eigentlichen Niederschrift verwandte, seine Aufgabe nicht gemacht. Wie schwierig sie aber für ihn war und blieb, zeigt schon ein Blick in die nach der Zeitfolge geordnete Mathematikerchronik. Jordanus ist ziemlich richtig anf 1250 angesetzt, sein Name aber *Hemorarius* geschrieben. Leonardo von Pisa dagegen erscheint mit richtigem Namen im Jahre 1400. So ungewiss war damals die Kenntniss von jenen beiden grossen Männern. Baldi hat seine Arbeit bis in die Zeit fortgesetzt, welcher er selbst angehörte. Tartaglia, Ramus,

---

[1]) Affo, *Vita di Monsignore Bernardino Baldi da Urbino* (1783). — Kästner II, 129—142. — Libri IV, 70—78. [2]) *Bulletino Boncompagni* an vielen Stellen, welche in dem Gesammtregister der XX Bände des *Bulletino* pag. 731 angegeben sind. Vergl. *Bull. Boncamp.* Bd. V, XII, XIX, XX. Die Vorrede zu den *Vite* vergl. XIX, 355—357. Auf der letzten Seite die Stelle: *Dodici anni ho io penato nel raccogliere da varij autori la materia di questa historia, e quasi in due ho dato la forma che si vede a l'edifitio.*

Clavius kommen noch bei ihm vor, Guidobaldo del Monte ist die letzte bei ihm genannte Persönlichkeit. Bei Ramus sind besonders die Scholae mathematicae gerühmt, welche also vermuthlich auch als mittelbare Quelle benutzt wurden. Die Vite behandeln meistens ältere Mathematiker, hauptsächlich Griechen, dann Araber, doch sind auch spätere Schriftsteller nicht vernachlässigt, Campanus[1]) z. B., der in der Chronik auf das Jahr 1264 angesetzt ist, in der ausführlicheren Lebensbeschreibung dagegen unrichtig auf 1200. Die einzelnen Lebensbeschreibungen sind selbst genau datirt, so die des Campanus vom 13. October 1588. Die Chronik dürfte also hier die spätere Bearbeitung sein. Um so auffallender ist es, dass die Lebenszeit nicht ihr entsprechend auch in den Vite richtig gestellt wurde.

Ein besonderes Kapitel aus der Geschichte der Mathematik hat 1557 und in verbesserter Auflage 1569 der bekannte Nürnberger Humanist Joachim Camerarius (1500—1574) bearbeitet, die Lehre von den Zahlzeichen und vom Rechnen[2]). Der sehr umständliche Titel sagt, dass die griechischen und römischen, sowie die sarracenischen oder indischen Zahlzeichen beschrieben würden, auch die Anfänge griechischer Logistik, endlich sei ein Ueberblick über die Arithmetik des Nikomachus gegeben. Das Büchlein ist auch heute noch lesenswerth und enthält manche schätzbare Einzelheiten.

Matthäus Hostus[3]), ein Sprachforscher und Münzenkundiger (1509—1587), war 53 Jahre lang Professor der griechischen Sprache in Frankfurt an der Oder. Er gab 1582 in Antwerpen eine 62 Seiten starke Schrift *De numeratione emendata veteribus Latinis et Graecis usitata* heraus, welche gleichfalls heute noch lesenswerth ist.

Geschichtlichen Arbeiten nahe verwandt sind die Bemühungen der Männer, welche Werke des Alterthums, sei es im Urtexte, sei es in Uebersetzungen, zum ersten Male oder neuerdings herausgaben.

Wir hätten deren eine grosse Menge zu nennen, wenn wir Vollständigkeit anstrebten. Wir begnügen uns damit, die wichtigsten hervorzuheben. Joachim Camerarius, von dem wir erst gesprochen haben, gab 1549 die beweislosen Sätze der sechs ersten Bücher der euklidischen Elemente griechisch und lateinisch heraus. Eine Vorrede dazu schrieb Rhäticus. Später wurde 1577 die gleiche Ausgabe noch einmal aufgelegt durch Moritz Steinmetz, sogar 1724 noch einmal durch L. F. Weisse[4]).

Pierre Mondoré[5]), lateinisch Petrus Montaureus, Biblio-

---

[1]) *Bulletino Boncompagni* XIX, 591—596. [2]) Kästner, I, 134—136.
[3]) Cantor, Mathem. Beitr. z. Kulturleb. d. Völker S. 159, Anmerkung 318.
[4]) Kästner I, 345—348. [5]) Montucla I, 564.

thekar der königlichen Bibliothek in Paris, veröffentlichte 1551 das zehnte Buch der euklidischen Elemente, später beabsichtigte er Weiteres folgen zu lassen. Aber sein langes Zurückhalten brachte den vorbereiteten Schriften den Untergang. In der Bartholomäusnacht wurde Mondoré getödtet, sein Arbeitszimmer geplündert. Die Handschriften seiner Werke wurden vernichtet.

Jean de la Pène[1]), ein Professor am Collège de France, der, 1528 in Aix geboren, 1556 erstmalig in Folge von Wettbewerb seine Lehranstellung erhielt, aber schon 1558 im Alter von kaum 30 Jahren starb, gab 1557 die Sphärik des Theodosius griechisch und lateinisch, im gleichen Jahre auch ebenso die optischen und musikalischen Schriften des Euklid heraus.

Dasselbe Jahr 1557 ist das Druckjahr der Ausgabe der euklidischen Elemente durch Jacques Peletier oder Peletarius, von welcher wegen der Anmerkungen weiter unten zu reden sein wird und 1557 war es auch, dass Pasquier Duhamel († 1565) einen Commentar zu der Sandeszahl des Archimedes herausgab[2]).

Der Zeitfolge wenig voraneilend nennen wir eine französische Euklidübersetzung durch Pierre Forcadel[3]), Buch I bis V seiner Euklidübersetzung erschienen 1564, Buch VII bis IX sodann 1566. Schon vor der Euklidübersetzung gab Forcadel 1561 eine französische Uebersetzung der Arithmetik des Gemma Frisius (S. 411), den er Gemme Phrison nannte, und nachmals 1570 wieder eine französische Uebersetzung des Algorithmus demonstratus (S. 63). Forcadel aus Beziers gehörte gleich Jean de la Pène zu den Schülern im engeren Sinne und zu den Freunden von Ramus, welcher ihm 1560 zur Erlangung der mathematischen Professur am Collège de France behilflich war, die er bis zu seinem Tode 1573 inne hatte. Forcadel, vielgerühmt und vielgetadelt, lehrte ausschliesslich in französischer Sprache, und zwar 1548 in Lyon, seit 1550 in nicht officieller Stellung in Paris. Eine Reise in Italien fällt vor 1561.

Schon 1562 war in Deutschland eine deutsche Euklidübersetzung erschienen, welcher wir, sowie einer anderen Uebersetzung aus der Feder des gleichen Gelehrten, uns etwas ausführlicher zuwenden müssen. Wilhelm Holzmann, weitaus bekannter unter dem Gelehrtennamen Xylander[4]), ist 1532 in Augsburg als Sohn armer

---

[1]) Montucla I, 564. — Sédillot im *Bulletino Boncompagni* II, 391 und 422. [2]) Poggendorff I, 616. [3]) Ebenda I, 722. — L. Am. Sédillot, Les professeurs de mathématique et de physique générale au Collège de France im *Bulletino Boncompagni* II, 424—427. — Fontès, Pierre Forcadel lecteur du Roy es Mathématiques in den *Mémoires de l'Academie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse.* 9. Série, T. VI (1894), VII (1895), VIII (1896). [4]) Freher,

Eltern geboren und 1576 als Professor der aristotelischen Logik in Heidelberg gestorben. Diese Stellung nahm er seit 1562 ein, nachdem er vorher vier Jahre Professor der griechischen Sprache gewesen war, und in dem letzten dieser vier Jahre überdies mathematische Vorlesungen gehalten hatte. Einer seiner wenig berühmten Vorgänger in diesem letzeren Fache war Marcus Morsheimer, welchen wir nur nennen, weil ein 1558 von ihm veröffentlichtes Buch[1]) das erste zu sein scheint, welches über Rechnungen des Rechtsverkehrs in den Druck gegeben wurde. Als Xylander die logische Professur übertragen wurde, welche in jeder Beziehung höhere Ansprüche befriedigte, als die untergeordnete mathematische Lehrthätigkeit der damaligen Zeit, wurde für diese Simon Grynäus der Jüngere (1539—1582) mit dem unverhältnissmässig geringen Jahresgehalte von fl. 60 nebst freier Wohnung angestellt, der Sohn eines Vetters jenes älteren Simon Grynäus, welcher die erste griechische Euklidausgabe veranstaltet hatte. Wilhelm Xylander also hat schon 1562 von Heidelberg aus eine deutsche Uebersetzung der euklidischen Elemente Buch I bis VI in Basel drucken lassen. Vorangegangen war im Drucke eine 1556 von Augsburg aus veranstaltete Ausgabe der Lehrbegriffe des Psellus in griechischer und lateinischer Sprache, aber die Euklidübersetzung war schon vor diesem letztgenannten Drucke mindestens begonnen, denn in der Vorrede zum Euklid sagt *„M. Wilhelm Holzmann genannt Xylander, Griechischer Professor des Churf. Studiums in Heydelberg“*, er habe schon vor sieben Jahren, mithin 1555, die ersten vier Bücher Euklid's aus dem Griechischen ins Deutsche übersetzt und erläutert und von seiner Hand geschrieben der Augsburger Stadtbehörde übergeben, *die auch solches günstiglich angenommen und in sondern Gnaden gegen ihn erkannt haben.* Als erste Bearbeitung in einer lebenden Volkssprache ist Xylander's Euklid merkwürdig genug und mag in Deutschland durch Verbreitung geometrischen Wissens unter Malern, Goldarbeitern, Baumeistern, für welche ausgesprochenermassen die Uebersetzung bestimmt ist, also unter demselben Kreise, für welchen Albrecht Dürer einst schrieb (S. 459), wirksam gewesen sein. Die arithmetischen Bücher Euklid's waren schon etwas früher in deutscher Sprache bekannt. Ihr Herausgeber war Johann Scheybl[2]), lateinisch Scheubelius (1494—1570). Dessen Veröffentlichung von 1558 führt den Titel: Das sibend, acht und neunt Buch des hochberühmbten Mathe-

---

Theatrum virorum eruditione clarorum pag. 1471. — Kästner I, 184, 279, 348. — Zeitschr. Math. Phys. III, 138—139. — Allgem. Deutsche Biographie XLIV, 582—593 (Artikel von Fr. Schöll).

[1]) *Disputatio juridica de rebus mathematicis.* Basel 1558. [2]) Poggendorff II, 792.

matici Euclidis Megarensis. Der Xylander'schen Bearbeitung der ersten sechs planimetrischen Bücher sind nicht allzuviele Verdienste nachzurühmen. Die Beweise z. B., von welchen Xylander wie seine Vorgänger und wie noch viele Nachfolger annahmen, dass sie gar nicht dem Euklid angehörten, sondern Zusätze des Theon, des Hypsikles, des Campanus seien, die er unterschiedslos nach einander aufzählt, hat er mitunter weggelassen. „*Mögen auch etwa schwerlich von Ungelehrten begriffen werden, und ein einfältiger deutscher Liebhaber dieser Künste ist wohl zufrieden, so er die Sache versteht, ob er wohl die Demonstration nicht weiss.*" Statt der Beweise müssen nicht selten Zahlenbeispiele dienen, welche Xylander als seinen Zwecken entsprechender ansah, und die Beweise und Erklärungen, die er giebt, sind zum Theil überaus kläglich. Dass auf wirkliche Schwierigkeiten, wie sie z. B. die Lehre von den Parallellinien oder von den Berührungen bietet, nicht mit einer Silbe eingegangen ist, erscheint demnach nur als selbstverständlich. Ungleich wichtiger ist eine Veröffentlichung Xylander's aus dem Jahre 1575, in welcher er keinerlei Vorgänger besass, vielmehr einen ungemein schwierigen Schriftsteller des Alterthums für Europa erstmalig lesbar machte: seine lateinische Diophantübersetzung[1]. Wohl hatte Regiomontanus (S. 263) Diophant's Arithmetik in Italien gesehen und ihren hohen Werth erkannt, wohl hatte 1572 ein Italiener, Bombelli, der uns als algebraischer Schriftsteller wieder begegnen wird, in Gemeinschaft mit einem anderen Gelehrten, Pazzi, eine Vaticanhandschrift des Diophant zu übersetzen angefangen und davon sowie von dem nachmaligen Scheitern ihres Unternehmens in einer Vorrede von 1572 Mittheilung gemacht[2], aber Xylander's Bemühungen waren davon ganz unabhängig, und, was die Hauptsache ist, sie waren erfolgreich. Auf einer Reise nach Wittenberg wurde Xylander von dortigen Professoren auf den griechischen Arithmetiker aufmerksam gemacht, indem er bei ihnen die Abschrift eines Bruchstückes zu sehen bekam. Ein gewisser Andreas Dudicius Sbardellatus, Gesandter des römischen Kaisers am polnischen Hofe, wurde ihm als Besitzer eines vollständigen Codex genannt. An diesen wandte sich Xylander, erhielt ohne Verzug die Handschrift mit der dringenden Ermunterung zur Herausgabe und vollzog die Uebersetzung, welche 1575 in Basel die Presse verliess. Ein griechischer Text war allerdings nicht mit abgedruckt, mancherlei Fehler der Uebersetzung sind später nachgewiesen worden, allein das

---

[1] Nesselmann, Algebra der Griechen S. 279—280. [2] Vergl. S. 4 der nicht paginirten Vorrede *Agli Lettori* in der Algebra von Rafael Bombelli (Venedig 1572).

Eine wie das Andere findet volle Entschuldigung darin, dass dem Uebersetzer nur ein einziger Text zur Verfügung stand. Statt Splitterrichterei zu üben, sollte man vielmehr das grosse Verdienst Xylander's um die Neuentdeckung des geistreichen Werkes anerkennen, welches alsbald von den hervorragendsten Geistern insbesondere in Frankreich und Belgien studirt wurde und ungeahnte Früchte trug. In der Xylander'schen Diophantübersetzung findet sich auf S. 9 und öfter ein Gleichheitszeichen in Gestalt zweier senkrechten Parallelstriche ‖. Ueber den Ursprung des Zeichens ist nichts angegeben. Vielleicht war in Xylander's griechischer Vorlage das Wort ἴσοι durch zwei ι abgekürzt, während eine Pariser Handschrift bekanntlich ein ι als Abkürzungszeichen dafür benutzt (Bd. I, S. 442). Da die von Xylander benutzte Handschrift mit grosser Wahrscheinlichkeit diejenige ist, welche gegenwärtig als Cod. Guelferbytanus Gudianus 1 in Wolfenbüttel aufbewahrt wird[1]), so möchte es sich lohnen, dort einmal nachzusehen. Jedenfalls erkennt man aus Xylander's Zeichen, dass das von Recorde erfundene damals, also 18 Jahre nach dessen Veröffentlichung (S. 479), sich noch nicht verbreitet hatte. Der Diophant ist dem Herzoge Ludwig von Württemberg zugeeignet. Es wird zwar berichtet, dieser habe die Widmung durch ein Geschenk von 500 Thalern beantwortet, doch betrug dasselbe in Wahrheit nur 50 Thaler, so dass Xylander, der sich fortwährend in Geldverlegenheiten befand, noch in dem gleichen Jahre 1575 oder zu Anfang von 1576 kurz vor seinem Tode sich bei der Universitätsbehörde um ein Darlehen von 50 Gulden bewarb, gegen welches er sein Silberzeug zu verpfänden sich erbot.

Zehn Jahre später 1585 gab ein belgischer Mathematiker, der uns mehrfach beschäftigen wird, Simon Stevin[2]), eine französische Bearbeitung der ersten vier Bücher des Diophant heraus.

Einer ganz eigenthümlichen Behandlungsweise des VII. Buches der Euklidischen Elemente bediente sich 1564 ein gewisser Johannes Sthen[3]) aus Lüneburg. Philomathes und Orthophronius unterhalten sich über mathematische Dinge, und bei dieser Gelegenheit werden Erklärungen und Sätze jenes VII. Buches griechisch angeführt. Die lateinische Uebersetzung und Erläuterung folgt jedesmal unmittelbar, aber kein Beweis. Statt dessen dienen vorzugsweise Zahlenbeispiele. Auch das VIII. und IX. Buch wollte Sthen in ähnlicher Weise bearbeiten, doch scheint er nicht dazu gekommen zu sein.

---

[1]) P. Tannery im II. Bande seiner in der *Bibliotheca Teubneriana* erschienenen Diophantausgabe, Prolegomena pag. XXVIII—XXIX, Nr. 11. [2]) Quetelet pag. 159, Note 1. [3]) Kästner I, 132—134.

Um die gleiche Zeit erschienen 1564 bis 1566 in Strassburg Abdrücke und Bearbeitungen der Euklidischen Elemente in griechischer und lateinischer Sprache, bei deren Zusammenstellung Conrad Dasypodius und Christian Herlinus[1]) theilweise zusammengewirkt hatten, ersterer in weitesten Kreisen bekannt durch die von ihm erfundene und ausgeführte, sowie 1578 beschriebene kunstreiche Uhr im Strassburger Münster[2]). Die von Dasypodius allein veranstalteten Abdrücke enthalten den Euklidischen Text in griechischer und lateinischer Sprache neben einander. Die Bearbeitung der sechs ersten Euklidischen Bücher, zu welcher Beide in der Weise sich vereinigten, dass Herlinus Buch I und V, Dasypodius Buch II, III, IV, VI übernahm, lassen alle Folgerungen in der Form schulgerechter Schlüsse erscheinen, eine wohl ziemlich zwecklose Künstelei, welche aber damals anders beurtheilt worden sein muss, sonst wäre nicht 1571 eine neue Auflage möglich gewesen.

Als einer der fleissigsten Uebersetzer und Herausgeber, wobei das lobende Beiwort Geltung behält, auch wenn wir den Vergleich auf Herausgeber aller Jahrhunderte ausdehnen, muss Federigo Commandino[3]) (1509—1575) von Urbino gerühmt werden. Schriften des Ptolemäus, des Archimed, des Apollonius, des Euklid, des Aristarch, des Pappus, des Heron hat er übersetzt, und diese Bearbeitungen erschienen in den Jahren 1558 bis 1592, also bis zu 17 Jahren nach Commandino's Tode. Einzelne dieser Uebersetzungen, insbesondere die des Pappus, sind Jahrhunderte lang die einzigen geblieben, welche überhaupt vorhanden waren, und sie mussten sogar den Urtext ersetzen, welcher noch nicht gedruckt worden war. Neben seiner mathematischen Uebersetzungsthätigkeit war Commandino auch Arzt.

Ein griechisch zwar schon in Verbindung mit den Euklidischen Elementen durch den älteren Grynäus herausgegebener Schriftsteller war Proklus. Seine Uebersetzung stellte ein venetianischer Edelmann Francesco Barozzi[4]), lateinisch Barocius (etwa 1538 bis nach 1587) sich als Aufgabe, und diese Uebersetzung erschien 1565. Auch Schriften von Heron hat Barozzi übersetzt, wenngleich diese Uebersetzungen sich wegen des äusserst mangelhaften Zustandes des zu Grunde liegenden Textes nicht sehr brauchbar erweisen konnten.

Immer blieb noch Euklid der meistbevorzugte griechische Schriftsteller, wie einige Namen bestätigen, welche wir jetzt zu nennen

---

[1]) Kästner I, 332—334. [2]) Ebenda II, 215—221. — Wilhelm Schmidt, Heron von Alexandrien, Konrad Dasypodius und die Strassburger astronomische Münsteruhr. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 177—194. [3]) Libri III, 118—121. [4]) Vossius pag. 336.

haben. Da tritt uns der sogenannte Euklid des Candalla gegenüber. François de Foix-Candale[1]) (etwa 1502—1594) war aus königlichem Blute, wie in Distichen gerühmt wird, welche zu Anfang der Euklidausgabe stehen. Er war Bischof im südlichen Frankreich und trieb Mathematik aus innerem Drange. Die Ausgaben der Euklidischen Elemente von Campanus und von Theon — unter letzterem Namen ist die von Zamberti verstanden — machten ihn stutzig. Entweder müssen der Verschiedenheit dieser Ausgaben gemäss mehrere Euklide gewesen sein, oder des einzigen Schriftstellers Werk müsse vielfache Veränderung erlitten haben. Dann war aber eine Wiederherstellung geboten, und dieser Aufgabe unterzog sich Candale oder Flussates, wie sein Name (von Foix abgeleitet) sich gleichfalls geschrieben findet. Unter dem Eigenen, welches Candale bei dieser Bearbeitung bot, nennen wir seine Bemerkung zu Euklid III, 16. Der Berührungswinkel, sagt er, sei von anderer Art als ein geradliniger, also kein Wunder, dass er kleiner sei als jeder geradlinige, und dass es doch unter den Berührungswinkeln immer kleinere und kleinere gebe. Die Art des Berührungswinkels sei eben kleiner als die des geradlinigen, wie die grösste Mücke kleiner sei als das kleinste Kameel. Candale hielt sich bei einer Bearbeitung von einiger Freiheit für berechtigt, den Elementen neue Bücher eigener Erfindung über regelmässige Körper hinzuzufügen. Der erste Abdruck von 1566 enthält ein solches Zusatzbuch, der zweite von 1578 deren drei. Unter den neuen Körpern ist einer durch 6 Quadrate und 8 Dreiecke, ein anderer durch 20 Dreiecke und 12 Fünfecke begrenzt. *Exoctaedron* und *Icosidodecaedron* sind die Namen, welche für jene Körper vorgeschlagen sind.

Das Jahr 1570 ist das Druckjahr des ersten englischen Euklid[2]). Sir Henry Billingsley war der Uebersetzer. Als Gehilfe diente ihm dabei eine ungleich interessantere Persönlichkeit, zu welcher wir uns wenden.

John Dee[3]) (1527—1608) verliess England schon mit 21 Jahren. Er lehrte 1549 in Löwen, 1550 in Paris. Seine Zuhörer, meist älter als er selbst, waren, wie er erzählt, so zahlreich, dass kein geschlossener Raum sie fasste; ein Theil drängte sich von aussen an die Fenster,

---

[1]) Kästner I, 313—324. — Poggendorff I, 764 unter dem Namen Flussates. P. Tannery in dem *Bulletin Darboux* XXVIII, 59 (1893) macht darauf aufmerksam, dass die Linie Foix-Candale ihren Namen von der englischen Grafschaft Kendal entnommen habe, mit welcher ihr Gründer belehnt worden war. [2]) Ball, *History of mathematics at Cambridge* pag. 22—23. [3]) Kästner II, 46—47 und I, 272. — *Encyclopaedia Britannica* (ed. IX) VII, 22. — Ball l. c. pag. 19—21.

um so bestmöglich hören und sehen zu können. Eine Berufung nach Oxford lehnte er 1554 ab. Mit dem Beginne der Regierung von Königin Elisabeth, also etwa 1558, trat dagegen Dee in königliche Dienste. Im Jahre 1564 begab er sich nach Deutschland zu Kaiser Maximilian II., dem er eine Schrift zugeeignet hatte. 1570 erschien Dee in Urbino bei Commandino. Er brachte die Uebersetzung der Euklidischen Schrift von der Theilung der Figuren mit (Bd. I, S. 272), deren arabische Bearbeitung durch Mohammed Bagdadinus er um 1563 in der Bibliotheca Cottoniana[1]) aufgefunden, übersetzt und als euklidisch erkannt hatte, ein Beweis für Dee's Sprachkenntnisse wie nicht minder für sein umfassendes Wissen in mathematisch-geschichtlicher Beziehung. Der Druck des Werkchens wurde 1570 durch Dee und Commandino gemeinschaftlich veranstaltet und erfolgte 1703 auf's Neue in der von David Gregory besorgten Gesammtausgabe der Euklidischen Werke. Dee's Wanderleben führte ihn auch 1571 nach Lothringen, 1578 wieder nach Deutschland, dazwischen wiederholt nach England, 1583 nach Polen und Böhmen, wo er viel mit Alchymie sich beschäftigte und in Folge dessen bei Kaiser Rudolf II. in grosser Gunst stand. Zuletzt lebte er in England in Noth und Zurückgezogenheit, weil er um einiger mechanischer Kunstwerke willen, die er angefertigt hatte und in Folge einer sehr auffälligen Tracht, die er anzulegen sich gewöhnt hatte, für einen Zauberer gehalten und von Jedermann gemieden wurde.

Die lateinische Ausgabe der euklidischen Elemente von Clavius gehört dem Jahre 1574 an und wurde 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 neu aufgelegt. Christoph Clavius[2]), ursprünglich Schlüssel, ist 1537 in Bamberg geboren. Er war Mitglied des Jesuitenordens und lehrte 14 Jahre lang Mathematik in dem Collegium seines Ordens in Rom. Dort starb er 1612. Weiten Kreisen ist er bekannt als einer der Mitarbeiter an dem Werke der Kalenderverbesserung, zu welchem Papst Gregor XIII. ihn beizog. Die zahlreichen neuen Auflagen, in welchen sein Euklid gedruckt werden musste, beweisen die hohe Anerkennung, welche dieses Werk fand, und selten ist eine solche Anerkennung in gleich hohem Maasse verdient gewesen. Clavius hat in einem umfang und inhaltreichen Bande vereinigt, was die früheren Herausgeber und Erklärer da und dort zerstreut mitgetheilt hatten. Er hat bei dieser Sammlung scharfe Kritik geübt, alte Irrthümer aufgedeckt und vernichtet. Er ist keiner

---

[1]) Von Sir Robert Cotton angelegt, wurde diese Sammlung 1700 Staatseigenthum und befindet sich gegenwärtig im Britischen Museum in London.
[2]) Allgem. deutsche Biographie IV, 298—299, Artikel von Bruhns.

einzigen Schwierigkeit aus dem Wege gegangen. Er hat vielfach eigene Erläuterungsversuche mit Glück gewagt. Nur wenige Einzelheiten wollen wir hervorheben. Ob wir gleich das Erste, welches wir erwähnen, die Benutzung des Wortes *fluere* bei der Beschreibung der Entstehung[1]) von Linien und Oberflächen mittels fliessender Punkte und Linien Clavius zuschreiben dürfen, ist bei der grossen Aehnlichkeit seiner Ausdrucksweise mit der von Petrus Philomeni von Dacien (S. 91) gebrauchten fast zweifelhaft. Die Parallelentheorie sucht Clavius[2]) auf folgende beide Sätze zu stützen: 1. Eine Linie, deren einzelne Punkte gleich weit von einer derselben Ebene mit ihr angehörenden Geraden abstehen, ist gerade. 2. Wenn eine Gerade längs einer anderen Geraden so hingeschoben wird, dass beide fortwährend einen rechten Winkel mit einander bilden, so beschreibt auch der andere Endpunkt der verschobenen Geraden eine Gerade. Bei Clavius[3]) dürfte als einem der Ersten die jetzt wohl allgemein angenommene Ansicht ausgesprochen sein, dass die Entstehung des pythagoraeisches Lehrsatzes eine zahlentheoretische von der Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ aus war, und dass erst in zweiter Linie die Verallgemeinerung desselben auf jedes rechtwinklige Dreieck stattfand. Der Irrthum, dass Euklid von Megara Verfasser der Elemente gewesen sei, wird von Clavius endgiltig abgethan, während, wie wir noch sehen werden, der andere Irrthum, als wenn nur die Lehrsätze von Euklid, die Beweise dagegen von Theon herrührten, bereits 1559 durch Buteo beseitigt war. Unter den Prolegomena genannten Vorbemerkungen findet sich ein Abschnitt über die Persönlichkeit des Euklid, und in diesem ist ausdrücklich des Gegensatzes gedacht, welcher zwischen den Berichten des Proklos und des Valerius Maximus obwaltet, und ist die Entscheidung im Sinne des Proklos getroffen: unser Euklid, der so scharfsinnige Geometer, ist ein durchaus Anderer als der Philosoph von Megara[4]). Davon, dass Euklid die Beweise nicht selbst verfasst haben sollte, ist bei Clavius nur so weit die Rede, als er es durchaus verwirft[5]). Dagegen ist nach den Axiomen und unmittelbar vor dem Satze I, 1 ausdrücklich gesagt[6]), es seien Unterschiede zwischen der theonischen Ueberlieferung, *traditio Theonis*, und der von Campanus befolgten arabischen Ueberlieferung, *ordo quem Campanus ex traditione Arabum est secutus*, vorhanden, welche man

---

[1]) *Euclidis Elementa* ed. Clavius. Köln 1591 (III. ed.) pag. 2 und pag. 3. [2]) Ebenda pag. 50—51. Vergl. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss (Leipzig 1895) S. 17—18. [3]) Clavius l. c. pag. 85. [4]) *Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est.* [5]) Clavius l. c. II, pag. 191. [6]) Ebenda I, pag. 19.

kennen müsse, wenn man nicht durch Verweisungen, welche bald die eine, bald die andere Ausgabe berücksichtigen, in Verwirrung gerathen solle. Desshalb ist jeder Satz des Clavius mit doppelter Bezifferung versehen, einer im Texte fortlaufenden nach Theon, einer Randbezifferung nach Campanus, d. h. also nach den Arabern, und grade die dadurch in leichter Weise ermöglichte Vergleichung der einander entsprechenden Ordnungszahlen, welche gestattet, ohne Mühe zu erkennen, ob ein mittelalterlicher Schriftsteller nach dem arabischen oder nach dem griechischen Euklid seine geometrischen Kenntnisse sich erworben habe, lässt die Ausgaben von Clavius noch heute für geschichtliche Untersuchungen das Beiwort der Unentbehrlichkeit verdienen.

Von einer spanischen Uebersetzung[1]) der 6 ersten Bücher der euklidischen Elemente, welche 1576 in Sevilla gedruckt wurde, ist uns nur der Name des Uebersetzers Rodrigo Zamorano bekannt.

Ein Neapolitaner Giuseppe Auria[2]) übersetzte auf Grundlage einiger im Vatican befindlichen Codices geometrisch-astronomische Schriften des Theodosius, welche 1587 und 1588 gedruckt wurden. Eine Diophantübersetzung ins Lateinische soll ebenderselbe angefertigt haben, über deren handschriftliches Vorhandensein berichtet wird.

Baldi, der gelehrte Abt von Guastalla (S. 547), übersetzte die Automaten des Heron und gab sie 1589 im Drucke heraus. Die Originalhandschrift dieser Uebersetzung ist im Besitze Libri's[3]), eines Liebhabers solcher Schriftstücke, der sie zu beurtheilen verstand, gewesen. Nach seiner Aussage wäre die Ausführung der Federzeichnungen zu den Figuren von wunderbarer Vollendung gewesen, wodurch der Bericht an Glaubwürdigkeit gewinnt, dass Baldi ebensoviele Begabung als Neigung zur Malerei besessen habe und nur mit Gewalt von seinen Lehrern abgehalten worden sei, sich der Kunst zu widmen[4]). Auch Heron's Schrift über Wurfgeschosse hat Baldi übersetzt, doch fand diese erst 1616 Veröffentlichung[5]).

Ein für die damalige Zeit hochmerkwürdiges Druckwerk ist die arabische Bearbeitung der euklidischen Elemente von Nasîr Eddîn (Bd. I, S. 735), welche 1594 in Rom erschien[6]). Es wird berichtet, dass Baldi grade dieses Buch mit Vorliebe in den Nachmittagsstunden gelesen habe[7]).

Als letzten Uebersetzer von Schriften des Alterthums nennen wir einen Mann, der seiner Lebenszeit nach schon wesentlich früher hätte

---

[1]) Kästner I, 263. [2]) Montucla I, 564. — Diophant übersetzt von Otto Schulz (Berlin 1822), Vorbericht S. XLII—XLIII. [3]) Libri IV, 72. [4]) Ebenda IV, 70. [5]) Ebenda IV, 77, Note 1. [6]) Kästner I, 367 flgg. [7]) Libri IV, 75.

erwähnt werden müssen, und dessen Bearbeitungen eine ganze Anzahl anderweitiger Bemühungen überflüssig gemacht hätten, wenn sie rechtzeitig zum Drucke gegeben worden wären Francesco Maurolico[1]) (1494—1575) von Messina war wie Keiner befähigt grade solchen Arbeiten sich zu widmen. Sein Vater, ein byzantinischer Arzt, war vor den Türken fliehend nach Sicilien gekommen und unterrichtete selbst den hoffnungsvollen Sohn in Naturwissenschaften und Astronomie sowie in der griechischen Sprache, die überdies in Sicilien keineswegs ausgestorben war. Francesco Maurolico, mit latinisirtem Namen Maurolycus, auch wohl Maroli genannt, wurde Geistlicher, seine wissenschaftliche Thätigkeit aber griff nach allen Fächern über. Die blossen Titel der von ihm theils vollendeten, theils geplanten Werke füllen ganze Seiten. Die Stadt Messina ernannte ihn zu ihrem Geschichtsschreiber. Physikalische und besonders meteorologische Beobachtungen, welche er anstellte, gaben ihm unter den Physikern einen ehrenvollen Platz. Dabei fand er noch Zeit, die Festungsbauten von Messina bei ihrer Herstellung zu überwachen, schrieb er zahlreiche, handschriftlich vorhandene und in unserer Zeit gedruckte mathematische Abhandlungen. Für's Erste haben wir es nur mit seinen Uebersetzungen zu thun. Nur ein Sammelband ist 1558 bei Maurolico's Lebzeiten erschienen. Seinen Inhalt bilden die Sphärik des Theodosius, die des Menelaus, eine eben solche von Maurolico selbst, das Buch des Autolykus von der bewegten Kugel, Theodosius über die bewohnte Erde, die Phaenomena des Euklid. Nur seltene Exemplare dieses Bandes haben sich erhalten[2]). Noch im XVI. Jahrhunderte, aber erst nach dem Tode des Uebersetzers, erschienen 1591 die euklidischen Phaenomena abermals. Die beiden wichtigsten Uebersetzungen blieben dagegen fast ein volles Jahrhundert der Oeffentlichkeit vorenthalten. Die Kegelschnitte des Apollonius erschienen 1654. Maurolico hat hier erstmalig einen Versuch gewagt, der später vielfach den Scharfsinn der Mathematiker in Bewegung setzt, den einer sogenannten Restitution. Nur 4 Bücher Kegelschnitte haben griechisch sich erhalten. Maurolico stellte nun nach den ziemlich dürftigen Angaben über den Inhalt der folgenden Bücher, welche da und dort vorkommen, diese wieder her, allerdings ein missglückter Versuch, wie sich herausstellte, als im XVII. Jahrhunderte wenigstens das 5., 6. und 7. Buch in arabischer Bearbeitung aufgefunden wurden,

---

[1]) Kästner II, 64—74. — Libri III, 102—118; IV, 241. — F. Napoli im *Bulletino Boncompagni* (1876) IX, 1—22. [2]) Hultsch, Vorrede zur Ausgabe des Autolykos (Leipzig 1885) pag. XVI, Note 17: *Maurolyci libri quamvis typis olim expressi exempla nunc multo rariora sunt quam Autolyci codices Graeci manu scripti.*

aber immerhin Interessantes bietend, insbesondere wo es um grösste und kleinste Werthe sich handelt, welche gewisse mit den Kegelschnitten in Verbindung stehende Strecken annehmen, eine Gattung von Untersuchungen, welche den Inhalt des fünften Buches bildet. Am hervorragendsten ist die Archimedübersetzung Maurolico's, der sich unter den Zeitgenossen schon den Namen des zweiten Archimed erworben hatte. Erst 1670 begann man den Druck dieser Bearbeitung, welcher nach mannigfachen Zwischenfällen gar erst 1685 in Palermo vollendet wurde.

Wir haben eine ziemlich grosse Anzahl von Schriftstellern aller Länder genannt, welche Uebertragung der Werke griechischer Mathematiker bald ins Lateinische, bald in die lebenden Sprachen sich angelegen sein liessen, und wir haben, wie wir (S. 548) es aussprachen, nicht einmal auf Vollständigkeit in dieser Beziehung gesehen. Die Wirkung aller dieser Veröffentlichungen blieb nicht aus. Mit der Vervielfältigung der Mittel geometrische Kenntnisse zu erwerben wuchs die Verbreitung dieser Kenntnisse, mit dieser deren Werthschätzung. Hatte man lange genug den ersten Unterricht, so weit er überhaupt Mathematisches enthielt, auf das Rechnen beschränkt, so drängte jetzt die Geometrie sich vor. Von Heinrich von Navarra, dem nachmaligen Heinrich IV. von Frankreich, und von dessen Freund Coligny wissen wir, dass sie als Knaben hauptsächlich zwei Werke zu lesen bekamen, Plutarch's Lebensbeschreibungen und Euklid's Elemente[1]). Schriftsteller über Geometrie traten auf, in erster Linie jene Uebersetzer selbst, welche nicht immer sich damit begnügten, nur das Alte in neuer Sprache wiederzugeben, welche vielmehr es liebten, in Gestalt von Erläuterungen von dem Ihrigen hinzuzuthun. Die Lehre vom Contingenzwinkel bot zu solchen eigenen Gedanken reichlich Gelegenheit. Mit ihr hat sich, wie wir (S. 554) beiläufig erwähnten, Candale einigermassen beschäftigt. Cardano's Auffassung, hauptsächlich in dem *Opus novum de proportionibus* niedergelegt, haben wir (S. 533—535) vorgreifend geschildert, als wir die Gesammtthätigkeit dieses geistreichen Mannes darlegten. Damals nannten wir Peletier als den Vertreter einer anderen Meinung, welche er in einer Euklidausgabe aussprach; als wir jedoch (S. 549) jener Euklidausgabe von 1557 gedachten, verwiesen wir auf später, um von den Anmerkungen zu reden, worunter wir eben das auf den Contingenzwinkel Bezügliche verstanden. Wir wollen jetzt diese Zusage erfüllen, indem wir an den ausführlichen Bericht uns anlehnen,

---

[1]) De Jouy, *L'hermite en province. Le Berceau de Henry IV.* No. XIV. 28. Juni 1817 ed. Mozin II, 77.

welchen Clavius in seiner Euklidausgabe gegeben hat[1]). Darnach hat Peletier die Schwierigkeit dadurch zu heben versucht, dass er den Contingenzwinkel gar nicht als einen Winkel betrachtete, er sei ein Nichts, und, was genau damit übereinstimmt, der Winkel, welchen der Kreis mit dem Durchmesser bilde, sei von dem rechten Winkel nicht im mindesten verschieden. Clavius seinerseits meint, wenn dem so wäre, würde eine Schwierigkeit überhaupt niemals vorhanden gewesen sein, denn der Euklidische Satz III, 16 besage dann nur, dass das Nichts kleiner sei als ein spitzer Winkel, und das bedürfe nicht erst eines Beweises. Man komme vielmehr nur so über die Sache hinaus, dass man mit Cardano (er hätte hinzufügen können auch mit Candale, den er in der That an einer Stelle[2]) neben Cardano nennt) den Contingenzwinkel zwar für ein Etwas, für einen Winkel, aber für einen Winkel anderer Art, als der geradlinige sei, erkläre. Ein Grund, welchen Peletarius scharfsinnig genug für seine Meinung anführte, war folgender: Die Winkel, welche (Figur 107) concentrische, immer grösser werdende Kreise mit dem allen gemeinsamen Durchmesser bilden, werden vom kleineren zum grösseren Kreise verglichen jedenfalls nicht kleiner, denn sonst könnte, wenn man den äusseren Halbkreis längs des Durchmessers bis zur Berührung mit dem inneren Halbkreise verschiebe, sein mit dem Durchmesser gebildeter Winkel den des kleineren Halbkreises mit demselben Durchmesser nicht umschliessen. Grösser können jene Winkel aber auch nicht werden, weil sie sonst bei fortwährendem Wachsen, dem niemals ein Ende gesetzt zu werden brauche, schliesslich einmal grösser als ein rechter Winkel werden würden, was unmöglich sei. Folglich seien alle jene Winkel thatsächlich gleich und der bei der erwähnten Verschiebung auftretende Contingenzwinkel sei der Unterschied ganz gleicher Grössen, mithin Nichts. Clavius fühlte die Stärke des ersten, die Schwäche des zweiten Theils dieser Beweisführung und entgegnete, es sei einfach nicht wahr, dass bei fortwährender Vergrösserung eines Winkels die Grösse des rechten Winkels erreicht oder gar übertroffen werden müsse. Man denke sich nur (Figur 108) den geradlinig rechten Winkel BAF. Ziehe man AC, so weiche CAF von dem rechten Winkel um den spitzen Winkel CAB ab; aber man könne auch AD, AE und unendlich viele andere Gerade ziehen, deren mit AF gebildete


Fig. 107.

[1]) *Euclidis Elementa* ed. Clavius, Köln 1591 (ed. III) pag. 133—145.
[2]) Ebenda pag. 144.

Winkel grösser und grösser werden, ohne jemals den rechten Winkel zu erreichen. Alle übrigen Gründe, welche von beiden Seiten, und zwar, wie es in der Regel der Fall zu sein pflegt, mit um so grösserer Heftigkeit und Hartnäckigkeit, je weniger schliesslich bei dem Streite herauskam, ins Gefecht geführt wurden, waren von ähnlicher Art. Wichtig erscheint der Begriff der Grenze, welcher eine fortwährend wachsende Grösse sich nähert, ohne sie zu überschreiten, wichtig der Begriff der Krummlinigkeit, der als zur geraden Linie gegensätzlich sich bemerklich macht, wie er auch von der einen oder von der anderen Partei aufgefasst wurde. Wir sprechen von der einen und von der anderen Partei, weil der Streit nicht zwischen den bis hierher genannten Persönlichkeiten zu Ende geführt wurde. Noch Ströme von Tinte wurden vergossen, bis erst im XVII. Jahrhunderte der Streit über den Contingenzwinkel aufhörte, nicht weil eine Partei sich als besiegt zugestand, sondern weil im Streite über das Unendlichkleine ein noch mehr zu logischen Spitzfindeleien herausfordernder Gegenstand auftauchte.

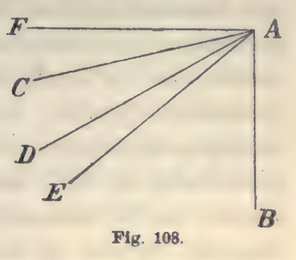


Fig. 108.

Das von uns erwähnte Erwachen geometrischer Neigungen zeitigte auch fruchtbarere Untersuchungen als solche über den Contingenzwinkel. Peletier hat 1573 eine kleine Schrift *De l'usage de la géométrie* dem Drucke übergeben. Neben Flächenberechnungen ist auch ein Distanzmesser[1]) beschrieben, auf dessen Erfindung Peletier sich sehr viel zu gute that, dessen genaue Einrichtung wir aber der uns zur Verfügung stehenden etwas sehr undeutlichen Beschreibung nicht zu entnehmen vermögen.

Ein geistvoller Geometer war Johannes Buteo[2]) oder Borrel (1492—1572). Er ist in Charpey in der Dauphinée geboren, wesshalb er in den Ueberschriften mitunter Delphinaticus heisst. Er gehörte dem Mönchsorden des heiligen Antonius an. Seine mathematischen Studien hat er unter Orontius Finaeus gemacht, was ihn aber nicht abhielt, gegen dessen vermeintliche Kreisquadratur aufzutreten. Gedruckt sind von ihm *Opera geometrica* 1554, *De quadratura circuli* mit einem Anhange *Annotationes in errores interpretum Euclidis* 1559 und eine *Logistica* 1559. In der Logistik sollen sämmtliche mit vier

[1]) Kästner I, 653—655. Brieflicher Mittheilung von H. Ambros Sturm zufolge ist in einem Antiquariatskataloge Peletarius, *De usu geometriae liber*, Paris 1571, angezeigt gewesen, vielleicht gleichen Inhaltes mit der jüngeren französischen Ausgabe. [2]) Montucla I, 574—575. — Kästner I, 468—476. — *Nouvelle Biographie universelle* VII, 898—899.

Würfeln überhaupt mögliche Würfe aufgezählt und Schlüssel mit Buchstabenversetzungen beschrieben sein, Aufgaben von der Art derer, mit welchen Cardano und Tartaglia sich beschäftigten. Die *Opera geometrica* sind einzelne Abhandlungen von sehr gemischter Natur, welche nur zu einem Bande zusammengestellt sind. Vieles ist antiquarischen Inhaltes, bildet also gewissermassen geometrische Erläuterungen zu römischen Schriftstellern. Buteo hat z. B. muthmasslich nach Valla (S. 345) auf jene Stelle des Quintilian aufmerksam gemacht, welche unrichtige Flächenberechnungen betrifft. Ferner sind römische Gesetze an der Hand der Geometrie geprüft. Ein Beispiel eigener Erfindungsgabe Buteo's liefert die Abhandlung *Ad problema cubi duplicandi*. Stifel's Würfelverdoppelung wird darin mit Recht getadelt, damit aber ein sehr ungerechtfertigter Spott über die barbarische Schreibweise der ganzen Arithmetica integra verbunden[1]) und insbesondere eine näherungsweise Würfelverdoppelung mittels Zirkel und Lineal gelehrt. Sie besteht in Folgendem. Sei ein Würfel von der Seite a, also dem Körperinhalte a^3 gegeben, so ist es leicht, durch Aneinandersetzung zweier solcher Würfel ein Parallelopipedon von dem Körperinhalte $2a^3$ zu erhalten, dessen Höhe a ist, während die Grundfläche aus einem Rechtecke von den Seiten a und $2a$ besteht. Diesen Körper will Buteo nach und nach in einen Würfel verwandeln. Zunächst verwandelt er die Grundfläche in ein Quadrat von der Seite $a\sqrt{2}$, und legt er nun den neuen Körper, welcher immer noch den Körperinhalt $2a^3$ besitzt, auf eine Seitenfläche, so ist $a\sqrt{2}$ die Höhe des neuen Parallelopipedons, dessen rechteckige Grundfläche die Abmessungen a und $a\sqrt{2}$ besitzt. Diese Grundfläche verwandelt sich in ein Quadrat von der Seite $a\sqrt[4]{2}$, und ein erneutes Umlegen des entstandenen Körpers zeigt ihn in Form eines Parallelopipedons von der Höhe $a\sqrt[4]{2}$ mit der Grundfläche, welche durch das Rechteck der Seiten $a\sqrt{2}$ und $a\sqrt[4]{2}$ gebildet ist. Es ist leicht ersichtlich, dass man in ganz ähnlicher Weise von dem jetzt bekannten dritten Parallelopipedon zu einem vierten, von diesem weiter gelangen kann. Das siebente Parallelopipedon hat Abmessungen, welche durch $a \cdot 2^{\frac{21}{64}}$, $a \cdot 2^{\frac{21}{64}}$, $a \cdot 2^{\frac{11}{32}}$ in heutiger Schreibweise dargestellt werden, und hier, sagt Buteo, sei die Ungleichheit nicht mehr merklich; was aber nicht in die Sinne falle, hindere beim Gebrauche

---

[1]) *In libro cui titulum fecit Arithmetica integra, ubi etiam multa super geometricis inculcavit, ab Euclide (ut ipse iactat) omissa. Cuius propositiones inquit non sunt evangelium Christi. Huiusmodi autem Arithmetica multiplici rerum verborumque barbarie tantum inter alias, quascunque legerim, caput extulit omnes (ut cum poeta dicam) Quantum lenta solent inter viburna cupressi.*

nicht, und von diesem Gedanken hätten auch Archimed und Ptolemäus bei der Kreisrechnung Gebrauch gemacht. Nach diesem Ausspruche weiss man schon, was man von Buteo's *De quadratura circuli* zu erwarten hat, Anerkennung näherungsweiser, Widerlegung vermeintlich genauer Kreisquadraturen. Die beiden Bücher, in welche jene Schrift zerfällt, erfüllen diese Erwartung. Das erste Buch ist vorzugsweise den Arbeiten Archimed's und seiner Vorgänger gewidmet. Mit vollendeter Klarheit weiss Buteo Archimed's Ziel und Verfahren darzustellen, aber, was noch mehr heissen will, er wird auch dem vielverketzerten Bryson (Bd. I, S. 191) gerecht[1]. Wenn man nur sage, das dem Kreise flächengleiche Quadrat sei irgend ein mittleres, *quadratum medium utcunque*, zwischen Sehnen- und Tangentenvieleck, so sei damit eine Wahrheit ausgesprochen. Nach der Auseinandersetzung der archimedischen Untersuchung ist unter der Ueberschrift *Quemadmodum et alii ad dimensionem limites vero propiores inveniantur*[2], d. h. wie auch andere der Wahrheit näherkommende Grenzen für die Ausmessung gefunden werden, gezeigt, dass allerdings genauere Verhältnisszahlen als $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ gefunden werden können, aber nur auf Kosten der Bequemlichkeit der Rechnung, weil mit viel grösseren Zahlen alsdann umgegangen werden müsse. Hierher gehört das ptolemäische $3\frac{17}{120}$ (Bd. I, S. 394). Aus dem zweiten Buche erwähnen wir, dass $\pi = \sqrt{10}$ den Arabern zugeschrieben wird[3]. Ferner ist der sogenannten Quadratur des Campanus (S. 101) gedacht[4]. Es sei unmöglich der Verfasser dieses Schriftchens derselbe Campanus, welcher durch seine Uebersetzung der euklidischen Elemente aus dem Arabischen und durch seine Anmerkungen und Zusätze zu denselben sich so sehr verdient gemacht habe. Sodann widerlegt Buteo mit ziemlichem Geschicke verschiedene Quadraturen, die wir nebst ihren Urhebern Nicolaus von Cusa, Orontius Finaeus, Dürer, Bovillus bereits kennen. Dem zweiten Buche folgt noch der Anhang *Annotationes in errores interpretum Euclidis*. In ihm ist, wie (S. 556) schon erwähnt wurde, in ausführlicher Untersuchung[5] und unter Zuziehung der einschlagenden Quellen, welche Buteo vollständig beherrscht, der Nachweis geliefert, dass Euklid selbst und nicht Theon der Verfasser der in den Elementen mitgetheilten Beweise, und Theon nur Herausgeber gewesen sei.

Unter die Schriftsteller über Geometrie ist bis zu einem gewissen Grade auch **Ramus** zu zählen, dessen *Scholae mathematicae* von 1569

---

[1]) *De quadratura circuli* (Lugduni 1559) pag. 14. [2]) Ebenda pag. 63. [3]) Ebenda pag. 106. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 209—212.

(S. 546) sich über nahezu alle Theile der Mathematik verbreiten und dadurch ihrem Verfasser mehr als nur einen Platz in unserer Zusammenstellung sichern zu müssen scheinen. Führen wir Einiges hierher Gehörende an. Vom 8. Buche der Scholae mathematicae an, welches die Sätze des I. Buches der euklidischen Elemente zu erläutern bestimmt ist, kommen wiederholt Figuren vor. Bald sind dieselben ohne jede Bezeichnung, bald führen sie in altgewohnter Weise Buchstaben, die den einzelnen Punkten als Benennung dienen[1]). Auffallend ist dabei die Reihenfolge der Buchstaben. Während früher entweder die griechische, beziehungsweise die arabische, oder die lateinische Reihenfolge, also entweder *a*, *b*, *g* oder *a*, *b*, *c* u. s. w. üblich war, entfernt Ramus sich von beiden. Er benutzt zunächst immer die Selbstlauter *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *y*, und nur wenn mehr als sechs Punkte der Bezeichnung bedürfen, treten auch Mitlauter auf, zuerst *s*, dann *r*, *t*, *l*, *m* u. s. w. Einen Grund für die Abweichung von der eingebürgerten Uebung giebt Ramus nicht an. Wir halten es für müssig, unsererseits nach einem solchen zu suchen; die Thatsache selbst schien uns aber erwähnenswerth, weil bei der grossen Verbreitung der Schriften des Ramus insbesondere unter den Anhängern der kirchlichen Reformation hier vielleicht der Ursprung einer anderweitigen Bezeichnung liegt, von welcher wir im 69. Kapitel zu reden haben. Aber suchen wir Bemerkenswertheres auf. In der Bewunderung Euklid's stimmten und stimmen alle Schriftsteller überein, welche mit seinen Elementen sich beschäftigt haben. Ramus theilt kaum die Bewunderung der Elemente, geschweige denn die Euklid's[2]). Man müsse gleich Proklos von der Sucht, Euklid immer nur loben zu wollen, ergriffen sein, um gegen die grossen methodischen Fehler, welche er sich zu Schulden habe kommen lassen, blind zu sein. Die Arithmetik gehe ihrem Begriffe nach der Geometrie voraus, Euklid drehe die Reihenfolge um. Ferner stelle Euklid eine ganze Anzahl von Definitionen an die Spitze, und das sei vollends verkehrt. Die Natur hat nicht einen Wald dadurch hervorgebracht, dass sie am Anfange die Wurzeln aller Bäume steckte, der Architekt nicht dadurch eine Stadt, dass er am Anfange alle Fundamentirungen vornahm. Jedem folgenden Baume gab die Natur seine Wurzeln, jedem Gebäude der Baumeister seine Grundmauern. So musste Euklid das Dreieck definiren, wo die Lehre von den Dreiecken beginnt, das Vieleck, wo von Vielecken gehandelt wird, und denselben Weg überall bei den Anfängen einschlagen. Das X. Buch vollends, welches, wie wir (S. 549) gesehen haben, durch Mondoré besonders heraus-

[1]) *Scholae mathematicae* (ed. Frankfurt 1627) pag. 174, 176, 179, 180, 183 und häufiger. [2]) Ebenda pag. 96—98.

gegeben und dadurch bevorzugt worden war, ist für Ramus eine Qual[1]). Kein Theil der Geometrie erscheint ihm unnützer, keiner überladener mit Vorschriften und Lehrsätzen; es ist ihm zweifelhaft, ob überhaupt diese Spitzfindeleien berechtigt sind, innerhalb einer wahren Beschäftigung mit der Geometrie eine Stelle einzunehmen. Er selbst habe das X. Buch mit Eifer und Genauigkeit durchforscht, aber kein anderes Urtheil fällen können, als dass in ihm ein Kreuz für edle Geister errichtet sei. Um alle Beschwerden des Ramus gegen Euklid vereinigt zu sehen, greifen wir über die eigentlich geometrischen Bücher hinaus und sehen zu, was er von den arithmetischen Büchern sagt. Ihnen wird der Mangel an Brauchbarkeit durchweg vorgeworfen und, um ein bestimmtes Beispiel ins Auge zu fassen, der Satz IX, 20 von der Unendlichkeit der Anzahl der Primzahlen als zu speciell getadelt. Von allen Zahlengattungen gebe es unendlich viele, zusammengesetzte, gerade, ungerade[2]), vollkommene u. s. w. Man müsse desshalb als allgemeine Forderung aufstellen, dass jede Anzahl ins Unendliche wachse und nicht Sonderbeweise führen. Diese Auszüge, welche wir hier vereinigt haben, lassen, so kurz sie gewählt wurden, Ramus als das erkennen, als was wir ihn früher schilderten, als streitbaren und streitsüchtigen Dialektiker. Theoretische Feinheiten richtig zu würdigen war seine Sache nicht, und strengen, nach seiner Meinung ganz unnöthigen Beweisführungen der Geometrie zog er gewöhnliches Rechnen vor, wie es von den Kaufleuten der Strasse St. Denis in Paris zu erlernen war, die zu besuchen, und mit denen für ihn lehrreiche Gespräche zu führen für Ramus ein Genuss war[3]). So entziehen sich die Scholae mathematicae fast vollständig der Erwähnung in einem der Geschichte der Mathematik gewidmeten Werke, und man findet es begreiflich, dass Mathematiker, welche einen auch nur flüchtigen Blick hineinwarfen, nicht Neigung empfanden, ein Werk zu studiren, dessen drei ersten Bücher allein von Wichtigkeit gewesen wären, weil sie, wie wir (S. 546) sagten, für ihren geschichtlichen Inhalt Quellen verwertheten, denen heute noch das Lob der grössten Zuverlässigkeit gespendet werden muss. Ob eine von Ramus verfasste Geometrie, welche 1577 nach seinem Tode im Drucke erschien, sich von den Mängeln frei zu halten wusste, welche ihr Urheber Euklid vorzuwerfen liebte, ob sie dadurch so viel besser war, wissen wir nicht.

Ein wirklicher Geometer war Giovanni Battista Benedetti oder Benedictis (1530—1590), Philosoph und Mathematiker des

---

[1]) *Scholae mathematicae* (ed. Frankfurt 1627) pag. 252. [2]) Ebenda pag. 250. [3]) Ebenda pag. 52.

Herzogs von Savoyen. In Venedig geboren, nennt er sich bis zu einem gewissen Grade Schüler des Tartaglia[1]). Es sei billig und recht, Jedem das Seine zu geben, und desshalb sage er, dass Tartaglia ihm die vier ersten Bücher des Euklid, aber auch nur diese erklärt habe. Alles übrige habe er mit eigener Mühe und Arbeit untersucht, denn für den Wissbegierigen sei nichts schwer. So drückt sich Benedetti in der Vorrede zu einem 1553 gedruckten Werke[2]) aus, welches er demnach mit 23 Jahren vollendet hatte. Der Inhalt ist eine vollständige Auflösung der Aufgaben, welche in den euklidischen Elementen vorkommen, sowie anderer unter Anwendung einer einzigen Zirkelöffnung. Da wir diesen Gegenstand wiederholt als italienische Liebhaberei bezeichnet haben, so ist es nicht überflüssig, die Jahreszahlen der einzelnen Veröffentlichungen ins Gedächtniss zurückzurufen. Die Cartelli und Risposte sind von 1547 bis 1548 erschienen, und in ihnen konnte Benedetti, welcher mit 18 Jahren für ein Wunder galt[3]), Aufgaben dieser Gattung von seinem Lehrer gestellt, von Ferrari gelöst finden. Auch Cardano's De subtilitate von 1550 kann die Neigung gestachelt haben, die Geometrie mit bleibender Zirkelöffnung zu fördern. Die Auflösungen Tartaglia's dagegen erschienen erst 1560 im Drucke, und wenn eine Einwirkung vorhanden war, so kann sie nicht von Tartaglia auf Benedetti stattgefunden haben, sondern nur umgekehrt. Die Auszüge aus dem Benedetti'schen Werke[4]), welche unserem Berichte zu Grunde liegen, zeigen indessen keine Aehnlichkeit des Ganges weder mit Ferrari noch mit Tartaglia, und auf den Gang, das heisst auf die Reihenfolge der behandelten Aufgaben, deren jede, sobald sie selbst gelöst ist, bei Lösung der folgenden Aufgaben dienen kann, kommt es natürlich hauptsächlich an. Die fünf ersten Aufgaben Benedetti's sind: 1. Auf einer Linie in einem bestimmten Punkte derselben eine Senkrechte zu errichten. 2. Eine Strecke um ein ihr gleiches Stück zu verlängern, sofern die Strecke kleiner ist als die gegebene Zirkelöffnung. 3. Das Gleiche zu leisten, sofern die Strecke grösser als die gegebene Zirkelöffnung ist. 4. Eine gegebene Strecke zu halbiren. 5. Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen. Wir führen nur die Auflösung der letzteren Aufgabe an, um ein Beispiel von Benedetti's Verfahren zu geben (Figur 109). Von d soll eine de senkrecht zu cf gezogen werden. Man zieht von

---

[1]) Libri III, 123 Note 1. [2]) Benedictis, *De resolutione omnium Euclidis problematum aliorumque una tantummodo circuli data apertura.* Venedig 1553. [3]) Libri III, 123 Note 2 beruft sich für diesen Ausspruch auf Mazzuchelli, *Scrittori d'Italià* tomo II, part. 2, pag. 218. [4]) Ebenda III, 266–271.

einem Punkte f der gegebenen Geraden aus die fd und verlängert sie gemäss 2. oder 3. um $da = fd$. Dann zieht man von a aus ac nach einem zweiten Punkte c der gegebenen Geraden und halbirt ac gemäss 4. in b. Die nun gezogene bd ist somit der cf parallel, und wird gemäss 1. die de senkrecht zu bd gezogen, so ist de auch senkrecht zu cf. Ein zweites Werk Benedetti's führt die Ueberschrift *Speculationes diversae* und ist 1585 gedruckt. Die im Titel ausgesprochenen verschiedenen Untersuchungen sind in der That verschiedenartig[1]). Sechs Abschnitte enthalten arithmetische Sätze, Perspective, Mechanik, Proportionen, Streitfragen, Briefe. Unter den arithmetischen Sätzen findet sich der Beweis der Vertauschbarkeit der Factoren eines Productes, welche bis dahin zwar wohl verschiedentlich bemerkt, aber noch nie als eines Beweises bedürftig gefunden worden war. In eben diesem Abschnitte sind algebraische Aufgaben durch geometrische Betrachtungen gelöst, während man sonst umgekehrt vorzog, die Auflösung geometrischer Aufgaben durch Zurückführung derselben auf Gleichungen zu erreichen. Seien beispielsweise drei Unbekannte x, y, z aus den Gleichungen $x + y = 50$, $y + z = 70$, $z + x = 60$ zu bestimmen. Durch $y = \frac{50 + 70 - 60}{2} = 30$ wird weiter $x = 50 - 30 = 20$, $z = 70 - 30 = 40$ gefunden. So weit ist freilich von Geometrie keine Rede, aber nachträglich zeigt Benedetti an einer Zeichnung die Richtigkeit der Rechnung (Figur 110). Dem Dreiecke abc ist der Kreis eou einbeschrieben und jede Seite ist die Summe zweier Unbekannten, welche als die Entfernungen der

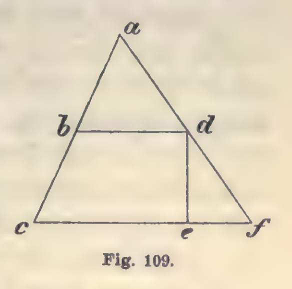


Fig. 109.

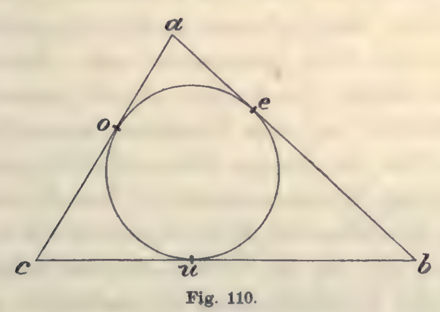


Fig. 110.

Eckpunkte des Dreiecks von den Berührungspunkten des Kreises aufgefasst werden. Man sieht hier deutlich, wie die eine Unbekannte doppelt übrig bleibt, wenn man eine Seite von der Summe der beiden

[1]) Libri III, 124—131, 258—265, 272—276.

anderen abzieht. Eine zweite Aufgabe, die Gleichung $x^2 + Ax = B^2$ oder $(A + x)x = B^2$, wird geometrisch folgendermassen gelöst (Figur 111). Die Stücke $ef = A$, $de = B$ werden unter rechtem Winkel an einander gesetzt. Dann wird ef in a halbirt und um a als Mittelpunkt mit ad als Halbmesser ein Kreis beschrieben, bis zu dessen Durchschnitt in b und c die ef nach beiden Seiten verlängert wird. Offenbar ist $be = fc = x$. Hier vermuthlich ist die Aufgabe gelöst, mit vier gegebenen Strecken als Seiten ein Sehnenviereck zu zeichnen[1]).

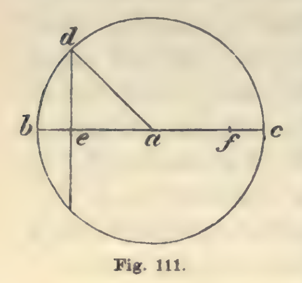


Fig. 111.

Bevor wir über den Abschnitt der Speculationes diversae berichten, welcher der Mechanik gewidmet ist, müssen wir zurückgreifend eines Schriftstellers gedenken, der auf diesem Gebiete Benedetti's Vorgänger war.

Guidobaldo del Monte[2]) (1545—1607) war ein hochangesehener Edelmann aus Pesaro. Er hatte erst beabsichtigt, sich dem Studium zu widmen, dann focht er gegen die Türken, später hat er als Inspector der Festungen Toscanas seinem Vaterlande gedient; zuletzt erfreute er sich auf seinen Gütern einer wissenschaftlich ausgefüllten Zurückgezogenheit. In seiner Mechanik von 1577 ist das Gesetz enthalten, dass Last und Kraft zu einander im umgekehrten Verhältnisse der Räume stehen, welche sie in derselben Zeit durchlaufen, aber über die Anwendung beim Flaschenzuge ging Del Monte nicht hinaus, die Lehre von der schiefen Ebene, vom Keil, von der Schraube hat er nicht verstanden[3]), 1579 wurde die *Theoria planisphaerorium* gedruckt. In ihr sind mancherlei Constructionen gelehrt, welche nicht ohne Interesse sind[4]); die Quellen, welchen sie entstammen, scheinen nicht genannt zu sein. Dort findet man die Beschreibung der Ellipse durch einen Punkt einer Strecke, welche mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines Winkels sich verschiebt, wie Proklus sie kannte (Bd. I, S. 466), die von den drei Brüdern beschriebene Gärtnerconstruction der Ellipse (Bd. I, S. 690) u. s. w. Andere Schriften Del Monte's sind durch Auszüge zu wenig bekannt, als dass wir uns ein Urtheil darüber bilden könnten, wie weit eine Geschichte der Mathematik bei denselben zu verweilen hat.

Und nun kehren wir zu Benedetti's Werk von 1585 zurück. In

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 443 (deutsch 496). [2]) Libri IV, 79—84. [3]) Lagrange, Analytische Mechanik (deutsch von Servus). Berlin 1887, S. 17 und 8. [4]) Vergl. Chasles, *Aperçu hist.* 98 (deutsch 95) mit *Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin* (Leyden 1634), pag. 347—348.

dem mechanischen Abschnitte ist die Wirkungsweise des Keils und des Flaschenzuges, so wie auch die des Winkelhebels richtig verstanden. Wenn Benedetti sagt, dass die Grösse eines beliebigen Gewichtes oder die bewegende Kraft in Beziehung auf eine andere Grösse durch den Nutzen, *beneficio*, der Senkrechten erkannt werde, die vom Mittelpunkte der Wage auf die Linie der Neigung gezogen seien, so ist damit die Grundlage der gegenwärtigen Lehre von den Momenten ausgesprochen[1]). Benedetti hat ferner erkannt, dass ein auf gezwungener Bahn sich bewegender Körper, wenn er freigelassen werde, die Richtung der Berührungslinie einschlage[2]). In den Streitschriften, welche gegen Aristotelische Lehren gerichtet sind, wendet sich Benedetti unter Anderem der von Aristoteles geleugneten, ununterbrochen auf einer begrenzten Strecke fortdauernden Bewegung zu[3]). Aristoteles hatte nämlich in seiner Physik (VIII, 8 pag. 262a) darauf hingewiesen, dass der Körper am Ende der Strecke angelangt nothwendig anhalten müsse, bevor er den gleichen Weg zurückmache, dass also ein Augenblick der Ruhe die Bewegung unterbreche. Benedetti widerlegte die Behauptung dadurch, dass er die hin- und hergehende geradlinige Bewegung von einer in gleichbleibendem Sinne andauernden, also nie unterbrochenen kreisförmigen Bewegung abhängig machte, mithin bis zu einem gewissen Grade einer 1570 veröffentlichten von Ferrari gemachten Erfindung (S. 535) sich bediente (Figur 112). Der Punkt A, welcher den Kreisumfang ANU im Sinne des Zeigers einer Uhr durchläuft, ist in jeder seiner Lagen mit dem Punkte B geradlinig verbunden. NB und UB sind die Grenzlagen dieser Geraden, jede andere Lage schneidet die Strecke CD in irgend einem Punkte T, und während A einen ganzen Kreisumlauf vollzieht, bewegt sich T unterbrechungslos erst von C nach D, dann zurück von D nach C. Eine zweite gleichfalls geometrische Betrachtung Benedetti's wendet sich gegen die Aristotelische Behauptung, auf einer endlichen geraden Strecke sei eine unendliche Bewegung nicht denkbar. Die Gerade CR (Figur 113, S. 570) drehe sich im Sinne des Zeigers einer Uhr um C, so dass sie die Gerade BR in

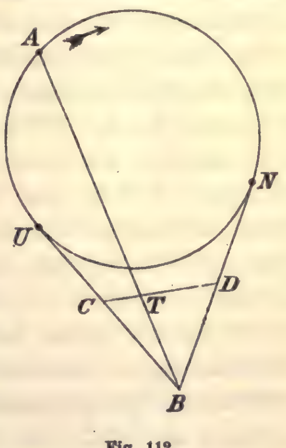


Fig. 112.

[1]) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik (Berlin 1873) S. 17. [2]) Montucla I, 693—694. [3]) Lasswitz, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton (Hamburg und Leipzig) II, 14—18.

einem von R sich weiter und weiter entfernenden Punkte A schneidet. Zugleich schneidet sie alsdann die RX, welche als Senkrechte die beiden Parallelen BR und CX verbindet, in einem Punkte I, und dieser Punkt I durchläuft die endliche Strecke RX, während A auf der Strecke BR einen unendlichen Weg zurücklegt, mithin vollzieht sich hier eine unendliche Bewegung auf RX.

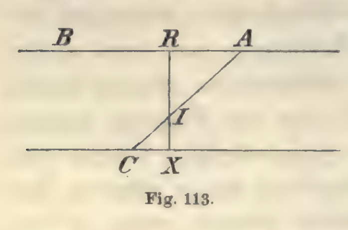


Fig. 113.

Es ist der Anfang einer geometrisch begründeten Mechanik, der sich in diesen Betrachtungen enthüllt. Die Mechanik hört allmälig auf, blosse Erfahrungssätze zu sammeln, oder, was noch schlimmer war, philosophisch abgeleitete Behauptungen in die Welt zu schleudern, unbekümmert darum, ob sie zur Erfahrung passen oder ihr widersprechen. Die Mechanik beginnt ein Kapitel der Mathematik zu werden.

Der Mechanik und der Geometrie gemeinschaftlich gehören Untersuchungen an, welche Maurolycus und Commandinus unabhängig von einander anstellten, und in deren Veröffentlichung Commandinus, ähnlich wie bei den Uebersetzungsarbeiten, seinem Vorgänger den Rang ablief. Es handelt sich um Schwerpunktsbestimmungen. Seit Archimed (Bd. I, S. 308—309) solche wiederholt vornahm, seit Pappus (Bd. I, S. 421) darauf zurückkam, war der Gegenstand lange Jahrhunderte hindurch fast unberührt geblieben, bis Lionardo da Vinci (S. 302) den Schwerpunkt einer Pyramide mit dreieckiger Basis entdeckte. War er durch das Studium Archimedischer Schriften dazu geführt worden, diese Aufgabe sich zu stellen? Wir möchten es fast annehmen. Jedenfalls traten Schwerpunktsaufgaben in den Vordergrund, als man in Folge des Erscheinens neuer mit reichhaltigen Erläuterungen versehener Ausgaben der griechischen Classiker die Bedeutung dieser Aufgaben zu würdigen lernte, und es ist nichts weniger als Zufall, dass die Herausgeber des Archimed und des Pappus zu den ersten Schriftstellern gehören, welche wieder an Schwerpunktsbestimmungen sich versuchten[1]). Maurolycus fand 1548 den Schwerpunkt der Pyramide, des Kegels, des Umdrehungsparaboloids, er verwerthete die Kenntniss desselben zur Raumbestimmung jener Körper ähnlich wie Pappus es gethan hatte. Gedruckt wurden allerdings alle diese Dinge erst 1685 in der Archimedausgabe des Maurolycus, nachdem die Wissenschaft in gewaltigen Schritten diese ersten Zielpunkte längst und weit hinter sich gelassen hatte, angekündigt waren

[1]) Libri III, 115—116.

sie in den *Opuscula mathematica* des Maurolycus von 1575. Commandinus dagegen gab seine fast gleichinhaltliche Schrift *De centro gravitatis solidorum* schon 1565 alsbald nach der Fertigstellung im Drucke heraus.

Eine Stelle der *Opuscula mathematica* des Maurolycus hat Beachtung gefunden[1]), in welcher man eine Art von geometrischer Dualität erkennen wollte. Man kann allenfalls diese Benennung gebrauchen, muss sich aber ja davor hüten, mehr aus diesem Namen herauslesen zu wollen, als Maurolycus bei der Sache dachte. Dieser sagt nämlich, der Würfel sei ein Würfel mit 6 Flächen und 8 Ecken, das Octaeder ein solcher mit 6 Ecken und 8 Flächen, sie entsprächen einander durch Correlation, *unde haec sibi invicem correlativa sunt.* Ebenso seien Ikosaeder und Dodekaeder correlative Körper, weil das Ikosaeder 20 Flächen und 12 Ecken, das Dodekaeder 20 Ecken und 12 Flächen besitze. Das Tetraeder mit 4 Flächen und 4 Ecken habe keinen correlativen Körper, es entspreche sich selbst, *ipsum enim met sibi respondet.*

Von den uns als Uebersetzer bekannt gewordenen Schriftstellern verdient auch Barozzi als Geometer genannt zu werden. Er hat 1586 einen Band veröffentlicht, welcher von den Asymptoten handelt[2]). Verdienstlich ist daran die umfassende Literaturkenntniss des Verfassers. Griechen (Apollonius, Pappus, Eutokius), neuere Schriftsteller (Orontius Finaeus, Werner, Cardano, Peletarius), jüdische Philosophen aus verschiedenen Jahrhunderten hat er gelesen, und er giebt sich die mitunter recht überflüssige Mühe, ihre philosophischen Zweifel zu erörtern. Dagegen hat er, so weit er in dieser ersteren Beziehung ausgreift, seinen eigentlichen Gegenstand zu eng gefasst. Nur die Asymptoten der Hyperbel sind betrachtet. Dass es auch andere krumme Linien mit geradlinigen Asymptoten gebe, wie z. B. die Conchoide (Bd. I, S. 335) ist mit keinem Worte angedeutet, und noch weniger ist natürlich von allgemeinen asymptotischen Eigenschaften die Rede.

68. Kapitel.

Fortsetzung der Geometrie und Mechanik. Cyclometrie und Trigonometrie.

Wir müssen noch einen Schriftsteller nennen, welcher auf den beiden hier in unserer Darstellung vereinigten Gebieten der Geo-

[1]) J. H. T. Müller in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik XXXIV, 1—6. [2]) Kästner II, 94—98.

metrie und Mechanik sich grosse Verdienste erworben hat: Simon Stevin[1]).

Er ist 1548 in Brügge geboren, 1620 in Leiden oder im Haag gestorben. Er begann als Kaufmann in Antwerpen und setzte vermuthlich diese Beschäftigung auf Reisen in Polen, Dänemark, dem ganzen nördlichen Europa fort. Später stand Stevin in nahen Beziehungen zu Moritz von Oranien, der ebenso ausseramtlich auf seinen Rath hörte, als ihm amtliche Stellungen zuwies. Man weiss von einer Anstellung Stevin's als Vorstand des Waterstaet (Oberwasserbaumeister) und von einer solchen als Generalquartiermeister. Ein von Stevin zuerst ausgesprochener, dann von den Zeitgenossen viel bewunderter und weitergesponnener Gedanke ist der von dem „weisen Jahrhunderte" [2]). Vor undenklichen Zeiten habe, behauptet er, das Menschengeschlecht ein allumfassendes Wissen besessen, von welchem mehr und mehr verloren ging, und welches erst allmälig wieder erworben werden müsse, damit dereinst ein zweites weises Jahrhundert erscheine. Stevin war Niederländer durch und durch und schrieb vorzugsweise in seiner niederdeutschen Muttersprache, welche er für diejenige erklärte, die vermöge ihres Reichthums an einsilbigen leicht zusammensetzbaren Stämmen sich vorzugsweise zur Weltsprache eigne[3]). Freilich fügte er sich der Thatsache, dass die von ihm erwünschte Allgemeinverständlichkeit des Niederdeutschen nicht entfernt vorhanden war, und übersetzte theils selbst seine Schriften nachmals ins Französische, theils liess er es zu, dass sie ins Lateinische übersetzt wurden. Zuerst scheinen 1584 Zinstafeln im Drucke erschienen zu sein, dann 1585 ein Band, welcher die Arithmetik, die vier ersten Bücher des Diophant, die praktische Arithmetik und eine Schrift mit dem Titel *La Disme* in sich schloss. Demselben Jahre 1585 gehören fünf Bücher geometrischer Aufgaben an. Im Jahre 1586 folgten einige Bücher mechanischen Inhaltes. Sehr mannigfaltig sind die *Hypomnemata mathematica*, welche Snellius ins Lateinische übersetzt hatte, und welche in dieser letzteren Sprache 1608 gedruckt wurden. Die Trigonometrie Stevin's fand 1628 einen Uebersetzer in die deutsche

---

[1]) Kästner III, 392—418. — Steichen, *Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin* (Bruxelles 1846). — Quetelet pag. 144—168. — Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlande II, 183—229 und 440—445. — Allgem. deutsche Biographie. XXXVI, 158—160. Die Werke Stevin's wurden von Albert Girard 1634 in einem starken Foliobande im Drucke herausgegeben, den wir als Stevin citiren. Zwei Schriften (über Musik und über Mühlen) hat Bierens de Haan neu aufgefunden und 1887 l. c. pag. 231—360 zum Abdrucke gebracht. [2]) Stevin pag. 106 (Geographie, Definition VI). [3]) Stevin pag. 114 sqq.

Sprache in Daniel Schwenter[1]), der uns im 71. Kapitel bekannt werden wird. Noch späteren Datums sind Schriften Stevin's über die Befestigungskunst, welche unter den Fachmännern nicht minder berühmt sind, als die demselben Gegenstande gewidmeten Untersuchungen Dürer's (S. 468). Auch bei Stevin sind bahnbrechende Gedanken ausgesprochen, von welchen hier, wo wir mit einfacher Namensnennung uns begnügen müssen, der der Vertheidigung mittels Schleussenwerke erwähnt werden darf, weil er Stevin in seiner doppelten Eigenschaft als Wasser- und Festungsbaumeister kennzeichnet.

Die eigentlich mathematischen Schriften Stevin's nöthigen uns, ihm mehrfach unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Für's Erste haben wir es mit seinen geometrischen und mechanischen Werken zu thun, wobei aber eine Schwierigkeit auftritt. Die weitaus verbreiteste Ausgabe von Stevin's Werken ist die französische Uebersetzung durch Albert Girard, welche nach Stevin's Tode vorbereitet erst 1634 nach Girard's Tode herauskam. Bei der an Unauffindbarkeit grenzenden Seltenheit der früheren Drucke ist es uns unmöglich zu bestimmen, wie weit in dieser Girard'schen Gesammtausgabe, abgesehen von Zusätzen des Herausgebers, welche durch Beisetzung von dessen Namen als solche gekennzeichnet sind, noch Veränderungen eintraten. Ob z. B. die fünf Bücher geometrischer Aufgaben von 1585 in den sechs Büchern *De la practique de Géométrie* unserer Ausgabe enthalten sind, lässt sich nicht entnehmen. Unwahrscheinlich ist es nicht, aber denkbar wäre auch, dass jene erste geometrische Schrift für uns gänzlich verloren gegangen wäre. Die letztere Möglichkeit beruht darauf, dass in der lateinischen Ausgabe von 1605—1608, welche in manchen Dingen von der französischen Ausgabe sich unterscheiden soll, und welche namentlich eine Abtheilung *De miscellaneis* besitzt, welche dort ganz fehlt[2]), auch ein Verzeichniss von Schriften sich findet, welche hätten abgedruckt werden sollen, aber vom Herausgeber noch nicht druckfertig gestellt werden konnten und desshalb vorläufig zurückgelegt wurden[3]). Allerdings sind die *Problemata geometrica* weder in den *Miscellaneis* noch in dem Verzeichnisse fehlender Stücke enthalten, und damit ist für die erstere Möglichkeit eine Stütze gewonnen, welche durch einen Ausspruch des Adriaen van Roomen von 1593 wesentlich verstärkt wird. Dieser berichtet nämlich[4]) von einem umfassenden geometrischen Werke Stevin's, an welchem derselbe arbeite, nachdem er 1583(?) eine Probe davon in den fünf Büchern Aufgaben gegeben habe.

---

[1]) Wertheim brieflich. [2]) Kästner III, 407. [3]) Ebenda III, 410—411. [4]) Quetelet pag. 167, Note 1.

Die französische Ausgabe besteht aus sechs Theilen, von welchen der I. eine besondere Seitenzählung, S. 1—222, besitzt, während die Theile II bis VI gemeinschaftlich einer neuen Seitenbezeichnung, S. 1—678, unterworfen sind. Das Ganze bildet mithin einen sehr starken Folioband von 900 Seiten. Die durch zweifache Seitenzählung angedeutete wesentliche Zweitheilung des ganzen Bandes ist darauf zurückzuführen, dass in der vor S. 1 des I. Theils sich befindenden Inhaltsübersicht die Theile II bis V als *Memoires mathematiques du Prince Maurice de Nassau* (Accente sind im Drucke nur äusserst selten angegeben) bezeichnet sind, denen dann mit den einführenden Worten *et apres les susdites Memoires* der VI. Theil folgt. Natürlich ist nicht gemeint, die Theile II bis V seien von Moritz von Nassau verfasst. Dem widerspricht schon die Thasache, dass in ihnen die mechanischen Schriften inbegriffen sind, welche Stevin 1586 unter eigenem Namen veröffentlichte. Die Meinung ist vielmehr die, es seien hier Arbeiten vereinigt, welche für jenen Fürsten bestimmt waren, und auf deren Niederschrift er einen gewissen Einfluss ausübte, welcher da und dort durch die Bemerkung, solches rühre vom Prinzen her, hervorgehoben ist. Wie weit diese Bemerkungen selbst auf der Wahrheitsliebe Stevin's, wie weit sie auf seiner höfischen Gewandtheit beruhen, das zu ermitteln ist unmöglich. Der I. Theil enthält Arithmetisches und Algebraisches, der II. Theil mathematische Kosmographie, der III. Theil die oben erwähnten sechs Bücher praktischer Geometrie, der IV. Theil Mechanisches, der V. Theil Optisches, der VI. Theil auf das Kriegswesen bezügliche Schriften.

Dem III. Theile, zu welchem wir uns näher wenden, ein ganz allgemeines Lob zu spenden, ist nicht viel Veranlassung. Die praktische Geometrie Stevin's ist unzweifelhaft ein durch seine Anlage eigenthümliches Werk, aber darum noch kein weit hervorragendes. Die Eigenthümlichkeit besteht darin, dass Stevin bestrebt ist, der Geometrie eine arithmetische Anordnung zu geben. In der Arithmetik lernt man zuerst die Zahl aussprechen, dann führt man mit der Zahl die vier einfachen Rechnungsverfahren des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens aus, dann kommen die Proportionsrechnungen. Dem entsprechend lehrt die Geometrie zuerst die einzelnen Raumgebilde kennen, welche später den Rechnungsverfahren unterworfen, zuletzt in Verhältniss zu einander gebracht werden. In das Bereich des Kennenlernens einzelner Raumgebilde zieht aber Stevin Aufgaben, welche man nicht leicht dort suchen wird. Wir nennen deren zwei auf die Ellipse bezügliche, deren Auflösungen Stevin selbst anzugehören scheinen: die punktweise Zeichnung einer Ellipse, deren beide Axen gegeben sind, und die Auffindung der kleinen Axe,

wenn die grosse Axe und ein Ellipsenbogen gegeben sind[1]) (Figur 114). Die halbe kleine Axe wird als Verlängerung der grossen Axe gezeichnet, ausserdem eine ihr gleiche Senkrechte in dem Punkte errichtet, wo beide Axen aneinanderstossen und aus dem gleichen Punkte als Mittelpunkt mit der halben kleinen Axe als Halbmesser ein Kreisquadrant beschrieben. Den wagrechten Halbmesser des Kreisquadranten und ebenso die halbe grosse Axe theilt man, jede dieser Strecken für sich, in eine gleiche Anzahl, etwa vier gleiche Theile und nennt diejenigen Theilpunkte einander entsprechend, welche von dem mehrgenannten Aneinanderstossungspunkte der grossen und halben kleinen Axe nach rechts und links gezählt die gleichvielten sind. In allen Theilpunkten werden Senkrechte errichtet, auf den Theilpunkten der halben kleinen Axe bis zum Durchschnitte mit dem beschriebenen Kreisquadranten. Die Senkrechten in den Theilpunkten der halben grossen Axen macht man den nunmehr schon abgegrenzten Längen der Senkrechten in den entsprechenden Theilpunkten gleich, so sind dadurch Punkte der Ellipse gegeben. Für die zweite Aufgabe beruft sich Stevin auf einen Satz, welchen Guido Ubaldus, also offenbar Guidobaldo del Monte, bewiesen habe, und der dahin zielt, dass wenn von einem Punkte G der kleinen Axe (Figur 115) nach einem Punkte I der Ellipse die GI der halben grossen Axe gleich gezeichnet wird, das Stück HI dieser Geraden der halben kleinen Axe gleich sein muss und umgekehrt[2]). Kennt man also die grosse Axe, so zieht man in deren Mitte senkrecht die Richtung der kleinen Axe, schlägt von einem Punkte I des gegebenen Ellipsenbogens mit der halben grossen Axe einen Kreisbogen, der die Richtung der kleinen Axe in G schneidet und misst auf IG das Stück IH bis zum Durchschnitte mit der grossen Axe, so ist dadurch die halbe kleine Axe bestimmt. Bei der Definition der Körper sind Körpernetze gezeichnet[3]), wie Dürer sie auch hergestellt hat (S. 466). Für das Paralleltrapez ist der Name *hace* (Axt)

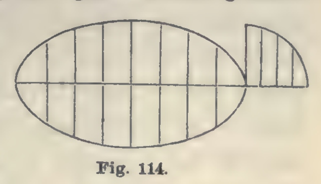


Fig. 114.

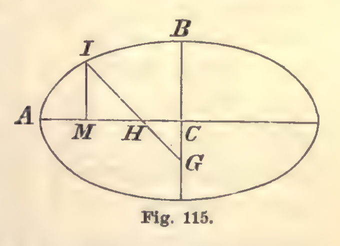


Fig. 115.

---

[1]) Stevin II, 348—349. Unter I, beziehungsweise II, verstehen wir die beiden Paginirungen, von welchen im Texte die Rede war. [2]) Die Wahrheit dieses Satzes beweist sich leicht wie folgt: $IH : HM = GH : HC$, also

$IH(CM - MH) = GH \cdot MH$, $IH \cdot CM = IG \cdot MH$, $IG^2 = \left(\frac{IH \cdot CM}{MH}\right)^2 = \frac{b^2 x^2}{b^2 - y^2} = a^2$.

[3]) Stevin II, 359.

statt des gebräuchlicheren *mensa* (Tisch) in Vorschlag gebracht[1]). Beim Addiren von Linien, welches ebenso wie das von Flächen und auch das von Körpern gelehrt wird, ist eines der vorgeführten Beispiele die Addition zweier Kreisperipherien[2]), welche durch die Peripherie eines neuen Kreises dargestellt werde, dessen Halbmesser die Summe der Halbmesser der beiden gegebenen Kreise sei. Unter dem Begriffe des Theilens von Flächen behandelt Stevin die Aufgabe, die Zähne eines kleinen Rades einzuschneiden[3]). Man befestigt das künftige Rädchen in dem Mittelpunkte einer sehr viel grösseren kreisrunden Platte, deren Umfang man in die vorgeschriebene Anzahl von Theilen theilt. Dann zieht man Halbmesser nach allen Theilpunkten, wodurch die kleinere Scheibe mit getheilt wird. Fehler seien auch bei der Theilung des grossen Kreises unvermeidlich, aber verkleinert werden sie unmerklich, *la faute se trouve du tout insensible en la petite plaque.* Auch Figuren mit einspringenden Winkeln werden der Theilung unterworfen[4]). Dabei ist die Bemerkung gemacht, welche als Definition solcher Figuren gelten kann, man müsse darauf achten, dass eine Gerade, welche dieselbe in zwei Theile zerlege, wirklich nicht mehr als zwei Theile hervorbringe.

Ungleich wichtiger als Stevin's geometrische Leistungen sind seine Verdienste innerhalb der Mechanik, welche wir hier im Verein mit jenen behandeln. Stevin war es, der das Gesetz des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene entdeckte (Figur 116). Das Dreieck ACB stehe senkrecht auf einer Ebene, welche die Grundlinie AC unterstützt[5]). Die Seite BC sei halb so gross als die BA. Man legt eine Kette von in gleichen Entfernungen von einander aufgereihten gleichen Kugeln um das Dreieck, so dass zwei Kugeln längs BC, vier längs BA hängen, fünf nach unten einen Zug ausüben.

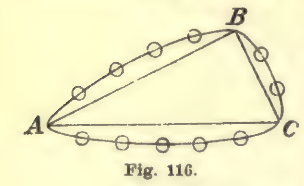


Fig. 116.

Das ganze System ist nun offenbar im Gleichgewichte, weil sonst in einem Drehungssinne oder in dem entgegengesetzten eine niemals aufhörende Bewegung eintreten müsste, was widersinnig ist, *et ainsi ce mouvement n'aurait aucune fin, ce qui est absurde.* Die fünf unten hängenden Kugeln halten sich aber bei dem gleichmässigen Zuge den sie ausüben, gegenseitig im Gleichgewichte und können daher entfernt werden, dann bleibt noch immer Gleichgewicht zwischen den vier Kugeln auf AB und den zwei Kugeln auf BC. Die vier Kugeln können dabei in eine und ebenso die zwei in eine vereinigt werden,

---

[1]) Stevin II, 373. [2]) Ebenda II, 389. [3]) Ebenda II, 403. [4]) Ebenda II, 405 und 411. [5]) Ebenda II, 448.

wenn nur ihre Gewichte den Geraden AB, BC proportional bleiben. Weiter wird alsdann die BC senkrecht gedacht und durch ein Seil um eine Rolle bei B, an welchem ein Gewicht hängt, ersetzt, so wird in dieser Form das Gesetz des Gleichgewichtes der schiefen Ebene vollends klar[1]). Aber Stevin geht noch einen grossen Schritt weiter: er erkennt das Gleichgewicht zwischen drei Kräften, welche den Seiten eines Dreiecks parallel und proportional sind[2]), er führt damit zugleich in die Mechanik die Uebung ein, Kräfte nach Richtung und Grösse durch gerade Linien zu versinnlichen, wodurch die Mechanik vollends eine geometrische Wissenschaft wird.

Noch hervorragender steht Stevin in der Geschichte der Hydrostatik da, wo er durch das sogenannte hydrostatische Paradoxon[3]) den ersten gewaltigen Fortschritt seit Archimed und über das von Jenem Geleistete hinaus vollbrachte. Mit jenem Namen hat man den Satz belegt, dass jede wie immer geformte Flüssigkeitssäule auf ihre Grundlage einen dem Producte der Höhe in die Basis der Säule proportionalen Druck ausübe. Stevin's Beweis ist folgender. Zuerst zeigt er, dass ein fester Körper, welcher einer Flüssigkeit *parigrave* ist — gleiche Dichtigkeit mit ihr hat — an jedem Orte der Flüssigkeit, wo er nur eingetaucht wird, in Ruhe verbleibt. Ein gerader Flüssigkeitscylinder drückt ferner seine Grundlage mit dem ganzen Gewichte, welches dem Producte aus Höhe in Basis proportional ist. Eine Veränderung kann an dieser Wahrheit nicht stattfinden, wenn nach dem Vorhergehenden ein parigraver Körper beliebiger Form eingetaucht wird, und ebensowenig, wenn man sich diesen Körper am Rande des Gefässes befestigt denkt, so dass er mit dem Gefässe eins wird, und nur die beliebig geformte Flüssigkeitssäule übrig bleibt. Der Seitendruck der Flüssigkeiten wird demnächst untersucht und dabei eine Methode angewandt, welche, wenn auch Archimed offenbar nachgebildet, doch von hervorragendster Bedeutung ist, insofern sie zum ersten Male uns wieder begegnet[4]). Die gedrückte Seitenwand wird in kleine Flächentheilchen zerlegt, und da zeigt sich, dass jedes Flächentheilchen einem Drucke ausgesetzt ist, welcher zwischen zwei Grenzen liegt, d. h. grösser ist als ein gewisser kleinster Druck, kleiner als ein anderer grösster Druck, dass ferner jene als Grenzen auftretenden Druckgrössen wie die Gewichte ein- und umschriebener Körper sich verhalten. Dann fährt Stevin aber fort: *Que si on divisait le fond ACDE en plus de 4 parties egales, soit en 8; il appert que les corps inscrits et circonscrits ne*

---

[1]) Stevin II, 449 Corollaire IV. [2]) Ebenda II, 449 Corollaire VI. [3]) Ebenda II, 488 Corollaire II. [4]) Ebenda II, 488 sqq. Théorème IX.

differoyent que de la moitié de la difference precedente; et est manifeste qu'on pourroit partir le fond en tant de parties egales que la difference des corps inscrits et circonscrits à la demi-colomne, differeroyent moins qu'aucun corps donné, si petit puisse-il estre. Es ist nicht zu verkennen, dass hier ein Grenzübergang vorgenommen ist auf Grundlage der Zerlegung eines Flächenstückes in mehr und mehr, kleinere und kleinere Flächentheilchen, und bei der grossen Wichtigkeit der späteren Entwickelung grade dieser Betrachtungsweise erscheint es wünschenswerth hervorzuheben, dass diese Untersuchungen Stevin's zuerst 1608 in der lateinischen Ausgabe der *Hypomnemata mathematica* in deren dritten Bande gedruckt wurden.

Die Schwimmfähigkeit beladener Schiffe untersuchend kam Stevin zu den Sätzen[1]), dass der Schwerpunkt des Schiffes tiefer als der Schwerpunkt des verdrängten Wassers sich befinden müsse, und dass ein Umschlagen des Schiffes um so leichter zu befürchten stehe, je höher sein Schwerpunkt liege. Wenn auch nicht deutlich ausgesprochen, lag darin die Unterscheidung des labilen von dem stabilen Gleichgewichte wenigstens angedeutet.

Bei seinen Zeitgenossen war Stevin viel bewundert wegen der Erfindung eines mit Segeln versehenen Wagens, der um das Jahr 1600 auf dem Strande zwischen Scheweningen und Petten seine Probefahrt machte. Der Wagen, dessen kleineres Modell man 1802 in Scheweningen noch aufbewahrte, war mit 28 Personen besetzt. Prinz Moritz selbst lenkte, und die alleinige Kraft des Windes trieb das Fuhrwerk 14 Wegstunden weit mit solcher Geschwindigkeit, dass kein Pferd mitkommen konnte[2]). Soviel zunächst über Stevin.

Den geometrischen und mechanischen Betrachtungen gleichmässig verwandt ist die Herstellung gewisser Vorrichtungen, welche in das Ende des XVI. Jahrhunderts fällt.

Commandinus soll einen doppelten Zirkel mit beweglichem Scharnier und veränderlichen Zirkelstangen erfunden haben[3]), welcher dazu diente, eine gegebene Strecke in eine Anzahl von gleichen Theilen zu theilen.

Barozzi hat einen Kegelschnittzirkel eigener Erfindung beschrieben[4]). Ob freilich die Erfindung eine ganz selbständige war, oder ob Barozzi auf irgend eine Weise Kenntniss von arabischen Vorarbeiten (Bd. I, S. 707) erhalten hatte, müssen wir dahingestellt sein lassen. Jedenfalls ist Barozzi's Vorrichtung denen der Araber sehr

---

[1]) Stevin II, 512—513. [2]) Quetelet pag. 155—156. [3]) Libri III, 121. [4]) Kästner II, 98. — A. von Braunmühl, Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel. Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-literar. Abthlg. S. 161—165.

ähnlich. Die Beschreibung findet sich in dem Buche über Asymptoten und kennzeichnet die Vorrichtung als eine solche, welche den Kegelschnitt als Durchschnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entstehen lässt. Die eine Zirkelstange enthält nämlich ein Röhrchen, in welchem ein Stift derartig verschiebbar ist, dass er, während das Röhrchen einen Kegelmantel beschreibt, fortwährend mit der Zeichnungsebene in Berührung bleibt und auf ihr, je nach der Stellung des Zirkels, diesen oder jenen Kegelschnitt hervorbringt. Nach seinem Instrumente hat dann Barozzi noch ein zweites beschrieben, welches ungefähr auf dem gleichen Grundgedanken beruht, und welches von einem anderen Italiener Giulio Thiene[1]) erfunden worden ist.

Ein Professor Hommel (1518—1562) in Leipzig bediente sich[2]) des sogenannten Transversalmaassstabes (Figur 117), bei welchem durch Transversallinien, die von dem oberen Rande des Maassstabes gegen den unteren geneigt gezeichnet sind, die Möglichkeit gegeben ist, auch solche Längen abzumessen, welche in Gestalt von Bruchtheilen der kleinsten in Anwendung kommenden Maasseinheit sich ausdrücken. Dass er in Levi ben Gerson (S. 289) einen Vorgänger hatte, war ihm vermuthlich unbekannt.

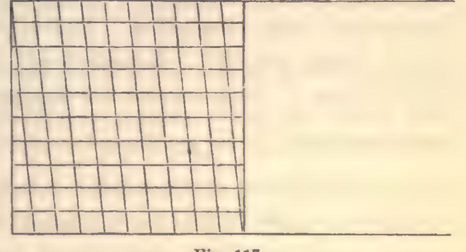


Fig. 117.

Eine ähnliche Aufgabe hatte, wie wir uns erinnern, Nonius sich gestellt (S. 389), eine ähnliche löste Clavius[3]). Allerdings fällt die Veröffentlichung der von Clavius ersonnenen Vorrichtung schon in den Anfang des XVII. Jahrhunderts, aber unsere Leser sind daran gewöhnt, dass wir die Zeitgrenzen nicht genau einhalten können. Clavius verlangt, man solle einen Maassstab in 100 oder, wenn seine Länge es gestattet, in 1000 gleiche Theile theilen. Auf einem besonderen Stäbchen werde die Länge von 11 Theilen aufgetragen und selbst in 10 gleiche Theile getheilt. Jedes Theilchen des Hilfsmaassstabes beträgt also 11 Tausendstel des ursprünglich 100theiligen, beziehungsweise 11 Zehntausendstel des ursprünglich 1000theiligen Maassstabes, und durch Verschiebung längs dem ursprünglichen Maassstabe kann eine Messung auf $\frac{1}{10}$ der dortigen kleinsten Längeneinheit

---

[1]) Ueber ihn vergl. Lampertico, *Di Giulio Thiene uome d'arme e di scienza del Secolo XVI* in den Atti des R. Instituto Veneto für 1891. [2]) Kästner II, 355. [3]) Breusing, Nonius oder Vernier? in den Astronomischen Nachrichten von 1880 Nr. 2289 (Band XCVI, S. 129—134).

genau vorgenommen werden. Das Neue und Wichtige bei dieser Einrichtung ist die Auftragung der Hilfstheilung auf ein frei bewegliches Stäbchen, welche von da an, wenn auch nicht sofort, Regel und stete Uebung geworden ist. Clavius veröffentlichte seine Erfindung 1606 in seiner *Geometria practica*, und in einer zweiten Schrift, *Astrolabium*, hat er sie auch auf Winkelablesungen ausgedehnt. Ein in einzelne Grade abgetheilter Kreisquadrant dient zur Ablesung von einzelnen Winkelminuten, sofern ein Hilfsbogen von 61^0 in 60 gleiche Theile getheilt zum Anlegen vorbereitet ist. Die Geometria practica verdient vollauf das Lob, welches in den Worten ausgesprochen ist[1]), sie sei „das Muster eines Lehrbegriffes der praktischen Geometrie, vollkommen für ihre Zeit". Das Werk ist in acht Bücher getheilt. Das 1. Buch enthält die Beschreibung von zu Längen- und Winkelmessungen nöthigen Vorrichtungen und die trigonometrische Berechnung von Dreiecken. Die eigentliche Feldmessung ist im 2. und 3. Buche gelehrt. Das 4. Buch bringt Inhaltsformeln für ebene Figuren, das 5. Buch solche für Raumkörper, wobei die archimedische Verhältnisszahl $\frac{22}{7}$ als genügend benutzt wird. Das 6. Buch löst allerlei Theilungsaufgaben, sowie solche, welche auf Vergrösserung von Raumgebilden in gegebenem Verhältnisse sich beziehen. Die Würfelverdoppelung bildet einen besonderen Fall der letzteren Aufgabe, und Clavius bedient sich bei ihr der von griechischen Schriftstellern zu gleichem Zwecke benutzten krummen Linien. Im Anschlusse an die Würfelverdoppelung erscheint die Lehre von den Wurzelausziehungen, um die vorher geometrisch gelösten Aufgaben auch rechnerisch bewältigen zu können. Das 7. Buch bezeichnet sich als das von den isoperimetrischen Figuren und Körpern nebst einem Anhange von der Quadratrix. In dem ziemlich umfangreichen 8. Buche sind sehr verschiedene geometrische Aufgaben vereinigt. Dort sind z. B. auch einige von den Näherungsconstructionen besprochen, welche Dürer gelehrt hat (S. 462), und welche unter Handwerkern weit verbreitet waren. Trigonometrische Rechnung führt im 29. Satze dieses Buches zur Auffindung der Winkel in dem mit fester Zirkelöffnung hergestellten gleichseitigen Fünfecke, und damit zum Nachweise, dass von genauer Gleichwinkligkeit hier nicht die Rede sein könne. Im 30. Satze wird die Auffindung der Siebenecksseite als halbe Dreiecksseite gelehrt, aber in einer anderen Ausdrucksweise und unter Berufung auf Carolus Marianus Cremonensis, eine Persönlichkeit, die damals bekannter gewesen sein muss, als sie gegenwärtig

---

[1]) Kästner III, 287.

ist. Seine Vorschrift verlangt[1]), dass man (Fig. 118) den Halbmesser DA des Kreises, in welchen das regelmässige Siebeneck eingezeichnet werden soll, um $AE = \frac{1}{4} DA$ verlängere. Dann soll man um E mit $EB = DA$ als Halbmesser einen neuen Kreis beschreiben, welcher den ersten in B schneide, so sei AB die Siebenecksseite. Die Rechnung liefert $DE = \frac{5r}{4}$, wenn $BE = BD = r$. Ist $BG \perp DE$, so folgt weiter $DG = GE = \frac{5r}{8}$ und

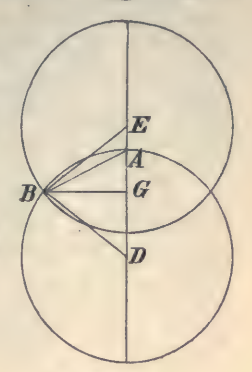


Fig. 118.

$$BG^2 = BE^2 - GE^2 = r^2 - \frac{25r^2}{64} = \frac{39r^2}{64}.$$

Ferner ist

$$AB^2 = BG^2 + AG^2 = BG^2 + (DA - DG)^2 = \frac{39r^2}{64} + \left(r - \frac{5r}{8}\right)^2 = \frac{3r^2}{4},$$

also $AB = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, und das ist die Hälfte der Seite des regelmässigen Sehnendreiecks. Den Schluss des ganzen Werkes bildet eine Tafel der Quadrate und Würfel aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 und eine Anweisung, wie man bei Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln diese Tafel mit Vortheil anwenden könne. So weit die Tafel Kubikzahlen enthielt, war sie die von grösster Ausdehnung, welche noch veröffentlicht worden war und blieb es auch für lange Zeit. Die Tafel der Quadratzahlen aber war schon vor ihrem Erscheinen durch die *Tabula tetragonica* von 1592 des italienischen Astronomen Magini (1555—1615) weit überboten[2]). Auf 24 Blättern enthält diese die Quadrate der Zahlen von 1 bis 100100.

Hätten wir streng die Zeitfolge eingehalten, so wäre vor Clavius ein anderer ganz tüchtiger Geometer zu nennen gewesen. Simon Jacob[3]) ist in Coburg geboren und 1564 in Frankfurt am Main gestorben. Er verfasste ein Rechenbuch nebst Geometrie als zweite Bearbeitung eines bloss der Rechenkunst gewidmeten Werkes und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Der Druck begann 1557, wurde aber unterbrochen. Als der Verfasser dann 1564 starb, besorgte sein Bruder Pancraz Jacob 1565 die neue Ausgabe, welche selbst wiederholt gedruckt wurde. In dem dritten, geometrischen Theile ist im

[1]) Auf das Verfahren des Cremonesers hat S. Günther, Zeitschr. Math. Phys. XX, Hist.-literar. Abthlg. S. 116 aufmerksam gemacht, dann H. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* in den Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol. X. [2]) J. W. L. Glaisher, *Report of the Committee of mathematical tables.* London 1873, pag. 26. [3]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 559.

59. Satze angegeben, die Seiten 25, 33, 60, 16 in der genannten Reihenfolge aneinander gefügt bildeten ein Sehnenviereck im Kreise vom Durchmesser 65, die beiden Diagonalen seien 52 und 39. Wie Jacob zu diesen Zahlen gekommen ist, hat er mit keinem Worte angedeutet. Erwähnenswerth mag aber auch erscheinen, dass das Wort *corauscus*, eine andere Form für *coraustus*, erklärt wird als „eine Linie, so mit dem Basi Parallel oder gleichweitig ist“.

Wenzel Jamitzer[1]) (1508—1586), dessen Name auch in den Schreibweisen Jamnitzer und Gamiczer vorkommt, ein geschickter Goldschmied zur Nürnberg, hat 1568 Abbildungen zahlreicher geometrischer Körper der Oeffentlichkeit übergeben. Hat die Sammlung gleich mehr künstlerisches als geometrisches Interesse, so darf doch vielleicht bemerkt werden, dass in ihr auch Zeichnungen von Sternpolyedern vorkommen, den ersten, welche nachgewiesen worden sind.

Eine ganz andere Persönlichkeit als diejenigen, welchen wir die letzten Seiten gewidmet haben, war Franciscus Vieta[2]), der grösste französische Mathematiker des ganzen XVI. Jahrhunderts. François Viète Seigneur de la Bigotière ist 1540 in Fontenay-le-Comte in Poitou geboren, 1603 in Paris gestorben. Er gehörte einer katholischen Familie an und starb als Katholik. Da er unzweifelhaft eine Reihe von Jahren hindurch zu den Hugenotten gehört hat, so muss eine zweimalige Glaubensänderung bei ihm angenommen werden. Vieta widmete sich der Rechtsgelehrsamkeit und begann nach in Poitiers vollendetem Studium seine Laufbahn als Rechtsanwalt in seiner Vaterstadt, eine Stellung, welche er jedoch 1567 freiwillig wieder aufgab. Als er später Parlamentsrath in Rennes geworden war, vertrieben ihn die aus Religionszwistigkeiten entstandenen Unruhen, und Herzog von Rohan, der bekannte Führer der Hugenotten, nahm Vieta unter seinen persönlichen Schutz. Auf seine Empfehlung hin wurde Vieta 1589 Maître des requêtes, Berichterstatter über Bittschriften. Nachdem Heinrich von Navarra als König Heinrich IV. den Thron bestiegen hatte, wurde Vieta 1589 Parlamentsrath in Tours, später Mitglied des königlichen geheimen Raths. Vieta's Tod wird von dem Herausgeber seines Nachlasses als ein plötzlicher bezeichnet, *praecipiti et immaturo autoris fato*[3]), Näheres ist aber nicht

---

[1]) Doppelmayr S. 160 und 205. — Kästner II, 19—24. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften S. 35—36. — Allgemeine Deutsche Biographie XIII, 691—692. Artikel von R. Bergau. [2]) Kästner III, 37—38 und 162—175. — *Nouvelle Biographie universelle* (Paris 1866) XLVI, 135—137. Die 1646 veranstaltete Ausgabe von Vieta's Werken citiren wir als Vieta mit nachfolgender Seitenzahl. [3]) Vieta pag. 83

bekannt. Von Vieta's amtlicher Thätigkeit wird nur eine verdienstliche Leistung berichtet: in Tours sei es ihm gelungen, den Schlüssel zn einer aus mehr als 500 Zeichen bestehenden Geheimschrift zu ermitteln, deren die mit Frankreich auf feindlichem Fusse stehende spanische Regierung sich bediente, wodurch alle aufgefangenen Depeschen plötzlich leicht verständlich wurden. Schriftsteller war Vieta nur auf mathematischem Gebiete und zwar in äusserst fruchtbarer Weise. Er liess seit 1571, besonders aber seit 1591, zahlreiche Abhandlungen und Bücher auf eigene Kosten drucken und verschickte sie an Fachgenossen aller Länder. Dabei kamen ihm seine günstigen Vermögensverhältnisse zu statten. In dieser Beziehung wird erzählt, es hätten sich 20000 Thaler in klingender Münze neben seinem Sterbebette vorgefunden. Für den guten Gebrauch, welchen er von seinen Geldmitteln zu machen wusste, und nicht minder für die Milde seines Charakters zeugt die Thatsache, dass er zwischen 1600 und 1601 einen wissenschaftlichen Gegner, Adriaen van Roomen, einen Monat lang als Gast bei sich beherbergte und ihm alsdann die Rückreise bezahlte[1]). Vieta's Schriften wurden gemäss der erwähnten Art ihrer Verbreitung rasch bekannt, gingen aber auch rasch verloren, und so war bereits 1646 Franciscus van Schooten, der eine Gesammtausgabe der Vieta'schen Abhandlungen veranstaltete, nicht mehr im Stande, sie sämmtlich beizubringen. Wir werden sehen, dass muthmasslich wenigstens einige wesentliche Verluste zu beklagen sind. Dazu gehört bereits der *Canon mathematicus* von 1579. Es war ein Tabellenwerk[2]), welches die Sinus, Tangenten und Secanten aufeinanderfolgender Winkel, noch verschiedene andere Tafeln und eine ebene und sphärische Trigonometrie enthielt. Zahllose Druckfehler entstellten das Werk, und deshalb zog Vieta alle Exemplare, deren er habhaft werden konnte, zurück und vernichtete sie. In Folge dessen gehört Vieta's Canon von 1579 zu den grössten Seltenheiten[3]), und noch weniger bekannt ist ein Abdruck, welcher 1609, also nach Vieta's Tode, veranstaltet wurde[4]). In dem Canon findet sich eine entschiedene Absage an die Sexagesimalbrüche zu Gunsten der Decimalbrüche. Letztere sind meistens durch kleinere Typen von den ganzen Zahlen unterschieden, zuletzt ausser durch kleinere Typen

---

[1]) So berichtet der französische Geschichtsschreiber De Thou im 129. Buche seiner Geschichte, aus welchem ein Auszug der Gesammtausgabe von Vieta's Werken vorgedruckt ist. [2]) Montucla I, 610—611. [3]) Ein Exemplar findet sich in der Landesbibliothek zu Kassel. Vergl. Hunrath in Zeitschr. Math. Phys. XXXVIII, Histor.-literar. Abthl. S. 25. [4]) Ein Exemplar findet sich in der königlichen Bibliothek zu Stockholm. Vergl. G. Eneström in der Biblioth. mathem. 1892 S. 92.

noch durch einen sie von den ganzen Zahlen trennenden senkrechten Strich, den Vorgänger des später eingeführten Pünktchens[1]. Die Gesammtausgabe von 1646 enthält die in ihr gesammelten Schriften nicht in der Zeitfolge ihres Erscheinens geordnet, auch nicht innerhalb der sachlich zusammengehörenden Abhandlungen ist diese Zeitfolge genau eingehalten, und ebensowenig unterstützen Datirungen die Uebersicht; man ist vielmehr genöthigt, aus anderen bibliographischen Schriften die Angaben zu entnehmen, wann die einzelnen Stücke erstmalig gedruckt worden sind[2].

Zunächst haben wir es mit Vieta als Geometer zu thun und haben desshalb mit zwei Abhandlungen zu beginnen, welche 1593 zuerst im Drucke erschienen: *Effectionum geometricarum canonica recensio*[3] und *Supplementum Geometriae*[4]. Die erstere Schrift ist das, was man heute algebraische Geometrie zu nennen pflegt, d. h. eine Zusammenstellung derjenigen mit Zirkel und Lineal ausführbaren Constructionen, welche dazu dienen, gewisse Rechnungsoperationen, z. B. Auffindung des geometrischen Mittels zwischen zwei gegebenen Werthen, Anffindung des vierten Gliedes einer Proportion, von welcher drei Glieder bekannt sind u. s. w., durch Zeichnung auszuführen. Das war freilich keineswegs neu. Fast jede der in den *Effectiones geometricae* beschriebenen Constructionen ist bereits in den Euklidischen Elementen gelehrt oder stützt sich unmittelbar auf dort Gelehrtes, und wenn auf ganz neuerdings Veröffentlichtes Rücksicht genommen werden will, so hat Benedetti in seinen *Speculationes diversae* von 1585 (S. 567) Aehnliches behandelt. Aber neu war die Zusammenstellung dieser Aufgaben, ihre Vereinigung in der bestimmten Absicht, rechnerisch erhaltene Ausdrücke geometrisch zu ermitteln, und darin lag ein bemerkenswerther Fortschritt. Zirkel und Lineal genügen aber entfernt nicht, alle Aufgaben zu lösen. Sie reichen schon bei solchen nicht aus, die wir kubische Aufgaben nennen, weil sie in Gleichungsgestalt vorgelegt zum dritten Grade sich erheben. Dazu kann man sich dann verschiedener Curven bedienen, z. B. der nikomedischen Conchoide, welche die Aufgabe löst, von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade so zu ziehen, dass deren zwischen zwei gegebenen Linien liegendes Stück eine gegebene Länge besitze; auch Archimed zählte die Ausführung dieses Verlangens zu den erfüllbaren Forderungen[5]. Mit Constructionen solcher

---

[1] Hunrath l. c. S. 26. [2] Wesentliche Dienste leistet z. B. J. G. Th. Graesse, *Trésor de livres rares et précieux ou Nouveau Dictionnaire Bibliographique.* [3] Vieta pag. 229—239. [4] Ebenda pag. 240—257. [5] Ebenda pag. 240: *Et opus ille videtur absolvisse Nicomedes sua conchoide . . . . Postulatum autem omnino admisit Archimedes.*

Art hat es das *Supplementum Geometriae* zu thun. Im 9. Satze desselben ist z. B. die Dreitheilung eines Winkels in der Weise vollzogen, dass man (Figur 119) den zu theilenden Winkel DBE als Centriwinkel eines Kreises zeichnet, den einen Schenkel DB bis zum zweiten Durchschnitte C mit dem Kreise und darüber hinaus verlängert und alsdann vom Endpunkte E des anderen Schenkels nach dem verlängerten ersten Schenkel DB eine Gerade EF zieht, deren jenseits des Kreises gelegenes Stück GF dem Kreishalbmesser BE gleich sei. Der Winkel bei F ist alsdann ein Drittel des zu theilenden Winkels. Vieta's Construction ist nicht die des Nikomedes (Bd. I, S. 337), sondern diejenige des Archimed (Bd. I, S. 284). Nun ist aber nicht überflüssig in Erinnerung zu bringen, dass die archimedische Construction in den sogenannten Wahlsätzen erhalten ist, die nikomedische bei Pappus. Die Sammlungen des Pappus waren seit 1588 durch Commandinus herausgegeben, und Vieta hat sie, wie aus vielfachen Uebereinstimmungen ausser Zweifel ist, eingehend studirt. Die Wahlsätze Archimed's dagegen wurden aus dem Arabischen erstmalig 1659 durch Foster bekannt[1]). Daraus geht hervor, dass die Dreitheilung des Winkels, welche Vieta lehrte, kein Anlehen bei einem alten Schriftsteller, sondern selbständige Nacherfindung war. Die ganze Bedeutung des Supplementum Geometriae enthüllt aber der 16. und besonders der 25. und letzte Satz, der allgemeine Folgesatz[2]), *consectarium generale*, Vieta's, dass jede kubische oder biquadratische Aufgabe, wenn sonst nicht lösbar, ihre Lösung dadurch finde, dass man sie entweder auf eine Einschiebung zweier mittleren Proportionalen oder auf eine Winkeldreitheilung zurückführe. Für die biquadratischen Aufgaben gelte diese Behauptung, weil biquadratische Gleichungen, wie in der Abhandlung *De aequationum recognitione* gezeigt sei, immer auf kubische sich zurückführen lassen. Zweierlei können wir diesem Ausspruche nebenher entnehmen. Erstens geht aus ihm hervor, dass die *Recognitio aequationum*, wenn sie auch erstmalig 1615 durch Anderson dem Drucke übergeben wurde, doch 1593 bereits der Hauptsache nach fertig gestellt war. Zweitens kann man den Ausdruck *omnia Problemata alioqui non solubilia*, nachdem die Auflösung kubischer Gleichungen durch

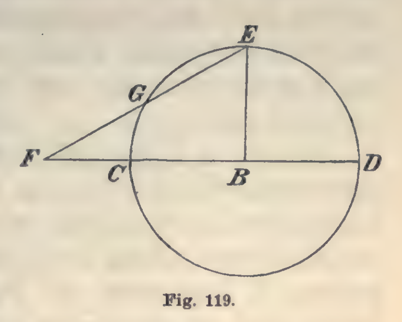


Fig. 119.

[1]) Archimedes (ed. Heiberg) II, 428. [2]) Vieta pag. 257.

ein algebraisch allgemeines Verfahren einmal bekannt war, billigerweise nicht anders verstehen, als dass Vieta sich vollständig klar darüber war, dass die geometrische Auflösung den grossen Vorzug vor der algebraischen besass, dass für sie die Schwierigkeit von unter dem Kubikwurzelzeichen auftretenden imaginären Quadratwurzeln nicht vorhanden war.

Wieder im Jahre 1593 erschien *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* [1]), ein einzelnes Buch aus einer Sammlung, welche leider nicht vollständiger bekannt geworden ist. In dem allein veröffentlichten achten Buche ist auch der Streit über den Contingenzwinkel Gegenstand der Betrachtung [2]). Vieta stellt sich ganz und voll auf den Standpunkt Peletier's, der Contingenzwinkel sei kein Winkel, aber die Beweisführung ist neu. Der Kreis, sagt Vieta, wird als eine ebene Figur von unendlich vielen Seiten und Winkeln betrachtet; eine gerade Linie aber, welche eine Gerade berührt, *recta rectam contingens*, wird, von wie unbedeutender Länge sie sein mag, mit jener Geraden zusammenfallen, *coincidit in eandem lineam rectam*, und bildet keinen Winkel, *nec angulum facit.* Nirgend war noch so deutlich ausgesprochen worden, was eigentlich unter Berührung zu verstehen sei. Des Wortes Contingenzwinkel oder eines ähnlich klingenden bedient sich übrigens Vieta nicht. Er übersetzt das griechische κερατοειδής (Bd. I, S. 250) mit *cornicularis.* Das ist überhaupt eine Eigenthümlichkeit Vieta's, durch welche seine Schriften meistens so schwer zu lesen sind, dass er es liebte, mit Neubildungen um sich zu werfen, in deren Auswahl er meistens so wenig glücklich griff, dass seine Ausdrücke kaum je Bürgerrecht erlangten. Vieta besass durchweg die Neigung, seine Entdeckungen in thunlich dunkelste Sprache zu kleiden, vielleicht mit der Absicht, in deren Alleinbesitz zu bleiben, während andererseits durch den Druck sein Erstlingsrecht gewahrt war.

Dem Jahre 1596 entstammt der *Pseudomesolabum et alia quaedam adiuncta capitula* [3]). Es war eine Streitschrift gegen einen in ihr nicht mit Namen genannten Verfasser, den aber jeder zeitgenössische Leser sofort als Josef Scaliger erkennen musste. Dessen Werk von 1594, die in Leyden gedruckten *Cyclometrica elementa*, nebst den vielen Widerlegungen, welche es hervorrief, werden noch in diesem Kapitel zur Rede kommen. Vieta's Pseudomesolabum erörtert die Möglichkeit einer Würfelverdoppelung, sofern andere Aufgaben als bereits gelöst vorausgesetzt werden, aber freilich sind das selbst

---

[1]) Vieta pag. 347—435. [2]) Ebenda pag. 386. [3]) Ebenda pag. 258—285. Für die Datirung vergl. Chasles, *Aperçu hist.* pag. 443 Note 3 (deutsch S. 497 Note 126).

Aufgaben, deren Bewältigung andere Mittel als die ausschliessliche Benutzung von Zirkel und Lineal erfordert.

Die Zusätze, *adiuncta capitula*, betreffen zunächst die Aufgabe, aus vier Strecken, von denen je drei eine grössere Summe als die vierte haben, ein Sehnenviereck herzustellen. Die schon von Regiomontanus ins Auge gefasste Aufgabe hatte jetzt zeitgemässes Interesse. Benedetti und Jacob waren Vieta vorausgegangen, ein anderer deutscher Geometer, den wir gleich nennen werden, folgte, auch Scaliger, und das gab offenbar Vieta Veranlassung zum Nachdenken über die Aufgabe, hatte eine Behandlung derselben vorgeschlagen, die wie gewöhnlich falsch war. Seien a, b, c, d die vier zur Bildung eines Sehnenvierecks geeigneten und gegebenen Strecken. Nun seien $\sqrt{a^2+b^2}$ und $\sqrt{c^2+d^2}$ die Hypotenusen, welche a, b beziehungsweise c, d zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzen; ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2}$ werde der Durchmesser des Umkreises des verlangten Sehnenvierecks sein. Die Widerlegung Scaliger's war für Vieta leicht. In denselben Umkreis, sagte er, müsse das Sehnenviereck wie in der Reihenfolge a, b, c, d der Seiten, so auch in deren Reihenfolge a, c, b, d sich einzeichnen lassen, aus welcher für den Durchmesser des Umkreises nach Scaliger's Vorschrift

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2}$$

sich ergebe; es würde also

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}$$

sein müssen, und das ist nicht wahr. Bei $a=15$, $b=20$, $c=7$, $d=24$ ist

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{225+400}+\sqrt{49+576}=25+25=50$$

und

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{225+49}+\sqrt{400+576}<17+32<50.$$

Vieta bleibt bei dieser Widerlegung nicht stehen, sondern zeigt nun seinerseits, wie unter Anwendung von Zirkel und Lineal die Aufgabe der Lösung fähig sei[1]), wobei er vorzugsweise den Fall von vier unter einander ungleichen Strecken als den einzigen, der wirkliche Schwierigkeiten macht, behandelt (Figur 120, folg. S.). Weil im Sehnenvierecke gegenüberliegende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, muss $\sphericalangle ABE = 180^0 - ADC = CDE$ sein; ferner ist $\sphericalangle AEB$

[1]) Vieta pag. 278.

$= CED$, also $\triangle ABE \sim CDE$, also $EA:EB:AB = EC:ED:CD$. Mit Hilfe dieser Proportion kann man jede Seite des Dreiecks CDE berechnen, also auch die Höhe CK und den Abschnitt EK. Ferner ist

$$\triangle ECK \sim EDL,$$

wenn DL senkrecht zu BC gezogen ist. Die Aehnlichkeit dieser Dreiecke gestattet DL und CL unmittelbar zu finden, mittelbar auch BL. Dann liefern DL und BL die Diagonale DB, und diese gestattet mit den vier gegebenen Strecken, das Viereck $ABCD$ wirklich zu zeichnen. Dessen Umkreis ist zugleich Umkreis des in allen

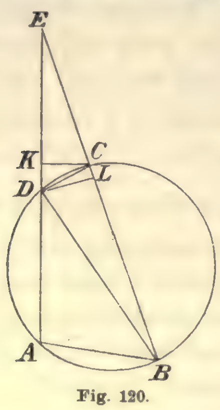


Fig. 120.

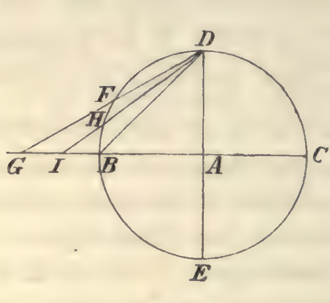
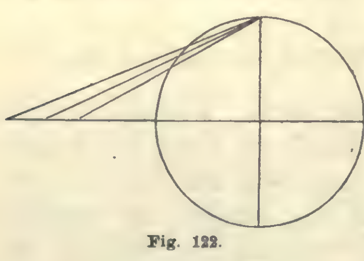


Fig. 121.

seinen Seiten gegebenen Dreiecks ABD, und den Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks aus dessen Seiten zu finden, ist bekannt. Ein zweiter Zusatz zu dem Pseudomesolabum[1]) lehrt die näherungsweise Auffindung der Seiten der regelmässigen Fünfecke, Siebenecke, Neunecke, die einem gegebenen Kreise einbeschrieben sind (Figur 121). In dem gegebenen Kreise ist DB die Vierecksseite, DF die Sechsecksseite. Letztere wird zum Durchschnitte G mit dem verlängerten Durchmesser CB ausgezogen, dann wird BG in I halbirt und DI gezogen, deren Stück DH der Ungleichung $DF < DH < DB$ genügt und nahezu den fünften Theil der Kreisperipherie bespannt. In ähnlicher Weise wie 5 zwischen 6 und 4, liegt 7 zwischen 8 und 6, liegt 9 zwischen 10 und 8. Das Sehnensiebeneck wird demnach gefunden, indem man (Figur 122) von der Spitze des senkrechten Kreisdurchmessers aus die Seiten des Sehnensechsecks und des Sehnenachtecks zeichnet und bis zum Durchschnitte mit dem wagrechten Durchmesser verlängert. Die durch jene


Fig. 122.

[1]) Vieta pag. 283—285

Durchschnittspunkte begrenzte Strecke wird halbirt und der Halbirungspunkt wieder mit der Spitze des senkrechten Durchmessers vereinigt, so entsteht eine Sehne über nahezu dem Siebentel der Kreisperipherie. Die Zeichnung des Neunecks mit Hilfe der Achtecks- und Zehnecksseite ergiebt sich darnach von selbst. Vieta hat das volle Bewusstsein der nur näherungsweisen Richtigkeit dieser Zeichnungen in dem Maasse, dass er am Schlusse durch Rechnung nachweist, wie gross der dabei begangene Fehler ist.

Ein deutscher Geometer, sagten wir, habe nach Vieta die Aufgabe vom Sehnenvierecke behandelt. Johannes Richter (1537 bis 1616), fast ausschliesslich unter dem wissenschaftlichen Namen Prätorius[1]) bekannt, war Verfertiger mathematischer Instrumente in Nürnberg, dann von 1571 ab während fünf Jahren Professor der Mathematik in Wittenberg, worauf er in gleicher Eigenschaft nach der nürnbergischen Universität Altdorf übersiedelte. Er erfand etwa im Jahre 1590 den Messtisch, welcher nach ihm auch wohl Mensula Praetoriana genannt worden ist. Dem Jahre 1598 entstammt eine eigene Schrift über das Sehnenviereck[2]): *Problema, quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum.* Prätorius beginnt mit einem geschichtlichen Ueberblicke. Die Aufgabe sei eine bereits alte, und die Fragen, welche man sich vorgelegt habe, seien hauptsächlich die nach dem Durchmesser des Umkreises und nach dem Flächeninhalte des Vierecks. Regiomontanus habe mit der Aufgabe sich beschäftigt, Simon Jacob habe die Diagonalen des Vierecks und den Kreisdurchmesser berechnet. Vieta's Auflösung der Aufgabe wird alsdann erörtert, und die Bemerkung ist beigefügt, es gebe noch neuere Auflösungen, welche er (Prätorius) aber nicht kenne. Endlich geht Prätorius dazu über, die Ausdrücke für die Diagonalen zu bestimmen und zu zeigen, wie alsdann der Durchmesser des Umkreises berechnet werde. Sein Bestreben geht dahin, alle sieben auftretenden Maasszahlen rational werden zu lassen, und dieses gelingt ihm in dreifacher Möglichkeit: erstens durch die Seiten 25, 39, 52, 60; zweitens durch 33, 39, 52, 56; drittens durch 16, 25, 33, 60, welche letzteren Zahlen Jacob schon angegeben hatte. Prätorius hat auch 1599 ein in der Münchner Bibliothek aufbewahrtes Manuscript niedergeschrieben, welches Bemerkenswerthes enthält. In ihm findet sich eine angenäherte Würfelverdoppelung, welche auf der Gleichsetzung von $\sqrt[3]{2}$ mit sec $37^0\ 30'$ beruht, und bei welcher angegeben ist, der in der Zeichnung benutzte Winkel sei

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 519—520. Artikel von Günther.
[2]) Chasles, *Aperçu hist.* 444—445 (deutsch 498—499).

kaum um 2′ unrichtig. Da $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210$, sec $37^0\ 30' = 1{,}2604724$, sec $37^0\ 28' = 1{,}2599101$, so erkennt man, wie genau Prätorius gerechnet hat[1]).

Wir kehren nach dieser Einschaltung zu Vieta's geometrischen Schriften zurück, deren wichtigste, der *Apollonius Gallus*[2]) von 1600, noch aussteht. Adriaen van Roomen hatte 1593 öffentlich allen Mathematikern eine Aufgabe gestellt, auf welche wir noch zu reden kommen. Vieta löste dieselbe und liess seine gegen den Urheber der Aufgabe einigermassen höhnisch gefasste Auflösung drucken. Zugleich stellte er die Gegenaufgabe, die verlorene Schrift des Apollonius von Pergä von den Berührungen, *περὶ ἐπαφῶν*, so weit wiederherzustellen, dass man einen Kreis zeichne, der drei gegebene Kreise berühre; bringe Belgien keinen Apollonius hervor, so werde ein gallischer auftreten. Van Roomen, ein geborener Belgier, gab nach nicht langer Zeit eine Auflösung mit Hilfe einer Hyperbel. Darauf erschien der schon genannte *Apollonius Gallus*. Eine Auflösung mit Hilfe der Hyperbel sei nicht verlangt worden; eine solche sei nicht eigentlich geometrisch; vielmehr müsse sie, um diesen Namen zu verdienen, sich auf die Anwendung von Zirkel und Lineal beschränken, und eine derartige Auflösung gab nun Vieta in der That. Sie beruht auf der Kenntniss der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise[3]), welche Vieta in Lemmen zum 8. Probleme als solche Punkte auf der Centrallinie zweier Kreise, *in jungente ipsorum centra*, definirt, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede durch sie hindurchgehende Secante der beiden Kreise ähnliche Kreisabschnitte beider hervorbringt. Wahrscheinlich gelangte Vieta durch das Studium des 7. Buches von Pappus zur Entdeckung dieser Punkte, da dort, gerade in den Lemmen zu den Berührungen des Apollonius, derselben soweit vorgearbeitet ist (Bd. I, S. 423), als wenigstens gelehrt wird, dass die Verbindungsgerade der entgegengesetzten Endpunkte paralleler Halbmesser zweier sich äusserlich berührender Kreise durch den Berührungspunkt gehe, und als auch der äussere Aehnlichkeitspunkt einer Figur entnommen werden kann. Aber habe Vieta dort auch die Anregung zur Stellung der Aufgabe, habe er dort einen Gedanken gefunden, der fruchtbar sich erwies, immerhin ist das bei Pappus Vorhandene durch Vieta

---

[1]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor.-literar. Abthlg. S. 11—12.
[2]) Vieta pag. 325—346. Mit Wiederherstellungsversuchen der Apollonischen Berührungen haben sich beschäftigt: J. Wilh. Camerer, *Apollonii de tactionibus quae supersunt*, 1795. C. G. Haumann, *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen*, 1817. W. L. Christmann, *Apollonius Suevus sive tactionum problema nunc demum restitutum*, 1821.
[3]) Ebenda pag. 334—335.

weitaus überholt, so dass ihm mit vollem Rechte die eigentliche Entdeckung der Aehnlichkeitspunkte zugeschrieben wird. Anhänge zum Apollonius Gallus beschäftigen sich dann weiter mit der Auflösung mittels Zirkel und Lineal von anderen Aufgaben, welche von Vieta's Vorgängern immer nur algebraisch behandelt worden waren. Dreiecke werden gezeichnet, deren Grundlinie und Höhe gegeben ist und als drittes Stück das Product der beiden anderen Seiten oder deren Quotient, deren Summe, deren Differenz, oder auch der Winkel an der Spitze des Dreiecks. Ferner wird ein rechtwinkliges Dreieck hergestellt, dessen Seiten eine stetige geometrische Proportion bilden. Bei der letzteren Aufgabe ist ganz beiläufig ausgesprochen, der Kreisdurchmesser verhalte sich zum Quadranten sehr nahezu, *proxime*, wie 100000 : 78540, d. h. Vieta setzt hier $\pi = 3{,}14160$. Eigenthümlich genug erscheint es, dass im Apollonius Gallus Vieta die rein geometrischen Auflösungen den algebraisch-geometrischen vorzieht, er, der wie wir gesehen haben, die algebraische Geometrie als zusammenhängendes Ganzes gelehrt hat, der, wie wir noch sehen werden, der Algebra selbst zu wesentlichsten Fortschritten verhalf.

Einen geometrischen Gegenstand haben wir seither nur ganz gelegentlich und dadurch recht stiefmütterlich in Betracht zu ziehen gehabt, welcher von nun an aufmerksamere Beachtung in so hohem Grade verlangt, dass er einen selbständigen Abschnitt geometrischer Untersuchung bildet: die Cyclometrie oder Ausmessung des Kreises[1].

Zu denen, welche im XVI. Jahrhunderte glaubten, den Kreis genau in ein Quadrat verwandeln zu können, gehörten Orontius Finaeus (S. 378), Bouvelles (S. 383). In Nonius (S. 389) und Buteo (S. 563) nannten wir Widerleger ihrer Irrthümer. Auch Clavius hätten wir diesen beigesellen dürfen, welcher in seiner Geometriae practica gegen Finaeus auftrat. Ein neuer der Natur der Sache nach gleichfalls unglücklicher Verfasser von für genau gehaltenen Kreisquadraturen war Simon Duchesne. Man kennt seinen Geburtsort, Dôles in Frankreich. Er muss aber frühzeitig nach Holland gekommen sein, wo sein Name sich in Van der Eycke,

---

[1]) Hervorragende Untersuchungen über die Geschichte der Cyclometrie bei Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle.* 2e édition (Paris 1831). — Vorsterman van Oijen im *Bulletino Boncompagni* I, 141—156 (Rom 1868). — J. W. L. Glaisher im *Messenger of Mathematics, New Series* No. 20 (1872) und 26 (1873). — Bierens de Haan im *Bullet. Boncomp.* VII, 99—140 (1874) und *Bouwstoffen voor de Geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden* (1878). — Rudio, Das Problem von der Quadratur des Zirkels (Zürich 1890).

lateinisch a Quercu umwandelte, und wo er seine Muttersprache so gründlich verlernte, dass seine französisch geschriebenen Bücher schlechten wörtlichen Uebersetzungen aus dem Holländischen gleichen[1]. Er wohnte 1584 in Delft und lebte noch 1603. Er hat 1583 einen ersten, 1586 einen zweiten Versuch zur Kreismessung gemacht. Er wusste, dass Archimed dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser, also derjenigen Zahl, welche seit der Mitte des XVIII. Jahrhunderts etwa durch π bezeichnet wird[2], zwei Grenzen gesetzt hat, indem er $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ nachwies, und er erkannte zunächst die Richtigkeit dieser archimedischen Grenzen an. Zwischen ihnen lag auch die erste von Duchesne gegebene Verhältnisszahl $\pi = 3\frac{69}{484}$, denn in Decimalbrüche umgesetzt ist

$$3\frac{10}{71} = 3{,}14084507 \cdots, \quad 3\frac{69}{484} = 3{,}14256198 \cdots, \quad 3\frac{1}{7} = 3{,}14285714 \cdots.$$

Die Duchesne'sche Zahl $3\frac{69}{484}$ besitzt überdies die Eigenschaft, ein vollständiges Quadrat $\left(\frac{39}{22}\right)^2$ zu sein, und dadurch ist die Auffindung des dem Kreise flächengleichen Quadrates wesentlich erleichtert, da dessen Seite $\frac{39}{44}\,d$ wird, unter d den Kreisdurchmesser verstehend. Die von den Aegyptern benutzte Verhältnisszahl führte zu $\frac{8}{9}\,d$ als Quadratseite (Bd. I, S. 57), Inder fanden sie als $\frac{7}{8}\,d$ (Bd. I, S. 602), Franco von Lüttich[3] benutzte $\frac{9}{10}\,d$. Diese drei Werthe scheinen die einzigen zu sein, welche neben dem von Duchesne π als quadratisch auftreten lassen. Wahrscheinlich 1585 erschien eine Gegenschrift von Ludolph van Ceulen, dessen hervorragende eigene Leistungen in ein späteres Jahr fallen und uns dort Gelegenheit geben werden, von ihnen zu reden. Wider diese Gegenschrift wandte sich Duchesne in einer Veröffentlichung von 1586, welcher im gleichen Jahre eine abermalige Entgegnung von Ludolph van Ceulen folgte[4]. So viel hatte die Gegenschrift gefruchtet, dass Duchesne nicht bei seinem ersten Werthe blieb, aber er ersetzte ihn durch einen weitaus unvollkommneren, durch

$$\pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8} = 3{,}1446055 \cdots,$$

d. h. durch eine Zahl, welche grösser war als die von Archimed auf-

---

[1] *Bouwstoffen* etc. pag. 100. [2] Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1889, pag. 28. [3] Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Supplementheft S. 187. [4] *Bouwstoffen* etc. pag. 112—113.

gestellte obere Grenze $3\frac{1}{7}$, und Duchesne handelte hierbei keineswegs unbewusst. Er erklärt vielmehr ruhig: demzufolge komme die richtige Verhältnisszahl zwischen Durchmesser und Kreisumfang ausserhalb der archimedischen Grenzen zu liegen und sei grösser als $3\frac{1}{7}$.

Trotz dieser Eigenschaft des neuen Werthes, welche jeden ernsthaften Mathematiker auch der damaligen Zeit kopfscheu machen musste, fand derselbe einen Bewunderer in Raimarus Ursus[1]). Dieser Landmesser aus dem Dithmarschen, welcher durch eigenes Studium vom Schweinehirten zum kaiserlichen Mathematiker aufgestiegen war, widmete in seinem *Fundamentum astronomicum* von 1588 ein besonderes Blatt *Simoni a Quercu inventori divini artificii.* Die Erfindung selbst wird folgendermassen geschildert (Fig. 123). Sei AB ein Kreisdurchmesser und BD Berührungslinie an den Kreis, ferner AD so gezogen, dass das innerhalb des Kreises fallende Stück AC dem von der Berührungslinie abgeschnittenen Stücke BD gleich wird, so ist AC zugleich auch die Länge des Kreisquadranten. Zieht man die Hilfslinie BC, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABD, BCD einander ähnlich, mithin $AD : BD = BD : CD$. Nun heisse $BD = AC = x$, $CD = y$, $AB = d$, so ist

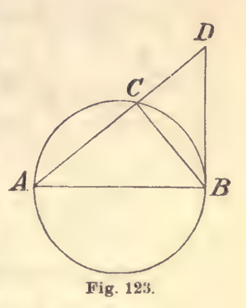


Fig. 123.

$$(x + y)^2 = x^2 + d^2, \quad y = \sqrt{x^2 + d^2} - x$$

und jene Proportion geht über in

$$\sqrt{x^2 + d^2} : x = x : (\sqrt{x^2 + d^2} - x),$$

woraus $x = \frac{d}{4}\sqrt{\sqrt{320} - 8}$ folgt. Ist nun x wirklich die Länge des Quadranten oder $\frac{\pi d}{4}$, so erscheint in der That $\pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8}$, aber für jene Gleichsetzung, welche doch erst bewiesen werden müsste, scheint eine Begründung nicht versucht zu sein.

Vieta gab, wie wir schon gesagt haben, 1593 das 8. Buch der vermischten Aufgaben heraus, und dort sind der Zahl π mehrere Annäherungen gegeben, welche aber immer nur als Annäherungen bezeichnet Vieta's wissenschaftlichen Standpunkt wahren[2]). Zunächst erklärt Vieta, er sei den Spuren Archimed's folgend weit über das von diesem erreichte Ziel hinausgekommen. Er habe nämlich gefunden:

---

[1]) Kästner I, 632. — Allgem. deutsche Biographie XXVII, 179—180. — Rud. Wolf, Astronomische Mittheilungen Nr. LXVIII. [2]) Vieta pag. 392—393.

$$\frac{31415926535}{10000000000} < \pi < \frac{31415926537}{10000000000}.$$

Nächst dieser auf 9 Dezimalstellen genauen Ermittelung schlägt Vieta folgende vor: das kleinere Stück einer im goldenen Schnitt getheilten Strecke verhalte sich zur ganzen Strecke wie der Kreisdurchmesser zu $\frac{10}{12}$ der Peripherie. Dieser Annahme entspricht

$$\pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10} = 3{,}14164075\ldots,$$

d. h. ein Werth, welcher von dem des Ptolemäus (Bd. I, S. 394) sich erst von der 5. Decimalstelle an unterscheidet. Eine Konstruktion desselben ist folgende (Figur 124): BC und DE sind zwei im Mittelpunkte A sich senkrecht durchkreuzende Durchmesser. AD ist in F halbirt und durch B und F die BG bis zum Durchschnitte mit der Kreislinie gezogen, dann von G aus die $GH \parallel DE$. Man macht $FZ = FA$, $EI = BZ$, zieht IH und mit ihr parallel EK, so ist AK die angenäherte Länge des Kreisquadranten. Wegen $AB = 2AF$ ist $BH = 2GH$, und da $GH^2 = BH \cdot HC$, so ist auch $GH = 2HC$, $BH = 4HC = \frac{4}{5}d$, $AH = \frac{4}{5}d - \frac{1}{2}d = 0{,}3\,d$. Ferner

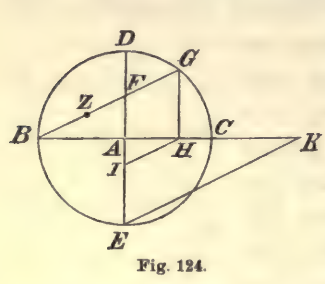


Fig. 124.

$$FB = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{d}{4}\sqrt{5}, \quad BZ = EI = \frac{d}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AI = AE - EI = \frac{d}{4}(3 - \sqrt{5}).$$

Aber $AI : AE = AH : AK$, mithin

$$AK = \frac{AE \cdot AH}{AI} = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{3d}{10}}{\frac{d}{4}(3 - \sqrt{5})} = \frac{3}{20}d(3 + \sqrt{5});$$

und da AK der Kreisquadrant oder $\frac{d\pi}{4}$ sein soll, so wird $\pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10}$ wie oben. Auch eine Zeichnung des flächengleichen Quadrates wird unter Voraussetzung des gleichen Werthes von π gelehrt.

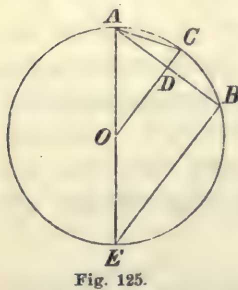


Fig. 125.

Wissenschaftlich weit merkwürdiger ist eine zweite von Vieta eingeschlagene Gedankenfolge[1]), von welcher er selbst aussagt, sie sei das in Rechnung umgesetzte Verfahren des Antiphon (Bd. I, S. 190). Sei (Figur 125) $AB = a_n$ die

[1]) Vieta pag. 398—400.

Seite des regelmässigen Sehnen-n-ecks, dessen Fläche F_n heisse, sei ferner $AC = a_{2n}$ die Seite des regelmässigen Sehnen-$2n$-ecks und F_{2n} dessen Fläche. $OC = r$ ist der Halbmesser, $BE = \alpha_n$ ist die Supplementarsehne von AB, für welche Vieta des Namens *Apotome* sich bediente. Offenbar ist

$$\triangle ABE \sim ADO,$$

mithin $BE : AE = OD : OA$ oder $\frac{OD}{r} = \frac{\alpha_n}{2r}$. Ferner ist

$$\triangle OAC = \frac{1}{2n} F_{2n}, \quad \triangle OAD = \frac{1}{2n} F_n,$$

$$F_n : F_{2n} = \triangle OAD : \triangle OAC = OD : OC = \alpha_n : 2r.$$

Genau ebenso beweist sich $F_{2n} : F_{4n} = \alpha_{2n} : 2r$, $F_{4n} : F_{8n} = \alpha_{4n} : 2r$ u. s. w. Multiplicationen von k solcher aufeinander folgenden Proportionen giebt

$$F_n : F_{2^k . n} = \alpha_n . \alpha_{2n} \ldots \alpha_{2^{k-1} . n} : (2r)^k.$$

Ist $n = 4$, so ist $F_4 = 2r^2$ und $2^k \cdot n = 2^{k+2}$, $2^{k-1} \cdot n = 2^{k+1}$, also

$$F_{2^{k+2}} = 2r^2 \cdot \frac{2r}{\alpha_4} \cdot \frac{2r}{\alpha_8} \cdot \ldots \cdot \frac{2r}{\alpha_{2^{k+1}}}.$$

Bei unendlich werdendem k fällt $F_{2^{k+2}}$ mit der Kreisfläche $r^2\pi$ zusammen und durch leichte Umformung ist

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\alpha_4}{2r} \cdot \frac{\alpha_8}{2r} \cdot \frac{\alpha_{16}}{2r} \cdot \ldots \text{ in infin.}$$

Nun ist aber $\frac{\alpha_n}{2r} = \cos AEB = \cos \frac{360^0}{2n}$ oder die unendliche Factorenfolge rechter Hand würde sich heute in der Form

$$\cos \frac{90^0}{2} \cdot \cos \frac{90^0}{4} \cdot \cos \frac{90^0}{8} \cdots$$

darstellen. Die Werthe dieser einzelnen Factoren sind aber

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \ldots$$

und so kommt

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}} \cdots,$$

wie Vieta gefunden hat. Es war das die erste unendliche Factorenfolge, welche aufgestellt worden ist, und ein glücklicher Zufall wollte, dass es eine convergente Factorenfolge war, welche entstand[1]).

Eine praktische Folge hatten die vollständig aus dem gewohnten Gedankenbereiche sich entfernenden Untersuchungen Vieta's nicht. Sie

[1]) Den Beweis der Convergenz hat H. Rudio in der Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, Histor.-liter. Abtheilung S. 139—140 geführt.

verhinderten nicht einmal, dass ein auf anderen Gebieten hervorragender Gelehrter schon im folgenden Jahre mit neuen Verkehrtheiten an die Oeffentlichkeit trat. Joseph Scaliger[1]) (1540—1609), geboren in Agen in der französischen Provinz Guienne, kam als bereits weit und breit berühmter Mann 1593 an die Leidener Hochschule, welcher er bis zu seinem Lebensende angehörte. Sein *Opus de emendatione temporum* von 1583 war ein bahnbrechendes Lehrbuch der Chronologie und erwarb ihm den keineswegs unverdienten Namen, der Vater dieser Wissenschaft gewesen zu sein. Begreiflicherweise sah man daher mit zum voraus hochgespannter Erwartung seinen *Cyclometrica elementa* entgegen, welche 1594 bei einem der ersten damaligen Drucker, Raphelengius (Franz von Ravelingen) in Leiden in glänzender Ausstattung erschienen (S. 586), und welchen noch im gleichen Jahre das *Mesolabium* sowie ein *Appendix ad cyclometrica* nachfolgten. Wie verkehrt Scaliger's Meinungen waren, zeigt gleich die Thatsache, dass im ersten Buche der Cyclometrica der Satz ausgesprochen ist, das Quadrat des Kreisumfanges sei das Zehnfache des Quadrates des Durchmessers $\left(\pi = \sqrt{10}\right)$, während im zweiten Buche behauptet wird, die Kreisfläche sei gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie die Seite des dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und dessen Höhe $\frac{9}{10}$ des Kreisdurchmessers sei $\left(\pi = \sqrt{9{,}72}\right)$. Einen Widerspruch sah Scaliger in diesen beiden Behauptungen deshalb nicht, weil er die Wahrheit des archimedischen Satzes leugnete, die Flächen des Kreises und eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kreisumfang und Halbmesser als Katheten seien gleich. Ja es kam ihm auch darauf nicht an, herauszurechnen, die Seiten des regelmässigen Sehnenzwölfecks besässen eine grössere Summe als der Kreisumfang u. s. w. Ein französischer Schriftsteller über Befestigungskunst, Jean Errard de Barleduc[2]), Ludolph van Ceulen, Clavius, Van Roomen, Vieta, ein Italiener Pietro Antonio Cataldi erhoben ihre Stimmen gegen Scaliger, aber ohne ihn eines Besseren zu belehren. Sein Appendix giebt zwar einige Fehler der Cyclometrica zu, aber es seien nur nebensächliche Irrthümer, während die archimedische Lehre in allen Hauptpunkten falsch sei. Vieta hatte sich nicht nur in dem schon von uns genannten *Pseudomesolabium* gegen Scaliger ausgesprochen, sondern auch in einer zweiten Schrift *Munimen adversus nova cyclometrica*. Aus dieser erwähnen

---

[1]) Kästner I, 487—497. — *Bouwstoffen* etc. pag. 280—314. — Wolf, Geschichte der Astronomie pag. 337. [2]) Diese Schreibweise entnehmen wir dem in den *Bouwstoffen* etc. pag. 293 abgedruckten Titel der *Refutation*. Poggendorff I, 672 schreibt Erard.

wir nur die Bemerkung, Scaliger's $\pi = \sqrt{10}$ sei nicht einmal neu, sondern von Arabern längst in Anwendung gebracht[1]).

Auch Jacob Christmann[2]) (1554—1630), Orientalist und Astronom in Heidelberg, schrieb 1595 eine vornehmlich gegen Scaliger gerichtete *Tractatio geometrica de quadratura circuli*, welche den Satz vertheidigte, es sei überhaupt nicht möglich, den Kreis irgend einer geradlinig begrenzten Figur genau gleich zu setzen, nur eine annäherungsweise Quadratur sei ausführbar. An Christmann's Persönlichkeit knüpfen sich zwei bemerkenswerthe Dinge, erstens, dass für ihn in Heidelberg 1609 die erste Professur der arabischen Sprache gegründet wurde, welche es überhaupt in Europa gab, und zweitens, dass er eine Zeit lang der Besitzer der Originalhandschrift des Werkes des Koppernicus über die Weltsysteme war. Eine 1611 von ihm in Heidelberg zum Druck gegebene *Theoria lunae* enthält eine Stelle aus Johannes Werner's Trigonometrie, in welcher man die erste abendländische Anwendung der Prosthaphaeresis (S. 454) erkannt hat.

Die Zeitfolge führt uns zu einem weiteren Bearbeiter der Kreismessung, dessen Namen wir schon einigemal zu nennen hatten: Adriaen van Roomen[3]), latinisirt Adrianus Romanus (1561 bis 1615). Er ist in Löwen geboren und hat sich dort, dann in Köln, zuletzt in Italien medicinischen und mathematischen Studien gewidmet. Im Jahre 1586 war er bereits verehelicht und wohnte in Berlin, bis er als Professor an seine heimathliche Hochschule berufen wurde. Die mitunter auftretende Behauptung, Van Roomen sei an Stelle des verstorbenen Gemma Frisius berufen worden, beruht auf Irrthum, da jener 1555, also sechs Jahre vor Van Roomen's Geburt starb. Ebensowenig kann aber die Berufung an Stelle des Sohnes Cornelis Gemma Frisius (1535—1577) stattgefunden haben, bei dessen Tode Van Roomen erst 16 Jahre alt war. In Löwen veröffentlichte er 1593 seine *Ideae mathematicae*. Den Inhalt bildeten wesentlich Untersuchungen über regelmässige Vielecke und über den Werth ihrer Seiten in Bruchtheilen des Durchmessers des einbeschriebenen, aber auch desjenigen des umschriebenen Kreises. In dieser Weise fand er π auf 17 Decimalstellen genau und damit näher, als man diese Zahl bisher kannte. Auch eine Aufgabe stellte er gleichzeitig den Mathematikern aller Orten: *Problema Mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum.* Das war jene

---

[1]) Vieta pag. 439. [2]) Kästner I, 497—498. — Allgem. deutsche Biographie IV, 222. — Urkundenbuch der Universität Heidelberg (1886) Bd. II, S. 180, Nr. 1488 und 1489. [3]) Kästner I, 457—468 und 504—511. — *Bouwstoffen* etc. pag. 315—326.

Aufgabe, welche Vieta löste und mit der Gegenfrage nach dem drei gegebene Kreise berührenden Kreise beantwortete (S. 590). Van Roomen erledigte sie, wie wir wissen, unter Anwendung von Kegelschnitten, was Vieta wieder die Gelegenheit zur Veröffentlichung seines *Apollonius Gallus* bot. Van Roomen hatte inzwischen seinen Aufenthalt verändert. Er war nach Würzburg berufen worden und 1594 etwa dorthin übergesiedelt. Dort gab er jedenfalls 1597 eine Streitschrift heraus. Sie begann mit der Uebersetzung und Erläuterung von Archimed's Kreismessung, dann folgte *Apologia pro Archimede* gegen Scaliger, den Schluss bildeten *Exercitationes cyclicae* gegen Orontius Finaeus und gegen Raimarus Ursus, also eigentlich gegen Simon Duchesne. In dieser Streitschrift, welche einer von Ludolph van Ceulen verfassten Schrift ganz ähnlichen Inhaltes ziemlich rasch nachfolgte, vielleicht hervorgerufen durch einen hochtrabenden Brief Scaliger's [1]), der dessen Missachtung Aller, welche ihm zu widersprechen gewagt hatten, Ausdruck gab. Van Roomen zeigte dabei, dass Duchesne's $\pi^2 = \sqrt{320} - 8$ einer der Werthe war, welche Nicolaus von Cusa beiläufig einmal angegeben, Regiomontanus widerlegt hatte. Dieselbe Bemerkung war auch von Ludolph van Ceulen gemacht worden, und sie ist insofern nicht unwichtig, als sie zeigt, dass man damals unter den niederländischen Kreisberechnern jener älteren Literatur volle Aufmerksamkeit widmete. Nun folgte 1600 Vieta's Apollonius Gallus und die im Anschlusse daran unternommene Reise nach Frankreich. Der Aufenthalt in Würzburg wurde Van Roomen durch den dort eintretenden Tod seiner Gattin verleidet. Er gab seine Professur ab und beabsichtigte sich in ein Kloster zurückzuziehen. Er muss damals nach Löwen zurückgekehrt sein, von wo er 1606 neuerdings nach Würzburg übersiedelte. Ein 1606 gedrucktes *Speculum astronomicum* Van Roomen's nennt den Verfasser auch ausdrücklich Kanonikus der Johanneskirche in Würzburg. Im Jahre 1610 folgte Van Roomen einer Berufung nach Polen. Nach fünfjährigem Aufenthalte daselbst wollte er seiner zerrütteten Gesundheit durch Gebrauch der Bäder in Spaa wieder aufhelfen. Unterwegs starb er in Mainz.

Ludolph van Ceulen[2]) (1540—1610) haben wir schon wiederholt genannt. Der Name kommt auch in der Form van Keulen und van Collen vor, vielleicht einen kölnischen Ursprung der Familie bezeugend. Ludolph ist in Hildesheim geboren, in Leiden gestorben, wo er die von Prinz Moritz von Oranien gegründete Professur der

---

[1]) Kästner I, 506—508. [2]) Kästner III, 50—51. — *Bouwstoffen* etc. pag. 123—170. — Allgem. deutsche Biographie IV, 93.

Kriegsbaukunst inne hatte. Er wurde in der Peterskirche zu Leiden begraben, woselbst 1840 die inzwischen nicht wieder aufgefundene Inschrift noch vorhanden war, welche π auf 35 Decimalstellen genau bestimmte, eine alle früheren Berechnungen so weit übertreffende Annäherung, dass es nicht unverdient erscheint, wenn man jene Verhältnisszahl häufig die Ludolphische Zahl genannt hat. Die genaue Berechnung von π bildet den Hauptgegenstand der Schriften Ludolph's van Ceulen, sowohl der Streitschriften, welche er gegen Simon Duchesne und gegen Scaliger verfasste, als auch eines selbständigen Werkes *Van den Circkel*, welches erstmalig 1596 im Drucke erschien und nochmals 1615 nach dem Tode des Verfassers, sowie zum dritten Male 1619 in lateinischer Sprache. Die lateinische Ausgabe rührt von Willebrord Snellius her, die zweite holländische von der Wittwe Ludolph's van Ceulen, Adriana Symonsz, welche ihrem Gatten auch schon bei der mühsamen Rechnung geholfen hatte. Die Berechnung selbst ging den seit Archimed altbekannten Weg, dass unter Anwendung fortwährender Quadratwurzelausziehungen die Länge der Seiten eingeschriebener und umschriebener regelmässiger Vielecke zu der des Kreisdurchmessers in Verhältniss gesetzt wurde, indem man von dem jeweil betrachteten Vielecke zu dem mit doppelter Seitenzahl überging. Die Tangentenvielecke verfolgte Ludolph van Ceulen mit dem Sechsecke beginnend bis zu dem mit 192 Ecken, die Sehnenvielecke wurden berechnet bis zu dem mit 96 Ecken. In den gedruckten Werken ist dieser Genauigkeit entsprechend π erst auf 20, später auf 32 Decimalstellen bekannt gemacht. Die in der Grabschrift angegebenen drei weiteren Stellen rühren aber gleichfalls von Ludolph van Ceulen her, wie durch ein 1621 erschienenes Werk von Snellius bestätigt wird[1]). Ludolph van Ceulen hat eine andere Schrift noch hinterlassen *De arithmetische en geometrische Fondamenten.* Diese wurde 1615 in holländischer Sprache gedruckt, später abermals in einer lateinischen Bearbeitung von Snellius.

Der letzte hier zu erwähnende Schriftsteller ist Adriaen Anthonisz[2]) (1527—1607), welcher in Metz geboren in den Niederlanden als Kriegsbaumeister thätig war. Er war in Alcmaer ansässig und wurde sogar 1573 zum Bürgermeister dieser Stadt ernannt. Von dem Geburtsorte Metz ist der Beiname Metius abgeleitet, welcher den beiden Söhnen von Anthonisz, Adriaen und Jacob, geradezu als Familienname diente. Von diesen beiden Söhnen war Jacob Glas-

[1]) *Bouwstoffen* etc. pag. 147 die 32 Decimalstellen Ludolph's van Ceulen; ebenda pag. 151 die 35 Stellen abgedruckt aus dem Cyclometricus von Willebrord Snellius. [2]) *Bouwstoffen* etc. pag. 219—253.

schleifer, Adriaen Metius (1571—1635) aber Mathematiker. Aus einer 1625 gedruckten *Arithmetica et Geometria nova* dieses Adriaen Metius ist ersichtlich, dass dessen Vater[1]) eine Gegenschrift gegen Duchesne verfasst hat und in dieser zwei Grenzwerthe aufstellte, zwischen welchen π enthalten sein müsse: $3\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120}$. Später ging dann Anthonisz einen Schritt weiter, indem er diesen Grenzwerthen einen Mittelwerth dadurch entnahm, dass er, wie es einst Chuquet gemacht hatte (S. 352), die Zähler und die Nenner zu einander addirte:

$$\pi = 3\frac{15+17}{106+120} = 3\frac{32}{226} = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\cdots,$$

also 6 richtige Decimalstellen. Die Entstehungsweise des Werthes von Anthonisz wird man nicht füglich anders als eine zufällige nennen können; aber da die Ludolphische Annäherung bereits bekannt war, als Anthonisz die seinige fand, so ist es unglaublich, dass nicht durch ihn selbst eine Vergleichung sollte angestellt worden sein, welche das vortreffliche Uebereinstimmen von $\frac{355}{113}$ nachwies, und welche dadurch die grossen Vorzüge dieses in verhältnissmässig sehr kleinen Zahlen ausgedrückten Verhältnisses enthüllte. Jedenfalls hat der Sohn diese Thatsache hervorgehoben.

Bei allen cyclometrischen Versuchen wirklicher Mathematiker, die wir aufzuzählen hatten, spielten Wurzelausziehungen ganz regelmässig eine wesentliche Rolle. Man wird kaum etwas Auffallendes darin finden, dass nicht häufiger trigonometrische Functionen dabei genannt wurden, welche doch die Beziehungen zwischen Vieiecksseiten und Kreisdurchmesser so bequem erkennen lassen, denn im Grunde genommen handelt es sich dabei nur um andere Namen für die gleiche Sache. Die trigonometrischen Functionen selbst entstammen Wurzelausziehungen, und dieser Zusammenhang mag äusserlich darin sich spiegeln, dass wir im Anschlusse an die Kreismessung jetzt von der Anfertigung trigonometrischer Tafeln handeln.

Als ein hervorragender Tabellenberechner ist uns schon (S. 474) Rhäticus bekannt geworden. Wir müssen der unterbrochenen Lebensgeschichte dieses Gelehrten uns wieder zuwenden, den wir zuletzt 1542 von Wittenberg nach Leipzig übersiedeln sahen. Dort begann er die Berechnung eines grossartigen Tafelwerkes der Sinus, Tangenten und Secanten für Winkel, welche um je 10″ zunehmen, und

---

[1]) *Parens meus P. M.* Die beiden Buchstaben *P. M.* sind eine oft gebrauchte Abkürzung von *piae memoriae.* Man hat daraus früher irrthümlich einen Peter Metius gemacht. Vergl. Bierens de Haan im *Bullet. Boncomp.* VII, 124.

unter Benutzung eines Kreishalbmessers 10000000000, d. h. also auf 10 Decimalstellen. Das Wort Sinus vermied Rhäticus dabei, es sei barbarisch, und er bediente sich statt dessen des Wortes *perpendiculum;* für den Sinus complementi sagte er *basis*[1]). Wenn wir von der Berechnung durch Rhäticus sprechen, so wäre es fast richtiger gewesen, von einer Berechnung unter seiner Aufsicht zu reden, denn er benutzte zwölf Jahre lang mehrere Rechner zur Beihilfe, was ihn *multa florenorum millia,* Tausende von Gulden kostete[2]). Gegen 1575 meldete sich bei Rhäticus ein gewisser Valentinus Otho, von dem lange Zeit bekannt war, was er selbst über sich berichtet, dass er in Wittenberg von des Rhäticus Arbeiten gehört und sich ihm darauf als Gehilfen angeboten habe. Er nennt sich *Parthenopolitanus,* muss also wohl in Magdeburg geboren sein und zwar um 1550, denn Rhäticus verglich sein Alter mit dem, in welchem er selbst 25-jährig zu Koppernikus gereist sei[3]). Johann Prätorius hat in einem in der Münchner Bibliothek aufbewahrten Schriftstücke[4]) (S. 589) diese Mittheilungen ergänzt. Prätorius war es, der 1573 in Wittenberg den Otho auf Rhäticus hinwies. Er selbst hatte den jungen Mann im Monat August des erwähnten Jahres dadurch kennen gelernt, dass dieser ihm zwei Näherungswerthe von π vorlegte. Einmal sei

$$6\frac{4247779609}{15000000000} < 2\pi < 6\frac{4247779611}{15000000000}$$

(in Decimalen geschrieben $3{,}14159265365 < \pi < 3{,}1415926537$) und zweitens sei annähernd $\pi = \frac{355}{113}$. Der letztere Werth sei ein Mittelwerth zwischen dem archimedischen $\frac{22}{7}$ und dem ptolemäischen $\frac{377}{120}$ und dadurch aus beiden erhalten, dass Zähler von Zähler und zugleich Nenner von Nenner abgezogen wurde. Prätorius macht die Zusatzbemerkung, jene erste Angabe habe er später bei Vieta gefunden, aus dessen Schule sie vermuthlich stamme. So wahr es ist, dass Vieta die Zahlen kannte (S. 594), so hat er sie doch erst 1593 in Druck gegeben, und der Nachweis ist nicht gebracht, dass Vieta schon 20 Jahre früher in deren Besitz war. Was den anderen Werth $\frac{355}{113}$ betrifft, so haben wir (S. 600) gesehen, dass Adriaen Anthonisz ihn durch Addition zweier Zähler und zweier Nenner sich verschaffte, als er ihn in einer Streitschrift gegen Duchesne veröffentlichte. Du-

---

[1]) Kästner I, 601. [2]) Kästner, Geometrische Abhandlungen I. Sammlung S. 576. [3]) *Profecto in eadem aetate ad me venis, qua ego ad Copernicum veni.* [4]) Curtze, Zur Biographie des Rheticus in der Altpreussischen Monatsschrift XXXI, 491—496.

chesne selbst schrieb (S. 592) nicht vor 1583. Die Gegenschrift ist mithin mindestens zehn Jahre später verfasst, als Valentin Otho seinen Besuch bei Prätorius machte, und somit muss Otho als Erfinder jenes Werthes gelten, womit die Selbständigkeit von Anthonisz in keiner Weise in Abrede gestellt werden will. Rhäticus nahm Otho's Anerbieten an und begann ihn zu unterweisen. Dazu bedurfte er schon fertig berechneter Theile der Tafeln, welche, es ist nicht gesagt wieso, in Krakau sich befanden, und Otho wurde abgesandt, sie von dort zu holen, während Rhäticus einer Einladung auf ein Schloss folgte, wo er ein neu getünchtes Zimmer beziehen musste und daran erkrankte. Drei Tage nach Otho's Rückkehr reisten beide nach Kaschau in Ungarn zu Johannes Ruber, einem hohen Beamten. Dort verschlimmerte sich der Zustand des Rhäticus von Tag zu Tag, und kaum eine Woche nach der Ankunft starb Rhäticus in den Armen seines jungen Freundes, welchen er als Erben seiner Arbeit und der schon vollendeten Abschnitte derselben eingesetzt hatte; Otho solle die letzte Hand daran legen und den Druck überwachen. Kaiser Maximilian II. bestätigte diese Verfügung und sagte zu, für die Kosten aufzukommen. Allein 1576 starb der Kaiser, und sein Nachfolger hatte für derartige Zwecke kein Geld übrig. Ruber deckte einige Zeit die Kosten, bis Otho zur Wittenberger Professur der Mathematik berufen wurde und der Kurfürst August von Sachsen sich der Sache annahm. Aber da brachen die kryptocalvinistischen Händel aus, in deren Folge der Kurfürst seine Hand von der Universität abzog, und Otho musste wiederholt einen neuen Gönner aufsuchen. Er fand ihn in Kurfürst Friedrich IV. von der Pfalz, und mit dessen Unterstützung wurde das Werk vollendet und 1596 in Neustadt als *Opus Palatinum de Triangulis*[1]) gedruckt. Ausser den Tafeln und der Lehre von ihrer Berechnung ist auch eine vollständige ebene und sphärische Trigonometrie darin enthalten, aus welcher letzteren insbesondere die Unterscheidung der zweideutigen Fälle hervorzuheben ist[2]). Unter den Formeln, deren Rhäticus zur Berechnung der Tafeln sich bediente, in welchen, wie naturgemäss, die meisten Zahlen mittelbar aus anderen wenigen, die unmittelbar ausgerechnet waren, abgeleitet wurden, hat man

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cdot\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha,$$
$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cdot\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

hervorgehoben[3]), deren Richtigkeit am Einfachsten aus

---

[1]) Die Beschreibung bei Kästner I, 590—611. [2]) Kästner I, 603.
[3]) Rud. Wolf, Handbuch der Astronomie, ihre Geschichte und Literatur I, 170 (Zürich 1890).

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

und

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

sich ergiebt.

Rhäticus hatte ausser den im Opus Palatinum abgedruckten Tafeln noch grössere berechnet, bei welchen der Halbmesser zu 1 mit 15 Nullen angenommen war. Die Winkel wuchsen in denselben um je 10″, für den ersten und letzten Grad des Quadranten aber waren die Winkel gar von Secunde zu Secunde unterschieden, allerdings nur unter Angabe des Sinus. Diese grossen Tafeln waren, wie Otho sich erinnerte, vorhanden, aber er wusste nicht mehr wo. Diese Gedächtnissschwäche, der als Grund sein Alter beigefügt wird, während er 1596 doch noch nicht einmal 50 Jahre zählte, ist einigermassen auffallend, aber an ihrem Vorhandensein ist nicht zu zweifeln, da ein eigener Bote nach Wittenberg geschickt wurde, um die, wie Otho meinte, dort vielleicht von ihm zurückgelassenen Tafeln zu ermitteln. Natürlich war die Sendung fruchtlos, denn als Otho starb und der gesammte Nachlass des Rhäticus, den Otho besessen hatte, mit Einschluss der Originalhandschrift des Werkes des Koppernikus, in Christmann's Hände kam (S. 597), fand sich darunter jene grosse Tafel, der sogen. *grosse Canon*. Dessen Bearbeitung wurde einer für uns neuen Persönlichkeit anvertraut.

Bartholomäus Pitiscus[1]) (1561—1613), aus Grüneberg in Schlesien, war Hofprediger des Kurfürsten Friedrich IV. von der Pfalz, doch waren mathematische Neigungen ihm angeboren, für die er neben der Theologie manche Zeit verwandte. Als Abraham Scultetus[2]) (1566—1625), gleich Pitiscus in Grüneberg geboren und in Heidelberg ansässig, wo er zuerst als Professor der Theologie, später als Hofprediger Friedrich V. wirkte, im Jahre 1595 *Sphaericorum libri tres* in Heidelberg erscheinen liess, gab Pitiscus dazu einen 57 Seiten starken Anhang unter dem Titel *Trigonometria, sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*, dessen acht letzte Seiten von ebenen Dreiecken handelten. Aus diesem Anhange entstand ein Werk, welches gleichfalls Trigonometria genannt im Jahre 1600 in Augsburg gedruckt wurde. In einem Antiquariatskataloge finden wir eine ebenfalls 1600 in London gedruckte von einem gewissen Hamson herrührende englische Uebersetzung angezeigt. Wir

[1]) Kästner I, 564—565, 581—590, 612—626; II, 743—745. — Allgem. deutsche Biographie XXVI, 204—205. — N. L. W. A. Gravelaar, *Pitiscus Trigonometria* in dem Nieuw Archief voor Wiskunde, 2. Reihe, III. Theil (auch als Sonderabdruck 1898). [2]) Poggendorff II, 883.

wissen nicht, ob sie nach dem Anhange von 1595 oder schon nach der Augsburger Ausgabe hergestellt war. Eine abermals erweiterte Ausgabe erschien 1612 in Frankfurt und ist auf dem Titelblatte als dritte Ausgabe bezeichnet, wodurch die Abhandlung von 1595 doch wohl mit Wissen des 1612 noch lebenden Pitiscus zum Range einer ersten Ausgabe des umfangreichen Werkes heraufrückte. Der Titel Trigonometrie ist, wie es scheint, von Pitiscus erfunden, wenigstens lässt er sich früher nicht nachweisen. Dieser Trigonometrie sind Tabellen beigegeben, welche die trigonometrischen Linien, Sinus u. s. w., liefern, und zwar in der Auflage von 1612 mit Decimalstellen, welche durch einen Punkt von den übrigen Stellen getrennt sind, vielleicht in Nachahmung Vieta's (S. 584). Das eigentliche Tabellenwerk aber, um dessen Vollendung Pitiscus sich Verdienste erwarb, der grosse Canon des Rhäticus, erschien 1613 unter dem Titel *Thesaurus mathematicus*. Bei denjenigen Rechnungen, welche Pitiscus selbst zur Ergänzung der vorhandenen Lücken vornahm, bediente er sich vorzugsweise der Regula falsi, welche allmälig zu wahren Näherungsmethoden für Auflösung von Zahlengleichungen sich ausgebildet hatte, und mittels deren man die trigonometrische Dreitheilung und Fünftheilung des Bogens vollzog, d. h. eigentlich Gleichungen dritten und fünften Grades löste. Bei Pitiscus finden sich fortwährend die Namen Tangente und Secante in Gebrauch, doch rühren diese nicht von ihm her. Sie sind etwas älteren Ursprunges. Ihr erstes Vorkommen ist in der 1583 in Basel gedruckten *Geometria rotundi*. Deren Verfasser, Thomas Finck[1]) (1561—1656) aus Flensburg, war Mediciner und Mathematiker und bald in der einen, bald in der anderen Eigenschaft thätig, bald 1587 Leibarzt des Herzogs von Schleswig-Holstein in Gottorp, bald 1591 Professor der Mathematik in Kopenhagen, dann wieder seit 1603 ebenda Professor der Medicin. Noch ein Name entstand um den Anfang des XVII. Jahrhunderts, der Name Cosinus statt des bei Pitiscus z. B. noch üblichen Sinus Complementi. Diese Umstellung (complementi sinus, co. sinus, cosinus) rührt von dem Engländer Edmund Gunter (1581—1626) her, von welchem wir später noch zu reden haben, während wir hier nur im Zusammenhange die Männer nennen wollen, welche verschiedene Namen zuerst benutzten, die dann rasch sich einbürgerten.

Zu den trigonometrischen Schriftstellern gehört auch der namentlich als vorzüglicher Beobachter berühmte Astronom Tycho Brahe (1546—1601). In einem Hefte[2]), welches auf der Aussenseite die

---

[1]) Allgem. deutsche Biographie VII, 13—14 [2]) Als Photographotypie durch H. Studnička 1886 in Prag herausgegeben.

Jahreszahlen 1591 und 1595 trägt, hat er die wichtigsten Sätze der ebenen und der sphärischen Trigonometrie zusammengestellt.

Ganz anderer Natur waren die Fortschritte, welche die Lehre von den trigonometrischen Functionen und welche die Trigonometrie in den Händen Vieta's und Van Roomen's machten. Das 8. Buch von Vieta's vermischten Aufgaben von 1593 hat (S. 586) schon einmal unsere Aufmerksamkeit beansprucht. In ihm ist auf S. 402 der sogenannte Cosinussatz der ebenen Trigonometrie in der Form $2ab : (a^2 + b^2 - c^2) = \sin 90^0 : \sin(90^0 - C)$ ausgesprochen. In demselben ist auch eine ziemlich vollständige Sammlung von Aufgaben der sphärischen Trigonometrie enthalten, z. B. der beiden Aufgaben, aus den drei Seiten einen Winkel, aus den drei Winkeln eine Seite zu finden[1]), mit welchen seit Regiomontan (S. 271) kein Mathematiker mehr sich beschäftigt hatte, und Vieta giebt die jenen Aufgaben entsprechenden Lösungen seiner Gewohnheit gemäss in fast unverständlichen Worten[2]), welche aber in die Proportionen

$$\sin a \cdot \sin b : (\cos c \mp \cos a \cdot \cos b) = 1 : \cos C$$
$$\sin A \cdot \sin B : (\cos A \cdot \cos B \pm \cos C) = 1 : \cos c$$

haben umgesetzt werden können. Insbesondere aber ist zum ersten Male das reciproke Dreieck eines sphärischen Dreiecks erwähnt, welches entsteht, wenn aus den Eckpunkten des gegebenen Dreiecks als Mittelpunkten grösste Kreise beschrieben werden, die alsdann bei ihrem gegenseitigen Durchschneiden eben jenes reciproke Dreieck bilden[3]). In demselben Jahre 1593 stellte Van Roomen, wie wir wiederholt erzählt haben, eine öffentliche Aufgabe. Es handelte sich um eine Gleichung 45. Grades, welche gelöst werden sollte. Vieta war im Stande, schon 1594 die richtige Auflösung im Drucke erscheinen zu lassen. *Responsum ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus*[4]) nannte Vieta seine Abhandlung. Es handelte sich um Folgendes, wenn wir durch Anwendung unserer heutigen Bezeichnung den Gedankengang leichter verständlich machen, als er es in der Sprache Vieta's ist. Gegeben war also eine Gleichung 45. Grades, in welcher sämmtliche Potenzen der Unbekannten mit ungeraden Exponenten jeweils abwechselnd mit positiven und negativen Zahlencoefficienten versehen vorkamen. Man sollte daraus den Werth der Unbekannten ermitteln. Die Potenzen

---

[1]) Vieta pag. 407. [2]) A. von Braunmühl, Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks in *Biblioth. math.* 1898, S. 65—72. [3]) Vieta pag. 418: *Si sub apicibus singulis propositi tripleuri sphaerici describantur maximi circuli, tripleurum ita descriptum tripleuri primum propositi lateribus et angulis est reciprocum*; vergl. A. von Braunmühl l. c. [4]) Vieta pag. 305—324.

der Unbekannten waren nach dem Vorgange Stevin's, wie wir noch sehen werden, durch die eingeringelten Exponenten dargestellt, also x durch ①, x^3 durch ③, ... x^{45} durch ㊺. Die ganze Gleichung war:

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = B.$$

Van Roomen hatte hinzugesetzt, dass, wenn

$$B = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

sei, der Werth sich ergebe

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}}}.$$

Vieta erkannte die Beziehung zwischen x und B als eine derartige, dass sich $B = 2\sin\varphi$ und $x = 2\sin\frac{\varphi}{45}$ darstellte, oder, nach geometrischer Aussprache, dass B eine Sehne und x die Sehne des 45. Theiles ihres Bogens war. Vieta fügte auch, in der Erkenntniss, dass $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ ist, hinzu, die Aufgabe lasse in drei andere sich spalten, nämlich in die Auflösung von $3z - z^3 = B$ mit $z = C$, dann $3y - y^3 = C$ mit $y = D$, endlich von $5x - 5x^3 + x^5 = D$ mit $x =$ dem gesuchten Werthe. So weit mag man die Verdienste der beiden Nebenbuhler um die Erweiterung der Kenntnisse von den trigonometrischen Linien etwa als gleiche betrachten. Wenn Vieta das scheinbar alle menschliche Kunst Ueberschreitende geleistet hat, dass er den Ursprung der vorgelegten Gleichung sofort erkannte, so war dieses schlechterdings nur dadurch möglich, dass er die Bildung der Sehne des m-fachen Bogens aus der Sehne des einfachen bereits kannte. Genau das Gleiche müssen wir aber auch für Van Roomen in Anspruch nehmen. War sein Wissen von den erwähnten Beziehungen nur irgend geringer als das Vieta's, so wäre es ihm nie gelungen, die Gleichung aufzustellen, welche er der Oeffentlichkeit übergab, so wäre es ihm nie eingefallen, für x die Sehne von $\frac{30^0}{16} = 1^0\,52'\,30''$ zu setzen, um B als die Sehne von $\frac{45 \cdot 30^0}{16} = 84^0\,22'\,30''$ zu finden und dann rückwärts zu sagen, aus jenem B ergebe sich dieses x.

Nun ging aber Vieta noch einen gewaltigen Schritt über Van Roomen hinaus. Letzterer war mit Vieta an der Spitze aller Mathematiker, die mit dem Zusammenhange trigonometrischer Linien

einfacher und vielfacher Bogen sich beschäftigten, aber Vieta war überdies, was Van Roomen nicht war, der grösste Algebraiker seiner Zeit. Er wusste, das wird im folgenden Kapitel sich zeigen, von der Anzahl der Wurzeln einer Gleichung. Wenn also für Van Roomen die Umkehrung, dass er x aus B abzuleiten verlangte, während er B aus x hergestellt hatte, lediglich eine solche Bedeutung hatte, wie wenn man etwa einem geometrischen Satze, den man gefunden hat, eine Aufgabe entnimmt, zu deren Auflösung er sich eignet, so war für Vieta die Umkehrung von ganz anderem Inhalte erfüllt. Ausser dem Werthe von x, welcher zur Auffindung von B geführt hat, kann es, sagte er sich, noch andere geben, und diese anderen Werthe von x hat Vieta fast sämmtlich zu finden gewusst, nachdem er mit grosser Wahrscheinlichkeit der Aufgabe diese neue Fassung gegeben hatte. Denselben Werth $\frac{B}{2}$, welchen $\sin\varphi$ besitzt, besitzen auch die Sinuslinien anderer Winkel, nämlich $\sin(360^0 + \varphi)$, $\sin(2 \cdot 360^0 + \varphi)$; $\sin(3 \cdot 360^0 + \varphi)$ u. s. w. und nicht minder auch $\sin(180^0 - \varphi)$, $\sin(360^0 + 180^0 - \varphi)$, $\sin(2 \cdot 360^0 + 180^0 - \varphi)$ u. s. w. Somit ist für $\frac{x}{2}$ als dem Sinus des 45. Theiles des vorgenannten Bogens auch eine viele Möglichkeiten enthaltende Auffindung vorhanden. Dasselbe kann sein $\sin\frac{\varphi}{45}$, $\sin\left(8^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(16^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$ u. s. w., beziehungsweise $\sin\left(4^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(12^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$, $\sin\left(20^0 - \frac{\varphi}{45}\right)$ u. s. w. Wie weit konnte, durfte dieses u. s. w. sich erstrecken? Noch immer war man an die Schranke positiver Gleichungswurzeln gebunden, noch immer gab es Sinuslinien nur für Bögen zwischen 0 und 180^0. Demzufolge musste $\varphi < 180^0$, $\frac{\varphi}{45} < 4^0$ sein, und als weitere Folge konnten nur die Werthe

$$\sin\frac{\varphi}{45},\ \sin\left(1 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right),\ \sin\left(2 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right),\ \ldots \sin\left(22 \cdot 8^0 + \frac{\varphi}{45}\right)$$

als Gleichungswurzeln gelten oder

$$\sin\left(4^0 - \frac{\varphi}{45}\right),\ \sin\left(4^0 + 1 \cdot 8^0 - \frac{\varphi}{45}\right),\ \ldots \sin\left(4^0 + 22 \cdot 8^0 - \frac{\varphi}{45}\right),$$

welche in umgekehrter Reihenfolge genau dieselben Wurzelwerthe sind, wie vorher. Es gab deren 23. Das ist, was Vieta gefunden hat, wenn auch weitaus nicht in der scharfen, leicht durchsichtigen Ausdrucksweise, welche die heutige Sprache seinen Gedanken zu leihen weiss. Wer es versucht, Vieta's Abhandlung durchzulesen, wird sicherlich der Ueberzeugung sich anschliessen, dass es ein wenn auch nur nachträgliches, doch keineswegs geringfügiges Verdienst

Van Roomen's bildet, Vieta's *Responsum* verstanden und gewürdigt zu haben.

Vieta schrieb über verwandte Untersuchungen, welche, wie wir zu zeigen gesucht haben, bei Anfertigung des Responsum schon abgeschlossen gewesen sein müssen, wenn wir auch nicht wissen, wie weit sie zu Papier gebracht waren, *Theoremata ad angulares sectiones*[1]). Erst gegen 1615 hat Anderson, ein Mathematiklehrer in Paris, diese Sätze mit Beweisen versehen. Von Van Roomen ist noch ein *Canon triangulorum sphaericorum*[2]) von 1609 anzuführen, welcher die Weitschweifigkeit des Opus Palatinum eindämmend statt 28 Sonderfälle der sphärischen Trigonometrie deren nur 6 anerkannte. Aehnliches hatte Vieta in seinen vermischten Aufgaben von 1593 geliefert.

Eine gewisse Berechtigung hat es wohl, wenn wir im Anschlusse an die Schriftsteller, welche mit Trigonometrie sich beschäftigten, ganz im Vorbeigehen bemerken, dass die Niederlande von der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts an auch Wohnsitz von solchen Gelehrten waren, welche die Entwerfung von Landkarten zu ihrer Aufgabe wählten[3]). Gerhard Mercator (1512—1594) von Rupelmonde an der Schelde diene als Vertreter dieser Richtung. Die ausführlichere Darstellung seiner Projectionsmethode und dessen, was seine Schüler aus ihr gemacht haben, gehört allerdings der Geschichte der Geographie oder der Kartographie an.

69. Kapitel.

Rechenkunst und Algebra.

Wir gehen zur Rechenkunst und zur Algebra über. Die Rechenbücher, mit denen wir es in den früheren Abschnitten zu thun hatten, waren fast durchgängig beiden gewidmet. Sie lehrten das gewöhnliche Rechnen oftmals gar in doppelter Art, so dass das Rechnen auf den Linien und das auf der Feder neben einander hergingen, sie lehrten auch Gleichungen ersten und zweiten Grades auflösen, sie enthielten überdies einen rechnend geometrischen Abschnitt. Gegen Ende der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts gewann die Algebra an Ausdehnung. Rudolf und Stifel in Deutschland, Recorde in England, Cardano und Tartaglia in Italien schrieben Bücher, die

---

[1]) Vieta pag. 237—304. [2]) Montucla I, 579. [3]) Quetelet pag. 110—126. — Breusing, Gerhard Mercator, der deutsche Geograph (1869).

fast lediglich der Lehre von den Gleichungen gewidmet waren. Dieser Umschwung vollzieht sich in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts immer mehr. Wohl erschienen noch Rechenbücher, welche man ebensogut Lehrbücher der gesammten Mathematik nennen könnte, weil sie neben dem Zahlenrechnen die Lehre von den Gleichungen und Feldmesserisches in sich schliessen, aber eine Theilung der Ziele bringt mehr und mehr gesonderte Bearbeitungen hervor. Geometrie als solche haben wir weiter oben besprochen und haben dabei zum Voraus des Simon Jacob als Rechenmeisters gedacht (S. 581). Einige Jahre vor seinem Rechenbuche erschienen 1556 zwei allenfalls erwähnenswerthe Schriften, ein Hilfsbuch zur Berechnung des Silbergehaltes und des Silberwerthes von Johann Marheld[1]) in deutscher und ein ganz kurzgefasster Lehrgang des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen nebst Anweisung zur Auflösung quadratischer Gleichungen von Kaspar Peucer[2]) (1525—1602) in lateinischer Sprache. Das erstere ist ein mit Tabellen versehenes um nicht zu sagen aus Tabellen bestehendes Buch von einer Art, wie uns vorher noch keins begegnete. An dem zweiten ist nichts interessant als der Verfasser, ein Schwiegersohn Melanchthon's, der von 1554—1559 eine mathematische Professur in Wittenberg inne hatte und dann zur medicinischen Facultät überging. Er musste schwer unter dem Verdachte des Kryptocalvinismus leiden und brachte zwölf Jahre in harter Gefangenschaft auf der Pleissenburg in Leipzig zu. Er hatte vermuthlich Valentin Otho den Rath ertheilt (S. 602), Wittenberg noch rechtzeitig zu verlassen und an den Pfälzer Hof nach Heidelberg sich zu begeben.

Von Simon Jacob's Rechenbuch ist uns nur die vervollständigte Ausgabe von 1565 bekannt. So weit wie der Verfasser eines lateinischen Lobliedes, welches der Vorrede zum *New und wolgegründt Rechenbuch* unmittelbar folgt, möchten wir freilich nicht gehen. Er behauptet schlankweg, Koburg sei durch den dort geborenen Jacob zu gleicher Berühmtheit gelangt, wie die beiden anderen fränkischen Städte: Königsberg und Karlstadt durch Regiomontanus und Johannes Schoner und versündigt sich dadurch an Regiomontanus, aber immerhin ist Jacob's Rechenbuch besser als viele, vielleicht als die meisten ähnlichen Werke der gleichen Zeit. Jacob lehrt der Uebung folgend am Anfange auch das Linienrechnen, aber er ist sich der Umständlichkeit desselben wohl bewusst und weiss ferner, wo es passende Anwendung findet, wo nicht. *Wahr ist's, dass sie zu Haussrech-*

---

[1]) Kästner I, 131. [2]) Ebenda I, 131—132. Allgem. deutsche Biographie XXV, 552—556, Artikel von Wagenmann.

nungen, da man viel Summierens, Aussgebens und Eynnemens bedarff, etwan förderlich erscheinen, aber in Kunstrechnungen, die ein wenig etwas wichtig, zum offtenmal verhinderlich. Nicht sag ich, dass man auff den Linien dieselben Rechnungen nicht auch machen köndte, sondern so viel vortheils ein Fussgänger, der leichtfertig und mit keiner Last beladen ist, gegen einen, der unter einer schwären Last stecket, hat, so viel vortheils hat auch ein Kunstrechner auf oder mit den Ziphern für einem mit den Linien[1]). Damit entschuldigt es Jacob, dass er nunmehr vom Dividiren ab das Linienrechnen ganz bei Seite lasse. Er kennt[2]) die Summe der Quadratzahlen in Gestalt der Formel $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n+1}{3}(1 + 2 + \cdots + 2n)$, sowie die der Kubikzahlen $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ und beruft sich für den Beweis auf das 8. Buch der Arithmetik des Jordanus, welche mithin damals in Deutschland noch gelesen wurde. Die Berufung ist hier allerdings nicht glücklich gewählt, oder mindestens nicht hinreichend begründet, denn im 8. Buche der genannten Arithmetik kommt weder die Summenformel der Quadratzahlen noch die der Kubikzahlen vor. Jacob musste desshalb sagen, auf welche Sätze jener Beweis sich stützen solle. Im 2. Theile ist das Dreieck der Binomialcoefficienten[3]) bis zu denen der 11. Potenz nicht in der Form wie bei Stiefel, dagegen ganz ähnlich wie in Tartaglia's General Trattato von 1556 abgedruckt mit dem einzigen Unterschiede, dass bei Tartaglia die Coefficienten bis zu denen der 12. Potenz sich erstrecken. Jacob beruft sich auf Vorgänger — *und wirt diese Tafel von etlichen also gemacht* — wo er die Enstehungsweise

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

mittheilt. Einige unbestimmte quadratische Aufgaben[4]) sind so gelöst, dass die an bestimmt gegebenen Zahlen gelehrte Vorschrift zugleich als allgemein giltig bezeichnet ist. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$ sei eine Zahl, welche um die gegebene Zahl a vergrössert oder verkleinert zur Quadratzahl werde; $\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - a$ werde zur Quadratzahl, wenn man entweder die gegebene Zahl a addire, oder die gleichfalls gegebene Zahl b subtrahire; $\left(\frac{d+1}{2}\right)^2$ und $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ seien zwei Quadratzahlen von der gegebenen Differenz d u. s. w. Auf diese wenigen von uns besonders hervorgehobenen Dinge beschränkt sich keineswegs das Interesse von Jacob's Rechenbuch. Ungemein viele kaufmänni-

---

[1]) New und wolgegründt Rechenbuch fol. 10 verso. [2]) Ebenda fol. 15 verso bis 16 recto. [3]) Ebenda fol. 104 verso. [4]) Ebenda fol. 239 recto.

sche Aufgaben, Gesellschaftsrechnungen, Mischungsrechnungen, zusammengesetzte Proportionen und dergleichen sind behandelt, wobei die welsche Praktik nicht zu kurz kommt. Der dritte Theil gehört der Geometrie an, und von ihm war im 68. Kapitel die Rede.

Rechenmeister, wenn auch nicht alle Jacob ebenbürtig, gab es damals in Deutschland, wo man hinblickte. Eine Stadt dürfte aber noch besonders namhaft gemacht werden, in welcher eine vollständige Rechenschule entstanden war: Ulm[1]). Diese Reichsstadt wetteiferte hierin wie in Vielem mit Nürnberg. Die Ulmer Schule ist begründet durch Conrad Marchtaler, der sich 1545 von Wittenberg, wo er studirte, wo ihm aber die Mittel zum längeren Verweilen ausgingen, dem Ulmer Rathe zur Errichtung einer Rechenschule anbot, ein gern und rasch angenommener Vorschlag. Marchtaler's Nachfolger hiess Gallus Spänlein. Dann war Johannes Kraft 1597 Modist und Rechenmeister. Er verfasste mehrere Lehrbücher, die sehr verbreitet waren. Gleichzeitig war auch ein gewisser David Selzlin Rechenmeister, der Lehrer eines bekannteren Schülers, von dem wir im XV. Abschnitte reden: Johann Faulhaber.

In Frankreich sind Schriften von Pierre Forcadel[2]) (S. 549) nennenswerth. Eine 1556—1557 erschienene dreibändige *Arithmétique* enthält manches Eigenthümliche. Zahlentheoretische Aufgaben, wie z. B. die Auflösung von $x^3 + x^2 = y^2$ mittels $x = z^3 - 1$, $y = z(z^2 - 1)$ stehen schon im ersten Bande. Ebendort wird die 5. Potenz der Unbekannten bald *quatriesme quantité*, bald *cinquiesme produit* genannt. Die Binomialcoefficienten sind im dritten Bande als die Ziffern der auf einander folgenden Potenzen von 11 erkannt. Das ist sofort ersichtlich bei $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$. Bei der 5. Potenz hilft sich Forcadel dadurch, dass er gewissermassen zweiziffrige Ziffern einführt und

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline 1 & 5 & (10) & (10) & 5 & 1 \end{array}$$

als das Product von $11 \cdot 14641$ betrachtet. Eine *Arithmetique par les gects* von 1558 ist ein Lehrbuch des Linienrechnens.

Das Linienrechnen lehrte auch Jean Trenchant in seinem 1566 in Lyon gedruckten Buche *L'arithmétique departie en trois livres. Ensemble un petit discours des changes avec l'art de calculer aux*

---

[1]) Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts (Ulm 1867). [2]) Fontès in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-lettres de Toulouse, Série 9, T. VI (1894), VII (1895), VIII (1896).

jetons[1]), von dessen Beliebtheit Ausgaben von 1571, 1588, 1602, 1632 zeugen. Jean Trenchant hat auch Zinstafeln herausgegeben[2]).

Petrus Ramus mit seinen *Scholae mathematicae* von 1569 verdient hier gleichfalls einen kleinen Platz. Bei den Gesprächen des Verfassers mit Kaufleuten, welche er bei seinen Spaziergängen besuchte (S. 565), lernte er mancherlei unbedeutende Rechenvortheile, welche er schildert. Wir brauchen ihm darin nicht zu folgen. Das Einzige, was wir dem Buche entnehmen möchten, ist die lakonische Art, in welcher das Multiplikationsergebniss: Minus mal Minus giebt Plus, gerechtfertigt wird: *E duabus negatis fit affirmatus, quia multiplicator non est integer*[3]), aus zwei Negativen wird ein Positives, weil der Multiplicator nicht vollständig ist. Als Beispiel dient

$$(8 - 9) \cdot (8 - 9) = - 72 + 81 + 64 - 72 = 1.$$

Hier ist uns im Drucke zuerst ein Anklang an das Wort negativ begegnet, und dem Dialectiker, welcher den Satz kannte, dass zwei Negationen bejahen, lag die Benutzung gerade dieses Ausdruckes nahe. Handschriftlich können wir das Wort etwas weiter zurückverfolgen.

Eine Handschrift der Göttinger Bibliothek, welche in den Jahren 1545—1548 geschrieben ist und einst dem 1574 verstorbenen Mathematiker und Schreibkünstler Stephan Brechtel[4]) gehörte, enthält eine muthmasslich auf eine viel ältere Quelle zurückweisende Algebra, die der Namen *numeri affirmativi* und *negativi* sich bedient.

Ein Schüler des Ramus war Salignac[5]), ein zweiter Urstisius[6]), deutsch Wursteisen (1544—1588), von welchen jener 1575, dieser 1579 ein lateinisches Rechenbuch herausgab, an welchen nichts bemerkenswerth erscheint, als die grosse Verehrung ihres Lehrers, welchem übrigens Salignac doch Fehler nachweist.

Eine herzlich unbedeutende Arithmetik und eine Algebra, der man kein besseres Zeugniss auszustellen vermag, hat Lazarus Schoner[7]), ein Sohn von Andreas und Enkel von Johannes Schoner, 1592 herausgegeben. Als Verfasser ist Petrus Ramus genannt, als eine eigene Zugabe des Herausgebers ist aber ein Buch über figurirte Zahlen und ein anderes über das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen bezeichnet[8]). Unter figurirten Zahlen versteht Schoner solche, welche

---

[1]) B. Boncompagni im *Bulletino Boncompagni* I, 150 Note. [2]) Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. II, 186. [3]) *Scholae mathematicae* pag. 269. [4]) Doppelmayr S. 203. [5]) Kästner I, 136—139. [6]) Ebenda I, 139—143. [7]) Doppelmayr S. 81 Note g. [8]) *Petri Rami Arithmetices libri duo et Algebrae totidem a. Lazaro Schonero emendati et explicati. Eiusdem Schoneri libri duo: alter, de Numeris figuratis; alter de Logistica sexagenaria* (Frankfurt 1592).

durch Multiplication entstanden sind, die Factoren werdsn Seiten genannt[1]). Eine einzige Bemerkung des Buches lohnt die Mühe des Durchlesens. Schoner beruft sich nämlich einmal auf den 33. Satz des Algorithmus demonstratus des Jordanus[2]). Damit ist festgestellt, dass der Enkel dessen, welcher 1543 den Algorithmus demonstratus herausgab, die Ueberzeugung besass, jene Schrift stamme von Jordanus, und dass er ohne weiteren Zusatz, gleichsam als seinen Lesern hinlänglich bekannt, jener Ueberzeugung Worte lieh. Bedürfte es äusserer Bestätigung für die gegenwärtige Annahme, wer den Algorithmus demonstratus verfasste, so wäre sie, scheint es, hier schwerwiegend gegeben.

Von Tartaglia's General Trattato (S. 517) scheint der erste Band wiederholt besonders herausgegeben worden zu sein. Eine Ausgabe[3]) führt z. B. den Titel: Tutte l'Opere d'Arithmetica del Famosissimo Nicolo Tartaglia (Venedig 1592—1593). Ein ähnlicher, aber natürlich älterer erste Band wurde vielleicht 1577 in Frankreich unter dem Namen der Arithmetik des Tartaglia von einem Guillaume Gosselin[4]) ins Französische übersetzt und mit Erläuterungen versehen. Welcher Art diese sind, mag an einem Beispiele klar werden, welches überdies sehr an dasjenige erinnert, was wir erst aus den Scholae mathematicae des Ramus vorführten. Es sei

$$6 = 8 - 2 = 10 - 4,$$

also müssen $(8 - 2) \cdot (10 - 4) = 36$ sein, und es komme nur heraus, wenn Minus mal Plus Minus und Minus mal Minus Plus gebe. Ob es ein anderer Gosselin mit dem Vornamen Pierre war, der 1577 in Paris ein Werk *De arte magna* herausgab, und ob dieses Werk in seinem Titel eine Abhängigkeit von Cardano verrathen sollte, wissen wir nicht.

Franciscus Maurolycus (S. 558) hat 1575 in Venedig eine Arithmetik in zwei Büchern herausgegeben, welche wir wegen eines darin vorkommenden neuen Untersuchungsgegenstandes nebst zugehörigem Kunstausdrucke erwähnen. Sei $p(n)$ eine n^{te} Vieleckszahl, so nennt Maurolycus deren Product in n eine *columna*, Säule, und leitet eine ganze Reihe von Sätzen über solche Säulen von Polygonalzahlen her[5]).

Kaum mit solchen minderwerthigen Leistungen vergleichbar, jedenfalls einen ganz anderen wissenschaftlichen Standpunkt einneh-

---

[1]) *Figuratus dicitur numerus multiplicatione factus: eiusque factores dicuntur latera* (pag. 217). [2]) pag. 234 lin. 16—17. [3]) G. Wertheim brieflich. [4]) Kästner I, 197—200. — Poggendorff I, 929—930. [5]) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIII, Histor.-literar. Abthlg. S. 42.

mend, sind die arithmetischen Schriften von Simon Stevin. Bereits 1584 hat er Zinstafeln dem Drucke übergeben[1]), welche mit vlämischem Texte in Leiden angefertigt und dem Bürgermeister dieser Stadt gewidmet waren, wenn auch der Druck in Antwerpen in der berühmten Plantin'schen Druckerei erfolgte. In der Leidner Werkstätte des gleichen Hauses erschien alsdann 1585 ein stärkerer Band, vier Schriften in französischer Sprache enthaltend[2]): eine *Arithmétique*, die vier ersten Bücher des Diophant, eine *Practique d'Arithmétique* und eine Abhandlung, welche den Titel *La Disme* führte, und welche laut einer Vorbemerkung ursprünglich vlämisch niedergeschrieben war. Hier haben wir es mit den beiden letzten Schriften des Bandes zu thun, da die *Arithmétique*, eigentlich eine Algebra, erst nachher zur Rede kommt, die Diophantbearbeitung schon (S. 552) erwähnt wurde.

Die *Practique d'Arithmétique* lehrt alle Rechnungen ausführen, welche die Regeldetri zur Grundlage haben, und die nicht im kaufmännischen Leben vorkommen. Als Schriftsteller, welche Derartiges erfolgreich gelehrt haben, nennt Stevin Namen aus verschiedenen Ländern[3]), abermals ein Zeugniss dafür, wie völkergemeinsam damals bereits mathematische Schriften waren. Cardano, Stifel, Tartaglia, Gemma Frisius, Cuthbert Tonstall sind die Erwähnten. und wenn ausserdem Juan Peris de Moya auftritt, so ist das in den damals noch fast spanischen Niederlanden begreiflich. Ueberdies hat die *Aritmetica practica y especulativa* dieses Schriftstellers nur innerhalb der Zeit von 1609 bis 1761 dreizehn Auflagen erlebt[4]). In einer noch älteren Ausgabe von 1590 findet sich auf fol. 227 die Ausziehung der Quadratwurzel unter Anwendung der von Chuquet erfundenen Regel der mittleren Zahlen (S. 352), welche De Moya aus dem vielverbreiteten Lehrbuche des De la Roche (S. 371—374) kennen gelernt haben dürfte[5]). Stevin bezog sich auf den früher erschienenen *Tratado di matemáticas* (Alcala 1573). In letzterem ist auch über die Darstellung der Zahlen mittels Fingerbiegung bei den Arabern gehandelt[6]). De Moya ist, wie wir hier einschaltend erwähnen[7]), in der Sierra Morena in St. Stefano geboren und war Canonicus in Granada. Das Hauptgewicht legt Stevin in der *Practique d'Arithmétique* auf Zinstafeln, welche hier in neuem Abdrucke und mit sachlich,

---

[1]) Quetelet pag. 147. [2]) Ebenda pag. 159 Note 1. [3]) Stevin I, 181. [4]) G. Vicuña in der Bibliotheca mathematica, 1890, pag. 35. [5]) G. Wertheim, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche in Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 150. [6]) *Bulletino Boncompagni* I, 312—313. [7]) Vergl. *Bibliotheca Hispana nova auctore D. Nicolao Antonio Hispalensi I. C.* (Madrid 1783) I, 757.

nicht bloss sprachlich verändertem Texte erscheinen[1]). Es sind, genauer gesagt, Rabattirungstafeln, welche den Baarwerth einer Forderung von 10000000 erkennen lassen, welche erst in 1, 2 bis 33 Jahren fällig zu Zinseszins auf die Gegenwart zurückzuführen ist. Der Zinsfuss ist zunächst in ganzen Procenten als 1, 2 bis 16procentig angenommen, dann in Stammbrüchen des Kapitals als $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$ bis herab zu $\frac{1}{22}$, wofür die Ausdrücke dienen *au denier* 15, *au denier* 16 bis zu *au denier* 22, d. h. 1 ₰ Zins für 15, 16, ... 22 ₰ Kapital. Wird umgekehrt nach der Summe gefragt, zu welcher ein Kapital in einer gegebenen Zeit bei Zinseszins zu einem gegebenen Procentsatze anwächst, so soll man mittelbaren Gebrauch von den Tafeln machen. Ist z. B. vermöge derselben 6005739 der Baarwerth von nach 13 Jahren fälligen 10000000 bei 4%, so wächst das Kapital K zu 4% in 13 Jahren zu $\frac{10\,000\,000}{6\,005\,739}K$ an. Auch Zeitfragen werden beantwortet[2]). In welcher Zeit wird 800 zu $\frac{1}{17}$ Zins zu 2500? Wir verändern 2500 in 10000000, mithin 800 in 3200000 und suchen diese Zahl in der Tafel von $\frac{1}{17}$ Zins. Bei 19 Jahren steht dort 3375605, also ist die gesuchte Zeit länger als 19 Jahre. Den überschüssigen Bruchtheil eines Jahres soll man folgendermassen suchen. Es fand sich eine um $3375605 - 3200000 = 175605$ zu grosse Zahl; 3200000 giebt zu $\frac{1}{17}$ im Jahre $\frac{3\,200\,000}{17}$ Zins; 175605 Zins entstehen also in $\frac{17 \cdot 175\,605}{3\,200\,000}$ $= \frac{2\,985\,285}{3\,200\,000}$ Jahren. Allerdings kleidet Stevin seine Regel etwas anders ein. Statt den Ueberschuss so zu suchen, wie wir es thaten, vervielfacht er das ganze 3375605 mit 17 und dividirt dieses Product durch 3200000, wobei als Quotient $17\frac{2\,985\,285}{3\,200\,000}$ erscheint, und von diesem Quotient müsse man immer die ganze Zahl, hier also 17, weglassen[3]). Ist die Frage nach dem Zinsfusse gestellt, mittels dessen etwa 1000 in 7 Jahren zu 2000 geworden sind, so sollen die Tafeln folgendermassen benutzt werden[4]). Statt 2000 muss 10000000, also statt 1000 die Zahl 5000000 gesetzt werden, und nun suche man, in welcher Tabelle beim 7. Jahre 5000000 stehe. Bei 10% findet sich 5131582, bei 11% steht 4816585, also ist der Zinsfuss zwischen 10 und 11%, etwas näher bei 10 als bei 11.

Nach der Practique d'Arithmétique kommt auf nur sieben Seiten eine Abhandlung[5]), welche den vielsagenden Titel führt: *La Disme*

---

[1]) Stevin I, 191—197. [2]) Ebenda I, 199. [3]) *lesquels 17 on delaissera pour reigle generale.* [4]) Stevin I, 201. [5]) Ebenda I, 206—213.

enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. Ohne Brüche, nur mittels ganzer Zahlen sollen alle Rechnungen, welche im menschlichen Geschäftsleben vorkommen, ausgeführt werden! Wir wissen heute, dass dieser Ausspruch wirklich gewagt werden durfte, dass Decimalbrüche in der That das leisten, was Stevin versprach. Er war von der grossen Bedeutung des in der *Disme* Gelehrten durch und durch erfüllt. Am Schlusse macht er es den Regierungen zur Pflicht, das Ihrige zu thun, um das neue Rechnen zu einem in allen Fällen unmittelbar anwendbaren zu machen; er verlangt mit dürren Worten Decimaltheilung der Münzen, der Maasse, der Gewichte. Möge, fährt er fort, die Einführung der Decimalbrüche vielleicht nicht so bald in Aussicht stehen, als er es wünsche; das sei sicher, dass ein künftiges Geschlecht, wenn nur die Menschennatur die gleiche bleibe, nicht immer einen so grossen Vortheil ausser Acht lassen werde[1]. Er ahnte nicht, dass es noch zwei Jahrhunderte dauern sollte, bis man anfing, seinen Plan zu verwirklichen, trotzdem möglicherweise ein hervorragender Kirchenfürst, Bischof Ernst von Baiern[2] zu Köln ähnliche Gedanken hegte, zum Mindesten wie Adrian van Roomen in einer Vorrede von 1609 erzählt hat, alle Maasse und Gewichte auf eine einzige geometrische Reihe gründen wollte[3]. Wir greifen mit diesem Zwischensatze in eine damals weit entlegene Zukunft vor, wir thun es, um das ganze Gewicht der Stevinschen Leistung auf uns wirken zu lassen. Der Gedanke decimaler Theilung und decimaler Rechnung, könnte man einwerfen, sei nicht neu gewesen. Gewiss, seit Jahrhunderten hatte das eine Verfahren zur Auffindung angenäherter Wurzelwerthe, hatte die Einrichtung von Sinustafeln, in welchen die Länge des Halbmessers durch eine mit Nullen versehene Einheit dargestellt wurde, darauf vorbereitet. Aber decimal leicht aussprechbare Längen und sogar die Benutzung von Brüchen, deren Nenner aus Einheiten mit Nullen bestehen, sind noch keine Decimalbrüche. Dazu gehört ein Weiteres: die Anwendung der Stellung zur Bezeichnung des verminderten Werthes der einzelnen Zahlzeichen, das darauf beruhende Weglassen der Nenner, und will man daran erinnern, dass auch dieser Gedanke nichts weniger als neu war, dass er bei der fortgesetzten Sexagesimaltheilung der Winkelgrade seit Jahrtausenden bereits in Uebung war, so mag Stevin

[1] *Il est certain que si les hommes futurs sont de telle nature comme ont este les precedens qu'ils ne seront pas tousiours negligens en leur si grand avantage.* [2] Allgemeine Deutsche Biographie VI, 250—257. Artikel von Ennen. [3] Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liège* in dem Bulletin de l'institut archéologiques Liégeois XXI, 490—491.

vielleicht an diese Anregung gedacht haben; aber seiner Erfindung ist dadurch, möchten wir sagen, nur höherer Wert beigelegt; denn warum haben jene Jahrtausende nicht geleistet, was Stevin als nothwendig erkannte? So ganz vollständig ist allerdings das Wegbleiben der Nenner bei Stevin noch nicht. Er benutzt noch nicht ein Pünktchen oder Komma, um die Einer von den Decimalbruchstellen zu trennen. Er schreibt vielmehr von der Einheitsstelle an jeder Stelle zur Rechten ein Rangzeichen bei, welches in einer eingeringelten Zahl besteht. Eine eingeringelte 0, 1, 2, 3 bezeichnet die links davon befindliche Stelle als Einer, Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, z. B. 237 ⓪ 5 ① 7 ② 8 ③ bedeutet ihm $237\frac{578}{1000}$. Aber er sieht doch bereits die Möglichkeit einer kürzeren Schreibweise, denn 54 ② bedeutet ihm schon $\frac{54}{100}$ und in der *Practique de Geometrie*, welche in einzelnen Theilen vielleicht auch bis 1585 zurückgeht (S. 572), findet sich[1]) 707 ② für $7\frac{7}{100}$. Bei der Ausführung der Rechnungen, der Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen, werden die eingeringelten Stellenzeiger über die betreffenden Ziffern gesetzt und gelten beispielsweise bei der Addition für sämmtliche Posten, sowie für die aus ihnen gebildete Summe, wodurch die Vereinfachung der Schreibweise sich noch erhöht:

	⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Was für Stevin die eigentliche Bedeutung der eingeringelten Stellenzeiger war, werden wir bei Besprechung seiner algebraischen Leistungen sehen.

Ein Pünktchen oder eine den Einern ihre Wölbung zukehrende Halbklammer zur Abgrenzung von Decimalstellen scheint zuerst Joost Bürgi[2]) (1552—1632 oder 1633) benutzt zu haben. Er war Schweizer von Geburt, brachte aber den grössten Theil seines Lebens in Kassel und Prag zu. In Kassel war Bürgi Hofuhrmacher des um die Sternkunde hoch verdienten Landgrafen Wilhelm IV., in Prag kaiserlicher Kammeruhrmacher. Dort stand er in persönlichen

[1]) Stevin II, 390 letzte Zeile. [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz (Zürich 1858) I, 57—80. Derselbe, Astronom. Mittheilungen Nr. LXXII und LXXXI. Derselbe, *Bibliotheca mathematica* 1889 p. 33. Derselbe, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur (Zürich 1890) I, 86—88 und 173—175.

Beziehungen zu Kepler. Im Jahre 1622 kehrte Bürgi nach Kassel zurück, wo er den Abend seines Lebens verbrachte. Von den Schreibweisen des Namens Bürgi, Burgi, Byrgi ist durch Funde im St. Galler Archive die erste als die richtige gesichert, wenigstens hat seit dem XVI. Jahrhunderte die Familie stets nur Bürgi geheissen. Die lange Lebenszeit Bürgi's und noch mehr die verschiedenartigen Verdienste, um derenwillen die Geschichte der Mathematik sich mit ihm zu beschäftigen hat, macht es nothwendig, ihn ausser im XIV. auch noch im XV. Abschnitte zu behandeln. Hier haben wir es zunächst nur mit dem Rechner Bürgi zu thun. Was wir von seiner Bekanntschaft mit Decimalbrüchen oben angedeutet haben, beruht zum Theil auf einer nur handschriftlich vorhandenen *Arithmetica*[1]), welche wahrscheinlich kurz nach dem im August 1592 erfolgten Tode des Landgrafen Wilhelm IV., von dem in der Vorrede mit dem Beiworte „hochselicher Gedächtniss" die Sprache ist, verfasst wurde, und welche mit dem Kepler'schen Nachlasse auf die Bibliothek von Pulkowa kam, der sie noch angehört, zum wesentlicheren Theile auf der Aussage von Kepler. Letzterer sagt in seinem 1616 veröffentlichten *Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis*[2]), wo er jene Halbklammer den Lesern erklärt: „diese Art von Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinusrechnung erdacht". Darnach müsste man auch Bürgi's Unabhängigkeit von Stevin annehmen, was bei einem ohne wesentlichen Unterricht Aufgewachsenen[3]) glaubhaft ist. In der handschriftlichen Arithmetik dient eine unter der Einerstelle befindliche 0 bisweilen als Abtheilungszeichen $\underset{0}{1414} = 141\frac{4}{10}$. Am gleichen Orte wird die abgekürzte Multiplication gelehrt, wofür das Beispiel sich findet

01234	
12358	
01234	
0246	8
037	0
06	1
0	9
01525	

Hier ist allerdings kein Abtheilungszeichen, und man muss aus dem Ergebnisse folgern, dass eigentlich 0,1234 und 1,2358 die Factoren

[1]) Ein Auszug von Rud. Wolf in dessen Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI. [2]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 547. [3]) In der Vorrede zur handschriftlichen Arithmetik sagt Bürgi von sich: „der ich doch Griechischer und lateinischer Sprach unerfahren und derohalben die Jenige, wölliche hiervon geschrieben in Irer rechten Sprach nit vernehmen khönde." Wolf, Astron. Mittheil. Nr. XXXI S. 9.

sind, welche das Product 0,1525 liefern. In Uebereinstimmung mit Kepler's Aussage ist die (S. 604) angeführte Thatsache, dass Pitiscus im Tabellenanhange seiner Trigonometrie von 1608 sowie von 1612 (nicht in den früheren Auflagen) das Decimalstellen abtrennende Pünktchen benutzt hat. In derselben Ausgabe seiner Trigonometrie S. 44 nennt aber Pitiscus den Bürgi in einer Weise, als ob er dessen Unterricht genossen hätte, wenn wir auch nicht anzugeben wissen, wo das stattgefunden haben sollte. Es mag für die Einführung jenes Decimalpünktchens nicht unerinnert bleiben, dass längst bevor man Decimalbrüche schrieb, Pünktchen benutzt wurden, um in sehr grossen Zahlen Gruppen von bald je drei, bald je vier Stellen abzugrenzen. Prätorius hat in seiner Handschrift von 1599 (S. 589) unzweifelhaft selbständig unter der Ueberschrift *Compendiosa multiplicatio duorum inter se sinuum quando factus per 1000 etc. dividendus est* die abgekürzte Multiplication deutlicher und genauer als Bürgi gelehrt[1]).

Neben Vieta, Stevin, Bürgi, Prätorius ist ein fünfter Bewerber um die selbständige Erfindung der Decimalbrüche vorhanden: Johann Hartmann Beyer[2]) (1563—1625) aus Frankfurt am Main. Dieser veröffentlichte 1603 eine mehrfach neu aufgelegte *Logistica decimalis, das ist die Kunstrechnung mit den zehntheiligen Brüchen.* Beyer nimmt deren Erfindung ausdrücklich für sich in Anspruch. Er bemerkt, es habe ihn, indem er sich zuweilen in den mathematischen Künsten erlustiret, die Praxis der Astronomen, geringere Theile als Grade mit 60theiligen Scrupeln zu messen, auf den Gedanken gebracht, dass statt der sechzigtheiligen Brüche, welche einen mühsamen Calculum erfordern, wohl auch eine andere Denomination anwendbar, und dass hierzu die 10 eine sonderlich bequeme und gleichsam privilegirte Zahl sei, welche im Addiren, Subtrahiren, vornehmlich aber im Multipliciren und Dividiren grosse, bei keiner andern Zahl zu findende Vortheile gewähre. Beyer nennt die Bruchtheile: erste, zweite, dritte ... Zehnder, oder erste, zweite, dritte ... Scrupel, oder Primen, Secunden, Terzen ... und bezeichnet sie durch überschriebene Indices, nach den Ganzen setzt er einen Punkt: $8.79\overset{\text{v}}{8}$ bedeutet bei ihm also $8\frac{798}{100000}$. Darüber, dass Beyer die Stevin'schen Schriften gekannt hat, ist Zweifel nicht möglich. Die Ausdrücke Prime, Secunde u. s. w. zeigen eine auffallende Aehnlichkeit mit der Practique d'Arithmetique[3]).

---

[1]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Histor. liter. Abthlg. S. 7—11. [2]) Poggendorff I, 183. — Unger S. 105, dem wir die Beschreibung der *Logistica decimalis* wörtlich entnehmen. [3]) Stevin I, 208 Definition 3: *Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons Prime; et chasque dixiesme partie de l'unité de Prime nous la nommons Seconde, et ainsi*

Ueberdies ist auf S. 113 von Beyer's Logistica decimalis sogar von Johann Semsen[1]) Decimalrechnung (auss Anweisung Simon Stevins) im 3., 4., 5. und 6. cap. lib. Geodaes. ausdrücklich die Rede[2]).

Von Stevin's Schriften sei gegenwärtig noch eine erwähnt, *De Apologistica Principum Ratiocinio Italico*, welche 1605 in dem II. Bande der Hypomnemata mathematica erschien[3]). Rechnung der Fürsten nach italienischer Weise hat man den Titel übersetzt. Es ist die Anwendung der doppelten Buchführung auf den Staatshaushalt. Stevin hatte für die Hofhaltung des Prinzen Moritz von Nassau italienische Buchführung eingerichtet, welche ihm entweder aus den Schriften italienischer oder niederländischer und deutscher Gelehrten, oder wahrscheinlicher durch eigene Uebung während der Zeit, in welcher er kaufmännisch sich bethätigte, bekannt war. Waren doch in Nachahmung der Italiener Anleitungen zur doppelten Buchführung von Jan Ympyn 1543, von Valentin Mennher aus Kempten 1550 und 1565 in vlämischer und in französischer Sprache in Antwerpen im Drucke herausgekommen, und waren doch bei Mennher die unpersönlichen Conti neben den persönlichen in fortwährendem Gebrauche[4]). Jetzt wünschte Stevin die Anwendung des in kleineren Verhältnissen Erprobten in einem grossen Staatswesen einzuführen und wandte sich desshalb an den französischen Staatsmann Sully, der ja gerade dem Finanzwesen die grösste Aufmerksamkeit schenkte. Ihm widmete er die Schrift, welche zur Empfehlung jener Buchführung dienen sollte. Wesentlich ist derselben nicht nur das doppelte Eintragen jedes einzelnen Postens, der einmal in einem Soll, das andere Mal in einem Haben vorkommen muss, sondern auch die Einführung der vorerwähnten unpersönlichen Conti. Gerade diese letzteren — z. B. in einem Geschäfte, welches überseeische Producte führt, die Anlegung eines Kaffeeconto, Theeconto, Pfefferconto u. s. w. — erleichtert ungemein

---

des autres chasque dixiesme partie de l'unité de son signe precedent tousiours en l'ordre un d'avantage.

[1]) Johann Sems, ein Niederländer, verfasste gemeinsam mit Joh. Pietersen Dou eine später auch ins Deutsche übersetzte Geodäsie. Kästner III, 291—293. [2]) Hunrath in Neue philologische Rundschau (herausgegeben von Wagner und Ludwig) 1892, S. 235. [3]) Der II. Band der Hypomnemata erschien 1605, der I. erste erst drei Jahre später 1608. Der Grund lag darin, dass die Schriften des I. Bandes noch ins Lateinische zu übersetzen waren, während die des II. Bandes ursprünglich lateinisch verfasst waren. Ueber die Apologistica vergl. Kästner III, 408—410 und Jäger, Lucas Paccioli und Simon Stevin (Stuttgart 1876), S. 109—137. [4]) Kheil, Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungs-Tractates von Luca Paccioli (1896) und Kheil, Valentin Mennher und Antich Rocha (1896).

die Uebersichtlichkeit, und diesen Vortheil beabsichtigte Stevin auch in der Staatsbuchführung hervortreten zu lassen, was ihm vollständig und weit rascher gelang, als die Durchsetzung seiner Wünsche nach decimalen Theilungen. Die unpersönlichen Conti, welche Stevin hier einführte, waren die der fürstlichen Küche, der Wohnung, des Marstalls, der Rechnungskammer, ferner solche über das Seewesen, Strafgelder u. s. w.

Wir gelangen zur letzten Gruppe mathematischen Wissens, deren Entwickelung in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrhunderts wir zu suchen haben, zur Algebra.

Einige Schriften, welche ihrem Inhalte wie ihrer Entstehungszeit nach fast besser hierher gehören würden, sind vorgreifend im XIII. Abschnitte geschildert worden. Um den Einblick in den Zusammenhang der Erfindungen nicht einzubüssen, rufen wir die Ueberschriften jener Werke, welche uns statt der Inhaltsangabe dienen müssen, und deren Druckjahre ins Gedächtniss zurück. Wir nennen Cardano's Practica arithmeticae generalis von 1539, Stifel's Arithmetica integra von 1544, Cardano's Ars magna von 1545, die von Stifel besorgte II. Auflage der Rudolf'schen Coss von 1553, Recorde's Whetstone of witte von 1556, Cardano's Regula Aliza von 1579, desselben Sermo de plus et minus zwischen 1572 und 1576. Für die letztgenannte ganz kurze Abhandlung war die Zeitbestimmung dadurch gegeben, dass Cardano 1576 starb, während die Abhandlung ein 1572 erstmalig gedrucktes Werk voraussetzt: Bombelli's Algebra. Von diesem Buche und seinem Verfasser haben wir jetzt zu reden.

Was wir freilich von Rafaele Bombelli[1]) aus Bologna wissen, ist kaum mehr, als in diesen Worten bereits gesagt ist. Sein Vorname, seine Heimath sind bekannt. Der Titel seines berühmten Werkes heisst *l'Algebra*. Er schrieb dasselbe auf Aufforderung des ihm geneigten Bischofs von Malfi, und es ist zuerst 1572 in Venedig, dann abermals 1579 in Bologna gedruckt. Damit sind die Notizen über seine Persönlichkeit im Wesentlichen erschöpft.

Der Inhalt der Algebra gliedert sich in drei Bücher. Das 1. Buch besteht aus einer Lehre von den Wurzelgrössen, so weit solche bei der Auflösung von Gleichungen Anwendung findet; insbesondere ist Gewicht auf die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium gelegt, von dessen beiden Theilen der eine eine Quadratwurzel ist. Das 2. Buch ist die eigentliche Algebra, die Lehre von den Gleichungen der vier ersten Grade mit einer Unbekannten. Das 3. Buch ist eine Sammlung von ungefähr 300 Aufgaben, welche zur Einübung des in den beiden ersten Büchern Gelehrten dienen.

[1]) Libri III, 181—184.

Eine wichtige Stelle des ersten Buches ist lange Zeit so gut wie unbeachtet geblieben. In ihr ist die Ausziehung der Quadratwurzel mittels der Kettenbrüche gelehrt[1]), also die Formel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

Freilich hat sich Bombelli mit dem Zahlenbeispiele $\sqrt{13}$ begnügt. Er findet $a = 3$, $b = 4$ und als ersten Näherungswerth $3 + \frac{4}{6} = 3\frac{2}{3}$; dann lässt er $\frac{4}{6}$ zu dem im Nenner befindlichen 6 hinzufügen, so entsteht als weiterer Näherungswerth $3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = 3\frac{3}{5}$. Dass Bombelli über die Sache klarer dachte als er sie auszudrücken wusste, geht aus seiner weiteren Behandlung hervor, welche wir in unserem Berichte nur so weit abändern, dass wir die Unbekannte und deren Quadrat durch x und x^2 ersetzen. Ist $\sqrt{13} = 3 + x$, so folgt $13 = 9 + 6x + x^2$, $4 = 6x + x^2$. Gewöhnlich vernachlässigt man x^2 und schreibt nur $4 = 6x$, woraus $x = \frac{2}{3}$ folgt. Will jetzt das vernachlässigte x^2 auch in Rechnung gezogen werden, so muss $x^2 = \frac{2}{3}x$ oben eingesetzt werden. Man erhält also $4 = 6x + \frac{2}{3}x = \frac{20}{3}x$ und $x = \frac{3}{5}$. Dieser neue Werth nöthigt zu $x^2 = \frac{3}{5}x$ d. h. zu $4 = 6x + \frac{3}{5}x = \frac{33}{5}x$ nebst $x = \frac{20}{33}$ u. s. w.

Da die Gleichungen dritten und vierten Grades den Schwerpunkt des Werkes bilden, so ist natürlich, dass Bombelli auch in der damals noch in ganz frischem Angedenken stehenden, kaum erst durchgefochtenen Streitsache zwischen Tartaglia auf der einen, Cardano und Ferrari auf der anderen Seite Partei ergreifen musste. Er that es zu Gunsten der beiden Letztgenannten, sei es dass die Gerechtigkeit ihrer Sache ihn überzeugte, sei es dass für ihn auch ins Gewicht fiel, dass Ferrari von Bologna seine eigene Heimath theilte. Tartaglia, so drückt Bombelli sich aus[2]), sei von Natur so gewöhnt gewesen, Böses zu sagen, dass er dachte, ein ehrenvolles Zeugniss

---

[1]) Wertheim, Die Berechnung der irrationalen Quadratwurzeln und die Erfindung der Kettenbrüche. Zeitschr. Math. Phys. XLII, Supplementheft S. 149—160 mit Berufung auf Bombelli, Algebra S. 35. [2]) *Di sua natura era cosi assuefatto a dir male, che all' hora egli pensava di haver dato honorato saggio di se, quando che di alcuno havesse sparlato* (S. 5 des Vorwortes *Agli Lettori*).

für sich abgelegt zu haben, wenn er von einem Anderen Uebles geredet hatte. Auffallen muss dabei, dass Bombelli in dem ganzen Buche nicht ein einziges Mal des Scipione Del Ferro gedenkt, der doch auch Bologneser war, und dem nach übereinstimmender Aussage der Gegner die erste Auflösung der kubischen Gleichung geglückt war.

Die rasche Aufeinanderfolge der beiden Ausgaben, in welchen 1572 und 1579 die Algebra erschien, ist Zeugniss dafür, dass sie Käufer fand, eine für diese Käufer selbst schmeichelhafte Thatsache, da Bombelli's Schreibart durch ungewohnte Namen und Bezeichnungen zuerst fast abschreckend wirken musste. Die Unbekannte nannte Bombelli *tanto* oder *quantita*, ihr Quadrat *potenza*, und das dürfte das erste Vorkommen dieses Wortes sein, welches später die allgemeine Bedeutung erhielt, welche ihm heute noch anhaftet, während Bombelli für den weiteren Begriff mit Tartaglia des Wortes *dignita* sich bedient. Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl heisst *piu di meno* oder *meno di meno*, je nachdem sie selbst positiv oder negativ genommen werden soll. Auch in den Bezeichnungen schlug Bombelli andere als die gewohnten Bahnen ein. Es war gewiss ein glücklicher Gedanke von ihm, die aufeinanderfolgenden Potenzen der Unbekannten durch Zahlen anzudeuten, unter welchen ein kleiner Bogen sich befand, also $\overset{1}{\smile}$, $\overset{2}{\smile}$, $\overset{3}{\smile}$, $\overset{4}{\smile}$ zu schreiben, eine Bezeichnung, welche wenig später von Pietro Antonio Cataldi in seinem *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* von 1613, von welchem im 75. Kapitel zu reden sein wird, aber auch schon in seinem *Trattato dell' Algebra proportionale* von 1610 dahin verändert wurde, dass die kleinen Bögen unter den Zahlzeichen wegfielen und letztere durchstrichen wurden. Bei Cataldi war also $\not 3$ die dritte, $\not 7$ die siebente und sogar $\not 1$ die erste Potenz der Unbekannten[1]). Glücklich war auch Bombelli's Gedanke, die Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken durch eine besondere Bezeichnung deutlich hervortreten zu lassen. Paciuolo (S. 320) besass bereits das Wort *Radix universalis* mit der Bezeichnung ℞V, um Wurzeln aus vereinigten Grössen zu ziehen, z. B. ℞V7p̃℞14 $= \sqrt{7+\sqrt{14}}$. Cardano in seiner *Practica Arithmeticae generalis* von 1539 unterschied von der *Radix universalis* die *Radix ligata*[2]), bei welcher das erste Wurzelzeichen nur der unmittelbar folgenden Zahl gilt, also zwei Quadratwurzeln addirt werden. Als eigentlich ganz überflüssiges

---

[1]) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV, Histor.-liter. Abthlg. S. 48. [2]) Cardano IV, 14.

Zeichen schrieb Cardano ein L vor die erste Wurzel, z. B. L℞ 7 *p* ℞ 14 $=\sqrt{7}+\sqrt{14}$. Bombelli war der Meinung, man solle für Radix universalis beide Namen, Radix universalis oder Radix legata, unterschiedlos gebrauchen[1]; er selbst bediente sich später fast ausschliesslich des Ausdruckes Radix legata. Dabei schrieb er ein L hinter das erste ℞, und eine Umkehrung desselben in der Form ⅃ schloss am Ende den ganzen der Wurzelausziehung unterworfenen Ausdruck ab, z. B.

℞ L 7 *p* ℞ 14 ⅃ $=\sqrt{7+\sqrt{14}}$.

Solche Vereinigungen unter ein gemeinsames Wurzelzeichen wandte er auch bei Wurzeln höheren Grades und auch in Wiederholung an

℞ *q* L ℞ *c* L ℞ *q* 68 *p* 2 ⅃ *m* ℞ *c* L ℞ *q* 68 *m* 2 ⅃ ⅃

$$=\sqrt{\left[\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)}\right]}$$ [2],

℞ *c* L 4 *p* di *m* ℞ *q* 11 ⅃ *p* ℞ *c* L 4 *m* di *m* ℞ *q* 11 ⅃

$$=\sqrt[3]{(4+\sqrt{-11})}+\sqrt[3]{(4-\sqrt{-11})}.$$ [3]

Wir benutzen dieses letztere Beispiel, um zu zeigen, wie Bombelli an demselben die Wurzelausziehung vollzieht. Sei zunächst allgemein angenommen, man habe es mit $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ zu thun, und es sei $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}$. Die Erhebung zum Kubus und Gleichsetzung der reellen wie der imaginären Theile zeigt, dass $a=p^3-3pq$, $\sqrt{-b}=(3p^2-q)\sqrt{-q}$ und dadurch ergiebt sich die zweite Kubikwurzel als $\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p-\sqrt{-q}$, die Summe beider also als

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}+p-\sqrt{-q}=2p.$$

Es kommt also ausschliesslich auf die Auffindung von $2p$ an. Multiplicirt man die beiden Kubikwurzeln miteinander, so entsteht $\sqrt[3]{a^2+b}=p^2+q$ und, wenn $\sqrt[3]{a^2+b}=c$ rational ist,

$$p^2+q=c,\ q=c-p^2,\ -3pq=3p^3-3cp,\ p^3-3pq=4p^3-3cp.$$

Wir hatten aber als ein erstes Ergebniss $a=p^3-3pq$, mithin ist p eine Wurzel der kubischen Gleichung $4p^3-3cp=a$.

In dem gegebenen Zahlenbeispiele ist

$$a=4,\ b=11,\ c=\sqrt[3]{4^2+11}=3$$

und $\quad 4p^3-9p=4,\ 8p^3-18p=8,\ (2p)^3-9(2p)=8$

[1]) Bombelli, Algebra S. 99. [2]) Ebenda pag. 356. [3]) Ebenda pag. 294—295.

aufzulösen. Kann man, was in diesem Beispiele nicht zutrifft, hieraus mit Leichtigkeit $2p$ ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst.

Dagegen bilde ein anderes Mal[1]) $z^3 = 15z + 4$ den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung. Die Formel des Del Ferro lehrt

$z = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$. Hier ist

$a = 2,\ b = 121,\ c = \sqrt[3]{2^2 + 121} = 5,\ 4p^3 - 15p = 2,\ (2p)^3 - 15(2p) = 4,$

welches bei $2p = 4$ erfüllt wird. Das hier vorhandene Rationalsein von c tritt immer ein, so oft eine kubische Gleichung den Ausgangspunkt bildete. Aus $x^3 = mx + n$ folgt nämlich

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}\right)}$$

$$\text{mit } a = \frac{n}{2},\quad b = \left(\frac{m}{3}\right)^3 - \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

also $a^2 + b = \left(\frac{m}{3}\right)^3$ und $c = \sqrt[3]{a^2 + b} = \frac{m}{3}$.

Die Bedeutung der Bombelli'schen Untersuchung liegt offenbar nicht etwa darin, dass sie die kubische Gleichung leichter auflösen lehrte. Wir haben ja gerade an dem zuletzt von uns besprochenen Beispiele gesehen, dass die Umwege nur dahin führten, dass man schliesslich zu derselben Gleichung zurückkehrte, von welcher man ausgegangen war, und deren Wurzel 4 somit unmittelbar hätte gefunden werden können. Aber durch die geführte Untersuchung wurde einleuchtend gemacht, dass jene beiden Kubikwurzeln der Del Ferroschen Formel der Auswerthung fähig waren, und dass in Folge derselben die imaginären Theile sich weghoben. „Ein ausschweifender Gedanke", sagt Bombelli[2]) „nach der Meinung Vieler. Ich selbst war eine Zeit lang der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand."

Die Gleichung vierten Grades behandelt Bombelli[3]) nach Ferrari, und da wir dessen Methode schon früher (S. 509—510) aus Cardano's Ars magna erörtert haben, so dürfen wir uns hier an der Bemerkung genügen lassen, dass alle Einzelfälle in grosser Ausführlichkeit durchgesprochen werden.

Der Auflösung von Gleichungen durch allgemeine Formeln steht die durch Rechnung mit bestimmten Zahlen gegenüber. Auch mit einer solchen Methode hat, wie wir wissen, Cardano es versucht.

---

[1]) Bombelli, Algebra pag. 293. [2]) Ebenda die drei letzten Zeilen von pag. 293. [3]) Ebenda pag. 353 sqq.

Ein eigenthümliches Verfahren ersann Johannes Junge[1]) aus Schweidnitz, Rechenmeister zu Lübeck. Er soll es 1577 veröffentlicht haben, aber in welcher Weise ist unbekannt. Die Gleichung wird in zwei Glieder getheilt, so dass die höchste Potenz der Unbekannten für sich allein das eine Glied bildet. Alsdann muss die Gesammtheit aller anderen wieder zu einem Gliede vereinigten Bestandtheile wiederholt durch einen angenommenen Werth der Unbekannten sich theilbar erweisen, wenn die Annahme richtig war. Ein Beispiel, welches Raimarus Ursus (S. 593) in einem nachgelassenen, 1601 gedruckten Werke *Arithmetica analytica vulgo Cosa* aufbewahrt hat, lautet in der verlangten Form: $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$. Ist nun $x = 3$ richtig gewählt, so kann $486 = 3 \cdot 162$ mit $-90x$ zu $3(162 - 90) = 3 \cdot 72$ vereinigt werden; $3 \cdot 72$ aber $= 3^2 \cdot 24$ vereinigt sich sodann mit $-21x^2$ zu $3^2(24 - 21) = 3^3$, welches mit x^3 übereinstimmt. Freilich gilt von diesem Verfahren in vollem Maasse, was Raimarus darüber sagt, dass es „etwan Conjectural vnd durch etzliche, biszweilen auch wol durch viele mutmassungen vnd gleichsam vorattungsweiss verrichtet wird“.

Simon Stevin's im Jahre 1585 gedruckter Band begann mit einer Schrift, die den Titel führte: *L'arithmétique contenant les computations des nombres arithmetiques ou vulgaires: aussi l'Algebre avec les equations des cinq quantitez.* Die letzten Worte geben die Grenze an, bis zu welcher das Buch sich erstreckt, bis zu Gleichungen vierten Grades, da diese aus fünf Einzelgliedern bestehen können. Darüber hinaus oder, wie Stevin sagt[2]), über Lois de Ferrare, d. h. Ludovico Ferrari, sich zu erheben, sei ihm nicht gelungen. Er kannte dessen Leistungen offenbar aus Bombelli, welchen er anführt. An Bombelli schliesst Stevin sich im Gebrauche des Wortes *potence* wie in dem von *dignites* an. In ersterer Beziehung geht aber Stevin weiter, da ausser *potence* für das Quadrat der Unbekannten auch *potence cubique*[3]) für deren dritte Potenz bei ihm vorkommt. Die Bezeichnung der Potenzen stammt bei Stevin ausgesprochenermassen[4]) aus der gleichen Quelle. Er benutzt dazu die eingeringelten Zahlen ①, ②, ③ u. s. w. Der ⓪ habe Bombelli sich nicht bedient, sie entspreche der Zahl. Auch der Begriff eines eingeringelten Bruches fehlt nicht, wenngleich Stevin ihn nicht anwendet. Er sagt ausdrücklich[5]), ein eingeringeltes $\frac{2}{3}$ würde das Symbol für die Kubikwurzel aus dem Quadrate der Unbekannten sein. Kommen mehrere Unbekannte in

[1]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 84—87. — Treutlein, Deutsche Coss, Zeitschr. Math. Phys. XXIV, Supplem. S. 99—102. — Allgem. Deutsche Biographie XIV, 705. [2]) Stevin I, 6. [3]) Ebenda I, 58. [4]) Ebenda I, 8. [5]) Ebenda I, 64.

einer Aufgabe vor, so nennt Stevin[1]) die zweite, dritte derselben *Quantite posposee seconde, tierce* und schreibt 1 sec ①, 1 ter ① u. s. w. Auch für Producte solcher Unbekannten sieht Stevin eine Bezeichnung mittels des Multiplicationsbuchstabens *M* vor, z. B.

$$3xyz^2 = 3\ ①\ M \text{ sec } ①\ M \text{ ter } ②.$$

Dividiren soll man durch den Divisionsbuchstaben *D*, z. B.

$$\frac{5x^2z^2}{y} = 5\ ②\ D \text{ sec } ①\ M \text{ ter } ②.$$

Wir kommen hier auf die Anwendung solcher eingeringelter Zahlen zurück, welche die Rangordnung der Decimalbrüche in Stevin's *Disme* andeuten. Es kann bei dem gleichzeitigen Erscheinen der Disme mit der Algebra kaum einem Zweifel unterworfen sein, dass Stevin, wenn er es auch nirgend ausdrücklich sagt, jene Stellenzeiger als die aufeinander folgenden Potenzen von $\frac{1}{10}$ sich dachte.

Hatte Bombelli ein Zeichen der Zusammengehörigkeit L ⅃ eingeführt, so führte Stevin eine aus zwei mit den gekrümmten Seiten aneinanderstossenden Klammern gebildetes Trennungszeichen[2]) ein. Für die Quadratwurzel schrieb er mit Stifel $\surd$, und nun bedeutet $\surd 9$)(②, dass das Wurzelzeichen zwar auf 9, aber nicht auf ② sich beziehen solle, dass also $3x^2$ gemeint sei. Neben diesen für die Weiterbildung algebraischer Form nicht ganz unwichtigen Dingen, zu welchen noch der Name *Multinomie algebrique*[3]) zu zählen wäre, finden wir bei Stevin auch sachlich Bemerkenswerthes.

Da erwähnt er[4]), die Summe zweier Quadratwurzeln könne der zweier anderen Quadratwurzeln nicht gleich sein, wenn die beiden ersten Radicanden theilerfremd seien, d. h. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ erfordere $a = m^2 f$ und $b = n^2 f$.

Da sagt er[5]), man könne den grössten Gemeintheiler zweier algebraischer Multinomien finden. Nonius freilich habe es nicht fertig gebracht (S. 389), aber man brauche nur das Verfahren einzuschlagen, welches bei ganzen Zahlen zum Ziele führe. Soll z. B. der grösste Gemeintheiler von $x^3 + x^2$ und $x^2 + 7x + 6$ gesucht werden, so muss man ersteren Ausdruck durch letzteren dividieren. Der Quotient ist x und $-6x^2 - 6x$ bleibt als Rest. Mit diesem Reste dividiert man in $x^2 + 7x + 6$. Der Quotient ist $-\frac{1}{6}$ und $6x + 6$ bleibt als Rest. Letzterer ist in $-6x^2 - 6x$ ohne Rest enthalten, giebt also den gesuchten Gemeintheiler. Die Frage ist, wenn auch leicht zu beantworten, keine müssige, wodurch

---

[1]) Stevin I, 7. [2]) Ebenda I, 10. [3]) Ebenda I, 7 [4]) Ebenda I, 51. [5]) Ebenda I, 56.

Stevin, wodurch vor ihm Nonius sich veranlasst fühlte, überhaupt diese Aufgabe sich zu stellen? Es handelte sich dabei offenbar um die Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Die ersten Versuche zu deren Bewältigung liefen bis zu Cardano's Buch von 1539 und Stifel's Arithmetica integra einschliesslich darauf hinaus, durch glückliches Errathen gewisser hinzuzuaddirender Ergänzungen solche Formen einander gleichwerthiger Ausdrücke hervorzubringen, welche ein Weglassen von gemeinschaftlichen Factoren gestatteten. War man nun im Stande, einen solchen gemeinschaftlichen Factor leicht aufzufinden, so mochte man wähnen, damit um einen wesentlichen Schritt in der Lehre von den höheren Gleichungen weiter gekommen zu sein.

Die Auflösung quadratischer Gleichungen beruht schliesslich auf einer auf beiden Seiten der Gleichung vorzunehmenden Ergänzung, und Stevin hat sie von diesem Gesichtspunkte aus gelehrt[1]), wenn er auch hinzusetzte, insgemein begnüge man sich damit, die schon abgeleitete Regel anzuwenden.

Bei den kubischen Gleichungen machte Stevin auf die Schwierigkeit aufmerksam, welche das Auftreten negativer Zahlen unter dem Quadratwurzelzeichen verursache[2]). Cardano habe in seiner Regula Aliza, Andere anderwärts gesucht, der Schwierigkeit Herr zu werden. Er finde es unnöthig darauf einzugehen, weil eine allgemeine Regel noch nicht gefunden sei — in unserem Berichte über die Algebra Bombelli's haben wir das Zutreffende dieser Behauptung erkannt —, Zufallerfolge verdienten aber nicht, dass man sich lange mit ihnen aufhalte.

Bei manchen Aufgaben, heisst es anderwärts[3]), gebe es auch Auflösungen durch Minus (*solutions par* —), $x^2 = 4x + 21$ werde z. B. durch $x = -3$ erfüllt.

Endlich heben wir eine näherungsweise Gleichungsauflösung hervor[4]), deren Stevin sich als seiner Erfindung rühmt, und welche jedenfalls den theoretischen Vorzug besitzt, den gesuchten Wurzelwerth allmälig in seinen einzelnen Stellen von der höchsten zur niedersten absteigend entdecken zu lassen. Sei etwa

$$x^3 = 300x + 33915024$$

aufzulösen. Setzt man nach einander $x = 1$, $x = 10$, $x = 100$, so wird jedesmal x^3 kleiner und erst bei $x = 1000$ grösser ausfallen als der Werth von $300x + 33915024$. Folglich weiss man schon, dass x zwischen 100 und 1000 liegt, mithin dreiziffrig ist. Man sucht die Ziffer der Hunderter, welche einen der Werthe 1, 2, . . . 9 haben

[1]) Stevin I, 69. [2]) Ebenda I, 71—72. [3]) Ebenda I, 77. [4]) Ebenda I, 88.

muss. Die 1 hat sich schon als zu klein gezeigt, man macht also den Versuch mit 2, 3, 4 und erkennt, dass 2, 3 zu wenig, 4 zu viel giebt, also liegt die Unbekannte zwischen 300 und 400. Die Zehner von 1 an durchprobierend ermittelt man 310, 320 als zu klein, 330 als zu gross, sodass man berechtigt ist, 32 als richtigen Anfang anzunehmen und die Einer von 1 an in Angriff zu nehmen. 321, 322, 323 geben zu wenig, 324 stimmt ganz genau und ist daher der Werth der Unbekannten. Stevin macht zwei wichtige Zusatzbemerkungen. Erstens sei es möglich, dass die Unbekannte einen ganzzahligen Werth überhaupt nicht besitze, dann solle man die folgenden Decimalstellen sich verschaffen, was genau nach dem gleichen Verfahren geschehe, welches man zur Ermittelung der höheren Stellen einschlug, und das gleiche Verfahren führe auch zum Ziele, wenn die Unbekannte kleiner als 1 sei. Zweitens komme es vor, dass man sich begnügen müsse, dem Werthe der Unbekannten unendlich nahe zu kommen, ohne ihn zu erreichen[1]), und das sei in zwei Fällen möglich, entweder bei Brüchen wie $\frac{5}{6}$, die in einen genau gleichen Decimalbruch sich nicht verwandeln lassen, oder bei Wurzelgrössen, welche irrational sind.

Stevin's Bearbeitung des Diophant haben wir hier nur so weit zu erwähnen, als wir bemerken, dass die gleichen Zeichen dort angewandt sind, welche der Algebra dienen, dass ein Gleichheitszeichen da wie dort fehlt, wiewohl Stevin bei Xylander, dessen lateinische Uebersetzung er nur weiter ins Französische übertrug[2]), ein solches hatte kennen lernen müssen.

Der grösste Algebraiker der Zeit war Vieta. Seine erste algebraische Schrift *In artem analyticam isagoge*[3]), Einleitung in die analytische Kunst, erschien 1591. Sie wollte nur einen Theil eines grösseren Werkes unter dem Namen der wiederhergestellten mathematischen Analysis oder der neuen Algebra bilden. Die Titel sämmtlicher Theile sind der Widmung vorausgeschickt, welche in schwülstigem Tone an die aus dem Geschlechte Melusinens stammende Fürstin Katharina von Rohan gerichtet ist. Wir bemerken dabei, dass überhaupt die Sitte der Zeit in Frankreich und Deutschland einer einfachen, klaren Sprache abhold war. Je mehr dem Griechischen entlehnte Neubildungen, je mehr Floskeln, je farbenreichere

---

[1]) *Il peut avenir qu'on pourra approcher infiniment au requis sans toutesfois par ceste maniere pouvoir parvenir a la parfaicte solution.* [2]) Stevin I, 102. [3]) Vieta pag. 1—12. — F. Ritter hat eine mit Anmerkungen bereicherte Uebersetzung im *Bullet. Boncompagni* I, 225—244 erscheinen lassen, welcher der Originaldruck von 1591 zu Grunde liegt.

mythologische Bilder vorkamen, für um so vollendeter galt eine Abhandlung. Man muss dies wissen, um Stevin's unübertreffliche Klarheit würdigen, um Vieta's und Anderer Unverständlichkeit verzeihen zu können. Ob jene 1591 dem Titel nach vorhandenen Schriften auch thatsächlich alle bereits druckreif waren, wissen wir nicht, wahrscheinlich ist es wohl. Dann stammen aus jener frühen Zeit die 1593 gedruckten *Effectionum geometricarum canonica recensio* (S. 584) und das *Supplementum geometriae*, ebenso die gar erst 1615 mit Beweisen versehenen *Theoremata ad angulares sectiones* (S. 608), welche selbst nur ein Auszug aus einer dreitheiligen Schrift waren[1]), von der das Meiste verloren ging. Verloren sind auch die 1591 genannten 7 ersten Bücher der Antworten auf verschiedene Fragen[2]), zu welchen offenbar als Fortsetzung das 1593 gedruckte 8. Buch (S. 586) gehörte, jedenfalls ein ungemein zu beklagender Verlust, wenn die ersten Bücher dem letzten nur halbwegs ebenbürtig waren. Die Isagoge ist, wie ihr Name es aussprechen soll, wirklich nur eine Einleitung. Nachdem die Analysis oder Zetetik als diejenige Kunst des Auffindens geschildert worden, welche von dem als bekannt angenommenen Gesuchten ausgeht, nachdem eine Reihe von beweislos einleuchtenden Sätzen (Gleiches und Gleiches durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division verbunden giebt Gleiches. Vier Grössen, von denen zwei zu einem Producte vereinigt das gleiche Product wie die beiden anderen geben, stehen in Proportion u. s. w.) zusammengestellt ist, spricht Vieta im III. Kapitel das erste und allbezügliche Gesetz der Homogeneität aus[3]). Den Griechen war dieses Gesetz ursprünglich ein selbstverständliches. Nur Längen können Längen, nur Flächen Flächen, nur Körper Körpern, nur Verhältnisse Verhältnissen verglichen werden. Später wich man von diesem Gesetze, das eine unbeabsichtigte aber zuverlässige Beglaubigung ausgesprochener Sätze mit sich führte, ab. Heron vereinigte Längen und Flächen zu einer Summe (Bd. I, S. 376), Diophant gestattete sich das Gleiche (Bd. I, S. 454). Mag sein, dass Vieta gerade beim Studium des Diophant, den er in der Isagoge selbst anführt[4]), auf das Unstatthafte aufmerksam wurde. Jedenfalls hat er zuerst als

---

[1]) *Analyse des sections angulaires distribuée en trois parties* nach Ritter's Uebersetzung. [2]) *Sept livres de différentes réponses sur des sujets mathématiques.* [3]) *Prima et perpetua lex . . . quae dicitur lex homogeneorum.* Ueber dieses Gesetz vergl. Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 9—19, wo allerdings viel mehr hinein- als herausgelesen wird. [4]) Vieta pag. 5: *Haec est λείψις Diophanto, ut adfectio adiunctionis ὕπαρξις.* Die hier vorkommenden griechischen Ausdrücke beweisen, dass Vieta den Diophant aus einem griechischen Texte kannte.

Gesetz erkannt und ausgesprochen, was meistens nur in dunklem Gefühle der Richtigkeit geübt worden war, und dieses Verdienst ist weit grösser als Mancher denken mag. Nachdem das Gesetz der Homogeneität einmal aufgestellt war, hat Vieta im IV. Kapitel seine Folgerungen daraus gezogen. Dieses Kapitel ist den Vorschriften der Logistica speciosa, *De praeceptis Logistices speciosae*, gewidmet, und damit war ein Kunstausdruck geschaffen, der fast allein von den zahllosen Neuerungen Vieta's ihn überlebte. Logistik war von Alters her Rechenkunst. Vieta unterschied zwei Gattungen derselben. Sie war *numerosa*, wenn mit Zahlen, *speciosa*, wenn mit versinnlichenden Zeichen von Raumgebilden[1]), z. B. mit Buchstaben gerechnet wurde. Die Buchstaben, lauter Initialen des lateinischen Alphabets, stellen demnach Gebilde vor, welche dem Homogeneitätsgesetze unterworfen sind. Es sind Grössen, nicht Zahlen. Auch Tartaglia hob den Unterschied zwischen Zahlen und Quantitäten hervor (S. 519). Für jene bediente er sich der Wörter *multiplicare* und *partire*, für diese gebrauchte er *ducere* und *misurare*. Aehnlich unterscheidet Vieta. Die Grundsätze von Kapitel II enthalten die Ausdrücke *multiplicare* und *dividere*, im Kapitel IV heisst es *ducere* und *adplicare* vielleicht mit Anlehnung an Tartaglia, wahrscheinlicher der Euklidausgabe des Campanus II, 2 beziehungsweise I, 44 entnommen. Das Homogeneitätsprincip hat freilich, und auch dafür liefert Kapitel IV die Belege, den rein geometrischen Untergrund längst aufgegeben. Nicht auf Mannigfaltigkeiten von 1, 2 oder 3 Abmessungen beschränkt sich die Algebra. Fast beliebig hoher Dimension können die in einer Gleichung auftretenden Glieder sein, wenn nur alle gleich hoher. Die von Vieta gelieferten Beispiele erstrecken sich bis zum *solido-solido-solidum*, d. h. bis zur 9. Potenz der behandelten Grösse, da die einzelnen Bestandtheile addirt werden, wie es von Diophant geübt wurde, und nicht multiplicirt, wie es bei den Italienern und deren Nachahmern, z. B. Stifel geschah. Die Vervielfachung wird durch das Wort *in*, die Theilung durch den Bruchstrich angedeutet. Das Produkt von $\frac{A \text{ planum}}{B}$ in $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$ ist $\frac{A \text{ planum}}{B \text{ in } G}$ in Z quadratum u. s. w. Als Zeichen der Addition und Subtraction sind $+$ und $-$ benutzt, ausserdem giebt es noch $=$ als Zeichen der Differenz zweier Grössen[2]), ohne dass man anzugeben braucht, welche von beiden die grössere sei. Im V. Kapitel kommt Vieta auf die eigentlichen Gleichungen zu reden. Die gesuchten Grössen, *magnitudines quaesititiae*, werden durch die Vocale A, E, I,

[1]) *per species seu rerum formas.* [2]) Vieta pag. 5.

O, V, Y dargestellt, die gegebenen, *datae*, durch Consonanten *B, G, D* u. s. w.[1]). Vielleicht suchte Vieta durch diese Anwendung der Vocale sich mit der Uebung von Ramus, dem damals in Frankreich hochgeschätzten Schriftsteller, in Einklang zu setzen, der die gleichen Buchstaben (S. 564) bei der Figurenbezeichnung bevorzugte. Von den Gesetzen, welche Vieta ausspricht, sei nur eines erwähnt[2]): *Antithesi aequalitatem non immutari.* Antithesis heisst nichts Anderes als das Hinüberschaffen eines Gliedes mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite, welches also als ein die Richtigkeit der Gleichung nicht Beeinträchtigendes gestattet wird. Das VI., VII., VIII. Kapitel geben zu besonderen Bemerkungen wenig Anlass. Höchstens dass aus dem letztgenannten anzuführen wäre, dass die Gleichung dazu führe, das Geheimniss der Winkeltheilung zu enthüllen, ohne desshalb Gerades mit Krummem zu vergleichen, wogegen das Homogeneitätsgesetz sich zu sträuben scheine[3]).

Unter die 1591 gleichfalls angeführten Schriften gehören *Ad Logisticen speciosam notae priores* und *posteriores.* Es ist nicht wahrscheinlich, dass eine Veröffentlichung zu Lebzeiten Vieta's stattfand, und der zweite Theil ist dann überhaupt nie bekannt geworden[4]), nur der erste ist in der Gesammtausgabe von 1646 vorhanden[5]). Man kann diese Anmerkungen zur Logistica speciosa füglich in zwei Abtheilungen trennen. Die erste Abtheilung lehrt Multiplicationen von Summen in Differenzen und Potenzerhebungen von Binomien, dann vom 25. Satze an auch Berechnung von Ausdrücken von der Gestalt $(A + B)^m + D^n (A + B)^{m-n}$. Die letztgenannten geben zur Einführung eines Wortes Gelegenheit. Im einfachsten Falle

$$(A + B)^2 + D(A + B)$$

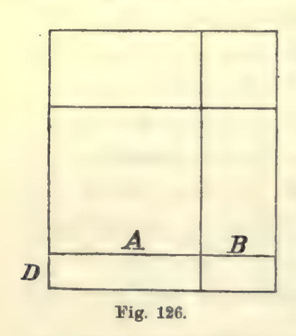


Fig. 126.

handelt es sich geometrisch gesprochen (Figur 126) um das Quadrat einer zweitheiligen Grösse, welche durch Anfügung eines Rechteckes vergrössert ist, dessen eine Seite in Gestalt jener zweitheiligen Quadratseite gegeben ist, während die andere gleichfalls gegebene Seite mit an der Bildung der Figur betheiligt ist. Vieta nennt[6]) sie offenbar aus dem hier erörterten, wenn auch bei ihm nicht ausgesprochenen Grunde *longitudo coefficiens*, und damit war das Wort Coefficient in die Wissenschaft eingeführt. Die zweite Abtheilung

[1]) Vieta pag. 8 No 5. [2]) Ebenda pag. 9 Propositio I. [3]) Ebenda pag. 12 No. 27 und 28. [4]) Ritter im *Bullet. Boncompagni* I, 245. [5]) Vieta pag. 13—41. Die französische Uebersetzung von Ritter l. c. pag. 246—276. [6]) Vieta pag. 23 und öfter.

beginnt mit dem 45. Satze und handelt von der Entstehung rationaler rechtwinkliger Dreiecke aus einander. Damit aus zwei Zahlen A, B, welche die Wurzeln des rechtwinkligen Dreiecks heissen[1]), ein solches gebildet werde, benutzt man sie als Anfangsglieder einer geometrischen Reihe, deren drittes Glied folglich $\frac{B^2}{A}$ heisst. Summe und Differenz der beiden äusseren Glieder und das doppelte mittlere Glied (in Vieta's Schreibweise: $A + \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $A = \frac{B \text{ quadrato}}{A}$, $B2$, indem der Zahlenfactor 2 dem B nachgesetzt wird) sind alsdann die drei Seiten des rationalen Dreiecks. Vervielfache man Alles mit A, damit sämmtliche Seiten auf dieselbe Benennung gebracht seien, *ut ad idem genus adplicationis latera quaeque revocentur*, so heissen die Seiten: A quadr. $+$ B quadr., A quadr. $=$ B quadr., A in B 2. Nun seien zwei rechtwinklige Dreiecke Z, B, D und X, F, G gegeben, d. h. es sei, um von jetzt an die heute gewöhnliche Schreibweise anzuwenden, $Z^2 = B^2 + D^2$, $X^2 = F^2 + G^2$. Dann ist auch $(ZX)^2 = (BG + DF)^2 + (BF - DG)^2 = (BF + DG)^2 + (BG - DF)^2$ mit zweifacher Zerlegung des Productes zweier Quadratsummen in eine neue Quadratsumme, wie sie seit Diophant (Bd. I, S. 451) bekannt war, oder es ist aus zwei Dreiecken in doppelter Art ein drittes gebildet. Statt zweier verschiedener Dreiecke kann man dasselbe Dreieck, etwa A, B, D, zweimal nehmen[2]). Das eine neue Dreieck heisst dann A^2, $2BD$, $B^2 - D^2$, und es hat die Eigenschaft, dass sein einer spitzer Winkel doppelt so gross ist, als ein spitzer Winkel des ursprünglichen Dreiecks. Vieta beweist diese Winkeleigenschaft nicht, er spricht sie nur aus; bei seiner uns aus der Auflösung der Aufgabe Van Roomen's bekannten Gewandtheit, mit trigonometrischen Functionen zu rechnen, kann aber nicht gezweifelt werden, dass sein Gedankengang etwa folgender war. Hiess im ursprünglichen Dreiecke der eine spitze Winkel α, so war $\sin\alpha = \frac{D}{A}$, $\cos\alpha = \frac{B}{A}$, $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha = \frac{2BD}{A^2}$ und also im neuen Dreiecke der Winkel 2α nachgewiesen, als dessen Cosinus $\frac{B^2 - D^2}{A^2}$ erscheint. An diesem Gedankengange ist um so weniger zu zweifeln, als Vieta der eben erörterten Aufgabe als nächste die der Bildung des Dreiecks mit dreifachem Winkel[3]) anschliesst. Durch Vervielfachung von $A^2 = B^2 + D^2$ mit $(A^2)^2 = (2BD)^2 + (B^2 - D^2)^2$ erhält er

---

[1]) Vieta pag. 33: *Triangulum rectangulum a duabus radicibus effingere.*
[2]) Ebenda pag. 36: *A duobus triangulis rectangulis aequalibus et aequiangulis tertium triangulum rectangulum constituere.* [3]) *Triangulum anguli tripli.*

$$(A^3)^2 = (B^3 - 3BD^2)^2 + (3B^2D - D^3)^2$$

und

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha$$
$$= \frac{D}{A} \cdot \frac{B^2 - D^2}{A^2} + \frac{B}{A} \cdot \frac{2BD}{A^2} = \frac{3B^2D - D^3}{A^3},$$

was wirklich für den einen spitzen Winkel des neuen, dritten Dreiecks zutrifft. Sogar zum allgemeinsten Falle erhebt sich Vieta[1]) und erkennt, dass die stets nach gleicher Vorschrift vorgenommene Bildung des n-ten Dreiecks aus dem $(n-1)$-ten und dem ersten einen spitzen Winkel $n\alpha$ entstehen lässt. Mit anderen Worten: Vieta kannte die Formeln, welche $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zusammensetzen, nur dass er D statt $\sin\alpha$ und B statt $\cos\alpha$ schrieb und die Hypotenuse des ersten Dreiecks A, die des n-ten Dreiecks A^n nannte. Die noch folgenden Sätze können, als von weitaus geringerer Wichtigkeit, übergangen werden.

Auch fünf Bücher Zetetica[2]), von welchen ein Abdruck von 1593 bekannt ist, müssen 1591 vorhanden gewesen sein. Man schildert sie am Zutreffendsten als eine Sammlung von Aufgaben, welche Diophant entlehnt oder nachgebildet sind. Als einzelnes Beispiel erwähnen wir die 2. Aufgabe des V. Buches[3]), welche drei in arithmetischer Progression stehende Quadratzahlen verlangt. Als das erste Quadrat setzt Vieta A^2, als das zweite $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, das dritte muss folglich $A^2 + 4AB + 2B^2$ heissen und möge $(D-A)^2$ sein. Diese letzte Gleichung giebt, wie ohne weitere Zwischenrechnung gesagt wird, $A = \frac{D^2 - 2B^2}{4B + 2D}$. Dann heisst es sofort weiter: die Seite des ersten Quadrates ist folglich proportional, *similis*, $D^2 - 2B^2$, die des zweiten proportional $D^2 + 2B^2 + 2BD$, die des dritten proportional $D^2 + 2B^2 + 4BD$.

Immer wieder dem gleichen Jahre 1591 gehören nach dem öfters von uns benutzten Inhaltsverzeichnisse die Abhandlungen *De aequationem recognitione et emendatione*[4]) an, welche erst 1615 aus Vieta's Nachlasse durch Anderson dem Drucke übergeben worden sind. Die Bezeichnung wechselt in diesen Abhandlungen ebenso wie der Druck. Während der eigentliche Text die Buchstabenbezeichnung in der Art durchführt, wie wir sie als Vieta's Eigenthum kennen gelernt haben (also Vocale für Unbekannte, Consonanten für Bekann-

---

[1]) Vieta pag. 37: *Consectarium generale in diductionibus triangulorum rectangulorum.* [2]) Ebenda pag. 42—81. [3]) Ebenda pag. 76: *Invenire numero tria quadrata aequo distantia intervallo.* [4]) Ebenda pag. 84—126 die erste Abhandlung: *De recognitione* und pag. 127—158 die zweite: *De emendatione.* Ihre Zusammengehörigkeit tritt in den Benennungen als Tractatus primus und Tractatus secundus hervor.

tes, den Buchstaben nachgesetzte Silben quad., cub. u. s. w. zur Bezeichnung der Potenzirung, diesen wieder nachgesetzt Zahlenfactoren) enthalten jedem Kapitelchen beigefügte Anmerkungen Zahlenbeispiele, welche ausser durch die Verschiedenheit der Typen auch dadurch sich unterscheiden, dass in ihnen die Unbekannte und ihre Potenzen durch N (numerus), Q, C mit ihnen vorausgehenden Zahlenfactoren ausgedrückt werden. Im Texte steht z. B. $Aq4$, während die Anmerkung $4Q$ enthält. Man könnte geneigt sein, diese Anmerkungen als von Anderson hinzugefügt anzunehmen, dem Vieta's Notizbücher, *Adversaria*, zur Herausgabe anvertraut worden waren, wenn nicht gerade dieser selbst in einer Vorrede, welche in die Gesammtausgabe von 1646 übergegangen ist, erklärte, sowohl die Gleichungen als die nachträglichen Beispiele[1]) hätten sämmtlich von ihm nochmals nachgerechnet werden müssen. Uns gelten desshalb also auch die Anmerkungen als von Vieta herrührend, und darin machen uns die einleitenden Worte des Herausgebers der Gesammtwerke nicht irre, „das Folgende sei, was er über die Anmerkungen Anderson's hinaus zu bemerken gefunden habe“[2]), denn wir verstehen unter diesen Anmerkungen Anderson's einen Zusatz am Schlusse der Emendatio, der ausdrücklich dessen Namen führt[3]). Aus der Recognitio heben wir nun Folgendes hervor. Vieta spricht die Aufgabe der eigentlichen Gleichungsauflösung in anderer Form aus. Nicht um die Auffindung einer Unbekannten handelt es sich, sondern um Herstellung einer aus einer gegebenen Anzahl von Gliedern bestehenden geometrischen Progression. Aehnlich war die Fragestellung schon bei italienischen Schriftstellern gewesen (S. 487), Veranlassung konnte jene mit einer arithmetischen Indexreihe verglichene Reihe der auf einander folgenden Potenzen der Unbekannten gegeben haben, welche uns wiederholt aufgefallen ist. Aber Vieta ging über seine Vorgänger weit hinaus. Die quadratische Gleichung leitet sich für ihn aus einer der drei stetigen Proportionen:

$$\begin{aligned} &:(A+B)\\ A:Z=Z&:(A-B)\\ &:(B-A) \end{aligned}$$

ab[4]), welche Z^2 als Product zweier Factoren $A(A+B)$, $A(A-B)$, $A(B-A)$ darstellt. Im letzten der drei Fälle ist die gegebene Zahl B in zwei Theile zerlegt, deren jeder als die Unbekannte be-

[1]) Vieta pag. 83: *exemplorum notae epilogisticae.* [2]) Ebenda pag. 549: *Praeter ea quae hic adnotavit Andersonus animadvertimus porro haec quae sequuntur.* [3]) Ebenda pag. 159—161. *Appendix ab Alexandro Andersono operi subnexa.* [4]) Ebenda pag. 85—86.

trachtet werden kann, und darin liegt der Grund der Zweideutigkeit solcher Aufgaben. Die kubische Gleichung stammt aus einer geometrischen Reihe von vier Gliedern[1]). Ist B das gegebene erste, A das unbekannte zweite Glied, so wird $\frac{A^2}{B}$ das dritte, $\frac{A^3}{B^2}$ das vierte Glied, und kennt man nun noch Z als Summe des zweiten und vierten Glieder, so entspricht die Aufgabe der kubischen Gleichung $A^3 = B^2 Z - B^2 A$. Aehnlich wird auch die Gleichung $A^3 - 3B^2 A = B^2 D$ einer viergliedrigen Reihe entnommen. Heisst diese Reihe a, ae, ae^2, ae^3 und ist gegeben die Summe D und das Product B^2 der beiden äussersten Glieder, so entspricht die Summe A der beiden inneren Glieder der ebengenannten Gleichung. Hier ist die Uebereinstimmung mit den erst in Erinnerung gebrachten Italienern so gross, dass zur Gewissheit wird, Vieta habe deren Schriften gekannt, was ohnedies durch Zeitfolge und Verkehrsverhältnisse schon fast ausser Zweifel gesetzt war. Grade diese Form der kubischen Gleichung bietet aber Veranlassung, einmal $x^3 - 300x = 432$ und dann $300x - x^3 = 432$ ins Auge zu fasssen[2]), deren erste durch $x = 18$, die zweite durch $x = 9 \pm \sqrt{57}$ erfüllt wird. Vieta vereinigt nicht alle drei Auflösungen, indem er der Gleichung $300x - x^3 = 432$ auch die Wurzel $x = -18$ zuspricht, weil er hier wie anderwärts negative Wurzeln nicht anerkennt. Im Uebrigen erscheint hier bei $B > \frac{1}{2}D$ der irreductible Fall, und Vieta verweist für dessen Klarstellung ausdrücklich auf die Lehre von der Winkeltheilung[3]). Damit ist die aus der Schrift über die Van Roomen'sche Aufgabe schon in hohem Grade wahrscheinliche Annahme sicher gestellt, dass Vieta zur Lösung des genannten Falles von dem trigonometrischen Satze $\cos a^3 - \frac{3}{4}\cos a = \frac{1}{4}\cos 3a$ ausging, und zu dem gleichen Ergebnisse führte (S. 585) ein genaueres Studium der 1591 schon vorhandenen, 1593 gedruckten Schrift Supplementum Geometricum. Nun folgen, immer noch in der Recognitio, Umformungen, *transformationes*. Zwischen zwei Unbekannten A, E können die mannigfachsten Beziehungen obwalten. Die erstere A kann ersetzt werden durch $E - B$, durch $B - E$, durch $B + E$, durch $\frac{E}{B}$, durch $\frac{B}{E}$; es kann zwischen E^2 und AE die Differenz, es kann deren Summe gegeben sein und sonst jede beliebige für zweckmässig erachtete Verbindung[4]), immer wird an Stelle der Gleichung

---

[1]) Vieta pag. 86. [2]) Ebenda pag. 91. [3]) *At elegantius et praestantius ex analyticis angularium sectionum huiusmodi aequalitatum constitutio eruitur.* [4]) Vieta pag. 92: *Postremo per modos compositos et excogitanda ab artifice et tentanda, quae suo fini magis inservire coniiciet, figmenta.*

in A eine solche in E treten, und kennt man die Wurzel der einen, so ist die der anderen mitgefunden. Vieta kommt in höchst eigenthümlicher Fassung auf die Vielheit der Wurzeln einer Gleichung zu reden[1]). Er frägt nämlich nach den Beziehungen zwischen solchen Gleichungen, welche nur darin sich unterscheiden, dass die Unbekannte das eine Mal A, das andere Mal E sei, während alle bekannten Grössen unverändert auftreten. Alsdann könne man, sagt er, diese bekannten Grössen durch die A und E darstellen, und er versteht darunter die Abhängigkeit der Coefficienten einer Gleichung von ihren Wurzeln. $\overline{F+G}$ in $A - Aq$ aequari F in G sei z. B. die Gleichung, deren Wurzeln F und G sind. Auch hier sind aber nur positive Wurzeln gemeint, und einer Möglichkeit negativer Wurzeln geht Vieta bei quadratischen Gleichungen ebenso aus dem Wege, wie er es bei kubischen Gleichungen that. Er sagt[2]), wenn $A^2 + BA = Z^2$ und $E^2 - BE = Z^2$, so müsse $B = E - A$, $Z^2 = EA$ sein. Die Abhängigkeit der Coefficienten von den positiven Wurzeln bei Gleichungen höherer Grade ist Vieta gleichfalls nicht entgangen, doch hat er diese erst in der Emendatio erörtert, deren Besprechung wir uns jetzt zuwenden. Die Verbesserung einer Gleichung besteht in der Anwendung von Mitteln, welche die Recognitio bereits kennen lehrte. Vieta giebt diesen Mitteln einzelne Namen, welche hier erwähnt werden mögen, um zu rechtfertigen, was früher von Vieta's Benennungssucht bemerkt wurde. *Expurgatio per uncias*[3]) ist die Wegschaffung des zweithöchsten Gliedes in der Gleichung n-ten Grades durch die Einsetzung von $x = y - \frac{a}{n}$, wie man in den Zeichen neuerer Algebra, deren wir von hier an uns zu bedienen gedenken, schreiben würde. Insbesondere bei quadratischen Gleichungen in ihren sämmtlichen drei althergebrachten Formen wird die Anwendung gelehrt und damit jede derselben in eine reinquadratische Gleichung umgeformt, mithin gelöst. Auch bei der kubischen Gleichung ist die Anwendung bei allen zahlreichen Einzelfällen, welche sich unterscheiden lassen, vorgenommen. *Transmutatio* πρῶτον — ἔσχατον[4]) setzt $x = \frac{k}{y}$ und schafft dadurch ebensowohl Minuszeichen als irrationale Gleichungsconstanten weg. Sei $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ vorgelegt. Mittels $x = \frac{\sqrt[3]{80}}{y}$ gelangt man zu $y^4 + 8y^3 = 80$. *Anastrophe*[5]) findet ihre Anwendung bei Gleichungen ungeraden Grades und besteht in Folgendem: $ax - x^3 = k$ lässt die Folgerung $x^3 + y^3 = ax + (y^3 - k)$

---

[1]) Vieta pag. 106 sqq. [2]) Ebenda pag. 123—124. [3]) Ebenda pag. 127—132. [4]) Ebenda pag. 132—134. [5]) Ebenda pag. 134—138.

zu. Wäre nun $y^3 - k = ay$ oder $y^3 - ay = k$, so könnte jene gefolgerte Gleichung durch $x + y$ dividirt werden und gäbe den Quotienten $x^2 - yx + y^2 = a$, d. h. eine nach x quadratische Gleichung, welche leicht gelöst ist, wenn man y kennt. Die Umwendung bestand also in der Zurückführung von $ax - x^3 = k$ auf $y^3 - ay = k$. Aehnlich verwandelt man $ax^2 - x^3 = k$. Zunächst schreibt man $x^3 + y^3 = ax^2 - (k - y^3)$; dann nimmt man an, es sei $k - y^3 = ay^2$, also $y^3 + ay^2 = k$ der Lösung unterbreitet; zuletzt wird wieder mit $x + y$ in die dazu vorbereitete Gleichung dividirt, und es entsteht neuerdings eine quadratische Gleichung $x^2 - yx + y^2 = ax - ay$. *Isomoeria*[1]) heisst die Umwandlung in Folge von $x = \frac{y}{a}$ oder von $x = ay$, welche entweder Brüche fortschafft oder Gleichungsconstanten herabsetzt. $x^3 + \frac{11}{12}x = \frac{57}{12}$ verwandelt sich durch $x = \frac{y}{12}$ in $y^3 + 132y = 8208$, während $x^3 + 12x^2 + 8x = 2280$ durch $x = 2y$ in $y^3 + 6y^2 + 2y = 285$ übergeht. Dann kommt noch *Climactica Paraperosis*[2]), welche das Rationalmachen einzelner Coefficienten durch Potenzirung bezweckt, worauf der Grad der neuen Gleichung dadurch wieder herabgesetzt wird, dass man eine Potenz der Unbekannten als neue Unbekannte wählt. Nach diesen fünf Verbesserungsverfahren wendet sich Vieta zur Gleichung 4. Grades, die er auf eine solche 3. Grades zurückführt[3]). Schält man aus den behandelten Einzelfällen den gemeinsamen Gedanken heraus, so zeigt sich eine Verwandtschaft mit Ferrari's Verfahren (S. 509), insofern die vom kubischen Gliede befreite Gleichung so umgewandelt wird, dass eine Quadratwurzelausziehung thunlich ist, aber volle Uebereinstimmung ist nicht vorhanden. Vieta schliesst nämlich von $x^4 + ax^2 + bx = c$ auf $x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + c - ax^2 - bx$ oder

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = (y^2 - a)\,x^2 - bx + \left(\frac{1}{4}y^4 + c\right).$$

Die Quadratwurzelausziehung rechts ist möglich, wenn

$$4\,(y^2 - a)\left(\frac{1}{4}y^4 + c\right) = b^2 \text{ oder } y^6 - ay^4 + 4\,cy^2 = 4\,ac + b^2,$$

beziehungsweise bei $y^2 = z$, wenn $z^3 - az^2 + 4cz = 4ac + b^2$. So ist Vieta zu der Nothwendigkeit gelangt, die kubische Gleichung aufzulösen, und er schlägt dabei einen ihm eigenthümlichen Weg ein[4]), welcher um so geistreicher erscheint, je gewisser wir (S. 636) behaupten konnten, dass Vieta mit den Arbeiten seiner italienischen Vorgänger bekannt gewesen sein muss. Sei $x^3 + 3ax = 2b$, so ist

---

[1]) Vieta pag. 138—139. [2]) Ebenda pag. 140. [3]) Ebenda pag. 140—148. [4] Ebenda pag. 149—156.

$y^2 + xy = a$ zu setzen, also $x = \frac{a - y^2}{y}$, wodurch die gegebene Gleichung in die nach y^3 quadratische Form $y^6 + 2by^3 = a^3$ übergeht. Wie kam Vieta zu dieser Substitution? Er sagt es nicht, aber es ist, glauben wir, gelungen[1]), seinen Gedankengang herzustellen. Er mag $x^3 + 3ax = x(x^2 + 3a)$ gesetzt und an seine Anastrophe gedacht haben, d. h. er wollte den einen Factor als Differenz $z - k$, den anderen als $z^2 + kz + k^2$ herstellen, damit als Product die Differenz $z^3 - k^3$ auftrete, auf welche Tartaglia's Verse schon hinwiesen (S. 488). Ist aber $x = z - k$, so ist $x^2 + 3a = z^2 - 2kz + k^2 + 3a$, und dieses wird zu $z^2 + kz + k^2$, wenn $z = \frac{a}{k}$, d. h. $x = \frac{a}{k} - k = \frac{a - k^2}{k}$. Nun war bei dieser Annahme die Unbekannte ganz verloren gegangen. Vieta versuchte, ob $k = y$ gesetzt deren Stelle einnehmen könne, und das Gelingen des Versuchs bildete die neue Auflösung. Vieta giebt nun noch eine Anzahl von Betrachtungen, welche auf besonders geformte Coefficienten, auf Rationalität oder Irrationalität der Gleichungswurzel u. s. w. sich beziehen und schliesst die Abhandlung mit einem *Collectio quarta* überschriebenen Kapitel[2]), welches den Zusammenhang zwischen den positiven Wurzeln einer Gleichung und deren Coefficienten vollständig enthüllt, welcher in der Recognitio erst angedeutet war. Die Gleichungen 2., 3., 4., 5. Grades werden vorgeführt: $x = a$, $x = b$ seien die zwei Wurzeln von

$$(a + b)x - x^2 = ab;$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$ seien die drei Wurzeln von

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc;$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$ seien die vier Wurzeln von

$$\begin{aligned}&(abc + abd + acd + bcd)x\\ &- (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2\\ &+ (a + b + c + d)x^3 - x^4 = abcd;\end{aligned}$$

$x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$, $x = e$ sind die fünf Wurzeln von

$$\begin{aligned}&x^5 - (a + b + c + d + e)x^4\\ &+ (ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de)x^3\\ &- (abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde)x^2\\ &+ (abcd + abce + abde + acde + bcde)x = abcde,\end{aligned}$$

und damit wolle er die Abhandlung krönen; er habe anderwärts ausführlich davon gehandelt[3]). Wo diese ausführliche Behandlung stattfand, ist durchaus unbekannt; wir wagen es kaum, unsere Leser an

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 59—60.
[2]) Vieta pag. 158. [3]) *Atque haec elegans et perpulchrae speculationis sylloge, tractavi alioquin effuso, finem aliquem et Coronidem tandem imposito.*

die verlorenen *Notae posteriores ad Logisticen speciosam* denken zu lassen. Auffallen könnte der Wechsel der Anordnung in den vier Gleichungen. Beim 2. und 4. Grade beginnt das Gleichungspolynom mit der ersten, beim 3. und 5. Grade mit der höchsten Potenz der Unbekannten. Der Grund davon liegt auf der Hand. Vieta will die Gleichungsconstante immer positiv und will auch das Gleichungspolynom immer mit einem positiven Gliede anfangen lassen.

Wir sind bei der letzten Abhandlung Vieta's angelangt: *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione*[1]. Auch sie steht im Bande von 1591 als eine Abtheilung der Algebra vorn aufgezeichnet, aber auch sie ist erst wesentlich später gedruckt. Ghetaldi hat 1600 in Paris die Herausgabe besorgt[2]. Zuerst ist die Auflösung von reinen Gleichungen vollzogen[3], wozu es selbstverständlich nur Wurzelausziehungen bedarf. Vieta zieht solche Wurzeln bis zur sechsten, wobei die Binomialcoefficienten der betreffenden Potenz als bekannt vorausgesetzt sind; langwierige Rechnungen, deren Unverlässlichkeit es geradezu zu einer Lebensfrage der Rechenkunst machte, bald ein anderes sie ersetzendes Mittel zu ersinnen. Der weit umfassendere zweite Abschnitt[4] handelt von den unreinen Gleichungen, welche in näherungsweiser Auflösung nach einem der Wurzelausziehung verwandten Verfahren behandelt werden. Es ist ein Verfahren, welches zwar mit dem Grade der Gleichung sich ändert, mithin als ein vollkommen einheitliches nicht erachtet werden kann; als weiterer Mangel ist stets die Auffindung nur einer, und zwar positiven Wurzel angestrebt, aber immerhin ist der Grundgedanke ein bleibender und ein weit vollkommenerer als der, dessen Erfinder Stevin war. Sei die quadratische Gleichung $x^2 + cx = a$ zu lösen, welche durch die Wurzel $x = x_1 + x_2 + x_3$ erfüllt werde, deren einzelne Bestandtheile Ziffern von aufeinanderfolgendem Stellenrange bedeuten sollen. Die Gleichung nimmt durch Einsetzung dieses Werthes die Gestalt an:

$$\begin{aligned} a &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + cx_1 + cx_2 + cx_3 \\ &= x_1^2 + cx_1 + (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 + \big(2(x_1 + x_2) + c\big)x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Man sucht zuerst x_1, was verhältnissmässig leicht ist, bildet alsdann $a - x_1^2 - cx_1$ und sucht mittels Division durch $2x_1 + c$ die nächste Stelle x_2 zu ermitteln u. s. w. Wir wollen Vieta's Beispiel

$$x^2 + 7x = 60750$$

prüfen[5]. Hier ist $x_1 = 200$. Dann ist $60750 - 41400 = 19350$ durch $2x_1 + 7 = 407$ zu dividiren, wodurch

[1] Vieta pag. 163—228. [2] Ebenda pag. 550. [3] Ebenda pag. 163—172. [4] Ebenda pag. 173—228. [5] Ebenda pag. 174—175.

$$x_2 = 40, \quad (2x_1 + c)x_2 + x_2^2 = 17880$$

entsteht, und der nächste Rest ist $19350 - 17880 = 1470$. Der weitere Divisor ist $2(x_1 + x_2) + c = 487$, der Quotient also $x_3 = 3$. Nun lässt $\big(2(x_1 + x_2) + c\big)x_3 + x_3^2 = 1470$ den Rest 0 erscheinen, folglich ist $x = 243$. Bei einer Gleichung dritten Grades $x^3 + cx = a$, deren Wurzel wieder als $x = x_1 + x_2 + x_3$ gedacht ist, findet sich durch Einsetzung dieses Werthes und leichte Umformung

$$a = x_1^3 + cx_1 + (3x_1^2 + c)x_2 + (3x_1 + x_2)x_2^2 + \big(3(x_1 + x_2)^2 + c\big)x_3 + \big(3(x_1 + x_2) + x_3\big)x_3^2$$

und die Anwendung[1]) auf $x^3 + 30x = 14356197$ liefert abermals $x = 243$. Zur Auflösung von $x^3 + cx^2 = a$ führt die Formel[2])

$$a = x_1^3 + cx_1^2 + (3x_1^2 + 2cx_1)x_2 + (3x_1 + x_2 + c)x_2^2 + \big(3(x_1 + x_2)^2 + 2c(x_1 + x_2)\big)x_3 + \big(3(x_1 + x_2) + x_3 + c\big)x_3^2.$$

Wir begnügen uns mit dieser Angabe und mit der Bemerkung, dass Vieta als so unerschrockener Rechner sich bewährt, dass er an die Gleichung $x^6 + 6000x = 191246976$ sich wagt[3]). Auch Fälle mit negativem x werden dann untersucht, wie[4]) $x^2 - 240x = 484$ mit der Wurzel $x = 242$ u. s. w.

Den Leistungen eines Vieta gegenüber, welche seit 1591 zur Veröffentlichung vorbereitet, theilweise seit eben jener Zeit veröffentlicht worden sind, erscheint doppelt dürftig, was im letzten Jahrzehnt des XVI. Jahrhunderts in Deutschland unter dem Namen Algebra gedruckt werden konnte. Wir müssen dahin die (S. 612) im Vorbeigehen erwähnte, 1592 gedruckte Algebra von Ramus zählen, für welche vielleicht mit mehr Recht Lazarus Schoner verantwortlich zu machen ist, dahin auch ein Rechenbuch von Andreas Helmreich[5]) von Eissfelde, Rechenmeister und Visirer zu Halle, welches 1595 die Presse verliess. Wir bemerken, dass Ramus die unbekannte Grösse durch l als Anfangsbuchstaben von *latus* bezeichnet. Helmreich und sein Buch würden wir der verdienten Vergessenheit überlassen, wenn es nicht eine eigenthümliche Uebereinstimmung mit der (S. 612) gleichfalls erwähnten Göttinger Handschrift von 1545—1548 zeigte, welche einen immerhin beachtenswerthen Gegenstand betrifft. Bei Helmreich findet sich eine geschichtlich sein sollende Notiz von einem Algebras zu Ulem, dem grossen Geometer in Egypten zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Präceptor Euklid's des

---

[1]) Vieta pag. 177—178. [2]) Ebenda pag. 180. Vieta's Beispiel ist $x^3 + 30x^2 = 86220288$. [3]) Ebenda pag. 193. [4]) Ebenda pag. 197. [5]) Kästner I, 147—149.

Fürsten von Megarien und dergleichen tolles Zeug noch mehr. Genau derselbe Wust eröffnet als Prolog jene Handschrift, nur noch etwas ausführlicher. Auch eine noch ältere, auf das XIV. bis XV. Jahrhundert geschätzte Handschrift in Dresden[1]) enthält ähnlichen Wust. Da soll das Buch arabisch verfasst sein zur Zeit Alexander des Grossen, von diesem ins Indische, von Archimed ins Griechische, von Appulejus ins Lateinische übersetzt sein. Die Anfangsworte der Göttinger Handschrift lauten: *Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum*, und das Sonderbarste dabei ist, dass dieses Ylem, wie es bei dem Einen, Ulem, wie es bei dem Anderen heisst, eine Verketzerung eines arabischen Wortes, welches Leḣren bedeutet, sehr ähneln soll, wie Sprachkundige uns versichern. Hier könnte also die Erinnerung, wenn nicht gar die mittelbare Erhaltung einer sonst nicht näher bekannten arabischen Algebra vorhanden sein.

Dem gewiss gerechten Bedauern über die Drucklegung so unbedeutender Leistungen in Deutschland könnte ein mit der Literatur geringen Gehaltes in anderen Ländern genauer bekannter Leser vielleicht ein Wort des Trostes entgegensetzen, es sei auch dort die Druckerschwärze nicht selten missbraucht worden. Wir begnügen uns mit dem jedenfalls angenehmeren Gefühle, zum Schlusse des Abschnittes auch noch Männer nennen zu können, welche in Deutschland sich wirkliche Verdienste um die Algebra erworben haben: Joost Bürgi, Pitiscus und Raimarus Ursus. Bürgi[2]) kam zu den algebraischen Arbeiten bei Berechnung einer genauen Sinustabelle, die selbst einen doppelten Zweck erfüllen sollte. Sie sollte einmal da dienen, wo in Folge trigonometrisch behandelter Aufgaben Sinusse vorkamen, sie sollte zweitens bei prosthaphäretischen Multiplicationen in Anwendung treten. Es ist (S. 454) gezeigt worden, worin dieses Verfahren bestand, und (S. 597) dass es Werner zugeschrieben worden ist. Damit fällt die Erzählung, welche Raimarus Ursus entstammt[3]). Der eigentliche Erfinder wäre darnach Paul Wittich aus Breslau, der um 1582 bei Tycho Brahe auf der Insel Hveen war und dort, vielleicht mit Tycho gemeinsam, das Verfahren ersann und übte. Als er etwa 1584 nach Kassel kam, habe er es ohne Beweis Bürgi mitgetheilt, der nun selbst einen Beweis fand, dabei die Fruchtbarkeit des Satzes erkannte und ihn erweiterte. Wittich's Satz,

---

[1]) Codex Dresdensis C. 405. Curtze brieflich. [2]) Vergl. einen Auszug aus den in Pulkowa aufbewahrten Bürgi'schen Papieren von Rud. Wolf in dessen Astronomischen Mittheilungen Nr. XXXI (Zürich 1872). [3]) Rud. Wolf, Astron. Mittheilungen Nr. XXXI S. 10—11 und Nr. XXXII S. 55—67.

den er sehr wohl selbständig nacherfunden haben kann, war vermuthlich der folgende:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(90^0 - \alpha + \beta) - \sin(90^0 - \alpha - \beta)]$$

d. h.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

unter der Voraussetzung $\alpha + \beta < 90^0$, und Bürgi's Erweiterung liess $\alpha + \beta > 90^0$ zu, so dass alsdann

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(90^0 - \alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta - 90^0)].$$

Gegenwärtig ist dieses wegen $\sin A = -\sin(-A)$ sofort einleuchtend und bedarf keines neuen Beweises. In den achtziger Jahren des XVI. Jahrhunderts war das noch wesentlich anders, und jede Formel musste besonders entdeckt werden. Wir erinnern nur an die noch anderen, wenn auch prosthaphäretischen Formeln sehr nahe verwandten Gleichungen des Rhäticus (S. 602). Um so überraschender ist eine weitere Anwendung, welche Bürgi von dem Gedanken der Prosthaphäresis machte, und die in wiederholter Benutzung desselben unter wahrscheinlich erstmaliger Einführung eines Hilfswinkels besteht. Die Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

verwandelte er durch $\sin b \cdot \sin c = \frac{1}{2}[\cos(b - c) - \cos(b + c)] = \cos x$ in die nur Additionen erfordernde Gestalt

$$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(b - c) + \cos(b + c) + \cos(x - A) + \cos(x + A)].$$

Ein gewisser Jacob Curtius scheint dann Clavius von der prosthaphäretischen Methode Kenntniss gegeben zu haben, der selbst wiederum an Tycho darüber schrieb. Andere erhoben gleichfalls Ansprüche auf die Urheberschaft der damals wichtigen Methode, aber ohne dass dieselben gerechtfertigt erscheinen. Jedenfalls war also Bürgi's Augenmerk auf die Herstellung einer genauen Sinustafel gerichtet, und dazu musste er in geometrische Untersuchungen eintreten, welche ihm Gleichungen zwischen einer Sehne und der Sehne des n-ten Theils ihres Bogens verschafften. Bei $n = 2$ war das Quadrat der Sehne $4x^2 - x^4$. Bei $n = 3$ war die Sehne $3x - x^3$. Bei $n = 4$ war das Quadrat der Sehne $16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8$, wofür Bürgi $\overset{\text{II}}{16} - \overset{\text{IV}}{20} + \overset{\text{VI}}{8} - \overset{\text{VIII}}{1}$ schrieb, und ähnliche Gleichungen leitete er ab bis zu $n = 20$. Die Schreibweise, welche wir eben als die Bürgi's bezeichneten[1]), und welche wiederholt in dessen Papieren älteren

[1]) Rud. Wolf, Astronom. Mittheilungen Nr. XXXI S. 18.

Datums vorkommt, aus einer Zeit, in welcher Bürgi noch nicht mit Kepler bekannt war, ähnelt der von Bombelli sowie der von Stevin, doch dürfen wir desshalb die Selbständigkeit Bürgi's hier so wenig anzweifeln, als bei der Erfindung der Decimalbrüche (S. 617). Wir haben das frühe Datum betont, zu welchem Bürgi seiner Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten sich bediente, weil damit ein Widerspruch, wenn nicht erklärt, doch unwirksam gemacht wird, der in einem Ausspruche Kepler's enthalten ist. Im I. Buche der 1619 gedruckten *Harmonice mundi* setzt Kepler mit ausdrücklicher Berufung auf Bürgi die Gleichung auseinander, welche die Seite des regelmässigen Sehnensiebenecks im Kreise vom Halbmesser 1 bestimmen lasse. Bürgi, sagt er[1]), schreibe $1R$, $1\mathfrak{z}$, $1c$, $1\mathfrak{z}\mathfrak{z}$, $1\mathfrak{z}c$ u. s. w. und dann fährt er fort: *quod nos commodius signabimus per apices sic*, was ich bequemer durch Gipfelzahlen bezeichnen will, nämlich so

$$1,\ 1^{\mathrm{I}},\ 1^{\mathrm{II}},\ 1^{\mathrm{III}},\ 1^{\mathrm{IV}},\ 1^{\mathrm{V}},\ 1^{\mathrm{VI}},\ 1^{\mathrm{VII}} \text{ etc.}$$

Man wird darnach annehmen müssen, dass Bürgi in seiner Schreibweise wechselte, und dass er gerade an der hier von Kepler erwähnten Stelle sich der althergebrachten Bezeichnungen bediente, welche dann Kepler durch diejenigen ersetzte, von denen er wusste, dass Bürgi sich ihrer meistens zu bedienen pflegte. Dass er letzteres nicht durch eine besondere Bemerkung hervorhob, mag darin seinen Grund gehabt haben, dass er der Sache keine übermässige Wichtigkeit beilegte und sich keineswegs eine Erfindung zuschreiben, sondern eine getroffene Abänderung entschuldigen wollte. Die Stelle des Kepler'schen Werkes lehrt in ihrer Fortsetzung noch zwei hochwichtige Dinge kennen, welche als Bürgi's Eigenthum erscheinen. Die betreffende Gleichung der Siebenecksseite, heisst es nämlich weiter, sei die folgende: *figurae nihili aeque valent quantitates hae*

$$7^{\mathrm{I}} - 14^{\mathrm{III}} + 7^{\mathrm{V}} - 1^{\mathrm{VII}} \text{ vel } 7 - 14^{\mathrm{II}} + 7^{\mathrm{IV}} - 1^{\mathrm{VI}}.$$

Prodit autem illi ex aequatione, quam iuvat mechanice, valor radicis non unus, sed in quinquangulo duo, in septangulo tres, in nonangulo quatuor et sic consequenter. Bürgi hat darnach mit vollem Bewusstsein erstens die Gleichung auf Null gebracht, zweitens erkannt, dass unter Benutzung derselben Theilpunkte der Kreisperipherie als Eckpunkten 2 Fünfecke, 3 Siebenecke, 4 Neunecke u. s. w., allgemein n Vielecke von $2n + 1$ Seiten möglich seien, wenn man ausser dem convexen Vielecke auch die Sternvielecke verschiedener Ordnung in Betracht ziehe, und dass die Seiten der letzteren Vielecke die weiteren Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung seien. Wir

---

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) V, 104.

haben gesagt, dass Bürgi Gleichungen zwischen den Sehnen des einfachen und des n-fachen Bogens bis zu $n = 20$ abgeleitet habe. Er hat sie auch in Form einer Tabelle zusammengestellt, deren beliebige Ausdehnung möglich sei. Um die Sehne von 4 Winkelsecunden zu erhalten, müsse man erwägen, dass

$$360^0 = 360 \cdot 60 \cdot 60 = 1296000''$$

das 324000-fache von 4″ sei, und müsse die Tafel so weit verlängern. „Ich will Dirs aber nit rathen diss zu besorgen, Du möchtest das Nachtmahl darüber versäumen“ meint er dabei und fährt fort, man könne, wegen $324000 = 2^5 . 3^4 . 5^3$, sich etwas leichter die nothwendige Gleichung verschaffen, indem man 5 Verdoppelungen des Bogens, 4 Verdreifachungen, 3 Verfünffachungen nach einander vornehme. Bürgi war also, und zwar muthmasslich gleichfalls selbständig, zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt wie Van Roomen und Vieta jeder für sich (S. 606). Die Frage, welche uns gegenwärtig die bedeutsamste ist, richtet sich darauf, wie Bürgi die einmal aufgestellten Gleichungen von theilweise sehr hohem Grade zur näherungsweisen Auflösung brachte. Bei der Dreitheilung kam es, wenn x die Sehne des einfachen, 1 die Sehne des dreifachen Bogens darstellte, auf die Gleichung $1 = 3x - x^3$ an und dabei insbesondere auf die Auffindung einer Verbesserung Δx_1, nachdem ein Näherungswerth x_1 einmal gefunden war. Die Einsetzung von $x = x_1 + \Delta x_1$ in $1 = 3x - x^3$ liefert

$$\begin{aligned} 3x_1^2 . \Delta x_1 + 3x_1 . \Delta x_1^2 + \Delta x_1^3 - 3\Delta x_1 &= 3x_1 - x_1^3 - 1 \\ &= (3 - x_1^2)\, x_1 - 1 \end{aligned}$$

und daraus $\Delta x_1 = \frac{(3 - x_1^2)\, x_1 - 1}{2x_1^2 + (3x_1 + \Delta x_1)\, \Delta x_1 - (3 - x_1^2)}$. Wir haben gewiss nicht erst zu sagen, dass Bürgi keine auch nur ähnliche Entwickelung vornimmt, Thatsache ist aber, dass er bei der wirklichen Rechnung nur den im Nenner auftretenden Theil $(3x_1 + \Delta x_1)\, \Delta x_1$ durch $2x_1 . 10^n$ ersetzt, wo n die Stellung der gesuchten Verbesserung bestimmt, beziehungsweise den Rang derjenigen decadischen Einheit ergiebt, welche grösser ist als die Verbesserung. Er setzt nämlich $x_1 = 1$ und gleichzeitig $n = 0$, so wird $\Delta x_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$ und $x_1 + \Delta x_1 = x_2 = 1{,}5$. Jetzt wird $n = -1$ und

$$\Delta x_2 = \frac{(3 - 1{,}5^2)\, 1{,}5 - 1}{2 \cdot 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{10} - (3 - 1{,}5^2)} = \frac{0{,}125}{4{,}05} > 0{,}03.$$

Man wird daher $\Delta x_2 = 0{,}03$, $x_2 + \Delta x_2 = x_3 = 1{,}53$, $n = -2$ setzen müssen, und das ist es, was Bürgi thut! Bei höherem Grade der Gleichung rechnet Bürgi nach einer verfeinerten Methode

des doppelten falschen Ansatzes, auf welche auch Cardano's goldene Regel sich gründete (S. 506). Der Auszug aus der Pulkowaer Handschrift, welchem wir folgen, giebt als Beispiel Bürgi's Behandlung der Neunecksgleichung $9 - 30x^2 + 27x^4 - 9x^6 + x^8 = 0$. Durch graphische Versuche wird gefunden, dass $0{,}68 < x < 0{,}69$, d. h. dass eine Länge von 0,68 des Halbmessers eines Kreises in den Zirkel genommen mehr als 9 Mal im Umkreise sich auftragen lässt, während 0,69 bei gleichem Versuche über den Ausgangspunkt hinaustrifft. Jetzt beginnt für Bürgi die Rechnung und indem er für x die beiden genannten Werthe in die Gleichung einsetzt, findet er selbstverständlich als Summe des Gleichungspolynoms nicht 0, sondern $+ 0{,}0569$ bei $x = 0{,}68$ und $- 0{,}0828$ bei $x = 0{,}69$. Einer Zunahme von x um 0,01 entspricht eine Abnahme des Gleichungspolynoms von 0,1397. Damit 0 entstände, müsste die Abnahme 0,0569 betragen, Bürgi setzt desshalb in Proportion $0{,}1397 : 0{,}0569 = 0{,}01 : \Delta x$ mit $\Delta x = 0{,}0040$. Behufs einer zweiten Rechnung wird nun $x = 0{,}6840$ und $x = 0{,}6841$ eingesetzt. Die hier auftretenden Fehler sind $+ 0{,}00056410$ bei $x = 0{,}6840$ und $- 0{,}00004029$ bei $x = 0{,}6841$. Aus ihnen folgt die Proportion

$$0{,}00140012 : 0{,}00056410 = 0{,}0001 : \Delta x \text{ mit } \Delta x = 0{,}00004029,$$

und folglich ist in sehr bedeutender Annäherung $x = 0{,}68404029$ zu setzen.

Die gleiche Aufgabe der Auffindung von Sehnen einfacher Bögen aus denen der n-fachen Bögen mit Hilfe von zwischen diesen Strecken obwaltenden Gleichungen höherer Grade hat Pitiscus im zweiten Buche seiner Trigonometrie von 1612 erklärtermassen im Sinne Bürgi's (S. 619) gelöst[1]). Die nach der Regel des doppelten falschen Ansatzes geführten Rechnungen stimmen auch vollständig mit Bürgi's Gedankengange überein. Pitiscus will z. B. aus der Sehne von 30°, welche 5176381 zur Länge hat, die von 10° berechnen. Die Gleichung heisst hier $a = 3x - x^3$, wo a die bekannte Sehne bedeutet[2]). Aus ihr folgt $x = \frac{a}{3} + \frac{x^3}{3}$ oder $x > \frac{a}{3}$. Nun ist $\frac{a}{3} = 1725460$, und etwas grössere Zahlenwerthe wären 1730000, 1740000, 1750000. Die Annahme $x = 1730000$ giebt $3x - x^3 = 5138223$ oder 38158 zu wenig. Die Annahme $x = 1740000$ giebt $3x - x^3 = 5167320$ oder 9061 zu wenig. Nun wird nach den Regeln des doppelten falschen Ansatzes $1740000 \cdot 38158 - 1730000 \cdot 9061 = 50719390000$ durch $38158 - 9061 = 29097$ dividirt, wodurch der Quotient 1743114

---

[1]) Pitiscus, *Trigonometria* (1612) pag. 44: *Adhuc aliter, per subtensas et per Algebram ex mente Iusti Byrgii (Algebram qui nescit, Algebraica transiliat, hic et per totum reliquum librum. Non enim necessitati, sed tantum curiositati haec data sunt).* [2]) Ebenda pag. 51—53.

sich ergiebt, und dieser dient als neuer Näherungswerth. Setzt man ihn in $3x - x^3$ ein, so entsteht 5176378 oder 3 zu wenig. Richtig muss demnach ein x sein, welches um ein Geringes grösser ist als 1743114. Der Versuch zeigt, dass 1743115 bereits zu gross ist, dass also x zwischen den beiden angegebenen Zahlen liegt, welche ganzzahlig geschrieben ebenso wie der Zahlenwerth von a als Theile des zu 10000000 angesetzten Halbmessers verstanden werden müssen. Die Zwischenrechnungen sind bei Pitiscus nicht ausführlicher als hier in unserem Berichte mitgetheilt. Algebraisch nennt Pitiscus folgende Behandlung z. B. der Gleichung $(10000000)^2 = 4x^2 - x^4$, welche x als Sehne von 30° enthält, wenn die Sehne von 60° oder der Halbmesser als 10000000 gegeben ist[1]). Die durch $x^2 = y$ umgeformte Gleichung $4y = 10^{14} + y^2$ lässt erkennen, dass man 4 als Divisor des Ausdruckes rechts zu benutzen hat, dem man aber bei Fortsetzung der Division immer die Verbesserung y^2 wieder hinzufügen muss. Ist etwa $y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$, wo $y_1, y_2, y_3 \ldots$ aufeinanderfolgende Stellen bedeuten, so kommen bei fortschreitender Division regelmässig zwei Nullen vom Dividendus an den Theilrest herunter, und überdies ist bei der ersten Division an der niedrigsten Stelle, d. h. rechts, y_1^2 zu addieren, bei der zweiten Division ebenda $2y_1y_2 + y_2^2$, bei der dritten $2(y_1 + y_2)\,y_3 + y_3^2$ u. s. w. Zum mindesten geht solches aus dem Verfahren des Pitiscus hervor, das Verfahren zu erläutern schien ihm entweder überflüssig oder unausführbar. Er rechnet $1 : 4 = 0$, $10 : 4 = 2$, nimmt also $y_1 = 2$, $y_1^2 = 4$ und bildet $100 + 4 - 80 = 24$ beziehungsweise unter Herabziehung von zwei Nullen 2400. Nun heisst es weiter

$$24 : 4 = 6 = y_2,\ 2y_1y_2 + y_2^2 = 2 \cdot 20 \cdot 6 + 36 = 276,$$

also $2400 + 276 - 2400 = 276$ ist der neue Rest, 27600 der neue Dividendus. $27 : 4 =$ beinahe $7 = y_3$. Nun folgt

$$2(y_1 + y_2)\,y_3 + y_3^2 = 2 \cdot 260 \cdot 7 + 49 = 3689,$$

$27600 + 3689 - 28000 = 3289$ und 328900 als neuer Dividendus u. s. w. Wir sahen, dass y_3 etwas grösser gewählt wurde und gewählt werden durfte, als $27 : 4$ eigentlich zulässt, weil vor der Abziehung des Theilproductes der Theildividendus noch eine Ergänzung erfuhr. Das Gleiche tritt jedesmal ein, und demgemäss wird man stets den Versuch wagen müssen, den Theilquotienten eher etwas zu gross als zu klein zu wählen. Pitiscus nennt bei dem soeben beschriebenen Verfahren die unbekannte Grösse *latus* und bezeichnet sie, ihr Quadrat und Biquadrat durch l, q, bq. Daneben hat bei ihm l auch die Bedeutung der Seite eines gegebenen Quadrates, d. h. einer Quadratwurzel.

---

[1]) Pitiscus, *Trigonometria* (1612) pag. 47—49.

Noch ein zweiter Schüler Bürgi's hat auf Auflösung von Zahlengleichungen sein Augenmerk gerichtet: Raimarus Ursus[1]), als Verbesserer des Junge'schen Verfahrens (S. 626). Raimarus schlägt nämlich vor, statt eines beliebigen Versuchswerthes der unbekannten Grösse einen derartigen zu wählen, dass die Muthmassung „nicht mehr so vnendlich circumvagiern vnd vmbschweiffen mag". Dazu habe man ein Mittel „durch Erfindung aller Divisorum oder theiler". Die Stelle lässt kaum eine andere Deutung zu, als dass Raimarus verlangt, man solle die einzelnen Theiler der Gleichungsconstanten versuchsweise statt der Unbekannten einsetzen. Er wird wohl dabei nicht das Bewusstsein gehabt haben, dass der Wurzelwerth ein Theiler der Gleichungsconstanten sein müsse; diese Kenntniss war ihm fern. Er dachte nur daran, dass, wenn etwa $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ zur Auflösung vorlag, der Theiler 3 der Zahl 486 es möglich machte, $486 - 90x$ zu $3(162 - 90)$ u. s. w. umzuwandeln, beziehungsweise zu vereinigen.

Unsere in diesem Abschnitte getroffene Anordnung entbindet uns der Aufgabe, nochmals zusammenfassend zu erörtern, was auf jedem Gebiete geleistet worden ist, da diese Leistungen schon gebietweise vereinigt auftreten. Zur Würdigung einzelner, besonders hervorragender Geister müssen wir dagegen, wie wir (S. 546) es in Aussicht gestellt haben, deren Einzelleistungen zu einem Gesammtbilde vereinigen. Stevin, Vieta, Bürgi waren Männer so umfassender Thätigkeit, dass bei ihnen geboten erscheint, was wir zusagten. Zur Schilderung Bürgi's besitzen wir noch nicht alle Züge. Eine gewaltige Leistung wird erst der nächste Abschnitt uns vor die Augen führen. Nur Stevin und Vieta bilden unsere augenblickliche Aufgabe.

Stevin war uns ein Mechaniker allerersten Ranges, war uns der erste Erfinder des Rechnens mit Decimalbrüchen, der Empfehler ihrer praktischen Einführung. Er war endlich der Urheber einer ersten theoretisch richtig erdachten Auflösung von Zahlengleichungen.

Vieta ragt noch ungleich grösser aus seiner geistigen Umgebung hervor. Ein gewandter Geometer, ein geistreicher Zahlentheoretiker, ein geübter Rechner in cyclometrischen Untersuchungen würde er schon um der Leistungen auf diesen Gebieten willen zu den aussergewöhnlichen Schriftstellern gehören. Grösseres leistete er in der Lehre von den trigonometrischen Functionen, in der Lehre von den Gleichungen, in der Verbindung beider Gebiete. Das Grösste ist und bleibt seine Erfindung der Buchstabenrechnung, die Ausdehnung des Gedankens, unbekannte Grössen durch Symbole zu beziehen auf bekannte, aber unbestimmt gelassene Grössen.

[1]) Gerhardt, Mathem. Deutschl. S. 85.

XV. Die Zeit von 1600—1668.



70. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Classikerausgaben.

Wir beginnen die Schilderung des Zeitraumes, dem der XV. Abschnitt gewidmet ist, wieder mit denjenigen Schriftstellern, welche die Geschichte unserer Wissenschaft selbst bearbeiteten.

Ein in Ungarn geborener Augsburger Arzt, zugleich Professor der Logik und Mathematik am dortigen Gymnasium und Bibliothekar ebendaselbst, Georg Henisch[1]) (1549—1618), veröffentlichte zwischen 1605 und 1609 mehrere Schriften, deren Erwähnung hier angemessen erscheint: eine Schrift über Zahlzeichen (*De numeratione multiplici, vetere et recenti*), eine solche über die römische Bruchrechnung (*De asse et partibus ejus*), einen Commentar zu der Sphaera des Proklus. Ebenfalls aus dem Jahre 1609 ist Henisch's *Arithmetica perfecta et demonstrata*, ein damals beliebtes Lehrbuch, welches aber so gar keinen Anlass zu Bemerkungen giebt, dass wir es hier schon nennen und nicht erst im 74. Kapitel, wo wir von Rechenbüchern handeln.

Giuseppe Biancani[2]), latinisirt Blancanus, aus Bologna, welcher dem Jesuitenorden angehörte und in Padua bis zu seinem Tode (1624) Mathematik lehrte, hat 1615 eine *Clarorum mathematicorum Chronologia* herausgegeben, welche in 26 Abschnitte von je einem Jahrhundert eingetheilt ist. Das erste derselben beginnt mit dem Jahre 852 vor Christus oder 100 vor der Gründung von Rom, das zweite mit der Gründung von Rom, beziehungsweise dem Jahre 752; das neunte ist als ein Semisäculum bezeichnet, weil es nur von 52 bis zum Geburtsjahre Christi führt. Dann beginnt jedes Jahrhundert mit den chronologisch allgemein als Anfang eines Jahrhunderts bezeichneten Jahrgängen, das 26. und letzte also mit dem Jahre 1601. Blancanus hält es für nothwendig, auf dem Titelblatte zu erklären, er habe solche Persönlichkeiten wie Atlas, Zoroaster, Endimion, Orpheus, Linus und Andere weggelassen, welche theils

---

[1]) Poggendorff I, 1064. — Allgem. Deutsche Biographie XI, 750—751. Artikel von J. Franck. [2]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* I, 91.

der Fabel angehören, theils in ein ungewisses Alterthum zurückweisen. Ueberdies sei Jubal, der Erfinder der Musik, weggeblieben, weil er durch einen allzugrossen Zeitraum von den zunächst Behandelten getrennt sei. Die Unzuverlässigkeit des Blancanus ist haarsträubend. Ein Geminus lebt für ihn in dem 352 vor Christus beginnenden Jahrhunderte, ein zweiter Geminus von Rhodos, Lehrer des Proklus, in dem 301 nach Christus beginnenden. Theon von Smyrna gehörte dem XII. nachchristlichen Jahrhunderte an als Zeitgenosse des Jordanus Nemorarius. Im XV. Jahrhunderte hat Leonardo von Pisa gelebt. Diese wenigen Beispiele dürften genügen. Eine Angabe dessen, wodurch die betreffenden Mathematiker sich verdient gemacht haben, muss man vollends bei Biancani nicht suchen. Im günstigsten Falle ist der Titel eines oder des anderen Werkes jedes Verfassers angegeben.

Hugo Semple[1]), latinisirt Sempilius, 1594 in Schottland geboren, 1654 in Madrid gestorben, gehörte ebenfalls dem Jesuitenorden an. Seinen 1635 in Antwerpen gedruckten 12 Büchern *De Mathematicis disciplinis* soll[2]) ein ausführliches, innerhalb der einzelnen mathematischen Fächer alphabetisch geordnetes Verzeichniss der Mathematiker als Anhang dienen.

Gerhard Johann Voss, latinisirt Vossius, ist 1577 in einem Dorfe bei Heidelberg geboren, doch war die Familie niederländischer Abstammung. In den Niederlanden hat er auch frühzeitige Anerkennung gefunden. Schon 1600 wirkte er als Rector der Schule in Dordrecht, 1614 siedelte er an die Universität Leiden, 1643 an das neuerrichtete Gymnasium in Amsterdam über. Dort starb er 1649. Seine Leistungen liegen vornehmlich auf dem Gebiete des classischen Alterthums. Mythologie, Geschichte, Grammatik verdanken ihm Arbeiten, welche zu den bahnbrechenden gezählt werden. Mathematische Studien kamen dem entsprechend für Vossius nur so weit in Betracht, als sie sich mit seinen literärgeschichtlichen Forschungen kreuzten, und man sollte dessen bei Beurtheilung des 1650 in Amsterdam gedruckten umfangreichen Bandes *De universae mathesios natura et constitutione liber* eingedenk sein. Als Aufschrift seines Manuscriptes hatte Vossius zudem die Worte hinzugefügt: *Diutius si immorer, vereor, ne videar immori velle*, und sie waren zur Wahrheit geworden. Noch bevor der Druck vollendet war, war der Verfasser gestorben, und der Herausgeber durfte um so mehr das Motto des-

---

[1]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* V, 690.
[2]) Joh. Nic. Frobesius, *Historica et dogmatica ad mathesin introductio* (Helmstädt 1750) pag. 67.

selben auf dem Titeblatte erscheinen lassen. Die einzelnen Theilgebiete der Mathematik: Arithmetik, Geometrie, Logistik, Musik u. s. w. werden der Reihe nach geschichtlich behandelt und überall die hauptsächlichen Schriftsteller ihrer Zeitfolge nach genannt. Das ziemlich genaue Register ist leider nach den Vornamen geordnet, was das Nachschlagen wesentlich erschwert. Es ist nicht zu leugnen, dass Vossius aus Schriftstellern schöpfte, die nicht eigentlich Fachmänner waren, dass er sogar die Mathematiker selbst zu lesen vermöge seiner Vorbildung kaum im Stande war, dass er auch seine unmittelbaren Gewährsmänner nur in den seltensten Fällen nennt. Diese Bemängelungen sind richtig, und richtig ist auch, dass kein unbedingtes Zutrauen allen bei Vossius gesammelten Angaben entgegengebracht werden kann. Immerhin ist der 502 enggedruckte Quartseiten starke Band das erste Werk, das man, ohne allzusehr schönfärberisch zu reden, eine Geschichte der Mathematik zu nennen hat.

Nach diesem Werke ist es fast ein Unrecht, eine neun Seiten lange, wesentlich aus Petrus Ramus geschöpfte Einleitung besonders zu nennen, welche Andreas Tacquet[1]) unter der Ueberschrift *Historica narratio de ortu et progressu matheseos* seinen erstmalig 1654, später häufiger gedruckten Elementa geometriae planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata vorausschickte. Tacquet, von dem wiederholt die Rede sein wird, ist 1612 in Antwerpen geboren, 1660 ebenda gestorben. Er war Jesuit und 15 Jahre lang Lehrer der Mathematik an den Ordenscollegien zu Löwen und Antwerpen.

Wie wir im vorigen Abschnitte als den geschichtlichen Forschungen nahe verwandt Ausgaben alter Schriftsteller und Versuche deren verloren gegangene Schriften wiederherzustellen bezeichnet haben, so wollen wir auch gegenwärtig verfahren.

Als erste auf diesem Gebiete nennenswerthe Persönlichkeit begegnet uns Marino Ghetaldi[2]). Er ist 1566 in Ragusa geboren, 1627 ebenda gestorben. Auf wissenschaftlichen Reisen trat er bedeutenden Gelehrten, wie Clavius in Rom, Vieta in Paris nahe (S. 640). Von Vieta's Apollonius Gallus nahm Ghetaldi die Anregung zu zwei Veröffentlichungen, welche beide dem Jahre 1607 angehören. In dem *Apollonius redivivus seu restituta Apollonii pergae de inclinanationibus Geometria* wurde, wie der Titel es ausspricht, eine Wieder-

---

[1]) De Backer, l. c. II, 615. [2]) E. Gelcich, Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi, Patricier von Ragusa aus dem Jahre 1630, Zeitschr. Math Phys. XXVII, Supplementheft S. 191—232. Vergl. zunächst besonders S. 195.

herstellung der verlorenen Schrift περὶ νεύσεων versucht. In dem *Supplementum Apollonii Galli* wurden sechs Berührungsaufgaben behandelt, bei welchen Vieta sich nicht aufgehalten hatte. „So wird", sagt Ghetaldi in der Vorrede, „der Apollonius Galliens nicht ohne den Illyriens den pergäischen erwecken, der durch die Schädigung der Zeit vernichtet oder von der Rohheit unterdrückt dalag."

Auch das folgende Jahr 1608 war Zeuge einer durch Willebrord Snellius[1]) versuchten Wiederherstellung einer apollonischen Schrift. Der Vater Rudolf Snellius, geboren 1546 in Oudewater, besuchte bereits im 15. Lebensjahre die auswärtigen hohen Schulen: Jena, Wittenberg, Heidelberg, Marburg, später Pisa und Florenz, dann wieder Marburg waren seine Aufenthaltsorte. Nach 16jähriger Wanderung kehrt er 1577 in die Heimath zurück und liess sich zunächst in Oudewater, dann aber 1578 in Leiden nieder, wo er in einem Einwohnerverzeichnisse von 1581 als Professor der Mathematik bezeichnet ist, und wo neben ihm und seiner Frau beider Söhnchen Willebrord genannt ist. Rudolf Snellius starb 1613 in Leiden. Irgend hervorragende Leistungen desselben sind nicht aufgezeichnet. Ganz anders verhält es sich mit dem Sohne Willebrord Snellius van Roijen. Er muss, wie bemerkt, 1581 gelebt haben, und nimmt man ausserdem als zuverlässig an, was er von sich selbst gesagt hat, er sei im Jahre 1600 eben 19 Jahre alt geworden, als er öffentliche Vorlesungen über den ptolemäischen Almagest hielt, so muss 1581 das Geburtsjahr gewesen sein. Bereits 1590 steht der Name des damals demnach 9jährigen Knaben in dem Matrikelbuche der Leidner Universität, was auf dessen frühe Reife gedeutet werden mag, wenn auch bei Professorensöhnen der für sie kostenfreie Eintrag aus anderen Zweckmässigkeitsgründen viel früher zu erfolgen pflegte, als an einen eigentlichen Universitätsbesuch zu denken ist. Von 1600 etwa bis gegen 1613 war Willebrord Snellius, dem väterlichen Beispiele folgend, auf Reisen. In Würzburg lernte er Adriaen van Roomen, in Prag Tycho Brahe und Kepler kennen. Beim Tode des Vaters, für den er schon während dessen letzter Krankheit Vorlesungen abgehalten hatte, wurde er 1613 zum Professor der Mathematik ernannt und blieb in dieser Stellung bis zu seinem 1626 erfolgenden Tode. Seine erste wissenschaftliche Veröffentlichung, welche uns die Veranlassung giebt, ihn an dieser Stelle zu nennen, ist sein *Apollonius Batavus*[2]) von 1608, die Wiederherstellung der apollonischen Schrift περὶ διωρισμένης τομῆς, über den bestimmten Schnitt. Allerdings

---

[1]) P. van Geer, *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* (*Archives Néerlandaises* Bd. 18 vom December 1883) und Rud. Wolf, Astronomische Mittheilungen Nr. LXXII. [2]) Kästner III, 187.

hat Snellius, wie ein späterer Wiederhersteller, Robert Simson, rügte, sich von der Art der Griechen weit entfernt und überdies nur vier Aufgaben besprochen, während Apollonius deren neun behandelte.

Auf Ghetaldi's vorher genannte Wiederherstellung der Berührungen kam Alexander Anderson 1612 mit seinem *Supplementum Apollonii redivivi* zurück[1]). Es ist das derselbe in Schottland geborene, aber in Paris lehrende Mathematiker, der um die Herausgabe Vietascher Schriften sich verdient gemacht hat.

In Blancanus lernten wir (S. 651) einen traurigen Geschichtsschreiber kennen. Das Machwerk, welches wir zu schildern hatten, ist 1615 als Anhang zu einem Werke erschienen, welches eine bedeutend günstigere Beurtheilung verdient: *Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata.* Der Titel giebt über den Inhalt genügende Auskunft. Es ist eine, wenn auch nicht ganz vollständige, doch sehr reichhaltige Sammlung der bei Aristoteles vorkommenden, auf Mathematik im weitesten Sinne des Wortes bezüglichen Stellen, jeweils mit Erläuterungen versehen, die auch heute noch, ebenso wie die Zusammenstellung selbst, des Nutzens nicht entbehren.

Im höchsten Grade verdienstlich war der 1621 in Paris herausgegebene und mit Anmerkungen versehene Abdruck des griechischen Textes des Diophant, welchen Claude Gaspard Bachet de Méziriac[2]) einer pariser Handschrift entnahm, die er mit zwei anderen und mit Xylander's Uebersetzung verglich. Bei dem schlechten Zustande der sämmtlichen gebrauchten Handschriften war die Arbeit des Herausgebers eine unsäglich mühevolle. Sie war überdies durch den Umstand erschwert, dass Bachet während der Arbeit in einem langwierigen Fieberzustande sich befand, dessen melancholische Einwirkung er durch um so angestrengtere Thätigkeit zu bekämpfen suchte. Bachet (1587—1638) war neben seiner mathematischen Thätigkeit auch in den schönen Wissenschaften heimisch und seit 1635 Mitglied der französischen Akademie[3]).

Claude Hardy[4]) († 1678) war gleich Bachet nicht ausschliesslich Mathematiker. Er war richterlicher Beamter am Chatelet zu Paris, und ausserdem rühmt man ihm nach, er habe die Kenntniss von 36 verschiedenen orientalischen Dialecten besessen. Er war mit Mydorge und Descartes, welche beide uns im 71. Kapitel zuerst wiederbegegnen werden, befreundet. Hardy hat um 1625 die erste griechische Ausgabe der euklidischen Data mit lateinischer Uebersetzung und Erläuterungen besorgt[5]).

---

[1]) Kästner III, 186. [2]) Ebenda III, 152—162. — Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 281—282. [3]) *Nouvelle Biographie universelle* III, 62—63. [4]) Ebenda XXIII, 370—371. [5]) Kästner III, 182.

Mancherlei Schriften griechischer Geometer hat Pierre Hérigone[1]) in einem Sammelwerke herausgegeben, welches zuerst 1634, dann 1644 sowohl in französischer als in lateinischer Sprache gedruckt ist. *Cours mathématique* ist der Titel des im Ganzen sechsbändigen Werkes, von welchem aber nur der erste Band jene alten Schriften enthält: die Elemente und Daten Euklid's und solche Wiederherstellungen von Abhandlungen des Apollonius, welche Vieta, Snellius, Ghetaldi geliefert hatten. Als eigene Zuthat Hérigone's ist eine Zeichensprache hervorzuheben, deren er sich, wenn auch nicht ausnahmslos, bediente, und welche als Vorläuferin allgemeinerer später durch Leibniz veranstalteter Versuche betrachtet worden ist[2]). Als Gleichheitszeichen benutzt er 2|2. Ist dagegen eine 3 durch einen Verticalstrich von einer 2 getrennt, so ist dadurch Ungleichheit angezeigt, und zwar steht das Grössere auf Seiten der 3. Ist also eine Strecke a grösser als eine solche b, so kann man entweder durch a 3|2 b oder nach Belieben auch durch b 2|3 a dieses zur Anschauung bringen. Ein Verhältniss wird durch π als Anfangsbuchstabe von Proportion bezeichnet. Mithin hat $4\pi 6$ 2|2 $10\pi 15$ bei Hérigone die Bedeutung: 4 verhalte sich zu 6 wie 10 zu 15.

Die euklidischen Porismen fanden einen Wiederhersteller in Albert Girard[3]). Von seinen Lebensumständen ist nur Weniges bekannt. Die durch ihn besorgte Gesammtausgabe der Werke von Simon Stevin erschien 1634, und in dem Widmungsbriefe beklagt Girard's Wittwe nebst 11 Kindern den nun ein Jahr alten Verlust des Gatten und Vaters, der nichts hinterlassen habe als einen guten Namen. Damit ist eine Tagebuchbemerkung von Constantin Huygens in Uebereinstimmung, welche den 9. December 1632 als Girard's Todestag nennt[4]). Aus einigen Anmerkungen der Stevin-Ausgabe geht ferner hervor, dass Girard in den Niederlanden fremd war und in gehässiger Weise eines gewissen Cardinals, offenbar des Cardinals von Richelieu, gedenkt. Nimmt man hinzu, dass Girard ausschliesslich französisch geschrieben hat, so gewinnt die Muthmassung an Wahrscheinlichkeit, er sei französischer Protestant gewesen und seines Glaubens wegen nach den Niederlanden ausgewandert. Die Wahrscheinlichkeit wird vollends zur Gewissheit durch den Ortsbeinamen

---

[1]) Kästner III, 46—50. [2]) *La logique mathématique avant Leibniz* par Gino Loria im *Bulletin Darboux* für 1894. [3]) Terquem in den *Nouvelles annales de mathématiques* XII, 195 (1853). — G. A. Vorstermann van Oijen im *Bulletino Boncompagni* III, 359—362 (1870). — Paul Tannery im *Bullet. Darboux* 2e Série T. VII (1883). — H. Dannreuther in den *Mémoires de la Société des lettres, sciences et arts de Bar-le-Duc*, 3e Série T. III (1896). [4]) Korteweg im *Intermédiaire des mathématiciens* II, 193 (Paris 1895).

Samielois, welchen Girard führte, und für welchen die Uebersetzung *aus Saint-Mihiel* (in Lothringen) als richtig nachgewiesen worden ist. In den Kirchenbüchern von Saint-Mihiel findet sich kein Albert Girard, dagegen ein am 11. October 1595 geborener Humbert Girard. Die Möglichkeit, dass Girard später seinen Vornamen geändert haben sollte, erscheint sehr gering, wenn auch in den Matrikelbüchern der Universität Leiden ein 1617 immatriculirter 22jähriger Student der Mathematik *Albertus Gerardus Metensis* (aus Metz) eingezeichnet ist, der folglich 1595 geboren sein muss. Der dort genannte Heimathsort Metz würde keine Schwierigkeit machen, da er bedeuten könnte, Albert sei von einer Metzer Schule zur Universität abgegangen. In einem Amsterdamer Kirchenbuche endlich hat man Albert Girard's Heirath unter dem 17. April 1614 eingetragen gefunden. Er wäre also damals erst 19 Jahre alt gewesen, noch nicht einmal Student, und wäre mit 37 Jahren gestorben. Von Girard rührt die französische Uebersetzung der Stevin'schen Werke her, von ihm die Uebersetzung des 5. und 6. Buches des Diophant, welche im Anschlusse an Stevin's Bearbeitung der vier ersten Bücher gedruckt ist. Girard hat aber, wiederholen wir, auch eine Wiederherstellung der euklidischen Porismen versucht[1]). Er hat es selbst in einem 1626 gedruckten kleinen Abrisse der Trigonometrie gesagt, wo er jene Wiederherstellung als schon mehrere Jahre alt bezeichnet, er hat es zum zweiten Male in der Statik Stevin's gesagt, wo er sich als den Neuerfinder der drei Bücher euklidischer Porismen rühmt und die Hoffnung ausspricht, sie, wie er bereits 1626 in Aussicht gestellt habe, veröffentlichen zu können. Allerdings sind diese fast mehr als kurzen Andeutungen Alles, was wir von Girard's Versuche wissen.

Viel mehr wissen wir auch nicht von einem andern Wiederherstellungsversuche des gleichen Werkes etwa um die gleiche Zeit durch Pierre de Fermat[2]). Dieser geniale Mann, der auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik neue Bahnen eröffnete, und den man einen der bedeutendsten, vielleicht überhaupt den bedeutendsten

[1]) Chasles, *Les trois livres de Porismes d'Euclide* (Paris 1860) pag. 3 Note 1. [2]) Chasles l. c. pag. 3—4. Biographisches vergl. bei Libri im *Journal des savants* 1839 pag. 539—561; 1841 pag. 267—279; 1845 pag. 682—694, und in der *Revue des deux mondes*, April bis Juni 1845 (Nouvelle Série X, 679—707). — E. Brassine, *Précis des oeuvres mathématiques de Fermat* (Paris 1853). — Hoefer in der *Nouv. Biogr. universelle* XVII, 438—451 mit wesentlicher Abhängigkeit von Libri und Brassine. — C. Henry, *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* im *Bullet. Boncompagni* T. XII und XIII. — Paul Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* im *Bulletin Darboux* 2e Série T. VII (1883) und *Les manuscrits de Fermat* in den *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*.

Mathematiker zu nennen hat, den Frankreich hervorbrachte, verdient, dass wir sein Leben in genaueren Linien schildern. Er ist im August 1601 in Beaumont de Lomagne bei Toulouse geboren. Der Vater war möglicherweise Lederhändler. Der Sohn widmete sich der Rechtsgelehrsamkeit und wurde am 14. März 1631 Parlamentsrath in Toulouse. Bald darauf verheirathete er sich. Zwischen diesem Zeitpunkte und 1638 muss er geadelt worden sein. Er starb den 12. Januar 1665 in Castres. Wenig mehr als ein Jahr vor seinem Tode wurde (im December 1663) ein geheimer Bericht über ihn an den Minister Colbert erstattet. Fermat, heisst es darin, ist ein Mann von grosser Gelehrsamkeit. Er hat einen allseitigen wissenschaftlichen Verkehr, ist ziemlich geldgierig, kein sehr guter Berichterstatter, confus, gehört auch nicht zu den Freunden des ersten Präsidenten. Die letzten Worte dürften vielleicht den Schlüssel zu der sicherlich übelwollenden Schilderung liefern, wenn auch nicht in Abrede gestellt werden will, dass die staunenswerthe Erfindergabe des Mathematikers der nüchternen Tagesarbeit des Parlamentrathes im Wege gestanden haben mag, und dass der kühne Flug seines Geistes sich nur schwer die Fesseln eines kein Zwischenglied übergehenden Berichtes in Rechtssachen anlegen liess. Die von ihm wiederhergestellten Porismen Euklid's beabsichtigte Fermat mit Erweiterungen herauszugeben [1]), welche darauf zielten, statt des Kreises irgend Kegelschnitte und andere Curven mit Geraden in Verbindung zu setzen. Man kennt von dem allen nur fünf Sätze, welche Fermat als Porismen bezeichnet hat. Nach der Meinung eines vorzugsweise sachkundigen Beurtheilers [2]) zeigt die *Porismatum Euclidaeorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus Geometris exhibita* — so sollte die Schrift heissen — dass Fermat die ganze Tragweite jenes Euklidischen Werkes erfasst hatte, wenn er auch über die Form der Porismen irriger Meinung gewesen sein mag und ihren Inhalt zu weit fasste, indem er alle Ortstheoreme hinein bezog. Das 3. Porisma (Figur 127) lässt die Sehne mn parallel zum Durchmesser ad und von m und n nach einem beliebigen Peripheriepunkte b die Sehnen mb, nb ziehen, welche ad in v und o schneiden. Dann stehen die Producte $ao \cdot dv$

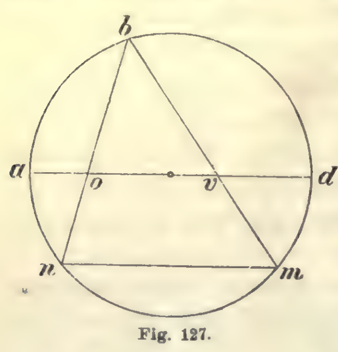


Fig. 127.

[1]) Fermat, *Varia opera mathematica* pag. 119: *Imo et Euclidem ipsum promovebimus et porismata in coni sectionibus et aliis quibuscunque curvis mirabilia sane et hactenus ignota detegemus.* [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 67 (deutsch 64) und Derselbe, *Les trois livres de porismes d'Euclide*, pag. 3—4.

und $av \cdot do$ in einem constanten Verhältnisse, wo auch b angenommen wird. Bezeichnet man das constante Verhältnis als das zweier Strecken af, dg, deren Endpunkte auf ad liegen, so ist der Satz auch als Gleichung zwischen zwei Producten von je drei Strecken aufzufassen, d. h. in ihm liegt im Grunde der Satz von der Involution der sechs auf einer Geraden liegenden Punkte a, d, f, g, o, v eingeschlossen, deren beide letzten veränderlich, die vier ersten feste Punkte sind. Auch dem Apollonius hat Fermat ähnliche Bemühungen gewidmet. Er stellte dessen zwei Bücher über die ebenen Oerter ἐπίπεδοι τόποι wieder her, welche im Drucke bekannt sind. Er will, nach einem Briefe an Roberval, wieder eine Persönlichkeit, von der später die Rede sein wird, auch bei dieser Untersuchung Schönes und Bemerkenswerthes gefunden haben, doch fehlt darüber jede nähere Andeutung [1]). Oder sollte Fermat unter jenen Erfindungen diejenigen verstanden haben, welche er in einer Abhandlung *De contactibus sphaericis* [2]) veröffentlichte? Ihr Inhalt ist die räumliche Aufgabe, eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln berührt, also das Seitenstück zu der Vieta'schen Auflösung der Aufgabe, einen Kreis zu finden, der drei Kreise berührt.

Zu den Schriftstellern, welche griechischen Mathematikern ihr besonderes Studium widmeten, gehörte ferner David Rivault de Flurance [3]) (1571—1616), Lehrer der Mathematik am Hofe Ludwig XIII. Seine commentirte Archimedausgabe ist von 1615.

Jean Baptiste Duhamel [4]) gab 1643 in seinen Elementa astronomica eine Bearbeitung der Bücher des Theodosius über die Kugel.

Ismael Boulliau lateinisch Bullialdus, (1605—1694), gab 1644 in Paris, wo er die längste Zeit seines Lebens in angesehener Stellung verbrachte, den Theon von Smyrna heraus, wobei er dessen Musik von der Arithmetik trennte und damit den Grund zu einem Irrthume legte, der erst im XIX. Jahrhunderte als solcher erkannt wurde [5]).

Weiter nennen wir Claude Richard [6]) (1589—1664). In Ornans in Burgund geboren, trat er schon 1606 dem Jesuitenorden bei, lehrte in der Folge sieben Jahre lang in Lyon Mathematik, war 1624 gerade im Begriff, sich in Lissabon als Missionar nach China einzuschiffen, als Philipp IV. ihn nach Madrid berief, wo er noch 40 Jahre hindurch Professor der Mathematik war. Von Madrid aus

---

[1]) Chasles, *Apercu hist.* 65 (deutsch 61). [2]) Fermat, *Varia opera mathematica* pag. 74—88; *Oeuvres de Fermat* (Paris 1891) I, 52—69. [3]) Poggendorff II, 256. [4]) Ebenda I, 616. [5]) Th. H. Martin in seiner Theonausgabe von 1849, besonders S. 15—17. — Poggendorff I, 258. [6]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la compagnie de Jésus* I, 627.

veranstaltete er folgende Ausgaben: Euclidis elementorum geometricorum libros XIII, Isidorum et Hypsiclem et recentiores de corporibus regularibus et Procli propositiones geometricas, 1645; Apollonii Pergaei Conicorum libri IV cum commentariis, 1655. Ob er auch einen neuen abermals erläuterten Abdruck des Rivault'schen Archimed veranstaltete, ist mindestens zweifelhaft.

An diese Namen schliesst sich Franciscus van Schooten der Jüngere[1]. Es gab zwei Mathematiker dieses Namens, Vater und Sohn. Beide waren Professoren an der Universität Leiden. Der Vater lebte 1581—1646, der Sohn 1615—1660. Letzterer veröffentlichte 1657 ein aus fünf Büchern zusammengesetztes Werk *Exercitationes mathematicae* und dessen drittes Buch ist eine Wiederherstellung der ebenen Oerter des Apollonius.

Aus Italien haben wir von einer Wiederherstellung und von einer Neuentdeckung zu berichten[2]. Vincenzo Viviani (1622—1703), der letzte Schüler Galilei's, wie er sich selbst mit pietätsvollem Stolze genannt hat, fällt zwar mit fast der Hälfte seiner Lebenszeit und mit den meisten seiner Veröffentlichungen jenseits des Zeitraumes, den wir in diesem Bande noch behandeln, aber mit einer Jugendarbeit desselben haben wir uns zu beschäftigen, mit der 1659 gedruckten Schrift: *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum librum Apollonii Pergaei adhuc desideratum.* Es ist eine der sehr wenigen Wiederherstellungen, von deren Werthe man nachträglich durch Wiederauffindung des wahren Wortlautes sich überzeugen konnte. Ein Mönch Golius hatte nämlich um 1625 die arabische Uebersetzung der sieben ersten Bücher der Kegelschnitte des Apollonius aus dem Morgenlande mitgebracht und dem Grossherzoge von Toscana verkauft. In einer Bibliothek in Florenz lag der literarische Schatz halb verborgen, wenn auch Pater Mersenne (1588—1648), ein französischer Minorit, welcher mit nahezu allen hervorragenden Persönlichkeiten seiner Zeit in regem Briefwechsel stand und dadurch eine Mittelperson für die üppig hervorschiessenden Entdeckungen aller Art bildete, 1644 Kenntniss von demselben hatte. Auch zu Viviani war die Kunde gedrungen, und ferner darf man nicht vergessen, dass die Wiederherstellung der Kegelschnitte des Apollonius durch Maurolycus (S. 558) jetzt 1654 im Drucke herauskam. Es ist begreiflich, dass Viviani unter solchen Umständen sich die Selbständigkeit seines Schaffens zu sichern bestrebt war, und dass er vom Erzherzog Leopold, Bruder des Grossherzogs Ferdinand II. von

[1]) Allgem. deutsche Biographie XXXII, 628—629. [2]) Balsam, Des Apollonius von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte (Berlin 1861), S. 3—4.

Toscana, sich ausdrücklich bescheinigen liess, dass ihm die wiederaufgefundene Handschrift des Apollonius noch nicht bekannt gewesen sei, als er die Divinatio verfasste. Es ist aber auch ein Zeichen von kühner Zuversicht des Verfassers, dass er mit der Gewissheit, von der Auffassung des Maurolycus abzuweichen, mit der weiteren Gewissheit, durch die bevorstehende Veröffentlichung des wirklichen Apollonius werde über unglückliche Wiederherstellungsversuche der Stab gebrochen werden, zu rechnen hatte, und dass er gleichwohl zur Veröffentlichung von 1659 sich entschloss. Der Herausgeber von Maurolycus war Giacomo Alfonso Borelli (1608—1679), damals 1654 Professor der Philosophie und Mathematik in Messina. Im Jahre 1656 kam er als Professor an die Universität Pisa und wurde 1657 eines der Mitglieder der Accademia del Cimento, welche im Juni dieses Jahres in Florenz gegründet wurde, aber nur eine zehnjährige Dauer hatte. In der Stellung als Akademiker veröffentlichte Borelli 1658 seinen *Euclides restitutus*, welcher wiederholt aufgelegt wurde und von der dritten Auflage (Rom 1679) an um einen Auszug aus den vier ersten Büchern der Kegelschnitte des Apollonius und aus den Schriften Archimed's vermehrt erschien. Die Vorrede des Euclides restitutus ist durch die in ihr enthaltene Besprechung der Lehre von der Parallelen und der vom Contingenzwinkel nicht uninteressant. Für die Lösung der Schwierigkeit der Parallelenlehre beruft sich Borelli mit Clavius (S. 556) auf den Satz, dass wenn eine Senkrechte von unveränderlicher Länge und gegen die gerade Grundlinie unveränderter Neigung längs derselben fortgeschoben wird, auch der obere Endpunkt eine Gerade beschreibt[1]). In dem gleichen Jahre 1658 entdeckte Borelli in der Florentiner Bibliothek den mehrerwähnten arabischen Codex und erhielt die Erlaubniss, ihn nach Rom mitzunehmen, um dort einen Uebersetzer zu suchen. Er fand ihn in der Person von Abraham von Echelles, Professor der orientalischen Sprachen, der aber, wie er selbst in der Vorrede der vollendeten Uebersetzung erzählt, die grössten Schwierigkeiten dabei zu überwinden hatte, welche theils in dem Fehlen diakritischer Punkte, theils in der Dunkelheit des Inhaltes begründet waren. Der sachkundigen Beihilfe Borelli's sei es vielfach gelungen, einen Sinn zu ermitteln, den er als sprachkundig erst nachher in dem arabischen Wortlaute wiedererkannte. Somit ist Borelli als bei Anfertigung jener 1661 gedruckten Uebersetzung vollberechtigter Mitarbeiter zu betrachten. Für Viviani war die Veröffentlichung ein wahrer Triumph, da sie

---

[1]) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 33.

zeigte, wie nahe er dem Gedankengange des Apollonius gekommen war. Viviani hatte übrigens schon 1645 eine andere Wiederherstellung unternommen, die der fünf Bücher körperlicher Oerter des Aristäus des Aelteren[1]). Auch sie ist im Drucke erschienen, aber erst im Jahre 1701.

71. Kapitel.

Geometrie.

Wenn wir der Gewohnheit des vorigen Abschnittes treu bleibend an die Forscher über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik die Herausgeber alter Mathematiker anreihten, so behalten wir nicht minder den einmal eingeschlagenen Gedankengang bei, indem wir die eigentlichen Geometer folgen lassen.

Wir dürfen hier im Vorübergehen einer Würfelverdoppelung gedenken, welche, ohne als vollständig gelten zu wollen, für praktische Zwecke durchaus ausreicht. Sie ist 1604 von Villalpandus in einem Commentare zum Propheten Ezechiel veröffentlicht worden, rührt aber von Christoph Grienberger her, der, ohne genannt zu sein, mathematischer Mitarbeiter an jenem Commentare war. So meldet wenigstens Claude Richard in seiner Euklidausgabe, und als Zeit- und Ordensgenosse des Villalpandus sowie Grienberger's ist er hierin durchaus glaubwürdig[2]). Grienberger (1561—1636) aus Tyrol ist auch in der Geschichte der Kartographie rühmend zu nennen[3]).

Genauer verweilen werden wir bei einem Manne, der freilich auf anderen Gebieten viel Hervorragenderes geleistet hat: Johannes Kepler[4]), geboren 1571 in Weil der Stadt in Württemberg, gestorben 1630 in Regensburg. Graz, Prag, Linz sind die Orte gewesen, wo seine der Mathematik angehörenden Schriften verfasst wurden. In Graz ist die Erstlingsschrift *Mysterium cosmographicum* (1596) entstanden, und ihr gehört eine erste hier zu erwähnende Stelle an[5]), in welcher ein Sternvierzigeck gezeichnet ist. Wir haben wiederholt von Sternvielecken zu reden gehabt, aber ein solches mit so viel Ecken ist uns noch nirgend begegnet. Darin läge an sich indessen kein neuer Gedanke, höchstens wäre die Kühnheit des Zeichners an-

---

[1]) Montucla II, 93. [2]) Ambr. Sturm, Das Delische Problem, S. 122—124. [3]) S. Günther, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XXIII, 523 (1892). [4]) Allgemeine deutsche Biographie XV, 603—624. Artikel von Günther. [5]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 25—39.

zuerkennen; neu dem Gedanken nach ist es dagegen, dass Kepler die Eckpunkte dieses Vielecks nicht so zählte, wie sie auf einer umschriebenen Kreislinie nebeneinander auftraten, sondern in der Reihenfolge, in welcher sie auf den einander durchkreuzenden Seiten erreicht werden, denn damit war das Wesen des Sternvielecks richtig erkannt. Das erwähnte Vierzigeck ist ein solches, bei welchem, nachdem der Umkreis in 40 Theile getheilt war, der zweite Punkt zum ersten die Lage einnimmt, dass zwölf Zwischenpunkte überschlagen werden, und ebenso bei den folgenden Punkten. In der *Harmonice mundi* (1619) ist Kepler wiederholt auf Sternvielecke aber auch auf Sternvielflächner zurückgekommen. Wir haben (S. 644) der in jenem Werke enthaltenen Vielecksgleichung Bürgi's gedenken müssen, aber neu sind in jeder Beziehung Kepler's Sternvielflächner. Wenn auch Jamitzer (S. 582) Zeichnungen von Sternvielflächnern geliefert hat, so entstammten sie seiner künstlerischen Phantasie, Kepler dagegen hat sie, und zwar solche, die bei Jamitzer nicht vorkommen, von mathematisch-astronomischem Gedankengange aus entstehen lassen. Im Jahre 1609 wurde in Frankfurt eine Schrift Kepler's unter dem Titel *Ad Vitellionem Paralipomena etc.* gedruckt, Zusätze zu der Optik des Witelo. In ihr ist das 3. Kapitel durch die Ueberschrift als Fundamente der Katoptrik bezeichnet. Darin kommt die Stelle[1]) vor: Die richtige Ueberlegung befiehlt den Kreis aufzufinden, welcher eben die Art der Krümmung besitzt, wie der Schnitt in β, dem Punkte des Zurückwerfens. (Solche gemischte Linien besitzen nämlich andere und immer wieder andere Krümmungen.) Damit hat Kepler den Begriff des Krümmungskreises in die Geometrie eingeführt, wenn es auch noch geraume Zeit dauerte, bis derselbe sich förmlich einbürgerte. Ferner ist das 4. Kapitel der Brechung des Lichtes gewidmet. Der Gegenstand ist in verschiedenen Paragraphen behandelt, deren vierter die Ueberschrift *De coni sectionibus*[2]), von den Kegelschnitten, führt. Er enthält eine Benennung und zwei wichtige Gedanken, welche wir hervorzuheben haben. Die Benennung ist die der Brennpunkte als solcher, d. h. das Wort *focus*[3]). Bei der Hyperbel und Ellipse gebe es zwei Brennpunkte, von welchen aus gerade Linien an einen beliebigen Curvenpunkt gezogen mit der Berührungslinie an die Curve in eben jenem Punkte gleiche Winkel bilden. Bei der Parabel liege der eine Brennpunkt innerhalb der

---

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) II, 175: *At verior ratio jubet invenire circulum qui contineat rationem curvitatis quam habet sectio in β puncto repercussus (habent autem aliam atque aliam hujusmodi mistae lineae).* [2]) Ebenda II, 185—188. [3]) *Nos lucis causa et oculis in mechanicam intentis ea puncta focos apellabimus.*

Curve, der andere sei ein blinder d. h. unsichtbarer Brennpunkt, *focus caecus*. Er befinde sich sei es ausserhalb, sei es innerhalb der Curve, wie man sich vorstellen müsse, unendlich weit von dem ersten entfernt auf der Axe, so dass die nach ihm hin gezogenen Geraden der Axe parallel seien[1]). Hierin liegt der eine Gedanke, den wir meinen. Das Vorhandensein unendlich ferner Gebilde war durch Kepler in die Geometrie eingeführt, wenn wir auch darüber zweifelhaft sein mögen, ob er sich der Tragweite dieser Neuerung bewusst war, und ob der Ausspruch, jener unsichtbare Brennpunkt könne ausserhalb oder innerhalb der Parabel liegen, wirklich dahin zu verstehen ist, dass die beiden unendlich fernen Endpunkte der der Axe parallelen Geraden zusammenfallen. Deutlich war dagegen für Kepler ein zweiter Gedanke vorhanden: der der Schlussfolgerung von Eigenschaften eines Raumgebildes auf solche eines anderen. Die Analogie, sagt er, muss uns geometrisch leiten; denn über Alles liebe ich Analogien, meine getreusten Lehrmeister, welchen alle Geheimnisse der Natur bekannt sind[2]).

Diesen geometrischen Erfindungen in astronomischen Schriften stellen wir eine eigentlich geometrische Schrift gegenüber. Henry Savile[3]) (1549—1622) hielt am Merton-College in Oxford, dessen Vorsteher er war, Vorlesungen über griechische Geometrie, welche 1621 im Drucke erschienen. Er stiftete überdies zwei Professuren, welche dazu dienen sollten, Oxfords Rang in Beziehung auf mathematische Wissenschaften zu erhöhen, welche seither weit mehr in Cambridge gepflegt worden waren. Trotz der Savile'schen Professuren blieb indessen das Uebergewicht Cambridges erhalten. Savile selbst kam in seinen Vorlesungen, welche streng den Gang von Euklid's Elementen einhielten, nicht über den 8. Satz des I. Buches der Elemente hinaus, und die gedruckten Vorlesungen entsprechen vollständig den wirklich gehaltenen. Er waren volle 13 Vorlesungen, welche jenen allerersten Anfangsgründen eingeräumt waren, ein deutlicher Beweis dafür, dass in den Vorlesungen weit mehr Sprachliches, Philosophisches, Geschichtliches als eigentliche Geometrie zur Sprache kam. Eine Stelle darf vielleicht hervorgehoben werden, an welcher von zwei Flecken an dem schönen Leibe der Geometrie die Rede ist,

---

[1]) *In parabole unus D est intra sectionem, alter vel extra vel intra sectionem in axe fingendus est infinito intervallo a priore remotus, adeo ut educta HG vel IG ex illo caeco foco in quodcunque punctum sectionis G sit axi DK parallelos.* [2]) *Oportet enim nobis servire voces geometricas analogiae: plurimum namque amo analogias fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios.* [3]) Kästner I, 249 und III, 19—26. — Poggendorff II, 762. — Ball, *History of mathematics at Cambridge*, pag. 29.

auf deren Vertilgung alte und neue Mathematiker Mühe verwandten[1]). Savile meint die Lehre von den Parallellinien und von den Proportionen.

Albert Girard ist unter den geometrischen Schriftstellern wegen einer Veröffentlichung von 1626 zu nennen[2]). In der Einleitung zu einer für den Halbmesser 10000 berechneten Tafel trigonometrischer Functionen sind die Fälle auseinandergesetzt, welche man zu unterscheiden habe, wenn aus Bestimmungsstücken einer geradlinigen Figur die noch fehlenden Stücke ermittelt werden sollen. Dabei geht nämlich Girard über das Dreieck weit hinaus und sieht sich so veranlasst, von Gattungen geradliniger ebener Vielecke zu reden. Vierecke giebt es bereits dreierlei, *la simple, la croisée et l'autre ayant l'angle renversée* (Figur 128). Das erste und dritte, d. h. das überall convexe Viereck und das mit einem einspringenden Winkel, sind auch früheren Mathematikern bekannt gewesen, aber das zweite überschlagene Viereck, eine Figur, welche den Sternvielecken darin

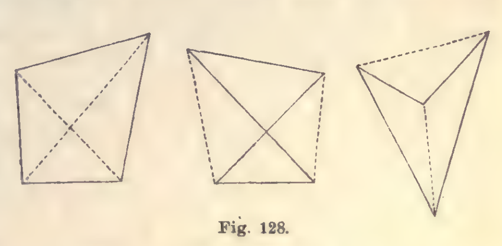


Fig. 128.

ähnelt, dass einige Seiten einander kreuzen, darin von ihnen sich unterscheidet, dass nicht alle Seiten diese Eigenschaft besitzen, ist durchaus neu. Girard's Definition geht übrigens nicht von den Seiten, sondern von den Diagonalen des Vierecks aus, unter welchen die Verbindungsgeraden eines Eckpunktes mit demjenigen anderen Eckpunkte des Vierecks verstanden werden, nach welchem keine Vierecksseite führt. Bei dem einfachen Vierecke fallen beide Diagonalen in das Innere der Figur, bei dem überschlagenen beide ausserhalb, bei dem mit einspringenden Winkel fällt eine Diagonale in das Innere der Figur, eine ausserhalb. Girard geht weiter zu den Fünf- und Sechsecken, fügt aber hier dem aus der Lage der Diagonale herstammenden Eintheilungsgrunde einen zweiten hinzu, der von der Anzahl der Flächentheile herstammt, in welche die ohne Diagonalen gezeichnete Figur zerfällt. So gebe es 11 Fünfecksformen: 4 mit einer Fläche, 4 mit zwei Flächen und je 1 mit drei, vier, sechs Flächen. Unsere Figur 129 (folg. Seite) stellt die vier einflächigen

---

[1]) *Praelectiones tresdecim in principium elementorum Euclidis* (Oxford 1621), pag. 140. Wir entnehmen diese Bemerkung Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, S. 18. [2]) Kästner III, 108. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 18—21.

Fünfecke mit 0, 1, 2, 3 äusseren Diagonalen dar[1]); die mehrflächigen Formen sind leicht zu zeichnen. Beim Sechseck will Girard 69 Formen

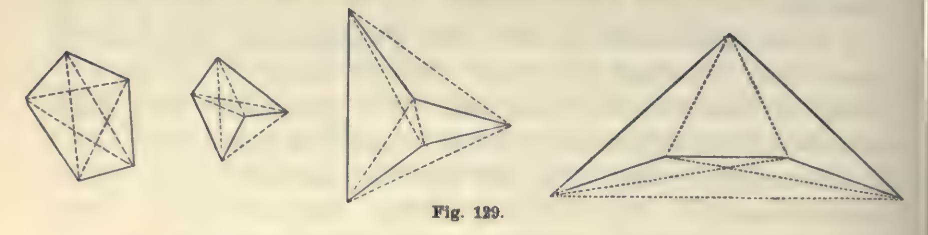


Fig. 129.

unterschieden wissen: 7 einflächige, 19 zweiflächige, 12 dreiflächige, 17 vierflächige, 4 fünfflächige, 6 sechsflächige, 3 siebenflächige, 1 achtflächige, wobei angenommen ist, es gebe in der Figur keinen Punkt, der mehr als zwei Seiten gemeinschaftlich wäre. Wie hier die Formen gleicher Flächenzahl unterschieden werden sollen, ist nicht ermittelt.

Johann Wilhelm Lauremberg[2]) (1590—1658) von Rostock, ein Satyriker in mecklenburger Mundart, der neben der Poesie Mathematik trieb und dieselbe an der Ritterakademie zu Sora auf Seeland lehrte, schrieb verschiedene seinem Unterrichte zu Grunde zu legende Lehrbücher, auch ein solches über Gromatik, also Feldmesskunst. Der Verfasser ist auf dem Gebiete der Dichtkunst zu gut bekannt, als dass man ihn nicht auch in dieser Verirrung schonend nennen müsste.

Daniel Schwenter[3]) (1585—1636) von Nürnberg war von den orientalischen Sprachen ausgegangen, deren Vertreter an der Altdorfer Hochschule er schon 1608 wurde. Mathematische Studien trieb er daneben für sich allein unter Benutzung der selbst minderwerthigen Werke von Wolfgang Schmid und Augustin Hirschvogel (S. 449). Dann wurde Prätorius ihm Freund und Berather, und endlich wurde ihm 1628 neben der Professur der orientalischen Sprachen auch diejenige der Mathematik in Altdorf übertragen. Schwenter selbst erzählt diesen seinen mathematischen Bildungsgang in der Vorrede zur *Geometria practica nova et aucta*, welche erstmalig 1618, dann mehrfach wiederholt im Drucke erschien[4]). Schwenter's

---

[1]) Günther l. c. S. 19 und briefliche Mittheilungen von A. N. Godefroy in Amsterdam, dem es gelang die Form mit drei äusseren Diagonalen herzustellen. [2]) Kästner III, 308—312. — Poggendorff I, 1386. — Allgem. deutsche Biographie XVIII, 58—59. Artikel von Erich Schmidt. [3]) Kästner III, 299—302. — Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche (Weissenburg 1872), S. 7—11 und: Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf (Separatabdruck aus dem III. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg), S. 25—27. [4]) Unsere Beschreibung stützt sich auf die 3. Auflage von 1641.

praktische Geometrie erfreute sich, wie aus den rasch aufeinander folgenden Auflagen ersichtlich ist, einer Beliebtheit, welche ein Eingehen auf ihren Inhalt empfehlen müsste, selbst wenn wir nichts von Bedeutung ihr zu entnehmen hätten. Sie zerfällt in vier Tractate, deren jeder mit besonderer Pagination versehen ist. Der „Tractatus I, darinnen auss rechtem Fundament gewiesen wird; wie man in der Geometria auff dem Papier und Lande, mit denen darzu gehörigen Instrumenten, als Zirckel, Richtscheid, Winckelhaken, etc. Ja zur noth ohne dieselben verfahren und practiciren solle" besteht aus sieben Büchern. Schwenter lehrt darin die verschiedenartigsten theils genaue, theils nur angenäherte Constructionen, wie sie bei Dürer, bei Clavius u. s. w. sich finden, auch einige neue Verfahrungsweisen, welche er für sich selbst in Anspruch nimmt. Da nirgend ein Beweis beigegeben ist, sondern einfach vorausgesetzt wird, der Schüler werde blindlings nach den Vorschriften des Lehrers sich richten, ohne die Frage nach dem Warum aufzuwerfen, so hält es schwer, zu entscheiden, ob Schwenter seine Zeichnungen da, wo er nicht ausdrücklich von blosser Annäherung redet, für genau hielt. Fast möchte es bei einer Neuntheilung des Kreises, die er sein Eigenthum nennt[1]), einem offenbar bewussten Abweichen von der Dürer'schen Vorschrift (S. 462), so scheinen, (Figur 130). Das Neuneck soll in den Kreis, der mit dem Halbmesser oa um den Mittelpunkt o beschrieben ist, eingezeichnet werden. Schwenter lässt nun zunächst den etwas grösseren concentrischen Kreis mit dem Halbmesser or beschreiben und in diesen die drei Fischblasen on, op, or. Die Gerade or theilt er in l und i in drei gleiche Stücke $ol = li = ir$ und zieht vlm senkrecht zu or bis zum Durchschnitte mit der Fischblase. Die Verbindungsgeraden ov, om des Mittelpunktes mit den solcherweise bestimmten Punkten der Fischblase schneiden verlängert den gegebenen Kreis in a und b, alsdann sei ab die gesuchte Neunecksseite. So recht will Schwenter seiner Erfindung allerdings nicht trauen, denn er fügt hinzu: „Weil aber die operation sehr misslich, ists am besten, du theilest einen Circkel erstlich in drey theil auss, und jeden theil wider Mechanisch in drey theil, so darffstu dich keines Irrthums befürchten." Von sprach-

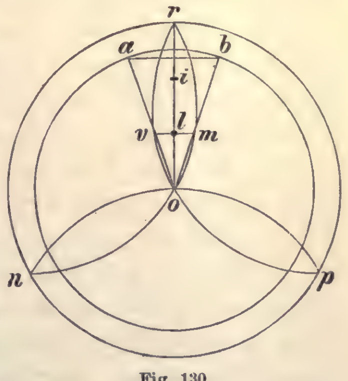


Fig. 130.

[1]) Die XXX Auffgab des vierdten Buchss dess ersten Tractats S. 205.

lichen Eigenthümlichkeiten mag auffallen, dass Schwenter eine Senkrechte bald *winckelrecht* bald *wagrecht* nennt[1]), und dass er *Hypothenusa*[2]) schreibt! Das Griechische scheint ihm demnach weniger geläufig gewesen zu sein als die orientalischen Sprachen. Von einer Beschreibung des Proportionalzirkels[3]) muss an späterer Stelle die Rede sein. Dem „Tractatus II Ohne einig künstlich Geometrisch Instrument, allein mit der Messrute und etlichen Stäben das Land zu messen", welcher in fünf Bücher zerfällt, hat Schwenter eine Vorrede an den Leser vorausgeschickt, in welcher er in eigenartiger Weise erörtert, wie er dazu gekommen sei, diesen Tractat zu verfassen. Vielfach behaupte man, Thales habe die Geometrie aus Aegypten nach Griechenland gebracht. Das könne ja wahr sein, schliesse aber nicht aus, dass auch anderwärts Geometrie geübt worden sei, und insbesondere zeigten viele Stellen des alten Testamentes solche Beschäftigungen an. Die Heiden seien daher nicht die Erfinder, sondern Geometrie sei eine uralte Kunst. Wo aber in den hebräischen Texten von Feldmessen und dergleichen die Rede sei, werde niemals eine andere Vorrichtung erwähnt als die Messruthe, Messtange oder Messschnur. Da habe er sich überlegt, wie weit man unter dieser Beschränkung kommen könne, und er habe auch nicht wenig von denjenigen erfahren, welche „wie man alsbald mit Ruten das Land überschlagen und messen soll" schon lange lehrten. Allerdings sei er weit über diese hinausgegangen, und das sei die Entstehung des vorliegenden Tractates. Er unterscheidet sich von dem ersten vornehmlich dadurch, dass in diesem zweiten Theile überall geometrische Beweise gegeben oder wenigstens in Erinnerung gebracht werden. Mit dem Unterschiede dagegen, dass in dem I. Tractate der Zirkel vielfach benutzt wird, der dem II. Tractate seiner Ueberschrift gemäss fremd sein sollte, ist es nicht so weit her. Auch im II. Tractate werden auf dem Felde Kreisbögen beschrieben, nur freilich nicht mittels eines Zirkels, sondern mittels einer Kette, welche mit je einem Ringe an zwei Stäben hängt, deren einer den Mittelpunkt bestimmt, während der andere unter Anspannung der Kette den herumbewegten Kreispunkt vorstellt. Zwei Dinge dürften besondere Erwähnung verdienen. In der 13. Aufgabe des 1. Buches des II. Tractates kommen Längen von 800, 900, 1500 Schritten vor. Zunächst werden in einem ersten Zusatze, im „ersten Erinnerung" mit Schwenter zu reden, diese Zahlen in 850, 750, 1500 abgeändert; eine zweite Erinnerung lehrt kleinere Zahlen anwenden, wie etwa 85, 75, 150, oder 17, 15,

---

[1]) S. 18 und 43 des I. Tractats. [2]) S. 17 des I. Tractats. [3]) S. 79 des I. Tractats.

30, oder $8\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, 15, damit man mit einer einzigen Messkettenlänge beim Abstecken auskomme. Die dritte Erinnerung endlich wirft die Frage auf[1]), ob man auch kleinere Zahlen anzuwenden im Stande sei, wenn theilerfremde Messzahlen wie 809, 704, 1301 von vorn herein vorliegen, oder wenn bei nur zwei Messungen die Zahlen 233, 177 auftreten? Schwenter bejaht die Frage unter Anwendung von Kettenbrüchen, so dass wir auf diese Stelle zurückzukommen haben, wenn wir von diesen Formen von Zahlenverbindungen reden. Unsere zweite Bemerkung bezieht sich auf die 5. Aufgabe des 3. Buches, in welcher die Dreiecksfläche aus den drei Seiten des Dreiecks hergeleitet werden soll. Schwenter sagt hier höchst auffallenderweise[2]), die Formel, nach welcher gerechnet werde, und welche selbtsverständlich die Heronische ist, stamme aus der Geometria Jordani und sei erstmalig von Paciuolo bewiesen worden. Letztere Meinung ist so weit richtig, als der erste gedruckte Beweis in der That bei Paciuolo (S. 330) zu finden ist; wie aber die Anführung des Jordanus zu verstehen sein möchte, ist räthselhaft. In dessen Büchern *De triangulis* kommt die Heronische Formel jedenfalls nicht vor. Der Inhalt des III. Tractates ist durch dessen Titel „Mensula Praetoriana, Beschreibung des nutzlichen Geometrischen Tischleins, von dem fürtrefflichen und weitberühmten Mathematico M. Johanne Praetorio S[eelig] erfunden“ genugsam bezeichnet. Schwenter hat in demselben den Messtisch, welchen sein Lehrer erfunden, und zu dessen Gebrauch er während des Unterrichtes die nöthige Anweisung gegeben hatte, ohne eine ausführliche Beschreibung desselben zu veröffentlichen, nachträglich zur allgemeinen Kenntniss gebracht und dadurch ebensowohl dem Ruhme jenes verstorbenen Lehrers als dem allgemeinen Nutzen einen wesentlichen Dienst erwiesen. Ausser dem Messtische kommt in diesem Tractate nur ein Winkelinstrument in Anwendung, welches bei Höhenmessungen nicht entbehrt werden kann, und welches im Wesentlichen noch immer mit Peurbach's geometrischem Quadrate übereinstimmt. Der III. Tractat besteht aus vier Büchern. Endlich der IV. Tractat, den die erste Auflage von 1618 allerdings noch nicht enthält[3]), handelt von einer Vorrichtung, welche in Italien am Anfange des Jahrhunderts durch Camillo Raverta[4]) von Mailand erfunden und 1602 von Curtio Casati[5]), gleichfalls einem Mailänder, beschrieben worden ist. Dieselbe setzt voraus, dass man nach

---

[1]) S. 68 des II. Tractates. [2]) S. 112 des II. Tractates. [3]) G. Wertheim brieflich. [4]) Hallervord, *Bibliotheca curiosa* pag. 42 (Königsberg und Frankfurt 1676). [5]) Zedler's Universallexicon beruft sich für ihn auf das uns unbekannte Werk Argelati, *Bibl. Mediol.*

dem Augenmaasse eine Gerade auf dem Papier in paralleler Lage zu einer in der Entfernung auf dem Felde zwischen gegebenen Endpunkten gedachten Geraden zeichnen könne. Schon Casati hatte gegen diese Erfindung, so hoch er sie preist, einige Bedenken, Schwenter theilte dieselben in verstärktem Maasse, und die spätere Zeit ist diesen Bedenken so sehr beigetreten, dass weder Raverta's noch Casati's Namen in den vollständigsten neueren Schriften über Feldmessung mehr vorkommen, während Muzio Oddi[1]) (1569—1638) aus Urbino, der Verfasser eines im Gefängnisse geschriebenen Werkes über Feldmessung von 1625, in welchem nach den uns bekannten Auszügen Neues sich nicht findet, erwähnt und wohl etwas über Verdienst gerühmt wird.

Beiläufig nennen wir Johann Ardüser[2]) (1584—1665) aus Davos, der als praktischer Meister in der Befestigungskunst berühmt ist und *Geometriae Theoricae et practicae* XII Bücher (Zürich 1627) herausgab, welches Werk in einer zweiten Bearbeitung von 1646 sich zu XIV Bücher erweiterte.

Ungefähr innerhalb derselben Lebensgrenzen wie Schwenter ist ein Schriftsteller in Ulm zu nennen, Johann Faulhaber[3]) (1580—1635). Er war der Sohn eines Webers und zum väterlichen Gewerbe bestimmt. Der Unterricht des Rechenmeisters David Selzlin (S. 611) führte ihn der Wissenschaft zu, und bald war er selbst Rechenmeister in Ulm, jedenfalls vor 1610, denn seine erste Veröffentlichung, welche diese Jahreszahl trägt, giebt ihm schon diesen Titel. Ihm gleichzeitig lebten in Ulm ein Arzt, Johannes Remmelin, und zwei Schulmänner, Zimpertus Wehe und Johann Baptista Hebenstreit, die beiden letzteren Gegner, der erste ein Freund und Gönner Faulhaber's. Die Streitigkeiten Faulhaber's drehten sich um Wortrechnungen. Aehnlich wie einst Michael Stifel hat auch Faulhaber in diese Spielereien sich verrannt, und er suchte die prophetischen Zahlen der Bibel auszubeuten, indem er sie mit Buchstaben, welchen Zahlenwerthe beigelegt waren, in Verbindung setzte. So war er durch sonderbare Zahlenhandhabung dazu geführt worden, in einem Kalender für 1618 auf den 1. September dieses Jahres einen Kometen zu verkünden. Ein solcher erschien zufälligerweise wirklich

---

[1]) Kästner III, 373. — Poggendorff II, 206. — Rossi, *Groma e squadro*, pag. 146—165 und 215—216. Poggendorff nennt 1631 als Todesjahr, Rossi 1638 mit Berufung auf die Ueberschrift eines von ihm beschriebenen Gemäldes.
[2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz IV, 25—36.
[3]) Kästner III, 111—152 und IV, 510—511. — Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts (Ulm 1867). — Allgem. deutsche Biographie VI, 581—583. Artikel von Höchstetter

und gab Veranlassung zu einem tiefgehenden Zwiespalte in Ulm. Faulhaber und seinen Freunden, zu welchen auch der Stadtpfarrer Dieterich gehörte, welcher sogar über den Kometen predigte, standen die erwähnten Schulmänner gegenüber, welche die Berechtigung zur Wortrechnung überhaupt und insbesondere zu astronomischen Vorhersagungen mittels derselben bekämpften. Faulhaber antwortete in heftigen Streitschriften, in welchen er seinen einen Gegner als „Hebandenstreit“ lächerlich zu machen suchte. Faulhaber's ausgesprochene Neigung zu überschwänglichen Dingen erwies sich ihm oftmals schädlich, eine Verbindung mit einem angeblichen Propheten brachte ihn sogar 1606 ins Gefängniss. Später trat er den Rosenkreuzern nahe und war überzeugter Alchymist. Es ist eine merkwürdige, wiederum an Michael Stifel erinnernde Erscheinung, dass mit diesen Schrullen wirkliche mathematische Begabung Hand in Hand ging, und dass die Wissenschaft gerade aus Faulhaber's Wortrechnungen Nutzen zog. Wir kommen in anderem Zusammenhange darauf zurück; hier, wo wir mit Geometrischem uns beschäftigen, ist nur eine Faulhaber'sche Schrift zu nennen, seine Ingenieurschule, die 1630—1633 in vier Theilen erschienen ist. Wie der Titel erkennen lässt, hat Faulhaber hier Feldmesserisches und auf die Befestigungskunst Bezügliches auseinandergesetzt. Bei einer Aufgabe mischen sich Geometrie und Wortrechnung oder mindestens prophetische Zahlen. Folgende sieben Zahlen nämlich können als weissagende betrachtet werden: 666 (Apokalypse XIII, 18), 1000 (Apokalypse XX, 2), 1260 (Apokalypse XI, 3 und XII, 6), 1290 (Daniel XII, 11), 1335 (Daniel XII, 12), 1600 (Apokalypse XIV, 20), 2300 (Daniel VIII, 14). Faulhaber verlangte im ersten Theile seiner Ingenieurschule aus Strecken, welche durch diese sieben Zahlen gemessen werden, ein Sehnensiebeneck herzustellen, dessen Winkel und den Halbmesser des Umkreises zu berechnen; es sei dieses eine „Question, welche sich durch die Logarithmos auff eine besondere newe Manier gar schön resolvieren lässt“. Eine Auflösung, soweit die Winkel in Betracht kommen, hat Faulhaber niemals veröffentlicht. Den betreffenden Kreishalbmesser gab er im zweiten Theile der Ingenieurschule zu 1582,6323 an, ohne anzudeuten, welchen Weg er zur Erlangung dieses Werthes eingeschlagen habe. Spätere Versuche, seinen Gedankengang zu ermitteln, schweben allzusehr in der Luft, als dass man ihnen geschichtlichen Werth beimessen könnte[1]).

---

[1]) Günther, Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Erlangen 9. März 1874. — German, Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Johann Faulhaber (Ulm 1876). — Günther's Recension, Zeitschr. Math. Phys. XXII, Histor.-litter. Abthlg. S. 34—36.

Einen Nebenbuhler auf dem Gebiete der Anfertigung von Instrumenten und der Baukunst fand Faulhaber in seinem Heimathsgenossen Joseph Furtenbach[1]) (1591—1667), den wir hier nennen, weil sein Name anderwärts nicht gut untergebracht werden kann und doch nicht vollständig fehlen soll. Furtenbach's Haus in Ulm, der sogenannte Erbsenkasten, gehörte durch die aller Orten im Garten u. s. w. angebrachten Grotten und dergleichen lange Zeit zu den grössten Sehenswürdigkeiten von Ulm.

Joachim Jungius[2]) (1587—1657) hat in der Geschichte der atomistischen Lehre eine allzubedeutende Rolle gespielt, als dass wir nicht gern erwähnten, dass er an den Universitäten zu Giessen und Rostock die Lehrstellen der Mathematik inne hatte, und dass er an letzterem Orte 1627 eine mehrfach neu aufgelegte *Geometria empirica* im Drucke herausgab.

Antoine de Ville, ein Schriftsteller über Befestigungswesen, verdankt seine Namensnennung an dieser Stelle einer in seinem Buche *Les fortifications* (1628) enthaltenen Vorschrift zur Herstellung regelmässiger Vielecke von n Seiten, welche sich ziemlich weit verbreitet hat. Abraham de Bosse, von welchem weiter unten die Rede ist, hat sie in seinem *Traité des pratiques géométrales et perspective* (1665) aufgenommen und Nicolas Bion[3]) (1653—1733), Landkarten- und Globenhändler in Paris, beschreibt sie in seinem *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques* (1713). De Ville's Vorschrift ist folgende[4]). Sei (Figur 131) C die Spitze eines über dem Kreisdurchmesser AB beschriebenen gleichseitigen Dreiecks, sei ferner $AE = ED = \frac{AB}{n}$. Wird CEQ gezogen und $QP' = AQ$ genommen, so ist AP' annähernd $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie. De Bosse hat die Vorschrift dahin verbessert, man solle CDP ziehen, wodurch AP noch näher mit $\frac{1}{n}$ der Kreisperipherie übereinstimme.

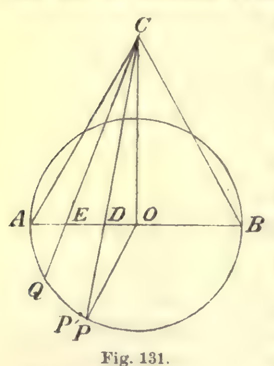


Fig. 131.

---

[1]) Kästner III, 366—368. — Ofterdinger l. c. — Allgem. deutsche Biographie VIII, 250—251. Artikel von Höchstetter. [2]) Wohlwill, Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im XVII. Jahrhundert (Hamburg 1887) und ebenderselbe, Joachim Jungius, Festrede am 22. October 1887 (Hamburg und Leipzig 1888). [3]) Poggendorff I, 194—195. [4]) H. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* in den Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol. X.

Wir gelangen nunmehr zu drei französischen Geometern ersten Ranges, welche weit über Allen, welche ausserhalb Griechenlands mit reiner, nicht rechnender Geometrie sich beschäftigt haben, stehen, so dass man versucht sein möchte, sie unmittelbar an die grossen Alexandriner anzuknüpfen. Wir meinen: Mydorge, Desargues, Pascal.

Claude Mydorge[1]) (1585—1647), ein genauer Freund von Descartes, stammte aus einer reich begüterten Beamtenfamilie. Auch er begann die gerichtliche Laufbahn, die er aber verliess, um unter dem Arbeitsverpflichtungen nicht mit sich führenden Titel eines Schatzmeisters (Trésorier de France) sich der Wissenschaft widmen zu können. Ein Werk von ihm über Kegelschnitte erschien 1631 in zwei Büchern, welchen zwei weitere Bücher 1639 folgten. Während die vier Bücher alsdann vereinigt wiederholten Abdruck fanden, ist eine selbst aus vier Büchern bestehende Fortsetzung verloren gegangen. Es heisst, ein Lord Cavendish und ein Lord Southampton, die als Freunde im Mydorge'schen Hause verkehrten, hätten sie mit nach England genommen, wo sie verschollen sind. Mehr als 1000 geometrische Aufgaben haben sich in der Handschriftensammlung der Pariser Akademie erhalten. Der Wortlaut der Aufgaben ist nachträglich auch im Drucke bekannt gegeben worden, der der zugehörigen Auflösungen nur zu sehr geringem Theile, und fast scheinen die interessantesten Auflösungen der Oeffentlichkeit vorenthalten geblieben zu sein. Dass Mydorge beispielsweise zur Siebentheilung des Kreises noch der alten Näherungsmethode sich bediente, die halbe Dreiecksseite als Siebenecksseite zu benutzen, kümmert uns weit weniger, als wenn wir wüssten, welches das Näherungsverfahren Mydorge's bei Auflösung seiner 363. Aufgabe war: ein Quadrat in ein regelmässiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl zu verwandeln. Unter den dort vorkommenden Kunstausdrücken ist Parallaxe in der Bedeutung eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Kreisringes zu nennen, und insbesondere das Wort Parameter eines Kegelschnittes, welches Mydorge einführte[2]). Das Kegelschnittwerk war jedenfalls Mydorge's verdienstlichste Leistung und enthält neben schon Bekanntem aber neu Dargestelltem wesentlich neue Sätze. Im 2. Buche hat man den Satz bemerkt, dass, wenn von einem Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes Radien nach allen Punkten der Curve gezogen und diese in einem gegebenen Verhältnisse verlängert werden, ihre Endpunkte einen neuen, dem erstgegebenen ähnlichen Kegel-

[1]) Kästner III, 196. — Montucla II, 74. — Chasles, *Aperçu hist.* 89 (deutsch 85). — C. Henry im *Bulletino Boncompagni* XIV, 271—350; XVI, 514—527. [2]) Gino Loria, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (Genova 1892), pag. 11.

schnitt bilden. Im 3. Buche ist in drei Sätzen (39, 40, 41) die Aufgabe gelöst, einen gegebenen Kegelschnitt auf einen gegebenen Kegel zu legen.

Girard Desargues[1]) (1593—1662), aus Lyon, spielt innerhalb der Geschichte der Mathematik eine höchst eigenthümliche Rolle. Von den ersten Geistern seiner Zeit geschätzt, von neidischem Unverstande begeifert, ist er so gut wie vergessen gewesen, bis man nicht etwa ein Exemplar seines 1639 in Paris gedruckten Hauptwerkes, sondern eine vollständige Abschrift desselben auffand, welche im Jahre 1679 durch Philippe De la Hire, einen hervorragenden Geometer, der selbst schon 1671 ein bedeutendes Werk über Kegelschnitte im Drucke herausgegeben hatte, angefertigt worden ist[2]). Wie Jemand in jener Zeit dazu kam, ein acht Druckbogen starkes Buch ganz abzuschreiben, statt es buchhändlerisch sich anzueignen, ist ein vollständiges Räthsel. Allenfalls wäre eine einzige Erklärung möglich, dass nämlich damals bereits kein Exemplar mehr aufzutreiben war, weil das zu schwer geschriebene und der grossen Leserwelt durchaus unverständliche Werk auch unverkäuflich war und als Maculatur vernichtet wurde[3]). Auf die wenigen geistig Ebenbürtigen machte es allerdings einen wesentlich anderen Eindruck, der aus den Briefesworten Fermat's ersichtlich ist: „Ich schätze Herrn Desargues sehr, und zwar um so höher, als er allein der Erfinder seiner Kegelschnitte ist. Sie sagen, das Büchelchen gelte für kauderwälsch (*jargon*). Mir erscheint es sehr verständlich und geistvoll“[4]). Desargues lebte seit 1626 etwa in Paris und wurde ein regelmässiger Theilnehmer an den Zusammenkünften geistig hochstehender Männer, welche es liebten, einander die Ergebnisse ihrer Forschungen mitzutheilen, während dieselben noch im Gange waren, welche zugleich auf Reinheit und Schönheit des sprachlichen Ausdruckes hielten, und welche so die Vorgänger der französischen Akademie wurden, von welcher man beinahe sagen möchte, Richelieu habe sie 1635 nicht sowohl gegründet als bestätigt. Wenigstens waren die ersten ernann-

---

[1]) *Oeuvres de Desargues réunies et analysées* par M. Poudra. Paris 1864. Wir citiren diese Ausgabe unter dem Namen Desargues. — Montucla II, 74—75. — Chasles, *Aperçu hist.* 74—79, 331—334 (deutsch 71—75, 344—348). — Marie, *Histoire des sciences mathématiques* III, 201—225. — Chrzaszczewski, Desargues' Verdienste um die Begründung der projectivischen Geometrie. Grun. Archiv 2. Reihe, XVI, 119—149. [2]) Desargues I, 132. [3]) Wer solches für undenkbar hält, erinnere sich an das Schicksal der Ausdehnungslehre von Grassmann und der Statik von Möbius, deren erste Auflagen in der Mitte des XIX. Jahrhunderts als unverkäuflich eingestampft wurden. [4]) Fermat, *Varia Opera mathematica* pag. 173.

ten Mitglieder lauter Persönlichkeiten, welche an jenen Zusammenkünften theilgenommen hatten. Nachdem die französische Akademie ins Leben gerufen war, dauerten ungezwungene, wenn auch regelmässige Vereinigungen von Mathematikern und Physikern weiter fort, bis 1666 sich abermals eine förmliche Gründung vollzog, die der *Académie des sciences* durch Colbert. In jener frühen Zeit, von welcher wir gegenwärtig reden, bildete sich auf die erwähnte Weise der Bekanntenkreis von Desargues. Pater Mersenne, Roberval, der ältere Pascal, Carcavy, Bouillau, Gassendi gehörten dazu, lauter Persönlichkeiten, die uns mehr als nur einmal begegnen werden. Auch Descartes lernte Desargues hier kennen, und sie wurden Freunde, als Desargues 1628 an der Belagerung von La Rochelle als Kriegsbaumeister theilnahm und Descartes hinreiste, um die grossartigen Arbeiten zu besehen. Zu seiner Lyoner Heimath hat Desargues auch von Paris aus enge Beziehungen unterhalten. So z. B. wurden, als 1646 das neue Rathhaus jener Stadt gebaut wurde, die Risse an Desargues zur Begutachtung eingesandt und von ihm nicht unwesentlich abgeändert. Um 1650 kehrte Desargues vollständig nach Lyon zurück und war dort noch als Baumeister thätig. Auch scheint er damals strebsame Handwerker an sich gezogen zu haben, um ihnen Unterricht in denjenigen Abschnitten der Geometrie zu ertheilen, welche beim Bauen sich als unerlässlich vordrängen. Perspectivisches Zeichnen und der Steinschnitt gehören hierher, und auch schriftstellerisch hat Desargues sie bearbeitet. Sein erstes Buch von 1636 ist die *Perspective*; 1640 erschien ein Buch über Steinschnitt, Perspective und Herstellung von Sonnenuhren unter dem Titel: *Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L.*[1]) *touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en perspective comme en géométral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil.* Dann gab Abraham Bosse, ein geschickter Kupferstecher und der begabteste Schüler von Desargues, 1648 ein grösseres Werk über Perspective heraus, welches in bedeutsamen Abschnitten als von Desargues verfasst betrachtet werden muss und auch gleich damals betrachtet wurde, da Gegenschriften, welche im Drucke erschienen, und welche die geometrische Auffassung zu Gunsten der handwerksmässigen, wenn auch nachweislich nicht selten irrigen Uebung bekämpften, sich ohne Weiteres gegen Desargues richteten. Alle diese Bücher des Desargues lassen sich als Vorläufer jener Wissenschaft bezeichnen, welche un-

---

[1]) Abkürzung für *Sieur Girard Desargues Lyonais.*

gefähr 150 Jahre später den Namen der descriptiven Geometrie erhielt. Noch ungleich wichtiger und an fruchtbaren neuen Gedanken überreich war das, wie wir erzählt haben, in De la Hire's Abschrift erhaltene Werk von 1639: *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan*, gewöhnlich kurz als *Brouillon project* des Desargues bezeichnet, ohne dass es mit dem die gleichen Anfangsworte im Titel enthaltenden Buche von 1640 verwechselt würde. Desargues nennt das Werk „Erste Niederschrift des Entwurfes eines Versuches über die Thatsachen, zu welchen der Schnitt eines Kegels durch eine Ebene Veranlassung giebt". Vorsichtiger, als es in den Anfangsworten dieses Titels geschah, hat sich niemals ein Schriftsteller ausgesprochen, aber die Neuheit der Auffassung machte Vorsicht nothwendig. Wir müssen einige wesentliche Dinge hervorheben und darunter zunächst die Anwendung des Unendlichen in der Geometrie. Nicht als ob noch kein Mathematiker mit dem Begriffe des Unendlichen als dem des Stetigen nahe verwandt sich beschäftigt hätte. In jedem Jahrhunderte tauchten solche Unendlichkeitsbetrachtungen auf, zuletzt bei Vieta (S. 586), wo er die krumme Linie als eine Zusammensetzung unendlich vieler unendlich kleiner Strecken erklärte. Auch Kepler hat 1615, Cavalieri 1635 in Druckwerken, deren Besprechung uns obliegen wird, wenn wir von den Anfängen der Infinitesimalrechnung reden, den gleichen Gedanken zu nie geahnten Folgerungen ausgebeutet, aber bei Desargues waren es ganz andere Unendlichkeitsbetrachtungen als bei diesen Vorgängern. Zwei oder mehrere Gerade treffen in einem Punkte zusammen, welcher das Ziel ihrer Anordnung, *but d'une ordonnance de droites*, heisst[1]). Dieser Zielpunkt kann in endlicher, er kann auch in unendlicher Entfernung liegen, im letzteren Falle heissen die Geraden parallel. Der menschliche Geist sucht die Grösse gegebener Linien zur Erkenntniss zu bringen und fasst sie als Gesammtheiten so kleiner Theile, dass deren beiderseitige Grenzen zusammenfallen[2]). Denkt man sich einen Kreis und einen Punkt ausserhalb der Kreisebene, und lässt man eine durch den Punkt hindurchgehende Gerade längs der Kreislinie hingleiten, so beschreibt

---

[1]) Desargues I, 104. [2]) Ebenda I, 103: *La raison essaye à connaître des quantités infinies d'une part, ensemble de si petites que leurs deux extrémités opposées sont unies entre elles.* H. Poudra hat diese Stelle durchaus missverstanden und gemeint, Desargues habe sagen wollen, es gebe nur einen Unendlichkeitspunkt einer Geraden, woran er gewiss nicht dachte. Auch in I, 105: *toutes ces droites sont entrelles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie, et chacune d'une part et d'autre* darf man jenen modernen Sinn

sie dabei eine Kegeloberfläche; entfernt sich aber der Punkt auf unendliche Entfernung von der Kreisebene, so geht der Kegel, oder die Rolle, *rouleau*, wie Desargues sich gleichfalls ausdrückt, in eine solche von überall gleicher Dicke über, so wird sie zur Säule, *colomne*, oder zum Cylinder[1]). Nicht minder neu waren Sätze, welche auf Punkte sich bezogen, die auf einer Geraden liegen. Es sei ein Punkt A jener Geraden als Wurzel, *souche*, bezeichnet und auf ihn je ein Paar, *couple*, von Entfernungen nach bestimmten Punkten bezogen[2]), z. B. ein Punktepaar B und H, ein zweites C und G, ein drittes D und F. Bildet man die Rechtecke aus den Entfernungen eines Punktepaares von der Wurzel, welche durch die Producte jener Entfernungen gemessen werden, so können die drei Producte einander gleich sein: $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$. In diesem Falle bilden die sechs Punkte eine Involution[3]). Die neuere Geometrie hat bekanntlich diesen Kunstausdruck sich angeeignet, aber mit einer anderen Definition versehen, so dass der Satz der Involution mit demjenigen übereinstimmt, den wir (S. 659) in einem der Porismen Fermat's enthalten fanden. Man hat nachgewiesen[4]), dass eine innere Uebereinstimmung zwischen beiden Ausdrucksweisen vorhanden ist. Ob Fermat dieses auch wusste, oder als er sein Porisma aufstellte, mit dem Brouillon project bekannt war, dürfte kaum zu ermitteln sein. Zieht man durch die sechs Punkte einer Involution ebensoviele Zweige, *rameaux*, mit einem einzigen Zielpunkte, so entsteht ein Busch, *ramée*, der die Eigenschaft besitzt, dass jede durch ihn hindurchgehende Gerade in sechs Punkten geschnitten wird, die abermals eine Involution bilden[5]). Desargues erkennt auch, dass, wenn ein Punkt auf die Wurzel fällt, der ihm entsprechende andere Punkt des Punktepaares in die Unendlichkeit fallen muss, weil nur Null mal Unendlich ein endliches Product liefern kann[6]). Hierauf vereinigte Desargues in seinen Untersuchungen die von ihm geschaffene Theorie der Involution mit der Kegelschnittlehre. Eine doppelte Neuerung führte er hier ein. Erstens wurde von Eigenschaften der Kreislinie, welche die Grundebene des Kegels begrenzte, auf die Eigenschaften des Kegelschnittes geschlossen, d. h. eine perspectivische Beweisführung war entdeckt. Zweitens konnte dementsprechend jetzt von Kegelschnitten überhaupt die Rede sein, statt dass Eigenschaften aller drei besonderen Kegelschnittarten in ebensovielen Sätzen ausgesprochen und bewiesen werden mussten. Von den zahlreichen allgemeinen

---

[1]) Desargues I, 157—158. [2]) Ebenda I, 112. [3]) Ebenda I, 119. [4]) Chasles, *Aperçu hist.*, Note X, pag. 308—327 (deutsch 318—340). [5]) Desargues I, 147. [6]) Ebenda I, 127.

Sätzen erwähnen wir nur einen, der vielfach den Namen Satz von Desargues enthalten hat, dass nämlich jedes in einem Kegelschnitte einbeschriebene Vierseit nebst dem Kegelschnitte selbst eine beliebige Transversale in den sechs Punkten einer Involution schneiden[1]). Auch die Polare eines Punktes mit Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt war Desargues nicht unbekannt[2]), wenn auch dieser Name erst späteren Ursprunges ist. Diese kurzen Auszüge mögen genügen, das vorher über das Brouillon project des Desargues Gesagte näher zu begründen. Bemerkenswerth dürfte noch sein, dass Desargues hier den Kunstausdruck *coadjuteur*[3]) einzubürgern versuchte für das, was bei Anderen (*ailleurs*) costé droit, parametre genannt werde. Der letztere noch nicht lange (S. 673) vorhandene Name behielt das Uebergewicht. Von den Verdiensten, welche Desargues als Baumeister sich erwarb, haben wir nicht zu reden. Einen einzigen Punkt müssen wir erwähnen. Nach der Aussage von De la Hire hat Desargues die epicycloidale Gestalt der Zähne ineinandergreifender Räder als diejenige erkannt und in Anwendung gebracht, bei welcher die geringste Reibung stattfindet[4]), während die Erfindung der Epicycloide, wie wir uns erinnern (S. 461), Dürer angehört.

In dem S. 675 erwähnten Werke von Abraham Bosse über Perspective ist namentlich ein Satz bemerkenswerth, den der Verfasser 1636 von Desargues kennen gelernt haben will, und der darin bebesteht, dass wenn zwei geradlinige Dreiecke in einer Ebene so liegen, dass Verbindungsgerade ihrer gleichliegenden Ecken in einem und demselben Punkte zusammentreffen, alsdann auch ihre gleichliegenden Seiten sich in drei derselben Geraden angehörenden Punkten schneiden und umgekehrt[5]). Derartige Dreiecke haben bekanntlich durch Poncelet den Namen homologer Dreiecke erhalten.

Ein einziger Schriftsteller verstand Desargues' geometrische Leistungen sofort so vollkommen, dass er den eröffneten Weg weiter fortzugehen im Stande war: Blaise Pascal[6]) (1623—1662). Wenn man der Erzählung seiner Schwester trauen darf, fand der frühreife Knabe, ohne vorher mathematischen Unterricht genossen zu haben, aus sich heraus den geometrischen Satz von der Gleichheit des Aussenwinkels am Dreiecke mit der Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel, worauf ihm zur belohnenden Erholung in

---

[1]) Desargues I, 186. [2]) Ebenda I, 164. [3]) Ebenda I, 203. [4]) Ebenda I, 31. [5]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 82—83 (deutsch 79—80). [6]) Dreydorff, Pascal, sein Leben und seine Kämpfe (Leipzig 1870). — Cantor, Blaise Pascal (Preussische Jahrbücher XXXII, 212—237). — *Oeuvres de Pascal* (Paris 1872 bei Hachette). Wir citiren diese Ausgabe der Werke unter dem Namen Pascal.

seinen Spielstunden eine lateinische Uebersetzung des Euklid in die Hände gegeben wurde. Derselben Quelle entstammt die Erzählung, Pascal's Vater, Etienne Pascal, welcher selbst ein ganz tüchtiger Mathematiker war, und während seines Aufenthaltes in Paris (1631—1638) an den Zusammenkünften von Mathematikern sich betheiligte, deren wir (S. 674) gedachten, habe nicht nur den Sohn zu jenen Zusammenkünften mitgenommen, sondern dem Knaben sei es gestattet gewesen, sich in die Besprechungen einzumischen. Sicher ist durch Pascal's eigene Aussage[1]) von 1654, dass er im Alter von erst 16 Jahren, mithin vor 1640, ein Werk über Kegelschnitte verfasst hat, welches Leibniz, dem es später, längst nach Pascal's Tode, zur Begutachtung vorlag, zum Gegenstande eines unter dem 30. August 1676 an Pascal's Neffen gerichteten Briefes machte. Leibnitz verlangte nachdrücklich eine baldige Drucklegung des Werkes, welche um so dringender sei, als Lehrbücher erschienen, welche zu einem Abschnitte des Pascal'schen Werkes in Beziehung stünden[2]). Leider wurde Leibnizen's Wunsch nicht erfüllt. Nur ein ganz kurzes Bruchstück *Essai sur les coniques* ist im Drucke bekannt geworden[3]), das Meiste ging verloren. Man ist daher fast ausschliesslich auf den Leibnizischen Brief für die Kenntniss des Inhaltes von Pascal's Jugendwerk angewiesen. Ein von Leibniz abgeschriebenes und aus dessen Nachlass veröffentlichtes Bruchstück[4]) handelt nur von der Entstehung eines Kegelschnittes mittels Kegel und Ebene. Die Ellipse wird darin *Antobola* genannt. Ueber den Ursprung von Pascal's Forschungen giebt dessen Essai eine willkommene Ergänzung. „Wir beweisen, sagt Pascal[5]), auch die nachfolgende Eigenschaft, deren erster Entdecker Herr Desargues aus Lyon ist, einer der grossen Geister unserer Zeit, einer der besten Kenner der Mathematik und unter Anderem der Kegelschnitte, wie seine Schriften über diesen Gegenstand, so kurz sie gefasst sind, dem reichlich zeigen, welcher in sie einzudringen sich bemüht. Ich gestehe es gern ein, dass ich seinen Schriften das Wenige, was ich über diesen Gegenstand gefunden habe, schulde, dass ich, so weit es mir möglich war, gesucht habe seine Methode nachzuahmen, welche darin besteht, dass er, ohne des Axendreiecks sich zu bedienen, von allen Kegelschnitten im Allgemeinen handelte." Darauf folgt der Desargues'sche Satz vom Sehnenviereck des Kegelschnittes. Als erstes Lemma[6]) nennt ferner

---

[1]) Pascal III, 219—220: *Conicorum opus completum et conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens; quod quidem nondum sexdecimum aetatis annum assecutus excogitavi, et deinde in ordinem congessi.* [2]) Ebenda III. 468. [3]) Ebenda III, 182—185. [4]) C. J. Gerhardt, Berl. Acad. Ber. 1892, S. 197—202. [5]) Pascal III, 184 lin. 14—30. [6]) Ebenda III, 182.

Pascal aber ohne Beweis den Satz, welcher als Satz vom Pascalschen Sechseck bekannt geblieben ist: Jedes Sehnensechseck eines Kegelschnittes hat die Eigenschaft, dass die drei Durchschnittspunkte von je zwei einander gegenüberliegenden Seiten auf einer und derselben Geraden sich befinden. Pascal spricht den Satz zunächst allerdings in seiner Beschränkung auf den Kreis aus, indem er sich eines Kunstausdruckes bedient, der einem Desargues'schen nachgebildet ist. *Ordonnance de droites* heisst bei Jenem der gemeinsame Durchschnittspunkt mehrerer Geraden und Pascal sagt von Geraden, die einen gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen, sie seien gleicher Anordnung, *de meme ordre.* Ist $KNOVQP$ ein Kreissehnensechseck und PK, OV schneiden sich in M, während VQ, KN sich in S schneiden, so muss der Durchschnittspunkt von NO, QP mit M und S in gerader Linie liegen, und das heisst bei Pascal: NO, QP, MS müssen gleicher Anordnung sein. Kehren wir zum Leibnizischen Briefe, als der einzigen Quelle, welche einige Auskunft ertheilt[1]), zurück und entnehmen ihm die Inhaltsübersicht des verlorenen Werkes. An der Spitze stand die perspectivische Betrachtung, welche jeden Kegelschnitt optisch durch Durchschneidung des Strahlenkegels vom Auge nach dem Grundkreise erzeugt, indem der Kreis auf die Schnittebene sich projicirt[2]). Dann folgten die Eigenschaften einer gewissen aus sechs Geraden gebildeten Figur, des *Hexagramma mysticum,* unzweifelhaft des Pascal'schen Sechsecks unter Entfernung der oben erwähnten Beschränkung auf den Kreis, nachdem einmal der perspectivische Zusammenhang zwischen Kreis und Kegelschnitt hergestellt war. Das Hexagramm war in einem dritten Abschnitte benutzt, um die Eigenschaften von Tangenten und Sehnenvierecken von Kegelschnitten nebst dabei auftretenden harmonischen Theilungen und Durchmessereigenschaften abzuleiten[3]). Ein vierter Abschnitt von den Proportionen zwischen den Abschnitten von Tangenten und Secanten scheint den gleichen Gegenstand weiter ausgebeutet und conjugirte Durchmesser sowie Brennpunkte besprochen zu haben[4]). Was im fünften Abschnitte stand, ist aus dessen Ueberschrift[5]) „von Punkten und Geraden, welche ein Kegelschnitt berührt" schon einigermassen zu entnehmen. Deutlicher sprach sich Pascal in einem Schreiben aus. Bei Pater Mer-

---

[1]) Pascal III, 466—468. [2]) *projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli in quibuscunque oculi, plani ac tabellae positionibus* und *la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons.* [3]) *unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur.* [4]) *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium; de correspondentibus diametrorum; de summa et differentia laterum, seu de focis.* [5]) *De punctis et rectis quas sectio conica attingit.*

senne hatten bis zu dessen Tode 1648 regelmässige wöchentliche Zusammenkünfte von Mathematikern, eine Art freier Akademie, stattgefunden. An deren Stelle traten Zusammenkünfte ausschliesslicher Anhänger von Descartes. Pascal hegte den Wunsch, wieder an jene ältere Vereinigung von weniger ausgesprochenem Parteicharakter anzuknüpfen, und das war die allerdings unerreichte Absicht[1]) eines Briefes von 1654, in welchem er die Arbeiten angab, welche damals fertig bei ihm bereit lagen. Dort spricht er nämlich von der Herstellung von Kegelschnitten, welche fünf beliebigen Bedingungen genügen[2]), worunter das Hindurchgehen durch gegebene Punkte und das Berühren gegebener Geraden inbegriffen sei. Eine sechste Abtheilung oder Abhandlung endlich war nach Leibnizens Urtheil dazu bestimmt, für sich allein veröffentlicht zu werden, weil Mancherlei aus dem zweiten Abschnitte, insbesondere die Definition des Hexagramma mysticum, dort wortgetreu wiederkehrte. Wenn Leibniz der Einzige war, welcher über die Untersuchungen des jungen Pascal über Kegelschnitte einen auf uns gelangten Bericht verfasst hat, so war er nicht der Einzige, der Kenntniss von ihnen nahm[3]). Descartes zwar dürfte nur den schon zu Pascal's Lebzeiten gedruckten Essai gesehen haben, und der von ihm berichtete Ausspruch, diese Schrift sei unmöglich die Arbeit eines 16jährigen jungen Mannes, sondern rühre, wenn nicht von Desargues, jedenfalls von Pascal dem Vater her, dürfte niemals erfolgt sein[4]), aber Pater Mersenne muss doch wohl das grössere Werk gekannt haben, um 1644 die Behauptung drucken zu lassen, Pascal habe aus einem einzigen allgemeinen Lehrsatze 400 Folgerungen abgeleitet, ja den ganzen Apollonius darin eingeschlossen gefunden. Wir haben hier noch eines Bruchstückes zu gedenken, welches von Pascal vorhanden ist, dessen Entstehungszeit sich aber nicht genauer bestimmen lässt, als durch die einzige Thatsache, dass das Descartes'sche *Cogito ergo sum* darin angeführt ist, womit eine obere Grenze etwa auf das Jahr 1637 als Druckjahr des Discours de la méthode gewonnen wird. Es ist eine Abhandlung über die Methode der geometrischen Beweisführung[5]). Sie allein, sagt Pascal, entspreche den Anforderungen, welche man an

---

[1]) Briefliche Mittheilung von P. Tannery. [2]) Pascal III, 219. [3]) Montucla II, 62. — Chasles, *Aperçu hist.* 73 und 330 (deutsch 70 und 343). [4]) So schon Bayle im *Dictionnaire historique* s. v. Pascal. Die entgegengesetzte Meinung stammt von einem Anonymus her, welcher sie in einer Vorrede aussprach, ohne eine Quelle dafür anzugeben, welche aber in einem Briefe Descartes' vom April 1640 zu finden sein dürfte. Dann fand die Legende durch Montucla unberechtigte Verbreitung. [5]) Pascal III, 163—182. Die im Texte hervorgehobene Stelle III, 178.

Definitionen, an Axiome, an irgend welche Beweisführungen zu stellen berechtigt sei, und welche zusammengefasst acht Vorschriften bilden. 1. Man soll Nichts definiren wollen, was an sich so bekannt ist, dass es an einfacheren Ausdrücken zu dessen Erklärung fehlt. 2. Man soll keinen irgend dunkeln oder Zweifel gestattenden Ausdruck ohne Definition lassen. 3. Man soll bei den Definitionen nur solcher Wörter sich bedienen, welche entweder vollkommen bekannt sind, oder vorher ihre Erklärung gefunden haben. 4. Man soll keinen nothwendigen Grundsatz, so klar und einleuchtend er sei, weglassen, ohne die Frage zu stellen, ob man denselben als Axiom gelten lasse. 5. Man soll als Axiome nur Dinge aufstellen, die an sich vollkommen einleuchtend sind. 6. Man soll Nichts zu beweisen suchen, was dergestalt einleuchtend ist, dass es keine klareren Beweismittel giebt. 7. Man soll jeden Satz beweisen, dem irgend Dunkelheit anhaftet, und als Beweismittel nur sehr einleuchtende Axiome oder vorher schon Bewiesenes, beziehungsweise Zugestandenes anwenden. 8. Man soll fortwährend in Gedanken das Definirte durch seine Definition ersetzen, um nicht vermöge des vielfachen Sinnes von Wörtern, die innerhalb der Definition enger gefasst wurden, zu Irrthümern verleitet zu werden. Die drei negativen Vorschriften (1., 4., 6.), fährt Pascal fort, könne man vielleicht als minder nothwendig ohne Gefahr vernachlässigen, die fünf anderen aber sind von absoluter Nothwendigkeit, und man könne keine derselben erlassen, ohne in wesentliche Mängel, oftmals sogar in Fehler zu verfallen. Wir wollen nicht versäumen, darauf aufmerksam zu machen, dass in diesem Pascal'schen Bruchstücke der erste moderne Versuch einer Philosophie der Mathematik gemacht ist. Auch eine neue Einleitung in die elementare Geometrie scheint Pascal vorbereitet zu haben, von welcher sich Leibniz ein Bruchstück abschrieb[1]).

Mydorge, Desargues, Pascal standen insgesammt in Beziehung zu Descartes. Von ihm haben wir jetzt zu reden. Réné Descartes du Perron (1596—1650), latinisirt Cartesius, gehört zu den Persönlichkeiten, deren vielbewegtes Leben die zahlreichsten Schilderungen gefunden hat. Man weiss, dass er 1604—1610 ein Zögling des Jesuitencollegiums La Flêche war. Im Jahre 1614 führte er in Paris das ausschweifendste Leben, aus welchem er sich nach einem Jahre plötzlich zurückzog, um in einem Verstecke ernsten Studien sich zu widmen. 1617—1627 durchstreifte er Europa als Glücksritter, zugleich überall auf die Erweiterung seiner Kenntnisse bestrebt. Holland, Deutschland, Ungarn, dann wieder Holland, Italien durchstreifte

---

[1]) C. J. Gerhardt, Berl. Akad. Ber. 1892, S. 202—204.

er nach allen Richtungen. In Breda war er 1618 in Verkehr mit dem vielseitig gelehrten Isaak Beeckman, der von Einfluss auf sein damals geschriebenes, aber erst 1648 gedrucktes Compendium Musicae gewesen ist. Dann war er 1620 in Ulm bei Johann Faulhaber, von dem er sich in algebraischen Dingen unterrichten liess[1]). 1628 nahm er an der Belagerung von La Rochelle theil, wo Desargues, wie wir sahen (S. 675), Ingenieurdienste leistete. Dann war Descartes 1629 wieder in Holland, von wo er 1631 eine Reise nach England, 1634 eine solche nach Dänemark unternahm. Den Verkehr mit seiner Familie hatte er vollständig abgebrochen. Den Tod des Vaters, Joachim Descartes, erfuhr er erst drei Monate nach dem Ereignisse, als er 1640 brieflich die Absicht kundgab, ein aussereheliches Töchterchen zur Erziehung nach Frankreich zu bringen. Da auch das Kind damals starb, blieb Descartes in Holland, philosophisch-religiöse Kämpfe dort bestehend, die zu einem geheimen, gefahrdrohenden Anklageverfahren gegen ihn führten, welches nur mit Mühe unter Beihilfe des französischen Gesandten niedergeschlagen wurde. Um 1643 trat Descartes in Briefwechsel mit der Prinzessin Elisabeth von der Pfalz, zu deren Besuch er dreimal 1644, 1647, 1648 nach Frankreich zurückkehrte. Auf der ersten Reise knüpfte er mit De Chanut, dem französischen Gesandten in Stockholm, persönliche Beziehungen an, welche seit 1647 einen Briefwechsel mit der Königin Christina von Schweden im Gefolge hatten. Ihrem Rufe folgte Descartes 1649 nach Stockholm, um dort nach wenigen Monaten zu sterben. Die für die Geschichte der Mathematik wichtigste Schrift Descartes' ist seine 1637 im Drucke erschienene *Géométrie*. Ausserdem ist sein Briefwechsel eine nicht zu vernachlässigende Quelle. Claude Clersellier (1614—1684 oder 1686), Parlamentsadvocat in Paris, der besonders nach dem Tode des Pater Mersenne in engster Beziehung zu Descartes stand, hat diesen Briefwechsel 1667 in drei Bänden herausgegeben. Beide kommen hier, wo wir nur Reingeometrisches besprechen, nicht in Betracht, sondern nur ein mathematisches Bruchstück aus ganz unbekannter Zeit, welches selbst nur in einer zwischen 1672 und 1676 durch Leibniz genommenen Abschrift lückenhafter Natur vorhanden ist[2]). Es bezieht sich auf die Lehre

---

[1]) Doppelmayr S. 91 Note aa. [2]) *Oeuvres inédites de Descartes par M. le Comte Foucher de Careil* II, 214 (Paris 1860). — Artikel von Prouhet und Mallet in der *Revue de l'instruction publique*, Nummern vom 22. December 1859, 5. Januar, 1. und 22. November, 6. December 1860. — Prouhet in den *Compt. Rend. de l'Académie des sciences* vom 23. April 1860. — Baltzer in den Monatsber. Berlin. Acad. 1861, S. 1043—1046. — De Jonquières in der von Eneström herausgegebenen *Bibliotheca mathematica* 1890, pag. 43—55.

von den Vielflächnern und enthält folgende Sätze: Das Product der Eckenzahl e in 4 Rechte um 8 Rechte verringert ist gleich der Summe w aller Polygonwinkel auf der Oberfläche des Vielflächners. Für die Summe w gilt die Wahrheit, dass sie mit dem Vierfachen der Flächenzahl f vereinigt die doppelte Anzahl aller Polygonwinkel, beziehungsweise das Vierfache der Kantenzahl k liefert, indem die Winkelanzahl desshalb der doppelten Kantenzahl gleichkommt, weil jede Kante zu zwei Flächen gehört und in jeder derselben bei der Winkelbildung mitwirkt. Die beiden Gleichungen $w = 4e - 8$, $w + 4f = 4k$ führen vereinigt zu der neuen Gleichung $e + f = k + 2$. Descartes kleidet sie in die Worte: *Numerus verorum angulorum planorum est* $2\varphi + 2a - 4$[1]), indem die Zahl w der ebenen Winkel, wie wir soeben bemerkt haben, der doppelten Kantenzahl gleichkommt, φ die Flächenzahl (unser f), a die Zahl der körperlichen Winkel (*angulorum solidorum*) oder die Eckenzahl (unser e) bedeutet. Wir haben die Descartes'schen Buchstaben durch andere ersetzt, um die Form zu erhalten, in welcher später Euler den Satz neu entdeckte, welcher von diesem den Namen des Euler'schen Polyedersatzes zu führen pflegt. Descartes hat auch folgende Ungleichheiten noch behauptet: Die Zahl der Polygonwinkel ($2k$) ist mindestens das Dreifache der Eckenzahl, d. h. $2k \geqq 3e$; das Doppelte der um 2 verminderten Eckenzahl ist die grösstmögliche Flächenzahl, d. h. $2e - 4 \geqq f$; endlich $e + 4 \leqq 2f$, welcher letztere Satz so ausgedrückt ist: Die kleinstmögliche Flächenzahl sei um 2 grösser als die Zahl, welche erhalten werde, wenn man die Hälfte der Eckenzahl oder, falls diese ungerade ist, der um 1 vermehrten Eckenzahl nehme.

Diese Sätze führen uns wieder zu den Vieleckswinkeln zurück und zu den mannigfachen Arten von Vielecken, denen Kepler und Girard ihr Augenmerk zugewandt haben. Auch Athanasius Kircher[2]) (1602—1680), ein Vielschreiber von berüchtigter Unzuverlässigkeit, hat wiederholt mit Sternvielecken zu thun gehabt. In der *Ars magna lucis et umbrae* von 1646 dient ihm das Sternsiebeneck zur Bestimmung der Sterne, welchen die einzelnen Wochentage zugeeignet sind. Den Entfernungen von der Erde nach geordnet heissen diese Sterne Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur, Mond. Werden die Namen in dieser Reihenfolge kreisförmig hingeschrieben und nun bei Saturn anfangend unter jedesmaliger Ueberspringung von zwei Stellen geradlinige Verbindungen vollzogen, so

---

[1]) *Biblioth. math.* 1890, pag. 45 Z. 3 v. u. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 478 und 481 (deutsch 548 und 552). — Allgem. deutsche Biographie XVI, 1—4. Artikel von Erman.

erscheint das zweite Sternsiebeneck, dessen Spitzen die Reihenfolge Saturn, Sonne, Mond, Mars, Merkur, Jupiter, Venus bilden. In der Arithmologia von 1665 kam Kircher bei Besprechung mannigfacher Amulette auf das Sternfünfeck insbesondere zu reden, und es ist mit Recht hervorgehoben worden[1]), dass Kircher bei dieser Gelegenheit ungleich seinem Vorgänger eines unregelmässigen Sternfünfecks sich bedient.

Johannes Brożek[2]) oder Broscius, ein Krakauer Gelehrter, der Schüler des Adriaen van Roomen gewesen sein soll, und der unter Anderem 1637 *De numeris perfectis* und *De numeris amicitiae* schrieb, hat die Sternvielecke in seiner *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios* (Danzig 1652) von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus betrachtet. Er leugnet sie. Er sieht z. B. in dem Sternfünfeck (Figur 132), welches er unter Entfernung der im Innern der Figur verlaufenden Strecken gezeichnet wissen will, ein Zehneck mit fünf spitzen und fünf überstumpfen Winkeln, und wenn er auch einsieht, dass die Summe der fünf spitzen Winkel zwei Rechte betrage, so sei doch die Winkelsumme des ganzen Zehnecks 16 Rechte. Der überstumpfe Winkel heisst ihm dabei *angulus reclinatus*. Broscius beruft sich in seiner Untersuchung auf das Werk des Bradwardinus und kennt gleich diesem verschiedene Ordnungen von Sternvielecken, deren Eckenzahl er nur nach seiner Auffassung anders bestimmt. Auch die Entstehung dieser Figuren ist bei Broscius eine wesentlich neue (Figur 133). Er halbirt sämmtliche Seiten des ursprünglichen n-ecks (etwa bei $n = 7$) und verbindet die Halbirungspunkte durch punktirte Strecken. Dreht man nun die sieben Dreiecke, welchen die punktirten Strecken als Grundlinien dienen, um diese herum, so dass sie mit ihren Spitzen nach innen fallen (z. B. ABC nach ABC'), so ist aus dem Siebeneck ein ihm isoperimetrisches, aber der Fläche nach kleineres Vierzehneck geworden.



Fig. 132.

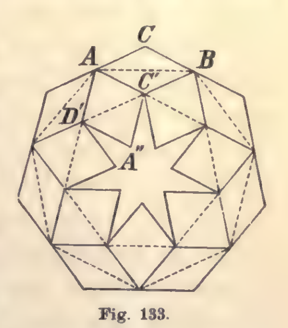


Fig. 133.

---

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 15—16, wo aber irrig Kircher's *Arithmologia* S. 537 citirt ist statt S. 217.

[2]) Kästner III, 199—205. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 486—487 (deutsch S. 558—560. In der Uebersetzung ist S. 559, Z. 21 v. u. Seiten in Winkel zu verbessern). — Günther l. c. S. 21—25. — J. N. Franke, Jan Brozek (J. Broscius) akademik krakowski 1585—1652 (Krakau 1884). — Briefliche Mittheilung von H. Studnička.

Die nach innen gekehrten Eckpunkte (z. B. C', D') verbindet Broscius wieder durch punktirte Strecken, so entstehen abermals sieben Dreieckchen mit punktirten Grundlinien, welche neuerdings um diese nach innen gedreht (z. B. $AC'D'$ nach $A''C'D'$) ein wiederum isoperimetrisches, aber der Fläche nach noch kleineres Vierzehneck hervorbringen. Aus dem Gewirre der gezeichneten Strecken treten neben dem äusseren rings convexen Siebenecke deutlich ein Sternsiebeneck erster und ein solches zweiter Ordnung hervor.

Eine andere Richtung geometrischer Schriftstellerei knüpft sich am leichtesten an Schwenter's Praktische Geometrie an, wenn auch keineswegs behauptet werden will, dieses Werk habe den Anstoss gegeben. Schwenter's zweiter Tractat (S. 668) lehrte Feldmessen unter alleiniger Anwendung der Messstange oder Messkette. Aehnliches hat ein polnischer Schriftsteller[1]) Namens Mathias Gloskowski, von dem man aus vereinzelten Angaben in seinem Buche weiss, dass er jener Nation angehörte und dem Prinzen Wilhelm II. von Oranien (1626—1650) nahe stand, in einer Schrift gelehrt, welcher er den Titel *Geometria peregrinans* beilegte. Diese Angaben genügen auch, um der ohne jede Ort- und Zeitangabe gedruckten Schrift jedenfalls ein späteres Datum als das der Schwenterschen Geometrie (1625) zuzuweisen. Sie gelangte in den Besitz des jüngeren Franciscus van Schooten (S. 660), und dieser druckte einen Theil derselben nebst ähnlichen Aufgaben eigener Erfindung als zweites Buch seiner *Exercitationes mathematicae* mit der Sonderüberschrift: *De constructione problematum simplicium geometricorum seu quae solvi possunt ducendo tantum rectas lineas.* Ebensowenig wie bei Schwenter hat man es hier mit ausschliesslicher Anwendung des Lineals zu thun, da die Annahme festgehalten ist, man sei im Stande, die Länge zugänglicher Strecken eben mit Hilfe der Messstange zu bestimmen, beziehungsweise Strecken von bestimmter Länge zu ziehen. Auch das erste Buch der *Exercitationes mathematicae* ist zur Hälfte der Geometrie eingeräumt. Dort sind 50 arithmetische und 50 geometrische Aufgaben vereinigt, sämmtlich so einfacher Natur, dass, wenn auch bei einigen Auflösungen Scharfsinn nicht zu verkennen ist, wir doch ruhig sagen können, den Druck hätten sie nicht verdient.

Der Zeit der Veröffentlichung nach gehört hierher auch eine Schrift von John Wallis[2]) (1616—1703), welcher mit theologischen

---

[1]) Franciscus van Schooten, *Exercitationes mathematicae*, pag. 160—161. — J. N. Franke und A. Jakubowski haben 1878 eine Einzeluntersuchung über Gloskowski in polnischer Sprache veröffentlicht. Vergl. S. Dickstein, *Biblioth. mathemat.* 1889, S. 49. [2]) Poggendorff II, 1253.

Studien beginnend seit 1649 der Mathematik als Professor der Geometrie an der Universität Oxford lehrend oblag. Er gab 1656 eine Abhandlung *De angulo contactus et semicirculi tractatus*[1]) heraus, welche in der wiederholt erwähnten Streitfrage wegen des gemischtlinigen Winkels zwischen einer Curve, insbesondere dem Kreise, und seiner Berührungslinie für die Ansicht eintrat, jener Winkel sei überhaupt nicht vorhanden, er sei positiv ausgedrückt ein *non-angulum*, ein *non-quantum*, und Clavius habe also Unrecht zu leugnen, dass der Halbkreis mit seinem Durchmesser einen rechten Winkel bilde. Abgethan war der Streit damit noch immer nicht. Eine Entgegnung in der *Cyclomathia* des Leotaud von 1662 machte eine *Defensio* Wallis' von 1685 nothwendig, welche aber die Grenzen der in diesem Bande behandelten Zeit allzuweit überschreitet, um mehr als im Vorübergehen genannt werden zu dürfen.

72. Kapitel.

Praktische und theoretische Mechanik.

Viel machte eine geometrisch-mechanische oder, wie man mit fast gleichem Rechte sagen könnte, eine arithmetisch-mechanische Erfindung von sich reden, die des Proportionalzirkels[2]).

Die erste Erfindung wird einem Antwerpener Schriftsteller über Schifffahrtskunde, Michel Coignet (1549—1623) zugeschrieben. Neben Coignet sind auch zwei italienische Schrifteller, Commandino und Del Monte, neben ihnen Christoph Schissler in Augsburg, von welchem ein Proportionalzirkel mit der Datirung 1574 sich im Besitze der Sternwarte von Kremsmünster befindet[3]), und Daniel Speckle, der deutsche Festungsbaumeister, Mitbewerber, und ihre Ansprüche gehen sämmtlich in das XVI. Jahrhundert zurück. Einigermassen genauer datirt ist auch die Erfindung Speckle's, welche in dessen *Architectura* von 1589 im Drucke veröffentlicht ist. Der Zweck des Proportionalzirkels ist der einer graphischen Tabelle. Auf zwei in Zirkelart mit einander verbundenen Linealen sind Längen der

---

[1]) *Opera Wallisii* III, 603—630. [2]) Kästner III, 336—352 und desselben Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspective (6. Auflage, Göttingen 1800), S. 489—495. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 909—917. — Quetelet pag. 123—125. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* I, 212—248 und II, 353. [3]) Fellöcker, Geschichte der Sternwarte von Kremsmünster (Programm des k. k. Gymnasiums zu Kremsmünster 1864), S. 31.

verschiedensten Art ein für alle Mal aufgezeichnet: arithmetische Linien, deren Abtheilungen alle einander gleich sind; quadratische Linien, deren einzelne abgegrenzte Theile im Verhältnisse der Quadratwurzeln der beigeschriebenen Zahlen zu einander stehen; kubische Linien für die Kubikwurzeln der beigeschriebenen Zahlen u. s. w. So weit war es nicht erforderlich, dass die Lineale, auf welche jene Maassstäbe aufgetragen wurden, in zirkelartiger Verbindung standen, allein die Eigenschaft der Vorrichtung als wirklicher Proportionalzirkel trat hinzu und verlangte jene Vereinigung. Es sollten, während die Zirkelweite einer beliebigen Entfernung entsprechend gespannt wurde, zwei andere Punkte der Zirkelstangen von selbst eine Entfernung zeigen, die zur ersten in einem gewünschten Verhältnisse stand. Diesem Verlangen konnte entsprochen werden (Figur 134). In Deutschland gab man jedem der beiden als Zirkelstangen dienenden Lineale oben und unten eine Spitze und vereinigte beide mittels eines beweglichen Zirkelkopfes, so dass die Länge jeder Stange oberhalb und unterhalb des Kopfes wechselte. In Italien war der verbindende Zirkelkopf fest, dagegen war an jeder Zirkelstange eine zweite Spitze verschiebbar. Die meisten dieser Vorrichtungen sind im XVII. Jahrhunderte veröffentlicht worden und haben, vornehmlich in Italien, zu weit heftigeren Streitigkeiten Anlass gegeben, als die ganze Sache verdiente, insbesondere da, wie eben bemerkt wurde, von einer ganz neuen Erfindung überhaupt nicht gesprochen werden konnte.

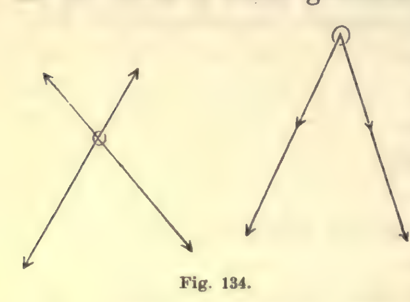


Fig. 134.

Innerhalb des XVII. Jahrhunderts fand die erste Veröffentlichung in Deutschland statt. Jobst Bürgi hatte einen Proportionalzirkel angefertigt und Philip Horcher[1]) beschrieb ihn 1605 in einer in Mainz gedruckten Abhandlung in lateinischer Sprache. Eine deutsche Beschreibung hatte Levinus Hulsius[2]) bereits 1603 verfasst, aber sie ist erst 1607 gedruckt. Sie führt den Titel: Beschreibung und Unterricht des Jobst Burgi Proportionalzirkels war in Verlegung der Wittwe Levini Hulsii. Hulsius oder Lievin van Hulst war in Gent geboren, brachte aber sein ganzes Mannesalter, etwa seit 1590, in Deutschland zu. Nürnberg wurde dort zunächst sein Aufenthalt, und er ernährte sich durch Ertheilung französischen Unterrichtes. Später

[1]) Kästner III, 336. [2]) Ebenda III, 379—385. — Quetelet pag. 179—180. — Le Paige in dem *Bullet. de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 485—487.

ging er zum Buchhandel über und zog, nachdem er fast anderthalb Jahre auf Reisen zur Anknüpfung von Geschäftsverbindungen zugebracht hatte, um 1603 nach Frankfurt, wo er jedenfalls vor 1607 gestorben ist. Die Abhandlung über den Proportionalzirkel war die dritte von 15, welche Hulsius herauszugeben dachte, und welche alle damals irgend gebräuchlichen mechanischen Vorrichtungen in deutscher Sprache zu beschreiben bestimmt waren. Des Verfassers Tod verhinderte die Ausführung des Unternehmens. Den ersten Tractat gab er selbst 1604, den zweiten schon ein Jahr früher 1603 heraus. Den dritten verlegte, wie bemerkt, 1607 die Wittwe, der vierte Tractat endlich ist 1605 erschienen, ob noch durch Hulsius selbst oder schon durch seine Wittwe verlegt, ist auf dem Titel nicht angegeben. Weiteres kam nicht heraus.

Zwischen das Erscheinen der beiden Beschreibungen des Bürgischen Zirkels fällt die des Galilei'schen. Galileo Galilei (1564—1642) gehört mit seinen merkwürdigen Lebensschicksalen der Weltgeschichte an. Das Verbot von 1616, die koppernikanische Lehre irgendwie zu vertreten, die endgiltige Verurtheilung dieser Lehre durch eine geistliche Prüfungscommission 1620, die Wirkung, welche das Verbot von 1616 dann 1633 in dem Processe gegen Galilei übte, seine Verurtheilung, sein Lebensende als blinder Halbgefangener auf einer Villa bei Florenz bedürfen hier keiner genauen Erörterung, so wenig wie die meisten wissenschaftlichen Streitigkeiten seines an Kämpfen reichen Lebens, weil dieselben in der Hauptsache astronomische waren. Nur sein erster Streit war ein mathematischer und knüpft sich an die Erfindung des Proportionalzirkels. Galilei, in Pisa geboren und Zögling der dortigen Hochschule, wurde bereits 1589 ebendaselbst Professor der Mathematik. Von 1592—1610 war er sodann in gleicher Eigenschaft in Padua angestellt, und dort war es, dass er mit dem Proportionalzirkel sich beschäftigte. In einem Einnahmebuche Galilei's, welches sich erhalten hat, finden sich für das Jahr 1599 wiederholte Einträge von Summen, welche für Instrumente, von anderen, welche für Zirkel eingenommen wurden[1]). Dann erschien 1606 in Padua *Le operazioni del Compasso geometrico e militare di Galileo Galilei.* In der Vorrede erklärte der Verfasser, er habe Ergebnisse erstrebt und auch erreicht, welche Anderen, die ähnliche Instrumente schon ausführten, nicht in den Sinn gekommen seien. Im Frühjahre 1607 folgte der Druck einer Schrift *Usus et fabrica circini cuiusdam proportionis* von Baldassare Capra und die Ueberreichung eines Exemplares derselben an Giacomo Aloise Cornaro.

---

[1]) Favaro l. c. I, 207.

Um die ganze Bedeutung dieses kurzen Satzes zu ermessen, müssen wir um einige Jahre zurückgreifen. Ein Mailänder, Aurelio Capra, war kurz nach Galilei's Berufung nach Padua mit seinem Sohne Baldassare Capra ebendahin gekommen, und Vater und Sohn waren dort mit Galilei bekannt geworden. Die Vermittelung hatte Giacomo Aloise Cornaro übernommen, und in dessen Hause und eigener Gegenwart weihte Galilei Vater und Sohn in den Gebrauch des Proportionalzirkels ein. Von Cornaro entlieh dann Capra noch einen solchen Zirkel, um ihn genauer zu studiren. Es gehört zu den menschlichen Unbegreiflichkeiten, dass Capra es nunmehr 1607 wagte, eben demselben Cornaro eine Schrift zu überreichen, die nichts Anderes war, als eine von Missverständnissen wimmelnde Uebersetzung der Galilei'schen Schrift, ohne dass Galilei's Name auch nur ein einziges Mal darin erwähnt wurde.

Der entrüstete Cornaro sandte Capra das Buch zurück und machte zugleich Mittheilung an Galilei, der eine Klage gegen Capra bei der obersten Studienbehörde in Venedig einreichte. Es ist eine neue Unbegreiflichkeit, dass Galilei den wahren Thatbestand und seine eigenen Worte in der Vorrede von 1606 jetzt so sehr ausser Acht liess, dass er den Proportionalzirkel für seine ausschliessliche Erfindung erklärte, die er 1597 gemacht habe, und in welcher Niemand, wer es auch sei, ihm vorangegangen sei. Es ist aber noch unerklärlicher, dass Capra, dem es keineswegs an Zeit fehlte, eine Vertheidigung vorzubereiten, jene Uebertreibungen Galilei's nicht rügte, als falsch nachwies und zu seinen Gunsten verwerthete. Das Urtheil musste demnach vollständig gegen Capra ausfallen. Dessen Buch wurde unterdrückt[1]), während eine *Difesa contro alle calunnie et imposture di Baldassar Capra* aus Galilei's Feder, eine Streitschrift bissigster Natur, wie sie vielleicht seit den Cartelli Ferrari's und Tartaglia's nicht wieder gedruckt worden war, die weiteste Verbreitung fand. Wahrscheinlich durch den Wiederhall dieses Streites kam Galilei's Proportionalzirkel auch ausserhalb Italiens zu mehr als verdientem Ruhme und überflügelte den Bürgi's, welchen er allerdings auch durch eine grössere Zahl von aufgezeichneten Linien etwas übertreffen mochte.

Mathias Bernegger[2]) (1582—1640), ein Oesterreicher, welcher als Professor der Geschichte und der Beredsamkeit der Universität Strassburg angehörte, beschrieb 1612 den Galilei'schen Zirkel in lateinischer Sprache. Verbesserungen, welche aber an dem Mangel,

---

[1]) Einzelne Exemplare müssen der Vernichtung entgangen sein, denn sonst wäre der Wiederabdruck, der in den Werken Galilei's stattfand, unmöglich gewesen. [2]) Kästner III, 337—339 und 340.

der allen Proportionalzirkeln anhaftet, in hohem Grade unhandlich zu sein und bei der Vielheit angegebener Theilungen keine Zuverlässigkeit zu besitzen, in immer stärkerer Weise litten, veröffentlichte der uns bekannte Johann Faulhaber[1]) von Ulm 1612, dann Georg Galgemayr[2]) von Donauwörth 1615 und 1626. Als besonders vortrefflich wird von Zeitgenossen gerühmt Georg Brendel[3]), Das Schrägmess oder der Proportional Circkel (Ulm 1615).

Aus dem Jahre 1617 stammt ferner der Bericht und Gebrauch eines Proportionallineals, nebst kurzem Unterrichte eines Parallelinstrumentes von Benjamin Bramer[4]). Auch diese Persönlichkeit ist des Verweilens werth. Benjamin Bramer (1588 bis kurz nach 1648) war der jüngere Bruder von Jobst Bürgi's erster Frau und wurde als dreijährige Waise von diesem angenommen. Er folgte Bürgi 1603 nach Prag und blieb daselbst bis 1611. Die zweite Heirath seines inzwischen verwittweten Schwagers gab zur Trennung Anlass. Bramer kam dann als Baumeister zuerst nach Marburg, später nach Ziegenhayn. Er blieb übrigens trotz der Trennung von Bürgi demselben stets dankbar ergeben und rechnete es sich zur Aufgabe, Bürgi's Leistungen nicht in Vergessenheit gerathen zu lassen, noch zu dulden, dass Anderen zum Ruhme gereichte, was er als Bürgi's Verdienst betrachtete. Es ist kaum nothwendig hinzuzusetzen, dass auch Bürgi's Proportionalzirkel zu den von Bramer beschriebenen Vorrichtungen gehörte. In einer späteren Schrift[5]) Bramer's von 1648 ist auch ein Triangularinstrument Bürgi's beschrieben, d. h. eine aus drei Linealen gebildete Vorrichtung, welche bei feldmesserischen Arbeiten zu benutzen war.

Der Galilei'schen Richtung, wenn wir so sagen dürfen, näherte sich wieder Adriaen Metius[6]) von Alkmaar (S. 600) mit seiner *Praxis nova geometrica per usum circinis et regulae proportionalis* von 1623, und eine ähnliche Vorrichtung bürgerte Edmund Gunter (S. 604), dessen *Description and use of the Sector, Cross-staff, Quadrant and other instrument*, jedenfalls vor 1626, als dem Todesjahre des Verfassers, fertig gestellt wurde, in England ein. Ueber die Art von Proportionalzirkel, welche der pommersche Festungsbauer Wendelin Schildknecht 1652 in seiner Beschreibung Festungen zu bauen erläutert[7]), sind wir nicht unterrichtet.

Zu den Arbeiten einer praktischen Mechanik, welche der Geometrie sich nützlich erweisen, müssen wir auch solche zählen, die

[1]) Doppelmayr S. 94 Note b. [2]) Kästner III, 343 und 346. [3]) H. Rudel in der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens (Nürnberg 1894), S. 368. [4]) Kästner III, 344. Allg. deutsche Biographie III, 234. [5]) Ebenda III, 368—371. [6]) Ebenda III, 345. [7]) Poggendorff II, 797.

geeignet sind, Messungen ganz kleiner Unterabtheilungen von Strecken oder Winkeln zu ermöglichen. Wir haben in Clavius (S. 580) den Erfinder einer solchen Vorrichtung kennen gelernt, wenig von derselben verschieden und namentlich darin mit ihr übereinstimmend, dass zwei unabhängig von einander bestehende geradlinige oder kreisbogenförmige Maassstäbe an einander zur Verschiebung kommen, waren die Vorschläge dreier Schriftsteller[1]), Peter Vernier (1631), Benedict Hedraeus (1643), Gerhard von Gutschoven (1674), deren Ersterer namentlich dazu ausersehen wurde, der betreffenden Erfindung seinen Namen aufzudrücken, unter welchem sie neben dem des Nonius sich erhalten hat.

Des weiteren haben wir von mechanischen Verfahren zur Herstellung von Kegelschnitten zu reden. Früher sahen wir (S. 578), dass Barozzi einen Kegelschnittzirkel erfunden hat. Aehnliches ist aus dem Jahre 1614 von Christoph Scheiner[2]) (1573—1650) zu berichten. Scheiner war Mitglied des Jesuitenordens und fand als Lehrer erst in Freiburg im Breisgau, dann seit 1610 in Ingolstadt Verwendung. Seine Lehrthätigkeit war beendigt, als er 1617 das Rectorat des Jesuitencollegiums zu Neisse übernehmen musste. Am bekanntesten neben Scheiner's 1612 beginnenden Streitigkeiten mit Galilei wegen der Entdeckung der Sonnenflecken, auf welche beide Anspruch erhoben, ist eine für praktische Zwecke der Zeichenkunst sehr fruchtbare Erfindung, auf welche wir zurückkommen. Zunächst berichten wir über eine Vorrichtung[3]), welche Scheiner durch einen Schüler Johann Georg Schönberger in Form einer Dissertation *Exegeses fundamentorum gnomicorum* 1614 in Ingolstadt veröffentlichen liess. Ein um eine Axe gedrehter Stift von veränderbarer Länge stellt die Erzeugende des Kegels vor, und giebt man zugleich der Axe eine bestimmte Neigung gegen die Zeichnungsebene, so wird diese zur Schnittebene des Kegels, auf welcher je nach der Neigung die gewünschte Curve entsteht. Der Gedanke ist, wie man sieht, dem Barozzi's verwandt. Ob Scheiner von jenem Kenntniss besass, sei dahingestellt.

Wieder den gleichen Gedanken verwirklichte Benjamin Bramer in zwei Ausführungen, welche vielleicht etwas richtigere Curven hervorbringen mochten, als Scheiner's für genaue Zeichnungen ungeschickter Apparat, aber dafür so umständlicher Benutzung waren,

---

[1]) Kästner, III, 356—360. [2]) Allgem. deutsche Biographie XXX, 718—720. Artikel von Günther. — A. von Braunmühl, Christoph Scheiner als Mathematiker, Physiker und Astronom (Bamberg 1891). [3]) A. von Braunmühl l. c. und Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-liter. Abthlg. S. 163—164.

dass sie wenig Beifall fanden. Bramer beschrieb sie[1]) in seinem *Apollonius Cattus* oder Kern der ganzen Geometrie. Entstanden ist dieses Buch 1634, die Vorrede führt die Jahreszahl 1646, gedruckt wurde der Apollonius Cattus erst 1684. Den Namen hat Bramer dem Apollonius Gallus des Vieta und dem Apollonius Batavus des Willebrord Snellius nachgebildet. Ausser der Beschreibung des Werkzeuges zum Zeichnen von Kegelschnitten enthält das Buch allerlei Sätze über jene krummen Linien nebst deren Beweise.

Mit der Aufgabe, Kegelschnitte auf mechanischem Wege herzustellen, hat auch der jüngere Franciscus van Schooten in seinen *Exercitationes mathematicae* sich beschäftigt. Deren 4. Buch führt geradezu die Ueberschrift *De organica conicarum sectionum in plano descriptione.* Seine Methoden sind aber wesentlich andere als die seither geschilderten. Die Kegelschnitte sind nicht als solche, sondern als ebene Curven ins Auge gefasst, beziehungsweise van Schooten bedient sich zu ihrer Zeichnung solcher Eigenschaften, die von der Entstehung auf einem geschnittenen Kegel unabhängig sind. Er erklärt in der Vorrede, keine Schrift ähnlichen Inhaltes zu kennen. Er wisse wohl, dass Aiguillon eine solche geplant habe, aber durch dessen Tod sei die Vollendung verhindert worden. Auch von Otter heisse es, dass er viel über den Gegenstand nachgedacht habe, herausgegeben habe aber auch dieser nichts. Auf Aiguillon kommen wir noch zurück. Otter ist zweifellos Christian Otter[2]) (1598—1660) aus Ragnit in Preussen, welcher zuerst Hofmathematicus des Kurfürsten Friedrich Wilhelm von Brandenburg, später Professor der Mathematik in Nimwegen war, und der in der Geschichte des Festungsbaues mit grossen Ehren genannt wird. Der Natur der Eigenschaften entsprechend, von welchen van Schooten Gebrauch machte, und unter welchen die Eigenschaften der Brennstrahlen vorzugsweise häufig in Wirksamkeit treten, bestehen die Vorrichtungen vielfach aus drei, auch aus vier Linealen, welche an und in einander eine gewisse immerhin durch Scharnierverbindungen behinderte, durch Schlitze ermöglichte Beweglichkeit besitzen. Sie erinnern dadurch im Allgemeinen wenigstens an jene erste Erfindung Scheiner's, von welcher ankündigungsweise die Rede war.

Scheiner[3]) hat 1631 seine *Pantographice seu ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum* herausgegeben, will aber schon 1603, mithin in seiner Freiburger Zeit, darauf gekommen sein. Damals

---

[1]) Kästner III, 195—196. — A. von Braunmühl in Zeitschr. Math. Phys. XXXV, Histor.-liter. Abthlg. S. 164—165. [2]) Poggendorff II, 338. [3]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 710—712 s. v. Pantograph.

will er die Bekanntschaft eines Malers gemacht haben, welcher ihm die Eigenschaften einer in seinem Besitze befindlichen Vorrichtung zur mechanischen Wiederholung eines beliebigen Originals in anderem Maassstabe rühmte, den Anblick aber ihm verweigerte. Daraufhin grübelte Scheiner so lange, bis er den Pantographen oder Storchschnabel ersann, über welchen der Maler nicht genug erstaunen konnte (Figur 135). Vier Stangen BF, BH, CI, DG sind in Gelenken B, C, D, E mit einander verbunden und bilden ein unter Beibehaltung seiner Seitenlängen verschiebbares Parallelogramm. Wird der Apparat bei dem auf BF befindlichen Punkte P mit einem Stifte befestigt, und ist ein Punkt A der BH mit irgend einem Punkte des nachzubildenden Originals zur Deckung gebracht, so giebt es einen Punkt a der CI, welcher A so entspricht, dass die drei Punkte P, a, A in einer Geraden liegen. Ein in a befindlicher Zeichenstift wird diesen Punkt auf einer auf dem Originale aufliegenden Zeichenfläche bildlich darstellen. Dreiecksähnlichkeiten lassen erkennen, dass dabei die Längenverhältnisse stattfinden $Pa : PA = PC : PB = Ca : BA$. Ist alsdann das Parallelogramm unter Festhaltung von P verschoben, so dass der Punkt A auf einen neuen Punkt A' des Originals fällt, so schneidet die Gerade PA' jetzt die CI in einem Punkte a', und es wird zugleich $Pa' : PA' = PC : PB = Ca' : BA'$ sein müssen. Nun ist angenommenermassen $BA' = BA$, also muss auch $Ca' = Ca$ sein, d. h. der Zeichenstift darf in dem Punkte a der CI befestigt werden und durchläuft alsdann, während A auf den Umrissen des Originals herumgeführt wird, lauter Lagen, die der Verbindungsgeraden von P nach A angehören und dieselbe in dem unveränderlichen Verhältnisse $PC : PB$ schneiden. Der Zeichenstift a entwirft also bei dieser Bewegung des Storchschnabels eine dem Originale ähnliche und ähnlichliegende verkleinerte Abbildung. Wird a auf den Umrissen des Originals umhergeführt, und der Zeichenstift in A befestigt, so entsteht eine entsprechend vergrösserte Abbildung.

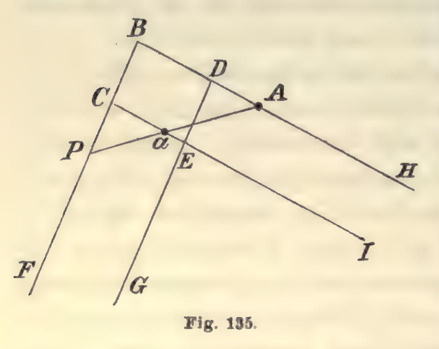


Fig. 135.

Die Indienststellung mathematischen Wissens für Zwecke des Künstlers ist uns, wenn auch in verschiedenartiger Ausführung, wiederholt begegnet. Eine richtige Perspective mathematisch herzustellen hatte Dürer, wie wir uns erinnern, als lohnende Aufgabe erkannt, und Andere vor ihm. Ueber mathematische Abbildung hat schon

Ptolemäus (Bd. I, S. 394—395) geschrieben, und die Kartographen des XVI. Jahrhunderts (S. 608) gehören wieder in dieselbe Gruppe von Künstlergelehrten. Ein hierzu zu rechnendes Werk von grosser Bedeutung fällt in die Zeit, welche uns gegenwärtig beschäftigt. Franz von Aiguillon[1]) oder Aguillon oder Aquilonius (1566—1617), ein Mitglied des Jesuitenordens, geboren in Brüssel und seit 1596 in Antwerpen als Lehrer thätig, scheint der Erste seines Ordens gewesen zu sein, welcher in Belgien Mathematik lehrte. Er gab 1613 ein Werk über Optik in sechs Büchern heraus. Eine Katoptrik und eine Dioptrik sollten folgen, blieben aber bei dem plötzlichen Tode des Verfassers unvollendet. Die fünf ersten Bücher der Optik handeln vom Sehen, von optischen Täuschungen, von der Natur des Lichtes u. s. w., sind also physiologischer und physikalischer Natur. Das 6. Buch gehört der Projectionslehre an, und in ihm sind die Namen der orthographischen, der stereographischen, der scenographischen Projection zuerst gebraucht. Orthographisch wird ein Gegenstand auf die Entwerfungsebene projicirt, wenn auf sie von jedem abzubildenden Punkte senkrechte Entwerfungslinien gefällt werden; das sehende Auge ist also in unendlicher Entfernung gedacht. Bei der stereographischen Projection ist das Auge im Pole einer Kugel befindlich, deren Aequatorialebene die Zeichnungsfläche abgiebt, während die abzubildenden Punkte der Kugeloberfläche selbst angehören. Die scenographische Projection ist die ebene Durchschneidung des von irgend einem Augenpunkte ausgehenden Sehkegels.

Haben wir hier eine Anzahl von Leistungen besprochen, welche wir in der Kapitelüberschrift als praktisch-mechanische bezeichneten, weil uns ein anderer zusammenfassender Name nicht gegenwärtig war und es sich schliesslich um Dinge handelte, welche auf praktische Anwendung zielten und mehr oder weniger mechanischer Ausführungen bedurften, so ist das XVII. Jahrhundert ungleich wichtiger für die theoretische Mechanik gewesen.

Zunächst wurde die Lehre vom Schwerpunkte, der Commandinus und Maurolycus ihre Bemühungen gewidmet hatten, weiter ausgebildet. Luca Valerio[2]) (1552—1618) ist hier in erster Linie zu nennen. Er war Neapolitaner, lehrte aber in Rom und war Mitglied der dortigen Accademia de' Lincei, bis er 1616 aus ihr ausgestossen wurde, weil er öffentlich Galilei für einen Koppernicaner erklärt hatte. Schon 1604 gab er drei Bücher *De centro gravitatis*

---

[1]) Kästner IV, 79—80. — Quetelet pag. 192—198. [2]) Kästner IV, 30—32. — Poggendorff II, 1167 mit Berufung auf Colangelo, *Storia dei filosofi e dei matematici Napolitani.*

solidorum heraus, von welchen 1661 eine neue Ausgabe veranstaltet wurde. Als nachgelassene Schrift erschien auch 1660 eine *Quadratura parabolae* des Valerio, welche die Schwerpunktsbestimmung zum Ausgangspunkte nimmt.

Aehnliche Betrachtungen waren allerdings damals (1660) schon längere Zeit veröffentlicht. Jean Charles de la Faille[1]), ein belgischer Jesuit, hatte 1632 in Antwerpen *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellypsis* zum Drucke befördert und darin den doppelten Nachweis zu führen gesucht, dass, wenn die Quadratur des Kreises bekannt wäre, man den Schwerpunkt jedes Kreisabschnittes zu finden im Stande sei, und dass umgekehrt die Kenntniss dieser Schwerpunkte zu gebrauchen sei, um die Quadratur abzuleiten.

Valerio's vorgenannte Schrift fand, wie wir gleich sehen werden, 1638 im vierten Gespräche Galilei's über Mechanik, zu welchem wir uns wenden müssen, eine hohe Anerkennung von berufener Seite. Ueber die Schwerpunktsbestimmungen von Paul Guldin, von Fermat u. s. w. können wir erst im Zusammenhange mit den von diesen angewandten Betrachtungen des Unendlichkleinen berichten. Galilei's *Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[2]) riefen eine ganz neue Wissenschaft, die Bewegungslehre oder Mechanik im engeren Sinne ins Leben, während, was vorher von mechanischem Wissen vorhanden war, sich fast ausschliesslich auf Statik bezog, d. h. auf das Gleichgewicht der Kräfte, welches die Ruhelage durch gegenseitig sich vernichtende Wirkung ungestört liess. Galilei hatte schon frühzeitig der Mechanik erfolgreiches Nachdenken gewidmet. Er hatte 1583 als Student in Pisa durch Beobachtungen festgestellt, dass ein Pendel die gleiche Schwingungsdauer besitze, möge es viel oder wenig aus seiner Gleichgewichtslage entfernt worden sein, sofern nur die Länge des Pendels unverändert bleibt. Er hatte auch Manches über die Mechanik zu Papier gebracht, veröffentlicht aber hat er die neuen Gesetze erst in den Discorsi von 1638. Gleich im ersten Gespräche tritt die Erklärung des Rades des Aristoteles auf (Figur 136); Galilei verbindet die Zeichnung von drei concentrischen Kreisen mit der von ebensovielen demselben einbeschriebenen ähnlich liegenden regelmässigen Sechsecken und lässt die rollende Bewegung des mittleren unter den drei Kreisen so vollziehen, dass die sechs Sechsecksseiten dieses Kreises nach einander in horizontale Lage kommen und eine fortlaufende gerade Linie bilden. Dabei nehmen auch die entsprechenden Sechsecksseiten der beiden anderen

---

[1]) Kästner II, 211—215. — Quetelet pag. 203—205. [2]) Kästner IV, 4—27. — Montucla II, 183—191.

Kreise horizontale Lage an, aber die des äusseren Kreises sind über einander weggeschoben, die des inneren Kreises weisen zwischen einander Lücken auf. Bei dem inneren wie bei dem äusseren Kreise

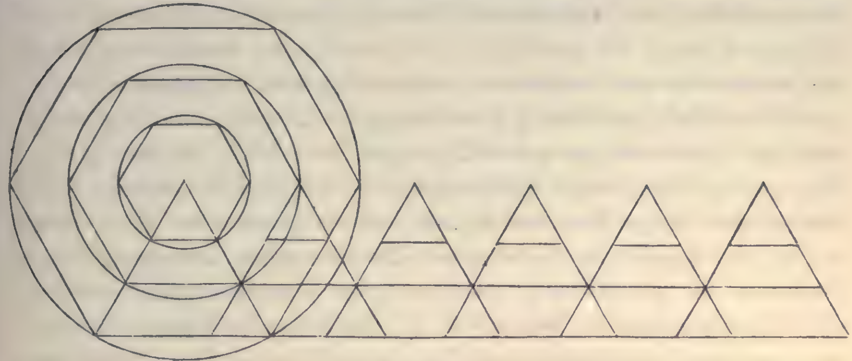


Fig. 136.

ist daher ein einfaches Rollen nicht vorhanden, und die Schwierigkeit der scheinbar gleichen Länge dreier wesentlich verschiedener Kreislinien ist damit beseitigt. Der Uebergang vom Sechsecke zum Kreise besteht nämlich einzig in dem Unendlichwerden der Seitenzahl der einander ähnlich liegenden regelmässigen Vielecke. Bei dem äusseren Kreise findet das Uebereinandergreifen dieser Seiten weiter statt, bei dem inneren Kreise das Lückenhafte, nur sind es unendliche viele unendlich kleine Lücken, welche auftreten und wegen dieser ihrer Eigenschaft nicht bemerkt werden können. Dem ersten Gespräche gehört auch der Beweis an, dass, entgegengesetzt der Aristotelischen Behauptung, Körper verschiedenen Gewichtes darum doch nicht verschiedene Fallzeit besitzen. Fiele ein Körper vom Gewichte 10, wie Aristoteles glaubte, 10mal so schnell als ein Körper vom Gewichte 1, und vereinigte man beide Körper, so müsste der langsamere etwas von der Geschwindigkeit des schnelleren aufheben, d. h. der Körper vom Gewichte 11 müsste langsamer fallen als der vom Gewichte 10, und das widerspräche der anfänglichen Annahme. Auch Pendelversuche mit Kugeln von Blei und von Zucker, also bei einem Gewichtsverhältnisse von 1 : 100 etwa angestellt, ergaben bei gleicher Fadenlänge, dass in gleicher Zeit gleichviele Schwingungen durch gleiche Bögen gemacht wurden, mochte man die Zahl der beobachteten Schwingungen auch 1000 übersteigen lassen. Das zweite Gespräch beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem inneren Zusammenhange fester Körper und mit der Kraft, welche erforderlich ist, denselben zu lösen, beziehungsweise mit der Frage, wie gross das Gewicht eines an einem Ende gestützten Körpers sein müsse, damit derselbe breche. Dabei ist auch von an beiden Endpunkten aufgehängten

Ketten und von der Gestalt der so entstehenden Curve die Rede. Galilei hält dieselbe für eine Parabel, und dies ist der einzige wesentliche Irrthum, den man ihm vorwerfen kann. Das dritte Gespräch bringt die eigentlichen Bewegungsgesetze, die der gleichförmigen sowie der natürlich beschleunigten Bewegung. Letztere werden in zwei Lehrsätzen zusammengefasst. Erstens: die Zeit, in welcher ein gleichförmig beschleunigter Körper einen Weg durchläuft, ist genau so gross wie diejenige, in welcher er den gleichen Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen würde, sofern diese gleichförmige Geschwindigkeit halb so gross wäre als diejenige, welche der Körper am Ende seiner beschleunigten Bewegung erzielt. Zweitens: bei gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit verhalten sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten. Im vierten Gespräche endlich wird die parabolische Wurfbewegung von den verschiedensten Gesichtspunkten aus erörtert. Ein Anhang beschäftigt sich mit Schwerpunktsbestimmungen. Galilei hatte, von Del Monte aufgefordert, diesem von Commandinus noch nicht erschöpften Gegenstande seine Aufmerksamkeit zugewandt. Später fand er in einem Werke des Lucas Valerius eine methodisch von seinen eigenen Untersuchungen abweichende, aber sie inhaltlich überragende Darstellung und setzte desshalb seine Arbeit nicht weiter fort, damit die höchste Anerkennung jenes Werkes aussprechend.

Gleichzeitig mit Galilei's Discorsi erschien 1638 eine Schrift *De motu naturali gravium fluidorum et solidorum* von Giovanni Battista Baliani[1]), einem Genueser Edelmanne, welcher die beschleunigte Bewegung in ähnlicher Weise auffasste, wie es bei Galilei der Fall war. Zum besonderen Ruhme darf man aber Baliani dieses Zusammentreffen um so weniger anrechnen, als er in einer zweiten Auflage von 1646 die richtige Meinung zu Gunsten einer falschen wieder aufgab. Damit nach Galilei's Behauptung die unter Beschleunigung durchlaufenen Räume im Verhältnisse der Quadrate der Zeiten stehen, ist es nothwendig, dass die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Einzelräume nach den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe sich bemessen, weil $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Galilei sah dieses ein und gab auch seinem zweiten Lehrsatze der beschleunigten Bewegung die hier ausgesprochene Form. Baliani dagegen behauptete in seiner zweiten Auflage, jene Einzelräume seien freilich durch eine steigende Reihe zu bemessen, aber nicht durch die der ungeraden Zahlen, sondern durch die der natürlichen Zahlen, also durch 1, 2, 3, 4 . . . Die Verwunderung über diesen Rückschritt

[1]) Montucla II, 194—196.

Baliani's nimmt noch zu, wenn man weiss, dass er in ebenderselben Ausgabe von 1646 andere in der Ausgabe von 1638 unbewiesen gelassene Gesetze mit Begründungen versehen hat, welche denen Galilei's von 1638 nachgebildet sind, und welche daher Galilei's Meinung als Grundlage besitzen.

Schon zehn Jahre vor den Discorsi erschien ein mechanisch bedeutendes Werk eines hervorragenden Schülers von Galilei. Benedetto Castelli[1]) (1577—1644), ein Benedictinermönch und Professor der Mathematik am Collegio di Sapienza in Rom, schuf mit seinem Werke *Della misura dell' acque correnti* von 1628 eine wissenschaftliche Hydraulik, deren wesentliche Gedanken allerdings auch wieder Galilei entlehnt waren.

Evangelista Torricelli[2]) (1608—1647) empfing seinen ersten Unterricht durch einen Onkel von mütterlicher Seite, welcher dem Camaldulenserorden angehörte. Gegen 1628 kam er nach Rom, wo er der Schüler Castelli's wurde. Nach dem Erscheinen von Galilei's mechanischen Gesprächen von 1638 verfasste Torricelli 1641 einen *Trattato del moto*, der als eine Weiterführung der Galilei'schen Gedanken bezeichnet werden darf. Dieses Buch, Galilei durch Castelli vorgelegt, gab die Veranlassung zu dem Vorschlage, Torricelli solle in der Eigenschaft eines mehr oder weniger selbständigen Mitarbeiters seine noch junge Kraft dem erblindeten Greise zur Verfügung stellen. Im October 1641 kam Torricelli bei Galilei an, drei Monate später war dieser eine Leiche. Torricelli wollte nach Rom zurückkehren, wurde aber in Florenz in der Stellung, welche Galilei einst inne gehabt hatte, als grossherzoglicher Mathematiker zurückgehalten. Dort wurde 1643 durch Viviani der von Torricelli angegebene Versuch veranstaltet, zuzusehen, wieviel Quecksilber durch den Luftdruck gehoben würde, ein Versuch, der als Erfindung des Quecksilberbarometers gefeiert wird. Der Trattato del moto von 1641 enthält den wichtigen Satz, dass zwei mit einander verbundene Körper im Gleichgewichte sich befinden, wenn ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt durch irgend welche Lagenänderung weder gehoben noch gesenkt wird. Im Jahre 1644 gab dann Torricelli einen Sammelband unter dem Titel *Opera geometrica* heraus. Darin befand sich eine Abhandlung *De motu gravium naturaliter descendentium*, welche für die Lehre von den ausströmenden Flüssigkeiten bahnbrechend geworden ist. Torricelli sprach darin bereits die sechs wichtigsten Sätze aus[3]): 1. Das Wasser, welches aus einer Oeffnung in der Seitenwand eines

[1]) Heller, Geschichte der Physik II, 111. [2]) Ebenda II, 102—110.
[3]) Wir entnehmen die Fassung dieser Sätze wörtlich aus Heller l. c. II, 106.

Gefässes fliesst, bildet den Gesetzen der Wurfbewegung zufolge einen parabolischen Strahl; 2. der Parameter der Parabel ist am grössten, wenn sich die Oeffnung in der Mitte der Wasserhöhe befindet; 3. die Oeffnungen, welche sich in gleicher Entfernung über oder unter der mittleren Oeffnung befinden, geben Flüssigkeitsstrahlen von kleinerer, aber gleicher Bogenweite; 4. für gleiche Oeffnungen verhalten sich die in gleichen Zeiten ausfliessenden Wassermengen wie die Quadratwurzeln aus den entsprechenden Flüssigkeitshöhen; 5. die Zeiten, in welchen sich gleiche Gefässe durch gleiche Oeffnungen entleeren, verhalten sich ebenfalls wie die Quadratwurzeln aus den Flüssigkeitshöhen; 6. wenn man für den Fall einer im horizontalen Boden des Gefässes befindlichen Ausflussöffnung sich die Zeit, welche zur gänzlichen Entleerung des Gefässes nothwendig ist, in gleiche Zeiträume zerlegt denkt, so bilden die denselben entsprechenden Ausflussmengen eine bis zur Einheit abnehmende Reihe von ungeraden Zahlen.

73. Kapitel.

Trigonometrie und Cyclometrie.

Noch weit mehr als die Mechanik schliessen Trigonometrie und Cyclometrie sich den geometrischen Forschungen an. Als ältesten Schriftsteller auf diesem Gebiete, mit einem Fusse noch im XVI. Jahrhunderte stehend, nennen wir Philipp van Lansberge[1]) (1561—1632) aus Gent. Er war Theologe und hatte die nothwendigen Studien in England gemacht. Aus Antwerpen, wo er zuerst die Stellung eines Predigers der reformirten Lehre einnahm, musste er 1585 fliehen, als die Spanier sich der Stadt neuerdings bemächtigten. Er fand in Goes in Zeeland einen neuen ähnlichen Wirkungskreis, dem er bis 1615 vorstand, dann siedelte er nach Middelburg über, wo er nur noch mit Mathematik sich beschäftigte. Die älteste Schrift *Triangulorum geometricorum libri quatuor* scheint indessen schon in Goes entstanden zu sein, wenigstens ist ein als Vorrede dienender Widmungsbrief mit der Jahreszahl 1591 versehen[2]). Späterer Entstehung (entweder 1616 oder 1628) ist die *Cyclometria nova*, welche die Berechnung der Zahl π mit einer bis zur 30. Decimalstelle sich erstreckenden Genauigkeit lehrt.

Praetorius[3]) hat in seiner wiederholt (S. 589 und 619) genann-

---

[1]) Quetelet pag. 168—179. — Delambre, *Histoire de l'astronomie moderne.* T. IV passim. [2]) Delambre l. c. II, 40. [3]) Curtze in Zeitschr. Math. Phys. XL, Hist.-liter. Abthlg. S. 11.

ten Handschrift von 1599 die vollständige Auflösung des rechtwinkligen und des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks sehr übersichtlich in Tabellenform gebracht.

Gleich zu Beginn des Jahrhunderts finden wir dann einen englischen Schriftsteller zu erwähnen: Nathaniel Torporley[1]) mit seinem Werke *Diclides caelometrica sive Valvae astronomicae universales etc.* von 1602. Er war, nachdem er in Oxford studirt hatte, einige Jahre hindurch Schreiber bei Vieta. Später kehrte er nach England zurück, wo er der Gunst eines Grafen von Northumberland sich erfreute. In Vieta's Umgange mag Torporley sich die Gewohnheit angeeignet haben, neue Wörter zu erfinden und solche so unzweckmässig als denkbar auszuwählen. Die Aufgabe, welche Torporley in dem zweiten Theile seines Buches (der erste Theil ist astrologischen Inhaltes) sich stellte, ist die Auflösung sämmtlicher Fälle des rechtwinklig sphärischen Dreiecks. Die Fälle selbst nennt er Triplicitäten, weil jedesmal ausser dem rechten Winkel noch drei Stücke vorkommen, deren eines durch die beiden anderen bestimmt ist. Eine Triplicität heisst *solilateralis*, weil nur Seiten, d. h. die Hypotenuse und beide Katheten vorkommen. Die anderen Triplicitäten heissen *mixtae* und sind der Anzahl nach 5, nämlich 3 *plurilaterales* mit 2 Seiten und 1 Winkel (Hypotenuse, Kathete und der letzteren anliegender Winkel; Hypotenuse, Kathete und der letzteren gegenüberliegender Winkel; beide Katheten und ein Winkel) und 2 *plurangulares* mit 3 Winkeln und 1 Seite (Hypotenuse oder eine Kathete). Diesen im Ganzen sechs Fällen hat aber Torporley auch noch besondere Namen beigelegt. In der Reihenfolge, in welcher wir sie hier erwähnt haben, heissen sie bei ihm: *carcer* (Gefängniss); *forfex* (Schneiderscheere), *sipho* (Heber), *corvus* (Enterhaken), *hasta* (Spiess), *funda* (Schleuder), weil er in den betreffenden Figuren, bei welchen die jeder Triplicität zugehörigen Stücke stärker gezogen sind, jene Gestaltungen zu erkennen glaubte. Alle Triplicitäten vereinigt findet er in einer Figur, welche er *mitra* (Bischofsmütze) nennt (Figur 137). *FR* und *IR* sind unter einander gleiche, zu einander senkrechte Bögen grösster Kreise, und zwar jeder von ihnen kleiner als ein Quadrant. *FO*, *RO*, *RE*, *IE* sind

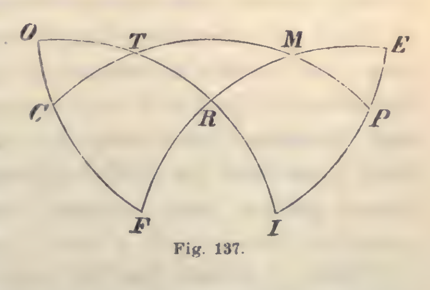


Fig. 137.

[1]) Kästner III, 101—107. — Montucla II, 120. — v. Zach in Bode's Jahrbuch u. s. w. Suppl. I, 23. — De Morgan im Philosophical Magazine (1843) XXII, 351.

Quadranten, welche auf *FR*, beziehungsweise auf *RI* senkrecht stehen. Auch $FM = IT$ sind Quadranten, und durch *M* und *T* ist der grösste Kreisbogen *PMTC* gelegt. Torporley nennt dann *FOREI* die Mitra und *PMTC* eine an ihr befestigte Binde. Mit der mehrfach wiederholten Figur ist ein bald von rechts, bald von links gezeichneter Kopf in Verbindung und hilft die einzelnen Triplicitäten zur Anschauung zu bringen, und in gleicher Absicht sind noch andere nicht minder eigenthümliche Abbildungen vorhanden, welche vielleicht den entgegengesetzten Erfolg hatten, den sie haben sollten, und der Verbreitung des Buches mehr schadeten als nützten.

Um so mehr Anklang fand eine andere Zusammenstellung der gleichen sechs Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, welche 1614 in Edinburg die Presse verliess. Der Name des Verfassers ist in den verschiedensten Formen bekannt: John Neper[1]), oder Napier, oder Napeir, oder Napair u. s. w. Er ist 1550 unweit Edinburg in Merchiston, welches der Familie den Namen der Barone von Merchiston verlieh, geboren, 1617 gestorben. Der Name Nepair soll einer Legende nach daher rühren, dass der Erste, welcher ihn führen durfte, im XIV. Jahrhunderte in einer Schlacht sich so auszeichnete, dass Niemand ihm gleichkam. Neper's erste geistige Neigung war der Erklärung der Apokalypse zugewandt, über welche er eine 1593 gedruckte Schrift in englischer Sprache mit einem *John Napeir* unterzeichneten Widmungsbriefe an König Jacob VI. verfasste. Die späteren Schriften sind mathematischen Inhaltes, in lateinischer Sprache abgefasst und tragen den Namen *Joannes Neperus*. Wir werden allerdings der Hauptsache nach erst später von ihnen zu reden haben, da die Bildung und Benutzung von Logarithmentafeln in ihnen gelehrt wird. Eine Druckschrift von 1614, die *Descriptio mirifici logarithmorum canonis* (kürzer Neper's Descriptio genannt) verlangt schon jetzt unsere Aufmerksamkeit. Desshalb vereinigen wir auch hier die Mittheilung dessen, was wir von Neper's Bildungsgange wissen, dass er nämlich als ganz junger Mann eine Reise durch Deutschland, Frankreich und Italien machte, von der er 1571 wieder nach Schottland zurückkehrte, welches er nie wieder verliess. Von dieser Reise wird der als Einundzwanzigjähriger Zurückkehrende kaum Nutzen gezogen haben können, und was Neper erlernte, muss ihm

---

[1]) Biot's Bericht über die 1834 veröffentlichten Denkwürdigkeiten von Neper im *Journal des Savants* von 1835, pag. 151—162. Ueber Neper's mathematische Verdienste ebenda pag. 257—270. — *The construction of the wonderful canon of logarithmes by John Napier Baron of Merchiston translated by W. R. Macdonald* (1889). Introduction und die Anmerkung auf S. 84. Diese Ausgabe citiren wir als Neper, *Constructio*.

in Schottland zugänglich gewesen sein. Dieses war entschieden, ausser mit den älteren Schriften eines Regiomontan, eines Koppernicus, auch der Fall mit Van Lansberge's Büchern über die Dreiecke, mit Torporley's Diclides caelometricae und mit der 1600 in London gedruckten englischen Uebersetzung der Trigonometrie des Pitiscus von Hamson. Möglicherweise hat Neper den Pitiscus auch in dem lateinischen Originale gelesen. Die Benutzung aller dieser Bücher durch Neper steht fest. Regiomontan, Koppernicus, Van Lansberge und Pitiscus sind in der Descriptio ausdrücklich angeführt[1]), an einer späteren Stelle[2]) auch Adriaen Metius. Die Benutzung des Torporley folgern wir aus der Anwendung des nur von jenem Schriftsteller gebrauchten Wortes *Triplicität* bei Neper[3]), und wenn, wie wir überzeugt sind, aus solchen Wortbenutzungen sichere Schlüsse gezogen werden können, so muss Neper, der fortwährend *tangens* sagt[4]), auch die Geometria rotundi des Thomas Finck gekannt haben. Wahrscheinlich ist uns endlich auch, dass Neper die Arithmetica integra Michael Stifel's kannte, weil er die negativen Zahlen *minores nihilo* nennt[5]), wie es dort der Fall ist (S. 442). Nach diesen allgemeinen Bemerkungen, an welche wir gelegentlich uns zu erinnern haben werden, nennen wir die trigonometrischen Leistungen Neper's, welche ihn gerade in diesem Kapitel unserer Beachtung empfahlen. Die erste ist die sicherlich an Torporley anknüpfende, aber glücklicher ersonnene Zusammenfassung sämmtlicher Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks in zwei Sätze[6]): Der Cosinus eines mittleren Stückes ist gleich dem Producte der Cotangenten der anliegenden Stücke, beziehungsweise der Sinusse der getrennten Stücke, sofern man dabei die Katheten jeweil durch ihre Complemente zu 90^0 ersetzt. Mittleres Stück hiess dabei *pars intermedia*, die äusseren Stücke heissen *partes extremae*, und zwar *extremae vicinae aut circumpositae* und *extremae remotae aut oppositae*, je nachdem sie dem mittleren Stücke anliegen oder von ihm getrennt sind, während der rechte Winkel bei Feststellung dieser Unterscheidung bekanntlich als nicht vorhanden gilt. Eine zweite Leistung ist von grösserer Wichtigkeit und grösserer Selbständigkeit der Erfindung. Ausgehend von dem 2. Satze

---

[1]) Neper, *Descriptio*, pag. 34: *quod fusius a Regiomontano, Copernico, Lansbergio, Pitisco et aliis demonstratur.* [2]) Ebenda pag. 56. [3]) Ebenda pag. 34: *Verum quia in omnibus his triplicitatibus Tangens alterius extremae est ad sinumrectum intermediae ut sinus totus ad tangentem reliquae extremae* etc. [4]) Ausser in der eben angeführten Stelle der *Descriptio* pag. 34 kommt *tangens* noch vor ebenda pag. 26, 49 u. s. w. [5]) Ebenda pag. 4 und 5. [6]) Ebenda pag. 33—35.

im V. Buche von Regiomontan's Trigonometrie (S. 272), dass unter Bezeichnung der Winkel und der denselben gegenüberliegenden Bögen im sphärischen Dreiecke durch A, B, C, a, b, c die Gleichung $\sin a \cdot \sin b = \frac{\text{sin vers.}\, c - \text{sin vers.}\,(a - b)}{\text{sin vers.}\, C}$ stattfinde, welche wegen sin vers. $C = 1 - \cos C$ u. s. w. überführbar ist in die Form $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$, gelangt Neper zu Gleichungen[1]), welche in moderner Schreibweise

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{-a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

und

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

heissen. Schon in der vor der Descriptio verfassten, aber, wie wir im 74. Kapitel sehen werden, erst 1619 gedruckten sogenannten Constructio hatte Neper seine dritte und wichtigste trigonometrische Erfindung niedergelegt, diejenigen Gleichungen[2]), welche man gegenwärtig die Neper'schen Analogien nennt, und welche man in moderner Schreibweise

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tng} \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tng} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tng} \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tng} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tng} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}, \quad \operatorname{tng} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tng} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

schreibt.

Hatte Torporley, hatte insbesondere Neper die sphärische Trigonometrie wesentlich gefördert, so wandte sich Willebrord Snellius beiden Trigonometrieen, der der geradlinigen Gebilde und der der Kugel, erfolgreich zu. Die hier in Betracht kommenden Schriften sind der *Eratosthenes Batavus* von 1617, die *Cyclometria* von 1621 und die *Doctrina triangulorum canonica*, welche kurz nach dem Tode des Verfassers 1627 im Drucke erschien. Der Eratosthenes Batavus ist in erster Linie von geodätischer Bedeutung[3]). Es kam Snellius darauf an, eine richtige Bestimmung des Umfanges der Erde, beziehungsweise eine richtige Gradmessung zu liefern, und zu diesem Zwecke stellte er zunächst zusammen, was über ältere Gradmessungen

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 48 sqq. [2]) Ebenda pag. 68 sqq. [3]) Kästner IV, 108 sqq.

ihm bekannt war. Schon dieser Abschnitt des Werkes ist höchst lesenswerth und zeigt Snellius als gelehrten Kenner der gesammten Litteratur, so weit sie damals vorhanden war. Vorzugsweise eine Aufgabe der Feldmesskunst, welche Snellius als der Erste behandelt hat, verdient hervorgehoben zu werden: das sogenannte Rückwärtseinschneiden, welches als 11. Aufgabe des 10. Kapitels des II. Buches gelehrt wird[1]). Diese Aufgabe besteht in der Auffindung der Entfernung eines Punktes der Erdoberfläche von den drei Eckpunkten eines schon bekannten terrestrischen Dreiecks mit Hilfe der Winkel, welche in dem zu bestimmenden Punkte durch die Sehstrahlen nach jenen drei Eckpunkten gebildet werden. So wichtig diese Aufgabe für die Herstellung genauer Karten ist, entging sie in der Bearbeitung des Snellius so sehr der allgemeinen Beachtung, dass sie wiederholt den Gegenstand von einander unabhängiger Untersuchungen bildete. Wilhelm Schickard[2]) (1592—1635) hatte 1624 eine Karte von Württemberg zu entwerfen und löste, wie aus seinen an Kepler gerichteten Briefen hervorgeht, damals selbständiger Weise die genannte Aufgabe. Ja noch 1730 wurde eine Auflösung derselben durch Pothenot[3]) als wichtige Entdeckung angesehen, welche den Namen des Bearbeiters zu tragen verdiente und desshalb als Pothenot'sche Aufgabe bezeichnet wurde. Erwies sich die Nachwelt hier ungerecht gegen Snellius, so übte sie eine ähnliche Ungerechtigkeit zu seinen Gunsten in Bezug auf die Cyclometria. Dort ist die Gleichung $x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ benutzt, um den Bogen aus seinen trigonometrischen Functionen zu berechnen, und von dort ist das Verfahren, welches Nicolaus von Cusa einst erfunden hatte (S. 201), als Eigenthum des Snellius in viele Werke übergegangen[4]). Das wird man allerdings zugestehen müssen, dass, wenn Snellius die Schriften des Cusanus kannte, er das Verdienst hatte, unter dessen vielen ungeordneten Versuchen denjenigen herauszufinden, welcher wenigstens bei kleinen Winkeln sich vortheilhaft anwenden lässt, und dass unzweifelhaft die Ableitung jener Formel bei Snellius mit der bei Cusanus nicht die geringste Aehnlichkeit besitzt (Figur 138, folg. Seite). Der Durchmesser AB eines um C als Mittelpunkt beschriebenen Halbkreises wird über A hinaus um

---

[1]) P. van Geer, *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* (*Archives Néerlandaises* Bd. 18 vom December 1883), pag. 12. [2]) Allgemeine Deutsche Biographie XXXI, 174—175. Artikel von S. Günther. [3]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris.* Tome X, 1730. [4]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 1. Sammlung (Göttingen 1790), S. 158—163. — Montucla II, 7. — Le Paige in der Zeitschrift *Mathesis* X, 34—36 (1890).

$$AE = \frac{1}{2} AB$$

verlängert und EGH geradlinig bis zum Durchschnitte mit der in B errichteten Berührungslinie an den Kreis gezogen. Ist alsdann $\sphericalangle GCB = \alpha$ und zieht man ausser dem Halbmesser CG noch die Senkrechte GL zum Durchmesser, so zeigt sich sofort

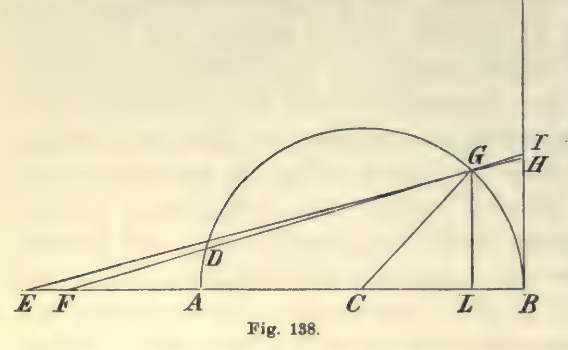


Fig. 138.

$$EL : GL = EB : HB$$

oder

$$(2r + r \cdot \cos\alpha) : r \cdot \sin\alpha = 3r : HB,$$

indem r den Kreishalbmesser bedeutet, d. h.

$$HB = \frac{3r \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$$

und nach Snellius ist $BH <$ arc BG. Andererseits ist nach seiner Behauptung $IB >$ arc BG, sofern I Durchschnittspunkt der Kreistangente in B mit der Geraden FDG ist, welche so gezogen wurde, dass $DF = r$. Da endlich I und H sehr nahe bei einander liegen, wenn α klein ist, so könne man $\frac{3r \cdot \sin\alpha}{2 + \cos\alpha}$ als Näherungswerth des Bogens $r\alpha$ benutzen. Der Beweis der beiden dieser Folgerung zu Grunde liegenden Ungleichheiten ($IB >$ arc $BG > HB$) scheint die wunde Stelle der Entwickelung zu sein und jedenfalls der Klarheit zu entbehren. Einer der Schriftsteller, welcher sehr bald (schon 1626) die Formel als die des Snellius mittheilte, war Albert Girard[1]). In dem an dritter Stelle erwähnten Buche Doctrina triangulorum ist Buch II Satz 4 ein Beweis des Sinussatzes gegeben, welcher heute noch in den holländischen Lehrbüchern den Namen des Beweises von Snellius führt[2]) (Figur 139). O ist der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises und des diesem concentrischen Einheitskreises, in welchen das kleinere Dreieck $\alpha\beta\gamma$ dem ABC ähnlich und ähnlichliegend eingezeichnet ist. $O\delta$ steht senkrecht auf $\alpha\beta$. Nun ist $\sphericalangle \alpha O \beta = 2C$, $\alpha O \delta = C$, also $\sin C = \sin \alpha O \delta = \alpha\delta = \frac{1}{2}\alpha\beta$, mit-

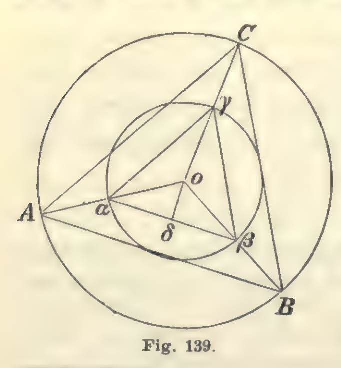


Fig. 139.

[1]) Le Paige l. c. pag. 35. [2]) Van Geer l. c. pag. 6.

hin $\alpha\beta = 2\sin C$. Ganz ebenso findet man $\beta\gamma = 2\sin A$, $\gamma\alpha = 2\sin B$. Ausserdem ist $AB : BC : CA = \alpha\beta : \beta\gamma : \gamma\alpha$, mithin auch

$$AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B.$$

Buch III, Satz 8 wird von Snellius selbst als für die sphärische Trigonometrie sehr nutzbar erklärt[1]. Hier ist nämlich das sphärische Polardreieck deutlicher als bei Vieta (S. 605) gezeichnet, welches zu einem gegebenen sphärischen Dreiecke in der wechselseitigen Beziehung steht, dass die Winkel des einen mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten des anderen sich zu 180° ergänzen. Da wir von Snellius nicht weiter zu reden haben, so sei wenigstens der Titel eines Werkes *Tiphys Batavus* von ihm genannt[2], welches 1624 die Presse verliess, und in welchem ein wirkliches Lehrbuch der Schifffahrtskunde zu erkennen ist. Der Name der Loxodromen trat hier zum ersten Male auf, welcher seitdem unbeschränktes Bürgerrecht sich erwarb. Aus dem Commentare zu den ins Lateinische übersetzten Schriften des Ludolph van Ceulen, welche Snellius 1619 herausgab, ist die Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks zu erwähnen, von der Snellius als von seiner Erfindung spricht[3]. Es ist der gleiche Ausdruck

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \text{ mit } s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

welchen die Inder kannten (Bd. I, S. 605), welcher aber in Europa vor Snellius nicht mit Bestimmtheit nachgewiesen werden kann. Wir wollen Snellius nicht verlassen, ohne ihn als das zu bezeichnen, was er in der Geschichte der Mathematik uns ist: ein geistvoller, kenntnissreicher, vorzugsweise auf praktische Anwendungen bedachter Schriftsteller, welcher desshalb am meisten in denjenigen Abschnitten leistete, welche dem Schifffahrer und dem Kartenzeichner unentbehrlich sind. Von dem Brechungsgesetze des Snellius hat die Geschichte der Physik Kenntniss zu nehmen.

Snellius hat in Anwendung der Formel $x = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$ das Beispiel einer Gleichung gegeben, in welcher ebensowohl ein Kreisbogen als trigonometrische Functionen desselben vorkamen. Eine noch weit schwierigere Aufgabe war es, den Bogen zu finden, welcher einer in dem erläuterten Sinne gemischten Gleichung genügen kann, und eine

[1] Chasles, *Aperçu hist.* pag. 55 (deutsch S. 52). — A. von Braunmühl, Zur Geschichte des sphärischen Polardreiecks in der *Biblioth. mathem.* 1898, S. 65—72. [2] Kästner IV, 111. — Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie, S. 354—362. [3] Chasles, *Aperçu hist.* pag. 292 und 432 (deutsch S. 297 und 481).

solche Aufgabe stellte Kepler[1]) schon in der *Astronomia nova* von 1609. Es handelt sich darum (Figur 140) von einem Punkte D des Durchmessers eines Halbkreises eine Gerade DM zu ziehen, welche die Halbkreisfläche in zwei Flächentheile ADM und BDM zerlege, deren Verhältniss $m:n$ gegeben ist. Man ziehe DE senkrecht zu CM, ferner sei

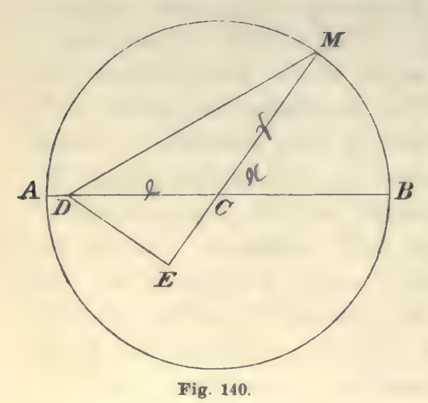


Fig. 140.

$$CD = e,\ CM = r,\ \sphericalangle BCM = x,$$
$$\sphericalangle ACM = 180^0 - x.$$

Alsdann ist

$$\text{Sector } ACM = \frac{r^2}{2}(180^0 - x),$$

Sector $BCM = \frac{r^2}{2} \cdot x$, $\triangle DCM = \frac{r}{2} \cdot DE = \frac{re}{2} \cdot \sin x$, Fläche $ADM = \frac{r}{2}[r(180^0 - x) - e \sin x]$, Fläche $BDM = \frac{r}{2}[rx + e \cdot \sin x]$. Folglich

$$\frac{r}{2}[r(180^0 - x) - e \cdot \sin x] : \frac{r}{2}[rx + e \sin x] = m : n$$

und daraus

$$rx + e \cdot \sin x = \frac{n}{m+n} \cdot r \cdot 180^0 = k.$$

Kepler stellte die Frage, welche den Namen der Kepler'schen Aufgabe behalten hat, aber er glaubte, eine directe Auflösung sei wegen der Heterogeneität von Winkel und Sinus unmöglich.

In der Untersuchung des Sehnenvierecks, mit welcher, wie wir oben sahen, Snellius sich erfolgreich beschäftigt hat, ging Albert Girard noch einen wesentlichen Schritt weiter. Girard hat 1626 im Haag *Tables de sinus, tangentes et sécantes selon le raid de 10000 parties*[2]) veröffentlicht, von welchen 1629 auch eine holländische Uebersetzung erschien. In der Einleitung zu diesen Tafeln findet sich das hier Gemeinte. Wenn a, b, c, d als Seiten eines Sehnenvierecks im Kreise vom Halbmesser r benutzt werden können, so ist einleuchtend, dass die Reihenfolge der Seiten keinen Einfluss auf diese Eigenschaft besitzt, dass es vielmehr drei verschieden aussehende Sehnenvierecke $abcd$, $abdc$, $acbd$ geben wird. Deren Flächeninhalt F ist aber einer und derselbe, nämlich der des Kreises vermindert um die vier Kreisabschnitte über a, b, c, d. Diagonalen kommen in allen diesen Sehnen-

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) III, ~~401~~ 411. [2]) Kästner III, 107—110. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 440, Note 1 (deutsch S. 492, Note 120).

vierecken drei vor, δ_1, δ_2, δ_3, welche als Sehnen die Bögen $a + b$, $a + c$, $a + d$ bespannen, wenn wir diese leicht verständliche Abkürzung uns gestatten dürfen. Girard's Formel lautet in dieser Bezeichnung $F = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{4r}$. Eine sehr wichtige Neuerung besteht in einer allerdings nicht folgerichtigen Bezeichnung, deren Girard bei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken sich bedient hat. Die Hypotenuse nannte er H, die perpendicular gezeichnete Kathete P, die als Basis dienende B, den Winkel an der Spitze A, den zwischen Basis und Hypotenuse V. Die Ergänzungen aller dieser Grössen zu 90^0 stellte er durch die entsprechenden kleinen Buchstaben dar: $a = 90^0 - A$, $b = 90^0 - B$ u. s. w. Alle diese Buchstaben werden von ihm aber auch ohne jeden Zusatz gebraucht, wenn ein Sinus gemeint ist, also B statt $\sin B$, b statt $\sin b$ beziehungsweise statt $\cos B$. Tangente und Secante sind durch die Silben tan und sec ausgedrückt: $\tan H$, $\sec A$, $\tan a$ u. s. w.

Der sphärischen Trigonometrie brachte Girard auch in einer späteren Schrift, in welcher man der Ueberschrift nach kaum Trigonometrisches erwarten sollte, einen wesentlichen Zuwachs. In der 1629 gedruckten *Invention nouvelle en l'algèbre* ist nämlich die sphärische Flächenformel erstmalig gegeben. Ein ebenes n-eck hat die Winkelsumme $(2n - 4)90^0$, ein sphärisches n-eck eine um e grössere Winkelsumme. Dieser Ueberschuss e verhält sich nach Girard zu acht Rechten, wie die sphärische Vielecksfläche zur ganzen Kugeloberfläche.

Trigonometrische Tafeln erschienen in grosser Anzahl. Mathias Bernegger[1]) (S. 690) gab sowohl 1612 als 1619 in Strassburg Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten heraus. Girard's Tafeln von 1626 haben wir erst erwähnt. Ein Jahr später gab Franciscus van Schooten der Vater eben solche heraus: *Tabulae sinuum, tangentium, secantium, ad Radium 10000000 avecq l'usage d'icelles en triangles plans* (Amsterdam 1627). Die in französischer Sprache verfasste ebene Trigonometrie giebt zu Bemerkungen keinen Anlass. Das Format der Tafeln ist aber vermuthlich das kleinste, welches für trigonometrische Tafeln benutzt worden ist. Es ist ein wahres Westentaschenbüchelchen.

Nunmehr haben wir einen italienischen Schriftsteller zu nennen: Bonaventura Cavalieri[2]). Sein Geburtsjahr wird zu 1598, sein Todesjahr zu 1647 angegeben, doch scheint die erstere Angabe durch 1591 ersetzt werden zu müssen. Auch der Name ist Zweifeln unter-

---

[1]) Kästner III, 340. [2]) Piola, *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (1844). — Favaro, *Bonaventura Cavalieri nello studio di Bologna* (1888).

worfen, da die Formen Cavalieri, Cavallieri, Cavaglieri, Cavalerius, de Cavalleriis sich sämmtlich actenmässig nachweisen lassen. Die hier festgehaltene Schreibweise Cavalieri entspricht der Unterschrift zahlreicher Briefe. Ein Schüler Cavalieri's, Urbano Daviso, ist der Urheber der Erzählung, Cavalieri habe als 23jähriger Jüngling in Pisa zuerst einen Euklid in die Hand bekommen, habe ihn in wenigen Tagen studiert und sich dann weiter mit Mathematik beschäftigt. Mit welchem Erfolge geht daraus hervor, dass er schon im Mai 1619 Castelli in Pisa als Lehrer der Mathematik vertreten durfte und kurz darauf sich um eine in Bologna seit zwei Jahren offene Professur der Mathematik bewarb, die ihm allerdings nicht zu Theil ward, weil schrifstellerische Leistungen unerlässliche Bedingung der Anstellung waren, und Cavalieri verfügte noch nicht über solche. Gedruckt war von ihm ebenso 1629 noch nichts, als er neuerdings um die Stelle zu Bologna sich bewarb, deren Besetzung jetzt um so dringlicher erschien, als auch der Inhaber der zweiten Professur der Mathematik 1626 gestorben war, mithin seit zwei Jahren keinerlei mathematischer Lehrstuhl mehr besetzt war. Cavalieri konnte sich diesesmal auf handschriftlich vorgelegte Arbeiten und auf eindringliche Empfehlungen so einflussreicher Gelehrten wie Castelli und Galilei stützen. In Galilei's damaligem Briefe ist ausdrücklich von den glänzenden Fortschritten die Rede, welche Cavalieri gemacht habe, als er vor etwa 15 Jahren durch Castelli in Pisa auf die Mathematik hingewiesen wurde. Das muss also 1614 gewesen sein, und 23 Jahre früher schrieb man 1591. An Daviso's Angabe von dem 23. Lebensjahre, zu welchem Cavalieri erstmalig mit Mathematik sich beschäftigte, halten wir aus folgendem Grunde fest: wäre Cavalieri 1598 geboren, 1614 erst 16 Jahre alt gewesen, so hätte in so viel jüngeren Jahren ein unerhört rasches Fortschreiten in der Mathematik ihm nur noch grössere Ehre gemacht, und Daviso hätte sich mit Vergnügen dieses weiteren Grundes den von ihm verehrten Lehrer hoch zu preisen bedient. Die Anstellung in Bologna erfolgte 1629 auf 3 Jahre, wurde dann 1632 auf weitere 4, 1636 auf weitere 7 Jahre erneuert, 1643 auf 3 Jahre, 1646 auf 12 Jahre, von welchen Cavalieri aber nur eines noch erlebte. Neben seiner Universitätsstellung gehörte Cavalieri dem Orden der Jesuaten an. Das Erscheinen seiner Schriften trifft ziemlich genau mit dem Ablaufe der Zeiten zusammen, auf welche seine jedesmalige Anstellung in Bologna lautete. Man geht also kaum fehl, wenn man dasselbe mit seinem Wunsche nach einer Erneuerung der Anstellung in Zusammenhang bringt. Er gab 1632 zwei Werke gleichzeitig heraus: *Lo specchio ustorio, ovvero Trattato delle settioni coniche* und *Directorium generale uranometricum, in quo*

Trigonometriae logarithmicae fundamenta ac regula demonstrantur. Dem Jahre 1643 gehört die *Trigonometria plana et sphaerica linearis et logarithmica* an.

Den *Specchio ustorio* hätten wir im 72. Kapitel bei der Besprechung der Mechanik erwähnen können, weil in ihm Cavalieri die Parabel als Falllinie bezeichnete, allerdings unter Nennung Galilei's als Entdecker dieser Eigenschaft, aber ohne dessen Erlaubniss dazu einzuholen, eine gerade in jenem Augenblicke, wo die Angriffe auf den Verfasser der Gespräche über die beiden Weltsysteme schon anfingen, fast unverzeihliche Tactlosigkeit.

Das *Directorium* von 1632, welches zur *Trigonometria* von 1643 beinahe im Verhältnisse einer ersten zu einer zweiten Auflage des gleichen Werkes steht, enthält unter Anderem die Formel für die sphärische Dreiecksfläche mit einem Cavalieri angehörenden Beweise des Satzes. Zu ganz allgemein verbreiteter Kenntniss gelangte der Satz aber 1643 so wenig wie 1632, so wenig wie 1629, als Girard ihn aussprach, denn noch am Ende des Jahres 1655 machte Roberval[1]) die Flächenformel Huygens gegenüber als seine Entdeckung geltend und gab ihm zu Ende des Jahres 1656 brieflich seinen Beweis, wenn auch eine gedruckte Veröffentlichung durch Roberval nicht bekannt ist. Mit dem Verhältnisse von Kugelvielecken zur Kugeloberfläche beschäftigte sich auch Broscius[2]) einigermassen in seinem gegen Ramus gerichteten Werke von 1652, das uns (S. 685) bei Gelegenheit der Untersuchungen über Sternvielecke beschäftigt hat.

Emanuel Porto[3]), ein italienischer Jude, der in der ersten Hälfte des XVII. Jahrhunderts in Triest und Padua als Talmudlehrer gewirkt hat, verfasste auch einige mathematische Schriften und zwar in italienischer Sprache. Es sind diese der *Porto astronomico* von 1636 und eine *Breve e facil introduzione alla geografia e trigonometria* von 1640. Das erstere Werk ist eine Goniometrie und sphärische Trigonometrie nebst einer Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten der Winkel unter 90° von Minute zu Minute für den Halbmesser 100000; das letztere ist eine mathematische Geographie, an welche eine ebene Trigonometrie sich anschliesst. Im Porto astronomico wird auch von der Prostaphaeresis umfassender Gebrauch gemacht, welche durch Josteglio erweitert und allgemein gemacht worden sei. Es kann kaum bezweifelt werden, dass unter Josteglio

---

[1]) *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens,* T. I (Haag 1888), pag. 370 u. 518. [2]) Kästner III, 203 und Derselbe in den Geometrischen Abhandlungen, II. Sammlung, Abhandlung 31, S. 416—420. [3]) G. Wertheim in der Monatsschrift für Geschichte und Wissenschaft des Judenthums. Jahrgang 41, S. 616—622 und 42, S. 375—380.

der Wittenberger Mathematiker Melchior Jöstel gemeint ist, der in Briefwechsel mit Tycho Brahe stand, von welchem eine *Logistica προσθαφαίρεσις astronomica* vom Jahre 1619 noch in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts handschriftlich vorhanden war, aber vermuthlich niemals gedruckt worden ist[1]).

Johannes Tonski[2]) veröffentlichte 1640 in erster, 1645 in zweiter bedeutend vermehrter Ausgabe eine *Arithmetica vulgaris et trigonometria rectilineorum*, in welcher die allerdings von Rhäticus (S. 602) bemerkte, aber noch immer nicht allgemein bekannte Unbestimmtheit des Dreiecks durch zwei Seiten und den der einen Seite gegenüberstehenden Winkel hervorgehoben ist.

Einige Männer wandten ihr Augenmerk der Aufgabe zu, das Verhältniss zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser zu bestimmen, doch sind diese cyclometrischen Arbeiten gleichwie die in dem früheren Abschnitte von sehr verschiedenem schriftstellerischen Werthe.

Christian Longomontanus[3]), ein dänischer Astronom, welcher als Gehilfe Tycho Brahe's mit Ehren genannt wird, glaubte einen vollständig genauen Werth von π ermittelt zu haben und veröffentlichte seine vermeintliche Entdeckung in Schriften von 1638 und 1644. Seine Construction ist folgende (Figur 141): AC ist der Kreisdurchmesser, AB gleich dem Halbmesser r von 43 Einheiten. Ferner ist $CE = r$, $EF = \frac{27}{43}r = 27$. Dann schneidet FG senkrecht zu BC gezogen das dem Halbkreise gleiche Stück BG ab. Warum diese Gleichheit stattfinde, ist nicht ausgeführt. Die Rechnung aber ergiebt folgenden Werth:

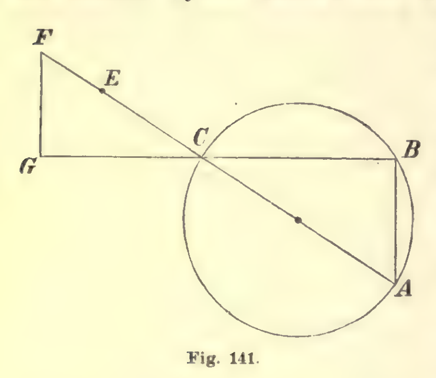


Fig. 141.

$$CF = 43 + 27 = 70, \quad CA = 86, \quad BC = \sqrt{86^2 - 43^2} = \sqrt{5547}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CFG und CAB ist ferner

$$CG = \frac{BC \cdot CF}{AC} = \frac{70}{86}\sqrt{5547},$$

$$BG = BC + CG = \frac{156}{86}\sqrt{5547} = \sqrt{18252} \sim 135{,}1$$

sehr nahezu und $\pi = \frac{135{,}1}{43} = \frac{314186\frac{2}{43}}{100000}$.

---

[1]) A. v. Braunmühl in der *Biblioth. mathem.* 1898, S. 94—95. [2]) Dickstein in der *Biblioth. mathem.* 1894, S. 24. [3]) Kästner III, 58. — Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (2. édition 1831), pag. 207—208.

Das ist aber der von Longomontanus für richtig erachtete Werth. An denselben knüpfte sich ein heftiger litterarischer Streit mit dem englischen Mathematiker John Pell (1610—1685), welcher 1646 seine *Controversy with Longomontanus concerning the quadrature of the circle* und 1647 eine lateinische Uebersetzung der gleichen Schrift herausgab. Andere Mathematiker, wie Roberval, Descartes, Cavalieri u. s. w. wurden als Schiedsrichter in den Streit hereingezogen, der zu einem eigentlichen Ergebnisse nicht führte[1]).

Gleich unfruchtbar waren Streitschriften, welche zwischen einigen holländischen Schriftstellern gewechselt wurden[2]). Cornelis van Leeuwen, Abraham de Graaf, Claas Gietermaker, Christiaan Martini Anhaltin erschöpften den Reichthum ihrer Muttersprache an Schimpfwörtern in Veröffentlichungen von 1663 und 1664, welche von trigonometrischen und Schifffahrtsaufgaben ihren bald verlassenen Ausgangspunkt nahmen, um in ein wüstes Geschimpfe ohne wissenschaftlichen Werth auszuarten.

Philipp Uffenbach[3]), ein Maler in Frankfurt am Main, lehrte 1653 geometrische Constructionen, welche geeignet waren, die Länge des Kreisumfanges nahezu richtig herzustellen.

Ein Schriftsteller ganz anderer Bedeutung war Gregorius von Sanct Vincentius[4]) (1584—1667), wenn wir ihn auch in diesem Kapitel von seiner wenigst vortheilhaften Seite kennen lernen. Er ist in Brügge geboren, in Gent gestorben, hat aber eine Anzahl von Jahren ausserhalb seines belgischen Vaterlandes verlebt. Seine Studienzeit brachte er in Rom zu, wo Clavius sein Lehrer war. Von 1629 bis 1631 weilte er als Professor der Mathematik in Prag, wo er alle Schrecknisse des Krieges durchmachte, und wo ein schon druckreifes Werk in den Flammen zu Grunde ging. Es waren drei stattliche Bände über Statik und Geometrie, welche so vernichtet wurden. Andere Papiere, deren Niederschrift bis auf 1625 zurückgeht, wurden gerettet, fuhren aber zehn Jahre in der Welt herum, bis sie in Gent wieder in den Besitz ihres Verfassers gelangten. Sie bildeten dann kaum verändert das grosse Werk, welches Gregorius 1647 als einen Folioband von 1225 Seiten in 10 Bücher eingetheilt zum Drucke beförderte: *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni.* Die Methode, welche Gregorius hier zur Erzielung einer genauen Quadratur des Kreises und ebenso auch der Kegelschnitte vorschlug, soll uns später beschäftigen. Hier muss genügen zu berichten, dass

---

[1]) E. Jacoli im *Bulletino Boncompagni* II, 299—312. [2]) Bierens de Haan im *Bulletino Boncompagni* XI, 383—452, sowie *Bouwstoffen* etc. II, 53—111 und 137—172. [3]) Kästner III, 54. [4]) Allgemeine deutsche Biographie IX, 631—633.

Gregorius nicht weniger als vier Verfahrungsarten schilderte, vermittels deren man zur Quadratur des Kreises gelangen könne.

Kaum war das umfang- und inhaltreiche Werk erschienen, als es die verschiedensten Urtheile hervorrief. Neben solchen, die es bewunderten, waren Verkleinerer desselben auf dem Platze, deren Stimme sehr viel galt. Descartes[1]) fand in einem Briefe an den jüngeren Franciscus van Schooten vom Frühjahre 1649 nichts Gutes darin; er habe die Schlüsse, so weit sie überhaupt verständlich seien, rückwärts verfolgt, und er sei auf offenkundige Fehler gestossen. Roberval und Mersenne traten noch früher öffentlich auf, und Letzterer insbesondere sprach auf S. 72 seines 1647 gedruckten Buches: *Novarum observationum physico-mathematicarum tomus tertius, quibus accessit Aristarchus Samius de mundi systemate*[2]) in verächtlichster Weise von dem Werke, ohne dessen Verfasser zu nennen. Gegen diese Angriffe wandte sich ein Anhänger des Gregorius, wie er Belgier, wie er Mitglied des Jesuitenordens, Alfons Anton de Sarasa[3]) (1618—1667). Seine *Solutio Problematis a. R. P. Marino Mersenno propositi* von 1649 war indessen weniger eine Erläuterung des Opus geometricum des Gregorius — eine solche stellte Sarasa für später in Aussicht, ohne alsdann sein Versprechen einzulösen — als ein Gegenangriff gegen Mersenne. Letzterer hatte die erwähnte Kritik mit den Worten beschlossen, dass die Mathematiker gegen jenes Werk Tadel erhöben, weil der Verfasser den in die Augen fallenden Titel der Zirkelquadratur ihm beigelegt, jedoch nichts zur Sache Gehöriges vorgebracht habe, als was schon vorher gefunden gewesen sei. Die Sache komme nämlich auf folgende Aufgabe hinaus, deren Lösung vielleicht noch viel schwieriger als die Quadratur des Kreises sei: mit Hilfe von Geometrie den Logarithmen einer dritten Grösse zu finden, sofern die Logarithmen zweier anderer gegeben seien, mögen jene drei Grössen beliebig rational oder irrational gewählt werden. An diese Schlusssätze klammerte sich Sarasa, d. h. an die Beantwortung der Frage, ob drei Grössen A, C, L immer einer und derselben geometrischen Reihe angehören, und ob man, wenn die Stellung von A und C innerhalb der Reihe gegeben ist, stets die Stellung von L erkennen könne, indem man geometrischer Hilfsmittel sich bediene. Sarasa stützt sich dabei auf das VI. Buch des Opus geometricum, welches von der Hyperbel handelt. Gregorius hatte dort nachgewiesen, dass Flächenräume, welche durch eine Hyberbel, deren eine Asymptote

[1]) *Oeuvres de Descartes* (édit. Cousin) X, 319. [2]) Die betreffende Stelle ist abgedruckt bei Kästner III, 251. Vergl. auch Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1831), pag. 89. [3]) Kästner III, 251—254.

und Parallele zur anderen Asymptote begrenzt seien, in einem Verhältnisse stehen, welches gleich sei dem Exponenten der Potenzen, als welche die abschliessenden Ordinaten sich kundgeben. Mit anderen Worten, Gregorius hatte das Auftreten von Logarithmen bei den erwähnten Flächenräumen erkannt, wenn auch nicht mit Namen genannt. Letzteres that Sarasa, und darin liegt das wirkliche Verdienst seiner Streitschrift.

Nun trat 1651 ein neuer, damals noch ganz unbekannter junger Schriftsteller in die Kampfbahn ein, der eben 22jährige Christian Huygens[1]) (1629—1690). Zweiter Sohn des Constantin Huygens[2]), eines als Dichter und Staatsmann bekannten, aber auch die Naturwissenschaften pflegenden, Descartes eifrig bewundernden und nicht minder selbst in hohem Ansehen stehenden Vaters sollte Huygens gleichfalls einer diplomatischen Laufbahn sich widmen und studirte deshalb die Rechtsgelehrsamkeit, bis er 1655 den Doctorgrad beider Rechte sich erwerben konnte. Schon vorher trat er aber als Schriftsteller auf dem Gebiete auf, auf welches seine Begabung ihn vorzugsweise hinwies. Es war das mathematische, das physikalische, das astronomische Gebiet, und der jüngere Franciscus van Schooten war auf demselben seit 1645 sein Lehrer, später sein Freund und Bewunderer. Zunächst haben wir es mit Schriften von Huygens über die Kreisquadratur zu thun. Wir werden ihm dann im 75. Kapitel als Schriftsteller über Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst wieder begegnen. 1651 veröffentlichte Huygens *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro*, in welchem er sich auf De la Faille's Standpunkt stellte, wonach aus dem Schwerpunkte einer Figur deren Flächeninhalt abgeleitet werden könne (S. 696). Zugleich versprach er eine Widerlegung von Gregorius, und diese fand ihren Platz in der kleinen Abhandlung *'Εξέτασις Cyclometriae clarissimi Gregorii a. S. Vincentio.* Sie war gegen die erste im Opus geometricum empfohlene Methode gerichtet und wies deren Hinfälligkeit nach. Schon diese Abhandlung erwarb ihrem jungen Verfasser laute Anerkennung, noch lauter durch den Wiederhall des immer lebhafter werdenden Streites.

Neue Schriften für und gegen Gregorius wechselten anhaltend.

---

[1]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 480—486. — Vergl. auch den Briefwechsel von Huygens in den acht ersten Bänden der grossen Ausgabe: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société Hollandaise des Sciences* 1888 flgg. Die Schreibweise Huygens dürfte vor der gleichfalls vorkommenden Huyghens den Vorzug verdienen. [2]) D. J. Korteweg, *Notes sur Constantijn Huygens considéré comme amateur des sciences exactes et sur ses relations avec Descartes* in den *Archives Néerlandaises*, T. XXII.

Für ihn trat 1653 Aloysius Kinner von Löwenthurm[1]) aus Prag mit seiner *Elucidatio geometrica problematis austriaci, sive quadraturae circuli feliciter tandem detectae per R. P. Gregorium a. Sto. Vincentio* ein, gegen ihn 1654 ein Ordensgenosse des Gregorius, wodurch die Bekämpfung schon äusserlich an Kraft gewann. Vincent Leotaud (1595—1672), der Lehrer am Jesuitencollegium in Lyon, hob überdies in seinem *Etymon quadraturae circuli hactenus editorum celeberrimae et examen circuli quadraturae Gregor a St. Vincentio* einen wunden Punkt hervor, welcher von nun an den Gegnern stets als Zielpunkt diente. Gregorius hatte, wie früher erwähnt, ganze vier Methoden vorgeschlagen, welche zur Quadratur des Kreises, mithin zur Berechnung der Verhältnisszahl π führen mussten. Warum brachte er keine dieser angeblich sicheren Methoden in Anwendung? Hielt er das eigentliche Auffinden von π für nebensächlich, oder hatte er erkannt und nur verschwiegen, dass seine Vorschläge sich in Rechnung nicht umsetzen liessen, mithin ihre eigene Widerlegung in sich trugen?

In dem gleichen Jahre 1654 erschien Huygens' *De circuli magnitudine inventa*[2]), in welcher nicht bloss die von Snellius unbewiesen gelassenen Sätze (S. 706) mittels Schwerpunktbetrachtungen, also auf Grundlage von Huygens' Schrift von 1651, gesichert wurden, sondern auch zahlreiche andere Sätze mit ebenso strengen als elementaren Beweisen versehen wurden. Als die wichtigsten Sätze gelten:

Satz 5. Jeder Kreis ist grösser als ein gleichseitiges Sehnenvieleck vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Ueberschusses, um welchen es das gleichseitige Sehnenvieleck von halb so vielen Seiten übertrifft.

Satz 6. Jeder Kreis ist kleiner als $\frac{2}{3}$ eines gleichseitigen Tangentenvielecks vermehrt um $\frac{1}{3}$ des ihm ähnlichen Sehnenvielecks.

Satz 7. Jeder Kreisumfang ist grösser als der Umfang eines gleichseitigen Sehnenvielecks vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Ueberschusses, um welchen dieser den Umfang des gleichseitigen Sehnenvielecks von halb so vielen Seiten übertrifft.

Satz 11. Der Umfang jedes Kreises ist kleiner als die kleinere der beiden mittleren Proportionalen zwischen den Umfängen einander ähnlicher gleichseitiger Sehnen- und Tangentenvielecke. Die Kreisfläche aber ist kleiner als das zu jenen ähnliche Vieleck, dessen Umfang die grössere jener beiden mittleren Proportionalen ist.

---

[1]) Quetelet pag. 218. [2]) Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung 1892. Der Bericht über die Abhandlung von Huygens S. 39—41, die Abhandlung selbst S. 85—131.

Satz 16. Bezeichnet a die Länge eines Bogens, welcher kleiner als der Halbkreis ist, s dessen Sinus, s' dessen Sehne, so ist stets

$$s' + \frac{s' - s}{3} < a < s' + \frac{s' - s}{3} \cdot \frac{4s' + s}{2s' + 3s}.$$

Die Fassung von Satz 16 entspricht dem Sinne, aber nicht dem Wortlaute bei Huygens, in welchem Formeln durchweg vermieden sind. Huygens gewinnt mittels seiner Sätze schon durch Anwendung regelmässiger 60-ecke die Grenzen:

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538.$$

Franciscus Xaverius Aynscom[1]) (1624—1660) veröffentlichtete 1656 seine *Expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli R. P. Gregorii a S. Vincentio*, ohne auf den soeben erörterten Einwand sich einzulassen. Huygens antwortete noch im gleichen Jahre 1656 in einem Briefe an Aynscom, und endlich gab auch Leotaud 1663 noch eine Schrift *Cyclomathia* heraus, welche als die letzte derer betrachtet werden kann, die in diesem wissenschaftlichen Streite gewechselt wurden, an welchem — und das verdient bemerkt zu werden — Gregorius selbst sich nie betheiligt hat. Er erhielt, wie aus dem Briefwechsel von Huygens zu ersehen ist, alle gegen wie für ihn verfassten Schriften, er beantwortete die Zusendungen in liebenswürdiger Weise durch Dankbriefe, auf den sachlichen Inhalt ging er nicht ein.

Von ganz anderer Seite fasste ein englischer Schriftsteller, James Gregory[2]) (1638—1675), die Aufgabe der Quadratur in seiner 1667 gedruckten *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Gregory zeigte in einer für Kreis, Ellipse und Hyperbel gemeinschaftlichen Beweisführung, dass, sofern Vielecke, deren Seitenzahl fortwährend zunimmt, der Curve einbeschrieben und umschrieben werden, die Vielecke höherer Seitenzahl einen immer weniger von einander verschiedenen Flächeninhalt besitzen. Er zeigt ferner, dass, wenn A das erste Sehnenvieleck, B das erste Tangentenvieleck, C, D das zweite Sehnen- beziehungsweise Tangentenvieleck ist, alsdann $C = \sqrt{AB}$, $D = \frac{2BC}{B+C}$ sein muss, d. h. ersteres das geometrische Mittel zwischen den den Ausgangspunkt bildenden Vielecken, letzteres das harmonische Mittel zwischen dem ersten Tangentenvieleck und dem zweiten Sehnenvieleck. Sei (Figur 142) der Halbmesser OG des Kreises

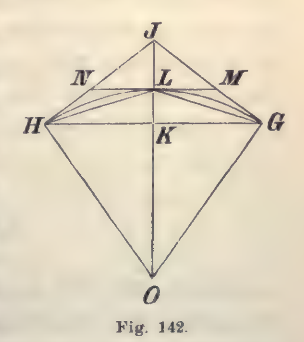


Fig. 142.

[1]) Kästner III, 261—265. [2]) Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (1831), pag. 95—101.

als Einheit gedacht und $\sphericalangle HOG = 2\varphi$ der Centriwinkel, welchen die Seite GH des regelmässigen Sehnenvielecks von n Seiten bespannt. Man sieht sofort, dass alsdann

$$A = n \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$B = n \operatorname{tng}\varphi$$
$$C = n \sin\varphi$$
$$D = 2n \operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}$$

ist, und diese Werthe entsprechen den obigen Zusammenhängen. Ebenso entstehen natürlich weitere Sehnen- und Tangentenvielecke E, F aus C, D u. s. w. Es bildet sich, wie Gregory schon in seiner Vorrede sagt, eine *Series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus*, und dieses Wort der Convergenz kehrt im Verlaufe der Schrift immer und immer wieder und ist von da an der Wissenschaft erhalten geblieben. Der Kreis ist also die Grenze, welcher beide Vielecksreihen zustreben, und zwar unter Anwendung eines Namens unserer Neuzeit als harmonisch-geometrisches Mittel. Der Grenzwerth, um dessen Auffindung es sich handelt[1]), wird erst nach unendlicher Gliederzahl der Reihe angetroffen, ist also von A, B ebensoweit entfernt als z. B. von E, F oder einem anderen Gliederpaare endlicher Rangordnung. Der Grenzwerth muss also in ganz gleicher Weise aus E, F wie aus A, B sich bilden. Ist ein endliches Verfahren dazu nicht vorhanden, so ist die Grenze nicht zu finden. Wir sagen statt dessen heute, der Grenzwerth sei eine Transcendente, aber wir verbinden damit den gleichen Sinn, der in Gregory's Ausdrucksweise sich verbarg. Für die damalige Zeit war diese Auffassung allerdings so überraschend neu, dass Huygens sie nicht verstand und ihr im Journal des Savans vom Juli 1668 entgegentrat, worauf Gregory in den Philosophical Transactions noch des gleichen Jahres widersprach. Die weitere wissenschaftliche Thätigkeit Gregory's, insbesondere auf dem Gebiete der Reihenlehre, fällt jenseits 1668, mithin jenseits der Zeitgrenze, welche wir diesem Bande gesteckt haben.

74. Kapitel.

Rechnen. Logarithmen.

Gehen wir nun zu dem zweiten grossen Gebiete der Mathematik über, das von den Zahlengrössen ausgehend die zuletzt besprochenen Untersuchungen, bei welchen gleichfalls ein Rechnen hilfeleistend

[1]) *Propositio VII: Oportet praedictae seriei terminationem invenire.*

stattfand, als grenzbenachbarte besitzt, von wo der Uebergang um so leichter erfolgt, und beginnen wir mit den ersten Anfangsgründen, dem einfachen Rechnen.

Dasselbe war allmälig auch über die dem alltäglichen Gebrauche dienenden Rechnungsarten mit ganzen, und zwar kleinen ganzen Zahlen hinaus Volkseigenthum geworden, und dem entsprechend hatte die wissenschaftliche Berechtigung sowohl als die Behandlung der Lehre vom Rechnen sich geändert. Umfassende Handbücher der Gesammtmathematik, die es auch im XVII. Jahrhunderte gab, konnten nicht umhin, das Rechnen zu lehren, ohne jedoch mehr das Hauptgewicht gerade darauf zu legen. Besondere Schriften suchten dann das Rechnen auch mit grossen und sehr grossen Zahlen zu erleichtern theils dadurch, dass sie instrumentale Hilfsmittel erfanden, theils durch Einführung neuer Kunstgriffe, unter welchen die Erfindung der Logarithmen unsere Aufmerksamkeit besonders in Anspruch nehmen muss. Dann treten neu hinzu gewisse Betrachtungen, welche etwa den Uebergang von der allgemeinen Arithmetik zu denjenigen Untersuchungen bilden, die später den Namen der algebraischen Analysis erhalten haben. Endlich werden wir von gewissen Aufgabensammlungen sprechen müssen, welche alle Theilgebiete der Mathematik zusammenfassen und uns überleiten werden zur Geschichte der zahlentheoretischen Untersuchungen und der Algebra.

Von den zuerst zu erwähnenden grösseren Handbüchern nennen wir die Encyclopädie von Johann Heinrich Alsted[1]) (1588—1638) von Herborn, ein 1620 in vier Foliobänden herausgegebenes encyclopädisches Werk, dem man nicht viel mehr nachrühmen kann, als dass es das erste derartige Druckwerk war, welches in Deutschland erschien. Leibniz[2]) nannte es ein dem Fassungsvermögen jener Zeit entsprechend lobenswerthes Werk, und ein späterer Schriftsteller[3]) erzählt, man habe die Buchstaben des Namens des Verfassers Alstedius versetzt, um das Wort sedulitas zu erhalten.

Wir nennen die Disciplinae mathematicae des Pater Johann Ciermans[4]) von 1640. Der in Herzogenbusch geborene Verfasser gehörte dem Jesuitenorden an, lehrte in Löwen und Antwerpen und starb 1648, als er im Begriffe stand, von Portugal aus eine Missionsreise nach China anzutreten. Das Werk ist in zwölf Monate getheilt,

---

[1]) Kästner III, 434—438. — Poggendorff I, 34. [2]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) VII, 67: *Diligentissimus Joh. Henr. Alstedius cuius Encyclopaedia mihi pro captu illorum temporum certe laudanda videtur.* [3]) Joh. Friedr. Stockhausen, Historische Anfangsgründe der Mathematik, Berlin 1752, S. 30. [4]) Kästner III, 438—442. — Quetelet pag. 202—203.

in welchen die betreffenden Gegenstände nach dem Berichte des Verfassers thatsächlich gelehrt zu werden pflegten. Das Schuljahr beginnt mit October, endigt mit September. Jeder Monat zerfällt sonderbarer Weise in drei Wochen, der September hat deren gar nur zwei; vielleicht sind die nothwendigen Feier- und Erholungstage auf diese Weise in Rechnung gebracht. Im October wurde Geometrie vorgetragen, im November Arithmetik, im December Optik u. s. w.; zuletzt im September Chronologie. In der zweiten Novemberwoche ist von einer mit Rädern versehenen Vorrichtung die Rede, welche Ciermans erfunden haben will, und welche jede Multiplication und Division fehlerlos vollziehen lasse, also von einer Rechenmaschine; eine Beschreibung ist nicht beigegeben.

Wir nennen den Cursus mathematicus von Pierre Herigone aus dem Jahre 1644, den wir schon (S. 656) zu erwähnen hatten, als wir die Ausgaben alter Geometer besprachen.

Wir nennen das Directorium mathematicum von Abdias Trew[1]) von 1651, ein grosses Lehrbuch der gesammten reinen und angewandten Mathematik, welches durch Breite zu ersetzen suchte, was ihm an Tiefe abging.

Wir nennen den Cursus mathematicus des Kaspar Schott[2]) (1608—1666), eines in Königshofen bei Würzburg geborenen, in Würzburg selbst als Professor der Mathematik gestorbenen Mitgliedes des Jesuitenordens. Schott war übrigens nicht ausschliesslich in seiner Heimath thätig, sondern fand zeitweise auch in Palermo Verwendung als Lehrer der Mathematik und Moral. Der Cursus mathematicus wurde erstmals 1661, später wiederholt als starker Folioband gedruckt.

Wir nennen den uns gleichfalls schon bekannt gewordenen Pater Andreas Tacquet, von welchem zwar nicht innerhalb seiner Opera mathematica, aber als besonderes Bändchen von 1664 eine Arithmetik[3]) erschien.

Damit ist zugleich der Uebergang zu einem anderen Einzelwerke gewonnen, welches einen bedeutenden Einfluss ausübte: die *Clavis mathematica* von 1631, welche 1652 in neuem Abdrucke erschien. Ihr Verfasser William Oughtred[4]) (1574—1660) ist in Eton geboren, war Zögling der Universität Cambridge, seit 1603 Pfarrer in einem Landorte und konnte seiner Lieblingswissenschaft, der Mathematik, nur spärliche freie Stunden widmen, obendrein nur, wenn sie

---

[1]) Günther, Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf, S. 27 (Separatabdruck aus dem 3. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg 1881). [2]) Poggendorff II, 838. [3]) Kästner III, 449. [4]) Ebenda III, 39—42. — Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, pag. 30—31.

in die Tageszeit fielen, denn am Abend entzog ihm seine haushälterisch gesinnte Frau das Licht, so dass er sich schmerzlich beklagt, dadurch sei manche Aufgabe nicht zur Lösung gelangt. Oughtred's Tod erfolgte aus Freude über die ihm unerwartete Nachricht von der Wiederherstellung des englischen Königthums. Zwei Neuerungen sind vornehmlich in der Clavis mathematica enthalten, welche rasch sich einbürgerten, das Multiplicationskreuz $\times$ und ein aus vier Punkten gebildetes Zeichen gleicher Proportionen ::, dessen man wenigstens in England sich noch bedient. $a \cdot b :: c \cdot d$ bedeutet also bei Oughtred, a verhalte sich zu b wie c zu d. Der einfache Punkt zwischen den beiden in Verhältniss gestellten Grössen musste allerdings später einem Doppelpunkte weichen, nachdem im XVIII. Jahrhunderte durch Christian von Wolf der einfache Punkt das häufigste Multiplicationszeichen geworden war. Als Gleichheitszeichen bediente sich Oughtred des Recorde'schen $=$. Ausserdem benutzte er die Zeichen ⊐ für grösser als und ⊏ für kleiner als, sowie noch eine ganze Menge anderer Zeichen [1]). Bei dieser grossen Zahl neuer Abkürzungen dürfte es vergebliche Mühe sein, Gründe ausfindig machen zu wollen, warum Oughtred gerade dieses oder jenes Zeichen, also beispielsweise das Multiplicationskreuz, wählte. Vielleicht kann es von Interesse sein, dass Lord Brouncker 1668 dieses Zeichen gar nicht als Kreuz auffasste, sondern den Buchstaben x darin sah [2]). Auch neue Namen kommen bei Oughtred vor, so der Name *Unciae*, Klammergrössen, für die Binomialcoefficienten, denen er lange geblieben ist.

Wir sagten oben, es sei in der Richtung der Zeit gelegen, das Rechnen mit grossen Zahlen zu erleichtern. Wir fanden eine Veranlassung dazu in dem Umstande, dass das Rechnen überhaupt mehr und mehr in alle Volksschichten eindrang, und dass den gebildeten Classen ein gewisses Uebergewicht bewahrt werden wollte. Wir hätten auch auf die Verbreitung trigonometrischer Betrachtungen hinweisen können, welche ein Rechnen mit trigonometrischen Functionen nöthig machte, und diese waren in Gestalt grosser Zahlen bekannt, da nur ein sehr grosser Kreishalbmesser eine genügende Annäherung in den Schlussergebnissen der Rechnung versprach. Der Rechnung mit den trigonometrischen Functionen zu lieb war ja auch die Prosthaphaeresis erfunden worden.

Den Namen dieses Kunstgriffes, aber in ganz anderer Bedeutung als ihm ursprünglich inne wohnte, legte ein bayerischer Gelehrter, Hans Georg Herwarth (oder Hoerwarth) von Hohen-

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch V, 1179 und 1181. — Briefliche Mittheilung von Herrn N. L. W. A. Gravelaar in Deventer. [2]) *Philosophical Transactions* II, 466: *And note that the letter x everywhere stands for Multiplication.*

burg[1]) (1553—1622), einem 1610 herausgegebenen Bande bei. Er war in erster Linie Staatsmann und leistete als bayerischer Kanzler seinem Fürstenhause namhafte Dienste, aber auch sein wissenschaftlicher Ruhm ist fest begründet. Von ihm stammt die erste Beschreibung der griechischen Handschriften der herzoglichen Bibliothek, er war in nicht unwichtigem fortgesetzten brieflichen Verkehre mit Mathematikern wie Praetorius und Kepler, von ihm wurde das Tabellenwerk berechnet, welches uns Veranlassung bot, von ihm zu reden, und dessen genauer Titel *Tabulae. Arithmeticae ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ universales* lautet. Eine Blattgrösse von 52 auf 27 cm, eine Dicke von $10\frac{1}{2}$ cm machen den Band unhandlich, aber wie wäre auf viel geringerem Raume auszukommen gewesen zu einer Zeit, welche auf die Handlichkeit noch kein so grosses Gewicht zu legen gewohnt war, dass sie auf besondere Abkürzungen sann, welche geeignet wären, Raumersparniss zu ermöglichen? Herwarth's Tabellen gestatten die Auffindung des Productes zweier Factoren, deren jeder innerhalb der Zahlen 1 bis 999 eingeschlossen ist, durch einmaliges Aufschlagen, und so konnten auch Producte noch grösserer Factoren durch Addition der Ergebnisse wiederholten Aufschlagens, mindestens ohne eigentliche Multiplicationsfehler befürchten zu müssen, erhalten werden. Sollte 789654 mal· 461235987 gefunden werden, so verfuhr man wie folgt. Jede Seite enthielt die Producte der Zahlen 1 bis 999 in einen und denselben Factor, so dass die 1. Seite dem Producte in 2, die 2. dem in 3, die 653. dem in 654, die 788. dem in 789 u. s. w. gewidmet war. Auf der 653. und auf der 788. Seite, mithin unter zweimaligem Aufschlagen des Bandes, fand man also die zu addirenden Theilproducte

$$\begin{array}{lr}
654 \cdot 987 = & 645498 \\
654 \cdot 235 = & 153690 \\
654 \cdot 461 = & 301494 \\
789 \cdot 987 = & 778743 \\
789 \cdot 235 = & 185415 \\
789 \cdot 461 = & 363729 \\
\hline
\text{deren Summe:} & 364216842078498
\end{array}$$

Ob damit ein wesentlicher Zeitgewinn gegenüber von dem untabellarischen Multipliciren, oder eine grössere Sicherheit verbunden war, sei dahingestellt.

Jedenfalls kamen andere Hilfsmittel häufiger als Herwarth's Tafeln zur Verwendung. Bis zu einem gewissen Grade müssen wir hier an die Proportionalzirkel erinnern, deren Name sie der Geometrie,

[1]) Allgem. deutsche Biographie XIII, 169—175. Artikel von Eisenhart. — Unger S. 126—130.

deren Anfertigung sie der praktischen Mechanik, deren Anwendung sie dem Rechenunterrichte zuweist. Wir meinen aber noch bestimmter ein Hilfsmittel, welches etwas später, als die Proportionalzirkel in Deutschland beziehungsweise den Niederlanden und Italien entstanden, von England ausging und eine sehr rasche Verbreitung auch auf dem europäischen Festlande erwarb: die Rechenstäbe von John Neper, welche von ihrem Erfinder mit lateinischem Namen *virgulae numeratrices* genannt wurden, wofür englisch das Wort Nepers Bones Aufnahme fand.

Die erste Beschreibung gab Neper in seiner *Rhabdologia* (Edinburgh 1617), welche in lateinischer Sprache in Leiden wiederholt nachgedruckt, aber auch ins Holländische und in das Italienische übersetzt worden ist. Zehn Stäbchen besitzen die Gestalt vierseitiger Parallelopipeda. Die vier Längsflächen jedes Stäbchens sind in je neun kleine Quadrate abgetheilt, deren jedes durch eine von rechts oben nach links unten verlaufende Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt. Die Quadratchen einer Fläche sind mit den 9 ersten Vielfachen einer der 9 Zahlen 1 bis 9 beschrieben; ist ein solches Vielfache zweiziffrig, so trennt die erwähnte Diagonale die Stelle der Einer von der der Zehner. Eine solche Fläche, z. B. die der Vielfachen von 3, sieht also so aus:

/3
/6
/9
1/2
1/5
1/8
2/1
2/4
2/7

Auf demselben Stäbchen stellen die drei anderen Flächen etwa die Vielfachen von 2, von 6, und von 7 dar. Will man nun multipliciren, so hat man eine Multiplicatorziffer mit jeder der Multiplicandusziffern zu vervielfachen, und dieses erreicht man, indem man die Stäbchen so nebeneinander legt, dass deren oberste Zahlen die aufeinanderfolgenden Ziffern des Multiplicandus sind. Kommen im Multiplicandus Nullen vor, so müssen auch ganz leere Stäbchen zu Gebote stehen, welche hier einzuschalten sind. Die in gleicher Höhe befindlichen Quadratchen sämmtlicher neben einander liegender Stäbchen lassen alsdann die einzelnen Theilproducte ablesen, indem man durch diagonale Addition jeden Zehner mit dem folgenden Einer vereinigt. Will man z. B. 7632 mal 49375 rechnen, so sieht die erste Multiplicationszeile so aus:



oder 98750 u. s. w. Wollte man die Rechenstäbe zur Division benutzen, so schrieb man den Dividenden hin, setzte den Divisor aus den obersten Zahlen von Rechenstäbchen zusammen und überzeugte sich dann, welches Vielfache des Divisors jedesmal als Theilproduct des Divisors in eine Quotientenstelle vom Dividenden abgezogen werden konnte.

Es ist fast unbegreiflich, dass dieses unbehilfliche Verfahren sich lautesten Beifall erringen konnte, dass Lobverse in lateinischer Sprache auf die Erfindung und den Erfinder angefertigt wurden, dass noch in unserem Jahrhunderte Neper's Büchelchen von einem so tüchtigen Gelehrten, wie Georg Simon Klügel es war, als ein kunstreiches hat bezeichnet werden können[1]. Der gleiche Gedanke der Rechenstäbchen scheint auch einem Lütticher Schriftsteller Jean Gallé gekommen zu sein, der ihn in einem 1616 gedruckten Buche äusserte und sich ungemein viel darauf zu gute that. Eine eigentliche Beschreibung seiner *dix petits bastons* scheint er aber nicht gegeben zu haben[2].

Eine Verbesserung der Rechenstäbe machte Kaspar Schott (S. 720) in dem 1668 nach dem Tode des Verfassers gedruckten *Organum mathematicum* bekannt[3]. Er brachte nämlich das Einmaleins auf drehbare Cylinder und vereinigte diese in einem „Rechenkasten". Andere wirkliche oder vermeintliche Verbesserungen folgten bis zum Ende des Jahrhunderts.

Noch instrumentaler, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, gestaltete sich das Rechnen durch die Erfindung wirklicher Rechenmaschinen. Eine solche scheint, wie wir (S. 720) gesagt haben, Ciermans seit 1640 besessen zu haben. Der Oeffentlichkeit wurde aber erst einige Jahre später eine solche Vorrichtung übergeben[4], welche Blaise Pascal mit 19 Jahren, also etwa 1642, herstellte, und für welche er 1649 ein königliches Privilegium erwarb. Kurbelumdrehungen setzten ein Räderwerk in Bewegung, welches nach wenigen vorhergegangenen Einstellungen ohne weitere Ueberlegung von Seiten des Rechnenden die vier einfachen Rechnungsarten vollzog. So vollkommen indessen die Einrichtung in der Theorie war, die Mechaniker der damaligen Zeit waren noch nicht im Stande, die Wünsche des Erfinders so genau zu erfüllen, dass die Vorrichtung wirklich leistungsfähig wurde, dass Irrthümer, sobald einmal richtig eingestellt war, der Benutzer also seine Schuldigkeit gethan hatte, nicht mehr vorkommen konnten. Pascal selbst hielt an der Hoffnung fest, man werde eine derartige Vollkommenheit erreichen, aber das noch in Paris vorhandene Exemplar seiner Rechenmaschine hat trotz mancherlei mit demselben angestellten Versuchen immer erkennen lassen, wie voreilig noch jene Hoffnung war. Die Kühnheit von Pascal's Gedanken bleibt selbstverständlich von der mangelnden Geschick-

---

[1] Klügel, Mathematisches Wörterbuch II, 738—739 s. v. Instrumentale Arithmetik. [2] Le Paige in dem *Bulletin de l'institut archéologique Liégeois* XXI, 502—504. [3] Unger S. 119. [4] Pascal III, 185—208.

lichkeit seiner Hilfsarbeiter unberührt, und sie wurde auch von Allen, welche später vervollkommnete Apparate erdachten, zuerst 1673 von Leibniz, rühmend anerkannt.

Wir sagten oben, es sei fast unbegreiflich, wie Neper's Rechenstäbe Anklang finden konnten. Fast noch unbegreiflicher ist es, dass Neper eine derartige Erfindung, wenn sie überhaupt als solche zu bezeichnen ist, da die schachbrettartige Multiplication, seit lange vorhanden, den gleichen Gedanken zum Ausdrucke brachte, noch der Veröffentlichung werth hielt, nachdem er schon die Erfindung der Logarithmen im Drucke bekannt gemacht hatte.

Bevor wir indessen von dieser handeln, ist es wohl richtiger, von einer später veröffentlichten, doch mit grosser Wahrscheinlichkeit früher entstandenen verwandten Leistung zu berichten, von den Progress Tabulen des Jobst Bürgi[1]). Wir wissen (S. 691), dass Benjamin Bramer, Bürgi's Schwager, von 1603—1611 in dessen Hause in Prag lebte, dann aber ihn verliess. Nur in jenen Jahren kann daher eine Arbeit vollzogen worden sein, von welcher Bramer später (1630) in einer Vorrede sagte, dass Bürgi ihr obgelegen habe, und diese Zeitbestimmung deckt sich überdies vollkommen mit den von Bramer gebrauchten Worten: „Auff diesem Fundament hat mein lieber Schwager und Praeceptor Jobst Burgi vor zwantzig und mehr Jahren eine schöne progress tabul . . . . calculirt“, denn mehr als 20 Jahre von 1630 abgezogen, führt eben in den Zwischenraum zwischen 1603 und 1611. Der Druck der Tafeln erfolgte 1620 in Prag unter dem Titel: „Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol“, und nur wenige Exemplare davon haben sich erhalten. Der im Titel versprochene „gründliche vnterricht“ vollends ist in altem Drucke gar nicht vorhanden und nur handschriftlich einem in Danzig befindlichen Exemplare beigeheftet, woraus eine Veröffentlichung erfolgte[2]). Ob der gründliche Unterricht vorher überhaupt nie gedruckt worden war, ist unmöglich zu entscheiden. Denkbar wäre es allerdings bei der grossen Bedächtigkeit, um kein schärferes Wort zu gebrauchen, welche Bürgi als Schriftsteller an den Tag legte. Bürgi ging aus von dem Gedanken zweier zusammengehörenden Reihen, einer arithmetischen und einer geometrischen, wie er z. B. von Michael Stifel, wenn auch weder von diesem zuerst noch von diesem allein, deutlich

---

[1]) Gieswald, Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen. Danzig 1856. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 116—120.
[2]) Durch Gieswald in dem genannten Danziger Schulprogramm von 1856.

in seiner Arithmetica integra ausgesprochen war[1]). Da Bürgi bekanntlich in der lateinischen Sprache nicht geübt war, auch Stifel nirgend nennt, so wird er nur mittelbar aus anderer Quelle jenen Gedanken sich angeeignet haben, und wir haben keinen Grund zu zweifeln, die von ihm ausdrücklich als seine Vorgänger angeführten Schriftsteller seien es gewesen, aus welchen er schöpfte[2]), „auch von etlichen Arithmeticis Simon Jacob, Moritius Zons und andere ist berürt worden, das was in der Geometrischen Progress oder in der Schwarzen Zahl Multipliciert, dasselbige ist in der Arithmetischen Progress oder in der rothen Zahl addiern". Der Erstgenannte, Simon Jacob, hat uns früher beschäftigt. Von Moritius Zons dagegen ist nichts weiter bekannt, als dass er 1602 eine Wortrechnung herausgegeben hat[3]). Wie er diese Schwäche mit Stifel theilte, wird er wohl auch den wissenschaftlich werthvollen Gedanken ebendemselben entlehnt haben. Bürgi nennt an der hier aufgenommenen Stelle schwarze und rothe Zahlen als gleichbedeutend mit Zahlen der geometrischen, beziehungsweise der arithmetischen Reihe. Er hat diese Benennung fortwährend festgehalten, und der Drucker hat sich ihr anschliessen müssen, indem thatsächlich schwarze, beziehungsweise rothe Farbe bei jenen Zahlen in Anwendung kam. Die Tafel ist nach den in arithmetischer Reihenfolge auftretenden rothen Zahlen zu einer Tafel doppelten Einganges geordnet. Da nun offenbar die rothen Zahlen das sind, was andere Schriftsteller die Logarithmen genannt haben, während die schwarzgedruckten Zahlen die jenen Logarithmen entsprechenden Zahlen sind, so ist Bürgi's Progresstabul eine antilogarithmische Tafel, dergleichen nach ihr nicht viele zum Drucke befördert worden sind.

Von Wichtigkeit ist es, die Basis seiner Tafel zu kennen und, zu dieser Kenntniss führt uns eine etwas eingehendere Schilderung[4]). Die arithmetische Reihe der rothen Zahlen beginnt bei Bürgi mit 0 und setzt sich dann mit 10, 20 u. s. w. fort, d. h. besitzt 10 als Differenz. Die geometrische Reihe der schwarzen Zahlen beginnt mit 100000000 und setzt sich mit 100010000, 100020001 u. s. w. fort, d. h. besitzt $1\frac{1}{10000}$ als Quotient der Division jedes folgenden Gliedes durch das vorhergehende. Eine Logarithmentafel nach der Auffassung unserer Zeit ist dieses, wie man erkennt, nicht. Nachdem die Logarithmen als Exponenten solcher Potenzen der Basis erkannt waren,

---

[1]) *Arithmetica integra* fol. 35. [2]) Gieswald l. c. S. 27, Z. 3—5. [3]) Ebenda S. 22. [4]) Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst (Göttingen 1801), S. 94 —106. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 531—533. — Gieswald l. c. S. 23—25.

welche den entsprechenden Zahlen sich gleich erwiesen, musste wegen $b^0 = 1$, $b^1 = b$ immer dem Logarithmen 0 die Zahl 1, dem Logarithmen 1 die Basis b als Zahl gegenüberstehen, und das Bürgi'sche schwarze 100000000 neben der rothen 0 könnte nur so Berechtigung erlangen, dass man es als 1 mit einem achtstelligen aus lauter Nullen bestehenden Decimalbruche läse. Ebenso wäre die zum Logarithmen 10 gehörige Zahl 100010000 als 1,00010000 zu verstehen u. s. w. Aber Bürgi war von der Erklärung der beiden Reihen mittels des Potenzbegriffes mit Einschluss der Potenz mit dem Exponenten 0 weit entfernt. Es waren für ihn nur zwei Reihen, eine rothe und eine schwarze vorhanden, die eine eine arithmetische, die andere eine geometrische. Anfang und Fortschreitungsgesetz waren beliebig, sofern nur eine Zusammengehörigkeit solcher Glieder festgehalten wurde, welche in beiden Reihen mit gleichem Stellenzeiger auftreten. Von einer Basis der Progresstabul im heutigen Sinne des Wortes kann nur in abgeleiteter Weise die Rede sein, und zu dieser Ableitung führt die folgende Betrachtung. Nennen wir die rothen Zahlen oder Logarithmen x, die schwarzen Zahlen oder Logarithmanden y, so ist unter Berücksichtigung der als nothwendig erkannten Divisionen

$$x = 10n, \qquad y = 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n \cdot$$

Unter den zu einander gehörigen rothen und schwarzen Zahlen findet sich aber

$$x = 100000 \qquad y = 27184593$$
$$x = 230270022 \qquad y = 1000000000.$$

Abgesehen von angehängten Nullen ist also

1 der Logarithme von 2,7184593,

2,30270022 der Logarithme von 10.

In dem später sogenannten **natürlichen Logarithmensysteme**, dessen Basis seit Euler durch e bezeichnet wird, ist aber

$$e = 2{,}718281828\ldots \quad \text{und} \quad \log.\text{nat.}\,10 = 2{,}302585\ldots$$

Beide Zahlen stimmen mit den bei Bürgi vorkommenden nahe genug überein, um behaupten zu können: **Bürgi's Logarithmen sind die Logarithmen mit der Basis e**[1]).

Eine weitere Frage geht nothwendig dahin, wie Bürgi wohl die schwarzen Zahlen interpolirte, welche zu solchen rothen Zahlen gehörten, die in der tafelmässig in Unterschieden von 10 fortschreiten-

---

[1]) Kewitsch, Die Basis der Bürgi'schen Logarithmen ist e, der Neperschen $\frac{1}{e}$. Zeitschr. f. mathem. und naturwissensch. Unterricht XXVII, 321—333 (1896).

den Liste rother Zahlen fehlten? Der kurze Bericht bleibt auf diese Frage die Antwort schuldig. Dagegen lehrt er die Interpolation der rothen Zahlen, um diejenige derselben zu finden, welche einer in der Tafel nicht vorhandenen, gegebenen schwarzen Zahl entspricht[1]). Zu suchen sei die rothe Zahl zu der schwarzen Zahl 36. Keine schwarze Zahl unterhalb der neunziffrigen 100000000 steht in der Tabelle, folglich ist, damit die Tabelle überhaupt benutzbar werde, 36 durch Anhängung von 7 Nullen zu 360000000 zu verlängern. Die nächstkleinere und nächstgrössere schwarze Zahl der Tabelle ist 359964763 neben der rothen Zahl 128090 und 360000759 neben der rothen Zahl 128100. Man kann an diesen beiden schwarzen Zahlen beiläufig prüfen, ob die Berechnung der Progresstabul überall nach dem gleichen Verfahren stattfand. Zunahme der rothen Zahl um 10 entsprach, sagten wir, in den Anfangszahlen eine Vervielfältigung der schwarzen Zahl mit $1\frac{1}{10000}$. Nun ist

$$1\frac{1}{10000} \cdot 359964763 = 359964763 + 35996 = 360000759,$$

wie es in der Tabelle gedruckt ist. Zugleich erkennen wir den Unterschied 35996 der beiden tabellarisch auf einander folgenden schwarzen Zahlen. Der Unterschied von 359964763 bis zu 360000000 ist etwas geringer, nämlich 35237. Nun wird die Proportionalität des Zuwachses der schwarzen und der rothen Zahlen in einem engen Spielraume ohne weitere Begründung angenommen und

$$35996 : 35237 = 10000 : 9789$$

gerechnet. Eigentlich sollte 10 das dritte Glied der Proportion sein, statt welches nur zum Zwecke genauer Rechnung 10000 gewählt wurde. Das vierte Glied 9789 ist daher auch auf 9,789 zurückzuführen, wofür Bürgi 9789 druckt mit der Bemerkung „und werden alle Zeit biss unter die 0 ganze verstanden und die folgen der Bruch“. So ist also 128099,789 die rothe Zahl, welche neben die schwarze Zahl 360000000 gehört. Dass diesem Interpolationsverfahren der rothen Zahlen ein ganz ähnliches auch auf Proportionalrechnung beruhendes für die schwarzen Zahlen zur Seite gestanden haben muss, liegt so ungemein nahe, dass wir kaum daran zweifeln, Bürgi habe deren Schilderung nur als überflüssig unterlassen.

Wir sagten oben, die Progresstafel sei nach um je 10 Einheiten wachsenden rothen Zahlen geordnet. Nur am Schlusse der Tafel ist eine Abweichung von dieser Anordnung vorhanden. Aus gleich zu erörternden Gründen sollte nämlich die Tafel, wie sie mit der runden

---

[1]) Gieswald l. c. S. 28—29.

schwarzen Zahl 100000000 begann, mit der nächsthöheren runden schwarzen Zahl 1000000000 abschliessen, deren rothe Zahl 230270,022 ist, und diese bildet wirklich den Schluss der Tafel. Diese Zahl 230270,022, welche also die Gleichung $b^{230270,022} = 100000,0000$ erfüllt, wobei $b = 1,000009990550012$, führt den Namen der ganzen rothen Zahl[1]) und soll bei manchen Anwendungen der Tafel, z. B. bei Divisionen, deren Quotient als echtgebrochen sich erweist, den gleichen Vortheil gewähren, welchen man bei den wirklichen Logarithmen durch ganzzahlige Vergrösserung der Charakteristik erreicht. Sei 154030185 durch 205518112 zu dividiren. Zu diesen schwarzen Zahlen gehören als rothe Zahlen 43200 und 72040, deren zweite von der ersten nicht abgezogen werden kann. Statt 43200 — 72040 rechnet desshalb Bürgi 230270,022 + 43200 — 72040 = 201430,022, zu welcher rothen Zahl die schwarze Zahl 749472554 gehört, wie ohne nähere Begründung behauptet wird, unter offenbarer Verschweigung der erwähntermassen hier nothwendig gewesenen Proportionalrechnung. Dann fährt Bürgi fort: „ihr gebürendt schwarze Zahl ist 749472554 und soviel kombt so man 154030185 durch 205518112 dividirt, welches doch keine ganze sondern lauter Bruch vom ganzen alss 0749472554 oder $0\frac{749472554}{1000000000}$."

So Bürgi's Progresstafeln, welche also zwischen 1603 und 1611 entstanden, erst 1620 im Drucke erschienen, das bestätigend, was der Verfasser in seinem gründlichen Unterricht sagt[2]): „obwol ich mit diesen Tabulen vor etlichen Jahren hin umbgang so hat doch mein Beruff von der Edition derselben enthalten." Noch deutlicher sprach sich Kepler 1627 in der Einleitung zu den Rudolphini'schen Tafeln aus, Bürgi habe viele Jahre (multis annis) vor der Neper'schen Veröffentlichung seine Tafel besessen, „aber der zögernde Geheimnisskrämer überliess das eben geborene Kind sich selbst, statt es zum öffentlichen Nutzen gross zu ziehen"[3]).

Schützen diese verschiedenen Berichte das unabhängige Erfinderrecht Bürgi's und stellen ihn, den wir im vorigen Abschnitte auch als Neuerer auf dem Gebiete der Gleichungslehre, als im Besitze des Gedankens der Decimalbrüche, als Anwender dieses Gedankens bei trigonometrischen Rechnungen, bei der abgekürzten Multiplication kennen gelernt haben, in die Reihe der erfindungsreichsten Rechner, so spricht doch gerade Kepler in scharfer Weise das Urtheil aus, welches dem Erfinder, falls er als solcher gelten will, die Pflicht

[1]) Gieswald l. c. S. 30 und häufiger. [2]) Ebenda S. 26. [3]) *Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.*

auferlegt, sein Eigenthum nicht zu verschliessen, sondern es der Allgemeinheit dienstbar zu machen, und solches that Neper.

Neper wurde desshalb in unbestrittener Weise mit dem Ruhme belohnt, das logarithmische Rechnen eingeführt zu haben, und wir müssen nun seine *Descriptio* von 1614, seine *Constructio* von 1619, welche wir schon erwähnt haben, als die trigonometrischen Leistungen Neper's uns beschäftigten, nach ihrem wesentlichsten und wichtigsten Inhalte kennen lernen. Damals machten wir (S. 703) auf einige Schriften aufmerksam, welche Neper offenbar studirt hat. Pitiscus erwähnt er selbst, das Studium Michael Stifel's glaubten wir wahrscheinlich machen zu können, und wenn unsere Muthmassung die Wahrheit traf, so ist damit zugleich die Quelle erkannt, aus welcher Neper unmittelbar das Gleiche entnahm, was Bürgi mittelbar aus ihr schöpfte, den Gedanken, die Verbindung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe für das praktische Rechnen fruchtbar zu machen, indem ein für alle mal solche einander entsprechende Reihen hergestellt wurden. Die Glieder der arithmetischen Reihe nannte Neper Logarithmen[1]). Unabhängig von Stifel ist jedenfalls die Art, wie Neper durch einen mechanischen Vorgang, durch das Fliessen, *fluxus*, eines Punktes jede der beiden auf einander bezogenen Reihen entstehen liess. Das Wort *fluere* selbst entnahm er er vielleicht Clavius (S. 556). Von einem Punkte A aus fliesst ein Punkt B, welcher zuerst in der Zeiteinheit den Weg von A nach C durchfliesst, in der zweiten Einheit den von C nach D u. s. w.[2]). Sind die durchflossenen Wege einander gleich, so stellt die am Schlusse jeder der Zeiteinheiten vom Anfange der Bewegung an bis dahin zurückgelegte Entfernung jeweils ein Glied der arithmetischen Reihe, mithin einen Logarithmus dar. Nun findet aber eine zweite Bewegung[3]) gleichzeitig, *synchronus motus*, mit der ersteren statt, d. h. eben dieselben Zeiteinheiten wie bei der ersten Bewegung werden bei der zweiten der Betrachtung zu Grunde gelegt, nur ist der durchlaufene Weg nicht in jeder Zeiteinheit derselbe. Er nimmt vielmehr proportional ab. Ist in der 1. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des ganz zu durchfliessenden Weges zurückgelegt, so liefert der Punkt in der 2. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des noch übrigen Weges u. s. w., oder die jeweils zurückgelegten Wege

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 5 Cap. II, propositio 1: *Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aequi-differentes sunt Logarithmi.* [2]) Ebenda pag. 1—2: *Sit punctus A, a quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti, qui sit B; fluat ergo primo momento B ab A in C, secundo momento a C in D* etc. [3]) Ebenda pag. 3—4.

sind $\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}, \frac{1}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cdot\cdot$ Uebrig bleiben jedesmal noch die Wege:

$$1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m},\quad \frac{m-1}{m}-\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^2,$$
$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^2=\left(\frac{m-1}{m}\right)^3,\ldots$$

d. h. die am Ende der einzelnen Zeiteinheiten noch übrigen Wege stellen die fallende geometrische Reihe dar, welche der erstgebildeten arithmetischen Reihe Glied für Glied zugeordnet ist.

Neper hat demnach zwei Reihen von entgegengesetzter Wachsthumsrichtung. Während die Logarithmen zunehmen, nehmen die Zahlen ab, mit zunehmenden Zahlen werden die Logarithmen kleiner. Es ist das ein Gegensatz zn der Gewohnheit Bürgi's, ein Gegensatz auch zu dem, was nicht lange später auch unter den Berechnern von Logarithmen nach Neper'schem Vorbilde sich einbürgerte.

Grundsätzlich war Neper auch schon 1614 für die von ihm getroffene Einrichtung nicht eingenommen. Nur Nützlichkeitsgründe bestimmten ihn. Es stehe, sagt er in einer Ermahnung an den Leser[1]), von Anfang frei, welchem Sinus und welcher Zahl man den Logarithmus 0 beilegen wolle, häufig sei aber mit dem Sinustotus (d. h. sin 90⁰) zu multipliciren oder zu dividiren, dessen Logarithmus also zu addiren oder zu subtrahiren, und da erscheine die Gleichsetzung gerade dieses Logarithmus mit 0 zweckmässig, weil die geringsten Beschwerden hervorbringend. Ueberdies kommen meistens Sinusse, beziehungsweise Zahlen vor, welche kleiner seien als der Sinustotus. Diese habe er mit positiven, *abundantes*, Logarithmen bedacht, andere mit negativen, *defectivos*, man hätte aber auch die entgegengesetzte Wahl treffen können.

Die Tafel selbst ist in sieben Kolumnen auf jeder Seite geordnet, und je zwei neben einander befindliche Seiten sind Winkelgraden gewidmet, welche oben am Blatte angegeben sind; am unteren Rande steht die Zahl der Winkelgrade, welche die obere zu 89⁰ ergänzt. In der 1. Kolumne sind von oben nach unten Minuten von 1 bis 30 und von 30 bis 60 angegeben; in der 7. und letzten Kolumne wiederholt

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 6: *Admonitio. Erat quidem initio liberum cuilibet sinui aut quantitati nullum seu 0 pro logarithmo atribuisse: sed praestat id prae caeteris sinui toti accommodasse: ne unquam in posterum vel minimam molestiam parturiret nobis additio et subtractio eius logarithmi in omni calculo frequentissimi. Caeterum etiam quia sinuum et numerorum sinu toto minorum frequentior est usus, eorum igitur logarithmos abundantes ponimus: aliorum vero defectivos, etsi contra fecisse initio liberum erat.*

sich diese Minutenangabe von unten nach oben. Die 2. und 6. Kolumne mit der Ueberschrift *Sinus* enthalten die Sinusse der zunächst neben ihnen angegebenen Winkel, also auch die Cosinusse derjenigen Winkel, deren Maass auf der gleichen Zeile, aber um Blattbreite entfernt, angegeben ist. Die 3. und 5. Kolumne mit der Ueberschrift *Logarithmi* enthalten die Logarithmen der daneben befindlichen Sinusse. Endlich die 4. mittlere Kolumne ist *Differentiae* überschrieben und enthält die Differenz der links und rechts stehenden Logarithmen. Das sind die Logarithmen der Tangenten, da ja $\log \sin \varphi - \log \cos \varphi = \log \operatorname{tang} \varphi$. Nehmen wir als Beispiel eine Zeile der rechts stehenden Seite desjenigen Blattes, welches die obere Bezeichnung Gr. 9, die untere Gr. 80 führt, etwa die Zeile

$$46 \,|\, 1696362 \,|\, 17740985 \,|\, 17594992 \,|\, 145993 \,|\, 9855068 \,|\, 14.$$

Der Sinn derselben ist:

$$\sin 9^0 46' = 1696362, \quad \sin 89^0 14' = \cos 9^0 46' = 9855068,$$
$$\log \sin 9^0 46' = 17740985, \quad \log \cos 9^0 46' = 145993,$$
$$\log \operatorname{tang} 9^0 46' = 17740985 - 145993 = 17594992.$$

Die Kolumnen der Sinusse und Cosinusse gestatten die doppelte Benutzung der Tafel als logarithmisch-trigonometrische und zugleich als logarithmische für Zahlen, vorausgesetzt, dass man noch reintrigonometrische Tafeln von ausreichender Genauigkeit zur Verfügung hat. Man will z. B. log 137 finden[1]). Einer Secantentafel entnimmt man $13703048 = \sec 43^0 8'$. Nach Neper's Tafel ist

$$\log \cos 43^0 8' = 3150332,$$

und da $\log \sec 43^0 8' = -\log \cos 43^0 8'$, so ist log 137 fast übereinstimmend mit -3150332. Freilich wäre bei Benutzung dieses Logarithmen 137 als gleichwerthig mit 13703048 angesehen, während zum mindesten der Unterschied zu beachten ist, dass letztere Zahl um fünf Stellen zu lang ist. Diese nothwendige Correctur deutet Neper durch Hinschreiben so vieler Nullen, als Stellen wegzulassen waren, mit vorgesetztem Minuszeichen an. Er schreibt also

$$\log 137 = -3150332 - 00000.$$

Auch eine Proportionalrechnung muss Neper besessen haben, wie aus vielfachen Beispielen hervorgeht. So ist einmal[2]) 6994224 Logarithme des Cosinus eines gesuchten Winkels. Nach den Tafeln ist

$$\log \cos 60^0 12' = 6992177, \quad \log \cos 60^0 13' = 6997258.$$

Neper behauptet, es sei $6994224 = \log \cos 60^0 12' 24\frac{1}{2}''$ [3]). An einer

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 11. [2]) Ebenda pag. 53. [3]) Richtiger wäre $24\frac{1}{8}$

früheren Stelle behält sich übrigens Neper ausdrücklich vor[1]), bei anderer Gelegenheit ausdrücklich zu erörtern, wie auf das Genaueste zu jeder Zahl der Logarithmus, zu jedem Logarithmen die Zahl gefunden werde. An einer noch früheren Stelle[2]) will er erst das Urtheil der Gelehrten über die Tafel selbst kennen lernen, bevor er seine Methoden zur Herstellung derselben veröffentliche, und diese Zusage wiederholt er am Schlusse der Descriptio in einer Bemerkung des letzten Blattes mit dem Zusatze: Nichts sei von Entstehung an vollkommen, *Nihil in ortu perfectum*.

Die Erfüllung der Zusage war der Zweck der Constructio. Diese war, wie aus der Vorrede hervorgeht, noch vor der Descriptio geschrieben. Die Logarithmen heissen in ihr noch *numeri artificiales*, der in der Descriptio eingeführte Kunstausdruck war demnach noch nicht erfunden. Neper starb, ohne seine Anweisung zur Herstellung der Logarithmentafel dem Drucke übergeben zu haben. Sein Sohn Robert hielt es für seine Pflicht, die vorgefundene Handschrift zu veröffentlichen, wenn sie auch der letzten Feile entbehrte, und so erfolgte der Druck der Constructio von 1619, welcher ausserdem noch Zusätze von Henry Briggs und Trigonometrisches von John Neper, insbesondere Ausführlicheres über die Neper'schen Analogien brachte[3]).

Die geometrische Reihe, welche Neper bildete, und welche die Zahlen enthielt, während deren Stellung in der Reihe als in arithmetischer Folge stehend mit dem jedesmaligen Logarithmus verwandt ist, hat eine sehr zusammengesetzte Bildungsweise mit Hilfe von vier Reihen, welche A, B, C, D heissen mögen[4]). Die Reihe A beginnt mit 10000000 und zieht bei jedem folgenden Gliede ein Zehnmillionstel des vorhergehenden ab, mit anderen Worten hat als Factor, mit welchem die Glieder fortwährend zu vervielfachen sind, um das nächstfolgende zu bilden, den Bruch $q_1 = 0{,}9999999$. Unter Benutzung von sieben Decimalstellen, welche in der Constructio durch einen Punkt von der ganzen Zahl getrennt sind, wie Neper es aber nicht bei Pitiscus, den er freilich sowohl in der Descriptio als in der Rhabdologie wiederholt erwähnt, aber dessen Trigonometrie er nur in der älteren Ausgabe gelesen hatte, kennen lernte[5]), ist also die Reihenfolge der Glieder erstens 10000000, zweitens 9999999, drittens

---

[1]) Neper, *Descriptio* pag. 16, *Admonitio*. [2]) Ebenda pag. 7, *Admonitio*. [3]) Beschreibungen der *Constructio* bei Kästner III, 72—86. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 535—539. — Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, S. 271—290. [4]) Neper, *Constructio* pag. 12—16. [5]) Briefliche Mittheilung von H. Gravelaar, welcher diese Behauptung sehr wahrscheinlich zu machen weiss.

9999998 · 0000001, viertens 9999997 · 0000003, endlich als hundertunderstes Glied 9999900 · 0004950. Die zweite Reihe B hat das erste Glied mit A gemeinschaftlich und lässt ihm als zweites das letzte Glied von A oder doch eine von demselben kaum abweichende Zahl 9999900 folgen. Zur bequemeren Uebersicht mögen die Glieder von A durch a mit den Stellenzeigern 1 bis 101, die Glieder von B durch b wieder mit Stellenzeigern versehen dargestellt werden, und wie vorher $q_1 = \frac{a_2}{a_1}$, möge jetzt $q_2 = \frac{b_2}{b_1}$ sein. Nun war

$$b_1 = a_1 = 10000000, \quad b_2 = a_{101} = 9999900,$$

zwischen welchen die Glieder a_2 bis a_{100} eingeschaltet sind und mit b_1 und b_2 eine geometrische Reihe bilden. Die Reihe B wird mittels $q_2 = \frac{99999}{100000}$ fortgesetzt. Nach den uns schon bekannten b_1 und b_2 kommt $b_3 = 9999800 \cdot 001000$, $b_4 = 9999700 \cdot 003000$, endlich $b_{51} = 9995001 \cdot 224804$, statt welcher Zahl in Folge eines Rechenfehlers bei Neper 9995001 · 222927 angegeben ist. Wie die Glieder a_2 bis a_{100} zwischen b_1 und b_2 eingeschaltet waren, müssen mittels des gleichen Factors q_1 zwischen je zwei auf einander folgende b sich 99 Glieder a einschalten lassen, so dass die Gleichungen stattfinden $b_1 = a_1$, $b_2 = a_{101}$, $b_3 = a_{201}$, $b_{51} = a_{5001}$, und diese Reihe von 5001 Gliedern beginnt mit 10000000, endigt mit einer Zahl, welche nicht sehr von 9995000 sich unterscheidet. Nun fährt man ähnlich fort und verschafft sich eine Reihe C, deren Glieder c mit Stellenzeigern heissen. Man nimmt

$$c_1 = b_1 = a_1 = 10000000, \quad c_2 = b_{51} = a_{5001} = 9995000,$$

$$q_3 = \frac{c_2}{c_1} = \frac{9995}{10000} = \frac{1999}{2000}.$$

Neper rechnet bis $c_{21} = 9900473 \cdot 5780$, welches wenig verschieden von $9900000 = d_2$ ist. Nimmt man bei der jetzt beginnenden Bildung der Reihe D als Anfangsglieder $d_1 = c_1$ und das eben angegebene d_2, mithin $q_4 = \frac{d_2}{d_1} = \frac{99}{100}$, so wird $d_3 = q_4 \cdot d_2$ nahezu mit c_{41} übereinstimmen, wie d_2 nahezu mit c_{21}, und man erhält wenigstens in naher Uebereinstimmung $d_{69} = c_{1361} = 5048858 \cdot 8900$. Neper rechnet aber noch ein $d_{70} = c_{1381} = 4998609 \cdot 4034$ (indem er die C-Reihe mittels des Factors q_3 so weit fortsetzt) und betrachtet dieses Schlussglied als in Uebereinstimmung mit 5000000 oder mit der Hälfte des allen vier Reihen gemeinsamen Anfangsgliedes 10000000. Nun haben wir schon erörtert, dass neben $c_1 = a_1$, $c_2 = a_{5001}$ stattfindet. Der Stellenzeiger des mit c_{1381} übereinstimmenden a ist daher

$$1 + 1380 \times 5000 = 6900001,$$

oder es ist eine geometrische Reihe von 6900001 Gliedern, mit den Grenzgliedern 10000000 und 5000000 hergestellt, in welcher jedes Glied aus dem ihm vorhergehenden durch Vervielfachung mit

$$q_1 = 0.9999999$$

entsteht. Die Logarithmen zu diesen Zahlen müssen, wie wir schon andeuteten, eine arithmetische Reihe bilden und vermöge dessen den Ordnungszahlen oder den Stellenzeigern ihrer Zahlen verwandt sein, ohne sich mit ihnen decken zu müssen.

Neper vergleicht in der Constructio wie in der Descriptio die Bildung der geometrischen und der arithmetischen Reihe mit Bewegungen[1]) (Figur 143). Auf der Linie bi bewegt sich ein Punkt a mit gleichförmiger Geschwindigkeit und legt in der Zeiteinheit den Weg bc zurück. Auf der Linie TS bewegt sich gleichzeitig ein Punkt g, dessen Geschwindigkeit in T selbst mit der von a übereinstimmt, aber fortwährend gleichförmig abnimmt. In der ersten Zeiteinheit legt er den Weg Td zurück. Denken wir uns seinen Bewegungsanfang um eine Zeiteinheit zurückverlegt und auch räumlich nach o verschoben, so muss wegen der gleichförmigen Verlangsamung $oS : TS = TS : dS$ sein. Daraus folgt

$$(oS - TS) : TS = (TS - dS) : dS, \quad (oS - TS) : (TS - dS) = TS : dS$$

Fig. 143.

und wegen $TS > dS$ auch $oT > Td$. Der Punkt ist also zwischen o und T schneller, zwischen T und d langsamer als der Punkt a, und man kann etwa die Schnelligkeit von a dem arithmetischen Mittel der Bewegungen oT und Td gleichsetzen.

Darin liegt auf der einen Seite eine ungemein klare Begriffsfassung dessen, was man später Geschwindigkeit im Entstehungszustande oder Streben nach Bewegung genannt hat, aber es liegt noch mehr darin. Stellt TS eine ein für alle Mal gegebene Zahl, dS einen bestimmten Werth einer veränderlichen Zahl und bc den Logarithmus von dS dar, so ist immer noch annähernd

$$bc = \frac{1}{2}(oT + Td)$$

zu setzen. Sei etwa $TS = 10000000$, $dS = 9999999$, so ist

$$Td = 1, \quad oT = \frac{Td \cdot TS}{dS} = \frac{10000000}{9999999} = 1{,}00000010000001$$

und $\log 9999999$ ziemlich genau auf 1,00000005 bestimmt, sofern

[1]) Neper, *Constructio*, pag. 20—21.

wir der bei Neper noch nicht vorkommenden Abkürzungssilbe log uns bedienen. Gleichzeitig setzt Neper log 10000000 = 0. Die Differenz der arithmetischen Reihe der Logarithmen ist somit

$$1{,}00000005 - 0 = 1{,}00000005,$$

der Gliederquotient der geometrischen Reihe der Zahlen $\frac{9999999}{10000000}$, unser früheres q_1. Bei der letzten Zahl der Neper'schen Rechnung, bei 5000000, giebt die Descriptio als Logarithmen 6931469 an[1]), in der Constructio dagegen heisst es[2]), die logarithmische Differenz solcher Zahlen, die im Verhältnisse von 2 : 1 stehen, sei 6931469,22.

Aus diesem Logarithmus und ähnlicherweise aus einigen anderen hat man in späterer Zeit die Basis von Neper's Tafeln herzustellen unternommen[3]), wiewohl dieser Begriff Neper zunächst, wenn auch nicht später, gerade so fremd war, wie er es Bürgi war. Die Rechnung zeigt erstlich, dass die Logarithmentafel Neper's zuvor einer Division durch 10000000 in den Zahlen wie in den Logarithmen bedarf, ehe man sie als eigentliche Logarithmentafeln betrachten kann, zweitens, dass dann der Logarithme einer Zahl u im Neper'schen Systeme, welches als das von der Basis N bezeichnet werden mag, keineswegs der natürliche Logarithme von u ist, oder mit anderen Worten, dass N keineswegs $2{,}718281828\ldots = e$ ist. In der Neper'schen Tabelle steht

0,693146922 als Logarithmus der Zahl 0,5

gegenüber. Aber es ist

$$\log \text{nat.}\, 2 = 0{,}6931472$$

fast genau übereinstimmend mit dem bei Neper angegebenen Logarithmen von $\frac{1}{2}$. Oder es ist $N^{\log \text{nat.}\, 2} = \frac{1}{2}$. Daraus folgt aber $N = \frac{1}{e}$ oder die Basis der Neper'schen Logarithmen ist $\frac{1}{e}$.

Neper hat der Constructio noch einen *Appendix* hinzugefügt[4]) und in diesem Anhange über Methoden der Logarithmenberechnung sich ausgesprochen, welche unter der Voraussetzung Platz greifen, dass die Zahl 1 den Logarithmus 0 besitze. Hier ist also erstmalige, wenn auch nicht besonders hervorgehobene Uebereinstimmung zwischen Logarithmen und Exponenten, erstmalige An-

[1]) Neper, *Descriptio* bei log sin 30°. [2]) Neper, *Constructio*, pag. 39. [3]) Wackerbarth in *Les mondes* XXVI, 26 und J. W. L. Glaisher in dem *Report of the Committee of mathematical Tables*, pag. 71—73 (Separatabdruck aus dem *Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873*). Dessen irrige Behauptungen sind widerlegt durch Kewitsch in der Zeitschr. f. mathem. und naturwissensch. Unterricht XXVII, 321—333 (1896). [4]) Neper, *Constructio*, pag. 48—54.

wendung einer wirklichen Basis des Logarithmensystems, indem von der Zahl gesprochen wird, welche 1 zum Logarithmus habe, und zwar wird entweder 10 oder $\frac{1}{10}$ als solche Zahl vorgeschlagen, deren Logarithmus 1 mit beliebig vielen Nullen dahinter sein solle. Ist $1 = \log 10$, so wird $0{,}2 = \log\left(\sqrt[5]{10}\right)$, $0{,}04 = \log\left(\sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}\right)$ u. s. w. bis zur zehnmaligen Ausziehung von Wurzeln 5. Grades. Neper scheint indessen vor der furchtbaren Rechenaufgabe, welche er damit sich und solchen, die seinen Spuren folgen wollten, stellte, zurückgeschreckt zu sein, wenigstens giebt er keine einzige der Zahlen wirklich an, deren Berechnung er doch selbst verlangte.

Dagegen lässt er eine Methode folgen, welche nur Quadratwurzelausziehungen verlangt, und von deren Ergebnissen er wenigstens einige anschreibt. Bei $\log 10 = 1$ ist $\log 5$ folgendermassen zu suchen. $\log\sqrt{1 \cdot 10} = \log 3{,}16227766017 = 0{,}5$. Ferner

$$\log\sqrt{10 \cdot 3{,}16227766017} = \log 5{,}62341325191 = 0{,}75$$

u. s. w., wo man leicht sieht, wie man durch fernere Quadratwurzelausziehung aus dem Producte von 3,16 ... in 5,62 ... zu einer zwischen 4 und 5 liegenden Zahl mit dem Logarithmen 0,625 gelangt. Ueber die beiden auf 11 Decimalstellen hier angegebenen Zahlen hinaus setzt Neper allerdings die Rechnung wieder nicht fort.

Endlich drittens lehrt Neper, wie man, immer unter der Voraussetzung $\log 10 = 1$, nur durch fortgesetzte Multiplication die Logarithmen zu finden im Stande sei. Bilde man das Product von 10000000000 Factoren, deren jeder 2 heisst, so entstehe eine Zahl von 301029996 Stellen, und daraus folge $\log 2 = 0{,}301029996$.

Sind die in jenem Anhange geäusserten Gedanken sämmtlich Neper's Eigenthum? Es scheint nicht, aber ebensowenig scheint diejenige Auffassung richtig zu sein, welche Neper gar keinen Antheil an den so wesentlichen Aenderungen des ursprünglichen Gedankens gestatten will[1]). Edward Wright, dessen Name in der Geschichte der Schifffahrtskunde und der Kartographie einen ehrenvollen Platz einnimmt, war von Neper's Descriptio in hohem Grade entzückt. Er sah die Grösse der Erfindung, ihre Tragweite für alle praktischen Zwecke der Sternkunde in vollem Maasse ein, und setzte seine ganze Kraft in Bewegung, zur Verbreitung der Logarithmen beizutragen. Er übersetzte die Descriptio ins Englische und schickte die Handschrift Neper zur Begutachtung. Dieser erklärte sich durchaus einverstanden und befriedigt. Der Druck begann, aber bevor derselbe

[1]) Glaisher l. c. pag. 49—52. — Ball, *History of the study of mathematics at Cambridge*, pag. 27—30.

1616 vollendet war, starb Wright bereits 1615. Seine Einwirkung war demnach nur geringfügig. Um so erheblicher war die von Henry Briggs (1556—1630). In Cambridge aufgewachsen begann Briggs dort seine Lehrthätigkeit 1592. Vier Jahre später trat er in eine damals durch eine Stiftung von Sir Thomas Gresham gegründete und nach dem Stifter genannte Anstalt in London als Professor und verblieb daselbst, bis er 1619 nach Oxford übersiedelte, wohin er als erster Inhaber eines dort neu gegründeten Lehrstuhls, der Savile'schen Professur der Geometrie, berufen wurde. Als 1614 die Descriptio erschien, lebte Briggs demnach in London. Das Werk entzückte ihn. Neu und wundervoll nannte er in einem Briefe die Logarithmen. Sein Kopf und seine Hände seien jetzt in voller Thätigkeit, und er hoffe im nächsten Sommer mit dem Verfasser eines Buches zusammenzutreffen, welches wie kein anderes ihm gefallen und sein Erstaunen erweckt habe [1]). Brigg's Wunsch erfüllte sich durch einen 1615 Neper erstatteten Besuch, der bis zu einem Monate sich ausdehnte, ein zweiter Besuch erfolgte 1616, ein dritter war für 1617 in Aussicht genommen und unterblieb nur, weil Neper am 4. April dieses Jahres schon starb. Gleich 1615 schlug Briggs vor, der Zahl 10 den Logarithmen — 1 zuzuweisen, im Uebrigen aber die Anordnung Neper's beizubehalten, d. h. die Zahl abnehmen zu lassen, während der Logarithme positiv wachse. Neper ergänzte den Vorschlag, welcher ihm ohnedies nicht ganz überraschend kam, da ja er selbst schon daran gedacht hatte, die beiden Progressionen etwas anders zu wählen [2]), dahin, der Zahl 10 den Logarithmus 1 zu geben, also Zahlen und Logarithmen gleichzeitig wachsen zu lassen. So muss man die im Anhange zur Constructio empfohlene Anordnung als gemeinsames Eigenthum von Neper und Briggs betrachten. Die Niederschriften müssen in der Reihenfolge stattgefunden haben, dass erst die Constructio, dann die Descriptio, zuletzt und nicht vor 1616 der Appendix entstand. Briggs rechnete allein weiter und gab 1617 seine *Logarithmorum Chilias prima* heraus [3]), in welcher die Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000 für die Basis 10 auf 8 Decimalen gerechnet waren. Briggs begnügte sich nicht damit. Er liess 1624 eine *Arithmetica logarithmica* erscheinen, welche 14stellige Logarithmen

---

[1]) *Neper, lord of Markinston, hath set my head and hands at work with his new and admirable logarithms. I hope to see him this summer, if it please God; for I never saw a book which pleased me better, and made me more wonder.* [2]) Neper, *Descriptio* pag. 5 *Admonitio.* [3]) Wir folgen in der Angabe der Jahreszahlen Glaisher l. c. Andere setzen die Besuche Briggs' bei Neper in die Jahre 1615 und 1617, Neper's Tod 1618 und in eben dieses Jahr den Druck der *Chilias prima*.

der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 (in einzelnen Abzügen bis 101000) enthielten.

Die Neper'schen Logarithmen fanden ihren ersten Neubearbeiter in Deutschland in der Person von Benjamin Ursinus[1]), ursprünglich Behr (1587—1633 oder 1634). Er ist in Schlesien geboren, in Frankfurt a. d. O. als Professor an der dortigen Universität gestorben. Bevor er nach Frankfurt berufen wurde, war er seit 1615 am Joachimsthal'schen Gymnasium in Berlin thätig, und dort erschienen seine logarithmischen Schriften; der Druckort Köln ist demnach als Köln an der Spree, nicht als Köln am Rhein zu verstehen. Die Descriptio war noch nicht lange erschienen, so gab Ursinus 1618 mit einer sogar schon vom 17. Mai 1617 datirten Vorrede eine *Trigonometria logarithmica Iohannis Neperi* heraus. Es ist die Tafel der Descriptio, nur überall, in Zahlen wie Logarithmen, um die zwei letzten Stellen gekürzt. Dazu gehörte allerdings keine eigene Arbeit. Ursinus liess aber 1624 seinen *Magnus Canon Triangulorum Logarithmicus* folgen, welcher um eine Stelle über Neper hinausging. Die Winkel, deren Sinus nebst deren Logarithmen angegeben sind, wachsen in Zwischenräumen von je 10″. Einzelne Sinusse sind zur schärferen Prüfung anderer aus ihnen abgeleiteter besonders genau berechnet, nämlich für einen Halbmesser 10^{16}. Ihn wandte Ursinus beispielsweise bei den Winkeln von 30, 45, 18, 72, 36, 54, 9 Graden an. Sei es beim Druck, sei es wahrscheinlicher bei der Rechnung, schlichen in der letzten gegen Neper's Tafel neu hinzugetretenen Stelle sich manche von Ursinus nachträglich erkannte Fehler ein. Die Berliner Bibliothek besitzt ein Exemplar, in welchem die nöthigen Verbesserungen dieser letzten Ziffer von Ursinus' Hand vielfach vorkommen. Ein Jahr früher als der grosse Canon erschien, veranstaltete Ursinus auch eine deutsche Ausgabe der Neper'schen Rabdologie[2]).

Nächst Ursinus war Kepler um die Verbreitung der Neper'schen Logarithmen in Deutschland bemüht, eine Thatsache, welche um so auffallender erscheinen könnte, als diese Bemühungen 1620 beginnen, genau in dem Jahre des Druckes von Bürgi's Progresstafeln, und dass von diesen gar nicht die Rede ist. Bei den freundschaftlichen Beziehungen Kepler's zu deren Erfinder können wir uns die Sache kaum anders vorstellen, als dass Kepler über die Saumseligkeit Bürgi's, der selbst den gedruckten Tafeln den versprochenen gründ-

[1]) Neper. *Constructio* pag. 157—160. — Kästner III, 87—91. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch III, 541—542. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 120—122. [2]) Neper, *Constructio*, pag. 152—153.

lichen Unterricht beizugeben noch zögerte, erzürnt war, dass er desshalb damals sich nicht bemüssigt fühlte, für einen wenn auch befreundeten Mann einzutreten, der mit den gedruckten Belegen seiner Leistungen zurückhaltend Kepler's etwaiger Absicht, ihm zu nützen, jeden festen Boden entzog, dass Kepler dagegen die schon veröffentlichten Neper'schen Tafeln für so unendlich wichtig hielt, dass er ihre Benutzung zu empfehlen als wissenschaftliche Pflicht erachtete. Mit blossen Empfehlungen begnügte ein Kepler sich nicht[1]). Er hatte gleich nach Erscheinen der Descriptio von ihr gehört, wenn auch in etwas anzweifelndem Tone. Er hatte dann durch des Ursinus Trigonometria logarithmica einen etwas genaueren Einblick gewinnen können. Er gelangte endlich im Juli 1619 in Linz in den Besitz der Descriptio selbst. Die geometrisch-mechanische Einkleidung, welche in der Descriptio, wenn auch nicht so ausgeführt wie in der Constructio, hervortrat, behagte den deutschen Gelehrten im Allgemeinen nicht, und Kepler machte darin keine Ausnahme. Auch die Anordnung der Neper'schen Tafel nach gleichmässig wachsenden Winkelgraden, deren trigonometrische Functionen eine nicht gleichmässig sich ändernde Zahlenreihe bildeten, sagte ihm nicht zu und in beiden Beziehungen wollte er bessernde Hand anlegen. Zu Maasszahlen von Verhältnissen, *ἀριθμοὶ τοῦ λόγου*, werden ihm die Logarithmen, und er berechnet sie nicht in der verhältnissmässig bequemen Weise Neper's mittels fortgesetzter Subtractionen gleicher und zwar einfacher Bruchtheile, sondern durch fortgesetzte Berechnung mittlerer geometrischer Proportionalzahlen, also ähnlich wie es im Anhange zur Constructio vorgeschlagen ist, wobei allerdings nicht zu vergessen ist, dass Kepler in dem, was er unterliess, wie in dem, was er that, ganz unabhängig dasteht, indem die Descriptio die Tafeln zwar enthielt, aber ihre Herstellung nicht lehrte. Die Veränderung der Anordnung, welche Kepler vornahm, bestand darin, dass er die Zahlen in arithmetischer Progression zunehmen liess. Freilich setzte er die Winkelgrössen, als deren Sinusse die Zahlen zu betrachten seien, wie es bei Neper der Fall war, in einer ersten Kolumne nebenan, aber während, wie wir erst gesagt haben, bei Neper Regelmässigkeit der Zunahme in der ersten, Unregelmässigkeit derselben in der zweiten Kolumne stattfand, war es bei Kepler umgekehrt. Die Zahlen der zweiten Kolumne zeigen gleichbleibende, die der ersten veränderliche Zunahme. Im Uebrigen herrscht selbstverständlich

---

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung (Göttingen 1790), S. 495—508. — Gerhardt, Math. Deutschl., S. 124—129. — Glaisher l. c. pag. 73—74.

zwischen den Tafeln Kepler's und Neper's Uebereinstimmung des Planes. Auch bei Kepler gehörte zur grösseren Zahl der kleinere Logarithmus, und wo in den Tafeln Neper's und Kepler's gleiche Zahlen irgend einmal vorkommen, weichen deren Logarithmen höchstens in den allerletzten Stellen von einander ab, eine Folge der verschiedenartigen Berechnung bei gleichartigem Grundgedanken. Kepler's Tafel, die Zahlen 1 bis 1000 enthaltend, wurde im Winter 1621 auf 1622 vollendet. Er fügte ihr eine *Demonstratio structurae logarithmorum* in 30 Lehrsätzen bei und schickte das druckfertige Werk seinem alten Lehrer Mästlin, dem Tübinger Astronomen, zu, welchem er fortgesetzt die Zuneigung eines dankerfüllten Schülers bewahrte. Mästlin, der früher, wie oben angedeutet wurde, Neper's Tafeln grosses Misstrauen entgegenbrachte, sollte die Kepler'sche Arbeit prüfen, sollte sie einem der Tübinger Drucker zur Herausgabe empfehlen; aber sei es, dass jenes frühere Misstrauen ihn nicht verlassen wollte, sei es, dass er etwa früher allzu wegwerfend von der neuen Erfindung gesprochen hatte, als dass es ihm möglich gewesen wäre, nunmehr selbst einer Logarithmentafel zum Drucke zu verhelfen, er erfüllte Kepler's Wunsch nicht. Das Manuscript lag nutzlos in Tübingen. Erst ein Jahr später wandte sich Kepler an einen hochgestellten Gönner, den Landgrafen Philipp von Hessen-Butzbach, welcher einen gelehrten Briefwechsel mit ihm eröffnet hatte, mit der Bitte, ob dieser nicht für den Druck der Tafeln etwas thun wolle. Die Bitte fiel auf den denkbar günstigsten Boden. Der fürstliche Freund der Sternkunde liess die Handschrift sofort nach Marburg kommen und dort drucken, ohne dass Kepler davon erfuhr, bis 1624 die *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* erschien. Eine Anweisung zum Gebrauche der Logarithmen hatte Kepler zuerst nicht niedergeschrieben. Auf den Wunsch des Landgrafen verfasste er sie nachträglich, und im folgenden Jahre 1625 erschien in acht Kapiteln Kepler's *Supplementum Chiliadis Logarithmorum continens praecepta de eorum usu.* Kepler benützte diese Logarithmen in seinen 1627 herausgegebenen Rudolphinischen Tafeln. Er beabsichtigte auch eine Veröffentlichung in erweitertem Umfange, aber sein 1630 erfolgender Tod unterbrach das begonnene Unternehmen.

Jacob Bartsch[1]), Kepler's Schwiegersohn, führte es zu Ende. Er war 1600 in Lauban in der Lausitz geboren und starb ebenda 1633, als er im Begriffe war, eine Stellung als Professor der Astronomie in Strassburg anzutreten. Die *Tabulae novae logarithmico-*

---

[1]) Kästner III, 92. — Poggendorff I, 111. — R. Wolf, Geschichte der Astronomie, S. 304.

logisticae sind 1630 in Sagan gedruckt, an demselben Orte 1631 die *Tabulae manuales logarithmicae I. Kepleri et I. Bartschii.*

Die ausführlichste Tafel Neper'scher Logarithmen ist die von Peter Crüger[1]) (1580—1639) aus Königsberg, Lehrer der Mathematik und Poesie am Gymnasium zu Danzig seit 1607. Seine *Praxis trigonometriae logarithmicae cum Logarithmorum tabulis ad triangula tam plana quam sphaerica sufficientibus* trägt die Jahreszahl 1634. Das Bemerkenswerthe an seinen Tafeln ist die Trennung der Zahlenlogarithmen von denen der trigonometrischen Functionen. Wenn bei Neper die Aufsuchung der Logarithmen einer Bruchtheile nicht mit sich führenden Zahl meistens eine Interpolationsrechnung nöthig machte, wenn bei Kepler das Gleiche der Fall war, so oft der Logarithme einer trigonometrischen Function eines in Graden und Minuten ohne sonstige Bruchtheile gegebenen Winkels verlangt wurde, so wollte Crüger beide Unannehmlichkeiten vermeiden. In einer ersten Tafel stellte er desshalb die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10000 zusammen. In einer zweiten Tafel folgten die Logarithmen der Sinusse und Tangenten aller Winkel von Minute zu Minute unter Angabe der Proportionaltheile für je 10″. Die Sinusse selbst sind nicht mit abgedruckt, und darin liegt eine Schmälerung des Tafelinhaltes gegen die ursprüngliche Neper'sche Anordnung. Bei Neper hatten die Logarithmen der trigonometrischen Tangenten, wie wir uns erinnern (S. 732), die mittelste Stelle inne. Crüger nannte sie, offenbar aus diesem Grunde, *Mesologarithmi.* Eine dritte Tafel enthält die Logarithmen der Sinusse der von Secunde zu Secunde wachsenden Winkel des ersten Winkelgrades. Endlich ist eine vierte Tafel beigefügt, als deren Berechner Bartsch genannt wird. Sie liefert die Logarithmen der Cosinusse der Winkel bis zu 1° 41′ in Zwischenräumen von je 2″ unter dem Namen der *Antilogarithmi,* den man sich daher wohl hüten muss in dem Sinne zu verstehen, welchen das Wort nachmals erhalten hat. Es kann auffallend erscheinen, dass Crüger noch 1634, nachdem, wie wir bald sehen werden, die Briggischen Logarithmen auch in Deutschland schon Eingang gefunden hatten, dennoch das Neper'sche System seiner Bearbeitung zu Grunde legte. Er fühlte selbst, dass sein Verfahren einer Rechtfertigung bedurfte und sprach sie aus. Für ihn gab der Umstand den Ausschlag, dass alle Rechnungen der Rudolphinischen Tafeln mit Hilfe von Neper'schen Logarithmen ausgeführt, beziehungsweise gelehrt waren, und so lange die Hauptbenutzer der Logarithmen Astronomen waren,

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung, S. 508—511. — Poggendorff I, 501. — Gerhardt, Math. Deutschl., S. 122—124.

so lange diese wesentlich des in den Rudolphinischen Tafeln aufgezeichneten Materials sich bedienten, war es wohl gerechtfertigt, besondere Rücksicht auf eben jene Tafeln zu nehmen.

Wir kehren zu Briggs und dessen 1617 und 1624 gedruckten Logarithmentafeln zurück. Er beabsichtigte eine Ergänzung derselben durch logarithmisch-trigonometrische Tafeln und hinterliess 1631 bei seinem Tode eine auf 10 Decimalen berechnete nahezu vollendete Tafel, welche die Eigenthümlichkeit besass[1], den Winkelgraden decimale Unterabtheilungen beizulegen, also mit deren sexagesimaler Theilung in Minuten und Secunden, der mehrtausendjährigen Gewohnheit, zu brechen. Wohl wurde diese Tafel, wie wir noch sehen werden, 1633 gedruckt, aber die wichtige Neuerung, welche sich, wenn Briggs' Tafel die erste für die Basis 10 veröffentlichte gewesen wäre, vermuthlich eingebürgert hätte, ging nun verloren, denn es waren bereits Tafeln vorhanden, welche die Basis 10 bei sexagesimaler Winkeltheilung benutzten, ihren Besitzern also nicht das Aufgeben des zur zweiten Natur Gewordenen auferlegte.

Der Verfasser dieser schon 1620 gedruckten auf 7 Decimalen sich erstreckenden logarithmisch-trigonometrischen Tafel war Edmund Gunter[2], und sein Vorgang beherrschte die künftige Zeit. Wir haben (S. 691) Gunter als Erfinder einer Art von Proportionalzirkel kennen gelernt. Im Jahre 1624 fertigte er Rechenstäbe an, welche beim logarithmischen Rechnen in Gebrauch genommen werden sollten, ähnlich wie die Neper'schen beim gewöhnlichen Rechnen. Sie erhielten den Namen Gunter's Scale[3].

Die Tafeln von Briggs von 1624 gaben, sagten wir (S. 738), 14stellige Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000, beziehungsweise 101000. Eine grosse Lücke von 20000 bis 90000 war noch auszufüllen, und Briggs war emsig mit dieser Arbeit beschäftigt, aber ohne sein Wissen und Zuthun hatte ein Anderer, der die *Arithmetica logarithmica* von 1624 kennen gelernt hatte, an die gleiche Arbeit sich gemacht: Adriaen Vlack[4]. Ueber Vlack's Geburtsjahr sind wir nicht unterrichtet. Wir wissen nur, dass er in der holländischen Stadt Gouda geboren ist, einer angesehenen Familie angehörte, dass er wissenschaftliche Bildung besass, insbesondere der lateinischen Sprache mächtig war, dass es ihm auch an mathematischen reicheren Kenntnissen nicht fehlte, dass er in-

---

[1]) Glaisher l. c. pag. 63—64. [2]) Ebenda pag. 65. [3]) Poggendorff I, 980. Eine Beschreibung von Gunter's Scale gab John Robertson in den *Philosophical Transactions*, Vol. 48, Part. I, pag. 96 sqq. [4]) Kästner III, 97—98. — Glaisher l. c. pag. 51—53. — Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. pag. 1—25 und 1*—37.

dessen nie dem Lehrberufe oblag. Im Jahre 1626 war er in seiner Vaterstadt bei der buchhändlerischen Firma Pieter Rammaseyn beschäftigt, der er vielleicht als Theilhaber angehörte. Von 1633—1642 lebte Vlack in London als Buchhändler, wesentlich dem Vertriebe von in Holland bei dem eben genannten Geschäfte erschienenen Werken sich widmend. Da vollzog sich in England die grosse staatliche Umwälzung, welche nach 16jährigen Kämpfen 1649 zur Hinrichtung Karl I., nach weiteren elf Jahren 1660 zur Wiedereinsetzung des Königthums führte. Es scheint gewiss, dass persönliche Gefahren, welche Vlack bei Beginn jener bürgerlichen Entzweiungen lief, seine vielleicht etwas beschleunigte Abreise aus dem ihm ungastlich gewordenen Lande veranlassten. Er siedelte 1642 nach Paris über, wo er bis 1648 verweilte, um sich dann im Jahre des westfälischen Friedens als Buchhändler im Haag niederzulassen. Dort lebte er noch 1655, und einer Vorrede eines damals bei ihm gedruckten Buches entstammen die angegebenen Einzelheiten. Während der Gouda'schen Zeit stand Vlack einem dortigen Feldmesser und Lehrer der Mathematik Ezechiel de Decker nahe, und beide zusammen studirten die auf Logarithmen bezüglichen Schriften, welche in England gedruckt worden waren, wobei De Decker, als des Lateinischen unkundig, mindestens ebensosehr der Beihilfe Vlack's bedurfte, als diesem De Decker's mathematische Unterstützung erwünscht sein mochte. Neper's Descriptio von 1614, dessen Rabdologia von 1617, dessen Constructio von 1619, Gunter's Canon triangulorum von 1620 und von 1623, endlich die Arithmetica logarithmica von Briggs von 1624 wurden gemeinschaftlich durchgearbeitet. Bei diesen Studien kam der Plan zur Reife, in holländischer Sprache und unter dem Titel *Nieuwe Telkonst*, neue Zahlenkunde, den Inhalt jener Werke neuerdings zu veröffentlichen; und in der That erschien 1626 bei Pieter Rammaseyn in Gouda, d. h. also unter Vlack's buchhändlerischer Beihilfe, ein erster Band der Nieuwe Telkonst. Den Inhalt bildet Neper's Rabdologie durch Adriaen Vlack aus dem Lateinischen übersetzt, kaufmännische Rechnungsvortheile, Zinstafeln u. s. w. von De Decker, endlich Stevin's Rechnung mit Decimalbrüchen. Das Format war Quart. Im gleichen Jahre 1626 erschien aus der gleichen Druckerei ein Octavband, welcher ebenfalls Nieuwe Telkonst überschrieben ist, aber nur De Decker als Herausgeber nennt und Vlack's Namen ganz verschweigt, auch die Bezeichnung als zweiter Band vollständig vermissen lässt; dagegen sind auf dem Titelblatte neben Neper auch Briggs und Gunter als Quellenschriftsteller erwähnt. Ein zweiter Band der Nieuwe Telkonst, der in dem ersten Bande von Vlack und De Decker in Aussicht gestellt worden war, ist niemals

erschienen, und doch war er als der umfangreichere angekündigt. Man nimmt an, als Ersatz für ihn habe die *Arithmetica logarithmica* dienen sollen, welche als stattlicher Foliant 1628 von Rammaseyn's Druckerwerkstätte ausging. Bei ihr ist jetzt De Decker's Name weggeblieben, während Neper und Briggs auf dem Titelblatte weiter erscheinen. Vlack von Gouda nennt sich bescheiden der Vermehrer der zweiten Ausgabe[1]). Die Vermehrung besteht in der Ausfüllung der bei den Briggischen Tafeln von 1624 noch vorhandenen Lücke, so dass, indem auch die von Briggs berechneten Logarithmen nur um 4 Decimalen gekürzt wieder abgedruckt waren, jetzt die zehnstelligen Logarithmen sämmtlicher Zahlen von 1 bis 100000 vereinigt im Drucke vorlagen. Irgend eine Vereinfachung des Druckes war nicht vorhanden, vielmehr war zu jeder Zahl der Logarithme vollziffrig mit Einschluss der Charakteristik abgedruckt. Am 25. October 1628 richtete Briggs einen Brief an John Pell[2]), in welchem die Ausgabe besprochen wird. Vlack habe davon 1000 Exemplare in lateinischer, holländischer und französischer Sprache gedruckt, und die meisten seien bereits verkauft. Dieser fast unglaublich rasche Verkauf erklärt sich dadurch, dass eine Anzahl von Exemplaren in den Besitz eines Londoner Buchhändlers Miller übergegangen sein wird. Wenigstens gab dieser 1631 Logarithmentafeln heraus, welche, abgesehen von einer Vorrede in englischer Sprache, so vollständig mit der Arithmetica logarithmica übereinstimmen, dass man schon daraufhin den Verdacht hegen konnte, es handle sich nur um eine neue Titelausgabe, ein Verdacht, der sich zur Gewissheit erhob, als man in einzelnen englischen Exemplaren noch an dem unteren Rande der Blätter holländische Druckvermerke wahrnahm, welche man bei ihm zu entfernen vergessen hatte. Was die Zuverlässigkeit der Vlackschen Berechnung betrifft, so sind in seinen Tafeln im Ganzen etwa 300 Fehler nachgewiesen worden, welche nicht auf die letzte Decimale der Logarithmen sich beziehen[3]).

Man kann die Vermuthung kaum zurückweisen, dass der starke Absatz, welchen Vlack's Arithmetica logarithmica in England fand, mit zu den Beweggründen gehörte, die den Herausgeber 1633 zur Uebersiedelung veranlassten, in demselben Jahre, in welchem wieder ein neues Logarithmenwerk bei Rammaseyn herauskam, welches nicht zum mindesten auf den englischen Vertrieb angewiesen war, die *Trigonometria Britannica* von Henry Gellibrand[4]) (1597—1637),

---

[1]) *Editio secunda aucta per Adrianum Vlack Goudanum.* [2]) *Philosophical Magazine* vom Mai 1873. [3]) Glaisher l. c. pag. 53. [4]) Kästner III, 98—99. — Glaisher l. c. pag. 64. — Poggendorff I, 870—871.

der als Theologe begann, dann im Mannesalter der Mathematik sich zuwandte, seit 1627 der Nachfolger Gunter's in der astronomischen Professur am Gresham-College war. Gellibrand's Mitwirkung an der Trigonometria Britannica war keine sehr bedeutende. Wenig mehr als die Einleitung rührt von ihm her. Die Tafeln sind solche, die er bereits fertig berechnet vorfand, z. B. die früher erwähnte logarithmisch-trigonometrische Tafel von Briggs, welche auf der Eintheilung eines Winkelgrades in Centesimaltheile sich aufbaut.

Und wieder in demselben Jahre 1633 brachte die gleiche Druckerei ein Tabellenwerk unter Vlack's eigenem Namen, die *Trigonometria artificialis sive magnus Canon triangulorum logarithmicus*. Die Logarithmen sind zehnstellig, die Winkel, für deren trigonometrische Functionen man dort die Logarithmen findet, wachsen in Zwischenräumen von je 10″. Vlack hat durch seine rechnerischen Bemühungen, durch seine buchhändlerische Thätigkeit entschieden am meisten zur Verallgemeinerung des Gebrauches Briggischer Logarithmen beigetragen, und dieses Verdienst wird ihm nicht geschmälert, wenn auch einige andere Mathematiker gleichzeitig, aber mit geringerem Eifer, jedenfalls mit geringerem buchhändlerischem Erfolge, das gleiche Bestreben an den Tag legten.

Hier wäre etwa zunächst Edmund Wingate[1]) (1593—1656) zu erwähnen, ein Londoner Advocat, der aus Liebhaberei auch mathematische Studien betrieb. Er ging 1624 auf einige Jahre nach Paris und veröffentlichte dort erst eine Nachahmung der Gunter'schen Rechenstäbe: *Construction, description et usage de la règle de proportion*, dann 1626 eine *Arithmétique logarithmique*, von welcher eine englische Uebersetzung 1635 in London erschien.

Denis Henrion[2]), Professor der Mathematik in Paris, gab dort 1626 einen *Traicté des logarithmes* heraus, die erste in Frankreich gedruckte eigentliche Logarithmentafel.

In Deutschland folgte Johann Faulhaber[3]), welcher in seiner Ingenieurs-Schul von 1630 lehrte, wie man trigonometrische Rechnungen logarithmisch zu vollziehen habe. Die Berufung auf Vlack und Briggs, welche neben Neper, Pitiscus, Bernegger auf dem Titelblatte erscheinen, lässt erkennen, dass hier vermuthlich zuerst in Deutschland die Neper'schen Logarithmen verlassen sind.

Kehren wir zu dem Jahre 1633 zurück, aus welchem wir schon zwei Tafelwerke zu erwähnen hatten, so lernen wir es als das Ver-

---

[1]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 225—226. [2]) Ebenda III, 226. — Glaisher l. c. pag. 106 und 151. [3]) Ebenda pag. 99 und 148.

öffentlichungsjahr noch eines dritten bedeutsamen Bandes kennen. Nathaniel Roe's[1]) Tafeln der Briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000 zeichnen sich nämlich in doppelter Weise aus. Erstens ist es eine durchweg siebenstellige Logarithmentafel und aus der zehnstelligen Vlack'schen Tafel durch Weglassen von drei Endziffern gebildet. Von der etwaigen Erhöhung der letztbleibenden Ziffer um eine Einheit, wenn die gestrichenen Stellen den Werth 500 erreichen oder übertreffen, ist dabei nicht die Rede. Zweitens ist ein Schritt zur übersichtlichen und raumsparenden Anordnung der Tafel vollzogen. Die Zahlen stehen, soweit sie von den Hundertern aufwärts reichen, an der Spitze der Logarithmencolumnen, die beiden Randziffern von 00 bis 99 sind daneben gedruckt. Bei den Logarithmen sind die vier Anfangsstellen links, also die einziffrige Charakteristik und die drei ersten Decimalen, gleichfalls abgesondert gedruckt, während die vier letzten Stellen dann bei jeder Zahl voll gedruckt sich finden.

Die Vollendung der Raumersparniss durch Umwandlung der Logarithmentafel in eine Tafel doppelten Einganges, als welche sie gegenwärtig allzubekannt ist, als dass sie einer besonderen Beschreibung bedürfte, vollzog John Newton[2]) in seiner *Trigonometria Britannica* von 1658, welche nicht mit der früher erwähnten 1633 in Gouda gedruckten Trigonometria Britannica verwechselt werden darf, so wenig wie der Herausgeber mit dem berühmten Verfasser der Philosophiae naturalis principia mathematica. Die Newton'schen Logarithmen sind die ersten achtstelligen gewesen.

Eine eigenthümliche Methode zur Berechnung Briggischer Logarithmen hat Huygens 1666 der Pariser Academie in einer ihrer ersten Sitzungen vorgelegt[3]). Man solle $\sqrt[32]{10}$ und $\sqrt[64]{10}$ durch wiederholte Quadratwurzelausziehung berechnen. Nach Multiplication mit $d = 10^{13}$ zur Entfernung der Decimalbrüche wird der erstere Werth $a = 10746078283213$, der zweite $b = 10366329284377$. Alsdann wird $\frac{200\,da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d = 559661035184532$ gebildet und diese Zahl mit $a - b$ vervielfacht. Wieder ganzzahlig geschrieben erscheint das Product $p = 4175509443116778$. Soll dann etwa log 2 gesucht werden, so berechnet man wieder unter Weglassung der Decimalkomma

$$f = \sqrt[32]{2} = 102189171486541 \text{ und } g = \sqrt[64]{2} = 10108892860517.$$

---

[1]) Glaisher l. c. pag. 124 und 159. [2]) Ebenda pag. 118 und 156.
[3]) Durch J. Bertrand aus den bisher ungedruckten Protokollen veröffentlicht in den *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* LXVI, 565—567 (1868).

Mittels d, f, g bildet man eine Hilfsgrösse ganz ähnlicher Art wie vorher mittels d, a, b, nämlich

$$\frac{200df}{3d+3f+4g}+40g-3f-3d=545869542830178$$

und multiplicirt sie mit $a-\frac{ad}{f}\cdot$ Man erhält das Product

$$q=1256953589206.$$

Dann ist endlich $p:q=d:\log 2$ und $\log 2=30102999567$ natürlich immer ohne Decimalkomma. Die zehn ersten Stellen von links sind richtig, die elfte ist um eine Einheit zu hoch. Einen Beweis dieses Verfahrens scheint Huygens nicht vorgelegt zu haben, wenigstens hat ein solcher nicht unter den Protokollen der Akademie aufgefunden werden können.

75. Kapitel.

Erfindung von Methoden. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kettenbrüche. Aufgabensammlungen.

Nach der Entwickelungsgeschichte der Lehre von den Logarithmen kündigten wir (S. 719) ein Eingehen auf Untersuchungen an, welche die Vorläufer der späteren algebraischen Analysis genannt zu werden verdienen.

Insofern die sogenannten Wortrechnungen, denen Michael Stifel, wie wir uns erinnern, nur zuviel Zeit und Mühe widmete, statt der Buchstaben ihnen entsprechende Zahlen aus der Reihe der natürlichen Zahlenfolge oder aus der der Dreieckszahlen einsetzten, gaben sie Veranlassung, mit diesen Dreieckszahlen sich näher zu beschäftigen, aber auch sonstige Zahlenreihen zu untersuchen. Die Wortrechner erwarben sich dadurch wenigstens mittelbar einige Verdienste.

Unter ihnen ragt nächst Stifel Johann Faulhaber[1]) von Ulm weit hervor und nach ihm sein Freund und Mitarbeiter Johann Remmelin. Von 1612 bis 1619 gaben diese Beiden Schriften heraus, in welchen die Lehre von den arithmetischen Reihen wesentliche Förderung fand. Faulhaber gab Summenformeln für die Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zur Summe der elften Potenzen einschliesslich. Er sagt zwar nirgend, wie er zu diesen Formeln gelangte, es kann aber kaum ein Zweifel sein, dass er sich fortgesetzte Differenzen-

[1]) Kästner III, 29—33 und 114—124.

reihen bildete, dass er so den Begriff der arithmetischen Reihe höherer Ordnung gewann, dass er von ihm aus empirisch die Summenformel sich verschaffte und mit dem Zutreffen in einigen wenigen Fällen statt jeden Beweises sich begnügte. Es war also eine ungenügende Induction, auf welche Faulhaber sich verliess, und nur die Geduld und der rechnerische Scharfsinn sind zu rühmen, welche auf so wenig gesichertem Boden sich mit Glück zu bewegen vermochten.

Die Zeit war gekommen, in welcher die ungenügende Induction der sogenannten vollständigen Induction den Platz räumen musste, oder anders ausgesprochen: die Erfindung des Beweises von n auf $n+1$ stand bevor, und der ihn lieferte, war Blaise Pascal. Die Zeit der Erfindung genau anzugeben ist nicht möglich, jedenfalls fiel sie vor 1654. In dem *Traité du triangle arithmétique*, welcher 1662 bei Pascal's Tode in gedrucktem Zustande sich vorfand und dann 1665 in den Buchhandel kam, auf welchen aber in Briefen zwischen Pascal und Fermat aus dem Sommer 1654 deutlich angespielt ist, findet sich eine 12. Folgerung, *Conséquence XII* [1]), zu deren Beweis Pascal sich zweier Hilfssätze bedient. Erstlich sei die von ihm ausgesprochene Wahrheit in der zweiten Reihe von Zahlen augenscheinlich erfüllt, und dann behauptet der zweite Hilfssatz *que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.* Die Vereinigung der beiden Wahrheiten, dass was in einem Falle als richtig sich erweist, im nächsten Falle auch richtig sein muss mit der durch Augenschein erwiesenen Richtigkeit in einem bestimmten Falle, bildet aber die Methode der vollständigen Induction, eine der fruchtbarsten der gesammten Mathematik.

Noch 28 Jahre früher als die Methode der vollständigen Induction war 1637 eine andere Methode von grösster Fruchtbarkeit bekannt gemacht worden: die Methode der unbestimmten Coefficienten. Ihr Erfinder war Descartes. In dessen *Geometrie* von 1637 findet sich die Beschreibung der Methode, welche in der mehr verbreiteten lateinischen Ausgabe [2]) folgenden Wortlaut besitzt: *Attamen vos monere volo, quod inventio haec supponendi duas eiusdem formae aequationes ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una sola nascantur plures aliae, infinitis aliis Problematis inservire possit, neque una ex minimis methodis, qua utor existat,* d. h.: Im Vorbeigehen will ich einschärfen,

---

[1]) Pascal III, 248. [2]) *Geometria a Renato Descartes anno 1637 gallice edita* (ed. Franciscus van Schooten. Amsterdam 1659) I, 49.

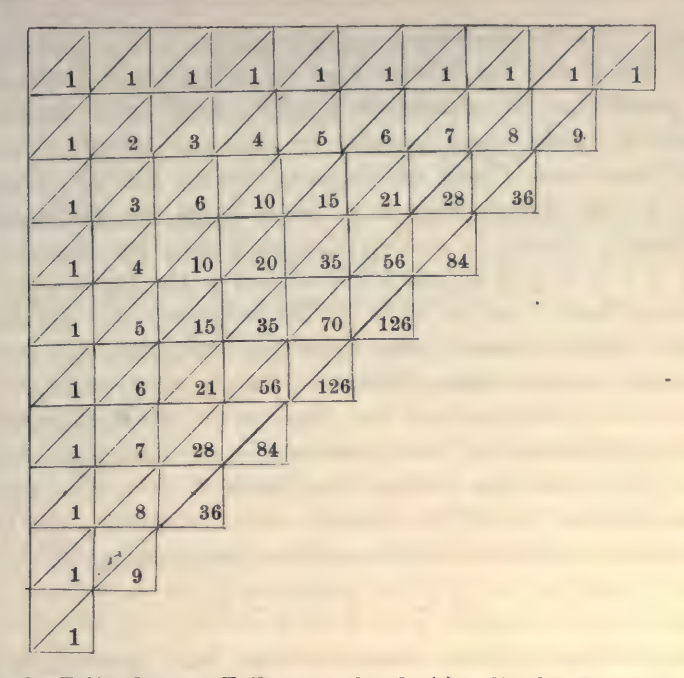
dass die Erfindung der Annahme zweier Ausdrücke gleicher Gestalt, deren Glieder einzeln verglichen werden und so eine Gleichung mehrere andere erzeugen lassen, bei unendlich vielen anderen Aufgaben dienen kann, ja dass sie keineswegs die geringste unter den von mir benutzten Methoden ist. Wenn irgendwo, so war hier Descartes' selbstbewusster Stolz vollkommen an seinem Platze, und man kann fast so weit gehen, eben dieses volle Bewusstsein von der Wichtigkeit der neuen Methode ihrer Erfindung an die Seite zu stellen.

Die Dinge, bei welchen Descartes seine Methode in Anwendung brachte, gehören erst einem etwas später von uns zu erörternden Kapitel der mathematischen Wissenschaften an. Hier musste es genügen, ihren ganz abgesehen von etwaigen Ergebnissen vorhandenen analytischen Charakter hervortreten zu lassen. Anders verhält es sich mit Pascal's vollständiger Induction. Die ganze Abhandlung vom arithmetischen Dreiecke gehört nebst anderen sich ihr unmittelbar anschliessenden Untersuchungen [1]) ihrem Inhalte nach hierher und muss besprochen werden.

Das arithmetische Dreieck erinnert durch äussere Gestalt wie durch die zu erreichenden Zwecke an die Art, wie Stifel seine Binomialcoefficienten ordnet, ohne jedoch irgend damit verwechselt werden zu können. Schon darin, dass die Zeilenlänge von oben nach unten gerechnet bei Stifel zunimmt, bei Pascal abnimmt, ist ein wesentlicher Unterschied zu erkennen, und ebenso darin, dass bei Pascal eine erste Horizontalzeile sowie eine erste Kolumne aus lauter Einsern gebildet vorhanden ist, welche bei Stifel fehlen. Es wäre also im höchsten Grade ungerecht, eine Abhängigkeit Pascal's von Stifel zu vermuthen. Selbst wenn Pascal die Arithmetica integra gekannt hat, was wir noch sehr bezweifeln, war das arithmetische Dreieck durchaus sein geistiges Eigenthum. Die Entstehung ist folgende: Eine Anzahl von Einsern, etwa 10 an der Zahl, füllen ebensoviele in einer ersten Horizontalzeile neben einander befindliche Zellen. Eine zweite Horizontalzeile enthält eine Zelle weniger, also deren 9, und das geht so weiter bis zur zehnten einzelligen Horizontalzeile. Jede untere Horizontalzeile füllt ihre Zellen mit Zahlen, die mit 1 beginnen und nach dem Gesetze fortschreiten, dass jede Zelle die Summe der ihr links stehenden und der genau senkrecht über ihr stehenden Zahl enthält.

---

[1]) Pascal III, 243—322.



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Die k^{te} Zelle der r^{ten} Zeile mag durch $(r)_k$, die darüber befindliche also durch $(r-1)_k$, die links stehende durch $(r)_{k-1}$ bezeichnet werden, so ist immer $(r)_k = (r-1)_k + (r)_{k-1}$. Das entstandene Zahlendreieck besitzt ebensoviele Verticalkolumnen als Horizontalzeilen, und die r^{te} Kolumne stimmt genau mit der r^{ten} Zeile überein. Ihr k^{tes} Feld ist aber die r^{te} Zelle der k^{ten} Zeile, also das weitere Gesetz vorhanden $(r)_k = (k)_r$. Ausser den Zeilen und Kolumnen, welchen Pascal die Namen beilegt *cellules d'un même rang parallèle* und *cellules d'un même rang perpendiculaire*, unterscheidet er noch als *cellules d'une même base* diejenigen, welche von einer gemeinsamen Geraden als Diagonale durchschnitten werden. Sie nehmen von links oben nach rechts unten je um eine Zelle zu, und jede enthält, wie der Augenschein lehrt, die Combinationszahlen von Elementen in einer um die Einheit anwachsenden Anzahl zu allen bei dieser Seitenzahl möglichen Classen. Eine Bezeichnung ähnlich der von uns zum Ausspruch einiger Gesetze in Anwendung genommenen kennt Pascal nicht, erst Leibniz hat Buchstaben mit Stellenzeigern in die Mathematik einzuführen gewusst. Die ausgesprochenen Sätze dagegen kennt er. Die Bildungsregel heisst: *Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle*[1]. Dass $(r)_k = (k)_r$ lautet: *En tout triangle arithmétique chaque cellule est égale à sa réci-*

[1]) Pascal III, 245.

proque[1]). Die Uebereinstimmung der ganzen Zeilen und Kolumnen spricht Pascal mit den Worten aus: *En tout triangle arithmétique un rang parallèle et un perpendiculaire qui ont un même exposant sont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres*[2]). Jede Basis besitzt ferner nach Pascal die doppelte Summe der ihr vorhergehenden[3]). In der fünften Basis z. B. ist in Folge des Bildungsgesetzes des Dreiecks $1 = 1$, $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$, $1 = 1$, also $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2(1 + 3 + 3 + 1)$. Da nun die Summe der ersten Basis 1 ist, so wird die der zweiten 2, die der dritten 4, und jede weitere Summe einer Basis ein weiteres Glied der mit 1 beginnenden geometrischen Reihe 1, 2, 4, ... sein, nämlich das sovielte, als die Reihennummer der Basis ist[4]). Die Bestimmung einer einzelnen Zellenzahl $(r)_k$ wird nach folgender Vorschrift vorgenommen[5]). Man bildet das Product der Zahlen $1 \cdot 2 \cdots (k-1)$, ferner das der Zahlen $r \cdot (r+1) \cdots (r+k-2)$, so ist $(r)_k$ der Quotient der Division des zweiten Productes durch das erste, z. B.

$$(3)_5 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$$

Die in der Eckzelle links oben befindliche Zahl, gewöhnlich eine 1, heisst die Erzeugungszahl, *générateur*, des Dreiecks[6]). Ihr gleich müssen alle Zahlen der ersten Zeile und der ersten Kolumne gewählt werden, damit auch bei diesen $(r)_k = (r-1)_k + (r)_{k-1}$ sei, und nach demselben Gesetze füllen alsdann die übrigen Zellen sich an. Die Sätze, welche wir ausgesprochen haben, ändern sich naturgemäss in einigen Beziehungen, wenn eine andere Zahl als 1 zur Erzeugungszahl genommen wird. Das Einheitsdreieck, wie wir jenes kurz nennen wollen, dessen Erzeugungszahl 1 heisst, hat vielfache Anwendung. Erstlich sind seine Zeilen und ebenso die denselben gleichen Kolumnen mit lauter arithmetischen Reihen steigender Ordnung besetzt, welche also einfach daraus abgeschrieben werden können. Die zweite Anwendung bildet die Auffindung der Combinationszahlen[7]), d. h. der Zahlen, welche angeben, auf wie viele verschiedene Arten man eine gegebene Anzahl von Elementen aus einer ebenfalls gegebenen nicht kleineren Anzahl von Elementen auswählen kann. Der moderne Sprachgebrauch sagt: n Elemente sollen zur Klasse k combinirt werden; bei Pascal heisst es, man suche *la multitude des combinaisons des k dans n*. Eines Zeichens bedient sich Pascal nicht für die Combinationszahlen, dagegen kannte er deren meiste Eigenschaften.

---

[1]) Pascal III, 246 Conséquence V. [2]) Ebenda III, 247 Conséquence VI. [3]) Ebenda III, 247 Conséquence VII. [4]) *dont l'exposant est le même que celui de la base.* [5]) Pascal III, 251 Problème. [6]) Ebenda III, 245. [7]) Ebenda III, 253—257: *Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons.*

Schreiben wir $\binom{n}{k}$ für die Combinationszahl von n Elementen zur Klasse k, so weiss Pascal, dass $\binom{n}{n} = 1$, dass $\binom{n}{1} = n$, dass

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pascal unterscheidet ferner ein 1., 2., .. n^{tes} Dreieck, je nachdem die erste Zeile und die erste Kolumne aus 1, 2, .. n Zellen bestehen. Er zeigt alsdann, dass $\binom{n}{k}$ die Summe sämmtlicher Zahlen der k^{ten} Zeile, oder, was auf das Gleiche herauskommt, die $(k+1)^{\text{te}}$ Zelle der $(n+1)^{\text{ten}}$ Basis, wenn dieselbe von links unten nach rechts oben in jener Basis abgezählt ist.

Pascal schickte seine Abhandlung über das arithmetische Dreieck im August 1654 nach Toulouse an Fermat, und mit dieser Sendung kreuzte sich[1]) eine solche von Fermat an Pascal fast gleichen Inhaltes, nämlich über figurirte Zahlen. Fermat befasste sich aber mit diesem Gegenstande sicherlich schon 1636, wo er in einem Briefe an Roberval vom 16. December von einer Methode der Summirung beliebiger Potenzen der ganzen Zahlen spricht[2]), mithin von der wissenschaftlichen Vollendung dessen, was Faulhaber wieder etwa 20 Jahre früher angebahnt hatte (S. 748). Von dessen Arbeiten hatte allerdings Fermat ganz gewiss keine Kenntniss. Fermat sagte in jenem Briefe an Roberval, er werde ihm die aufgeschriebene Erfindung sammt Beweis vorlegen, sobald er es wünsche[3]); erfüllt hat er die Zusage nie.

Mit dem *Traité du triangle arithmétique* vereinigt kam auch der *Traité des ordres numériques*[4]) heraus, welcher gewissermassen als Ergänzung des ersteren angesehen werden kann. Manche von den Sätzen jener Abhandlung kehren hier in veränderter Form wieder. Der XI. Satz[5]), von welchem Pascal ausdrücklich berichtet, Fermat habe ihn gleichzeitig und ganz unabhängig von seinem Gedankengange erkannt, ist folgender: Eine Zahl beliebiger Ordnung mit der vorausgehenden Wurzel vervielfacht und getheilt durch den Exponenten ihrer Ordnung giebt zum Quotienten die aus dieser Wurzel hervorgehende Zahl der folgenden Ordnung. In Zeichen geschrieben heisst der Satz: $\binom{n}{k+1} = (n-k)\binom{n}{k} : (k+1)$. Unzweifelhaft haben Pascal und Fermat die grosse Bedeutung dieses Satzes für die Lehre von den figurirten Zahlen eingesehen. Ob sie sich ebenso klar seiner

[1]) Pascal III, 231. [2]) *Varia Opera Petri de Fermat* pag. 148. [3]) *J'en écriray cependant l'invention et démonstration que vous verres lorsqu'il vous plairra.* [4]) Pascal III, 268—271. [5]) Ebenda III, 271.

Wichtigkeit für die Binomialentwicklung bewusst waren, lässt sich aus dem Wortlaute nicht entnehmen, auch nicht ob sie die independente Formel $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ jemals kannten oder zu kennen suchten.

Eine besonders bedeutsame Anwendung des arithmetischen Dreiecks ist die auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben (S. 678) als wir Pascal zum ersten Male nannten, nur in nothdürftigster Weise seine Lebensgeschichte berührt. Im Jahre 1649 kehrte Pascal aus Rouen, wo er eine Zeit lang Beamtendienste leistete, nach Paris zurück. Neben dem Verkehre mit den hervorragendsten Mathematikern, denen er seit seiner Kindheit nahe stand, fesselte ihn auch das wilde und nicht selten wüste Leben der Hauptstadt, und er stürzte sich in dasselbe mit der jugendlichen Gier seiner 26 Jahre, gehörte auch bis etwa zum September 1654 den lockeren Kreisen an, in denen er sich wohler fühlte, als es seiner Gesundheit und seiner Börse zuträglich war. Zu seinen damaligen nahen Bekannten gehörte ein Spieler De Méré, von dessen Verkehr mit Pascal einige Briefe erhalten sind. In einem Briefe meint er, Pascal habe ihm zwar gesagt, er halte nicht mehr viel von der Mathematik, aber, so sehr er sich dieser Sinnesänderung freue, glaube er nicht vollständig daran, weil in mancherlei Trugschlüssen, die Jener sich zu Schulden kommen lasse, noch immer der schädliche Einfluss mathematischen Denkens zu Tage trete[1]). Eben dieser De Méré stellte Pascal gegen Ende jenes lockeren Lebens zwei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitslehre: Die eine fragte, ob es von Vortheil sei zu wetten, dass man in einer gewissen Anzahl von Würfen mit zwei Würfeln den Sechserpasch, *sonnez*, werfen werde; die zweite verlangte zu wissen, wie man theilen solle, *les partis*[2]), wenn man ein auf eine gewisse Anzahl gewonnener Einzelspiele gerichtetes Spiel zu unterbrechen gezwungen sei, bevor es zur Entscheidung kam. Die zweite Aufgabe fesselte Pascal ganz besonders, und er erfand eine Methode, *méthode des partis*, zu ihrer Lösung. Man kann ihren Kern darin finden, dass immer die Frage nach dem Betrage aufgeworfen wird, über welchen eigentlich ein bestimmtes Einzelspiel die Entscheidung

[1]) Der Brief ist zum grossen Theile abgedruckt in Bayle, *Dictionnaire historique et critique*. 3. Ausgabe. Rotterdam 1715, Bd. III, S. 917 in den Anmerkungen zum Artikel *Zenon*. Für die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt benutzten wir häufig das sehr umfangreiche und zuverlässige Werk von J. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge and London 1865.
[2]) *Le parti* = die Theilung ist nicht zu verwechseln mit *la partie* = das Einzelspiel, die Partie.

giebt[1]). Gesetzt, das Spiel werde durch dreimaligen Gewinn entschieden und die Theilung solle vollzogen werden, wenn ein Spieler schon einmal, der andere noch gar nicht gewonnen hat. Pascal sagt dann so: Hätte der erste Spieler A 2 Gewinne, der zweite B 1 Gewinn, und sie spielen weiter, so kann zweierlei sich ereignen: A gewinnt und erhält den ganzen Einsatz, oder B gewinnt und steht dann mit A gleichauf, so dass jedem die Hälfte des Einsatzes zukommt. A erhält also unter allen Umständen die eine Hälfte des Einsatzes, spielt daher nur um die andere Hälfte. Diese letztere Hälfte ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu theilen, d. h. wenn der Gesammteinsatz 1 beträgt, hat A $\frac{3}{4}$ zu erhalten und B nur $\frac{1}{4}$. Nun stehe zweitens A mit 2 Gewinnen gegen B ohne Gewinn oder mit 0 Gewinnen. Fällt ein neu zu spielendes Spiel zu Gunsten von A aus, so hat er gewonnen und zieht den ganzen Einsatz; fällt es zu Gunsten von B aus, so ist der vorige Fall hergestellt, und A hat $\frac{3}{4}$ zu fordern. So viel bekommt er also mindestens und spielt nur um $\frac{1}{4}$. Dieses letzte Viertel ist, wenn das Spiel unterbleibt, zwischen A und B hälftig zu theilen, d. h. A hat $\frac{7}{8}$ und B $\frac{1}{8}$ zu erhalten. Endlich stehe das Spiel auf 1 gegen 0, wonach eigentlich gefragt wurde. Gewinnt A in einem weiter angenommenen Spiele, so ist der zuletzt erörterte Zustand geschaffen, und A bekommt $\frac{7}{8}$. Gewinnt dagegen B, so stehen die beiden Spieler gleichauf, und jeder erhält die Hälfte. A hat also diese Hälfte unter allen Umständen zu fordern und würde ein etwaiges Spiel nur um $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ spielen, wovon ihm bei Unterbleiben des Spieles die Hälfte mit $\frac{3}{16}$ zukommt. Die Theilung muss desshalb dem A $\frac{11}{16}$, dem B $\frac{5}{16}$ zusprechen.

Schon vor der Erfindung dieser sinnreichen Methode hatte Pascal, einer Aeusserung in einem Briefe an Fermat vom 29. Juli 1654 zufolge[2]), daran gedacht, durch Bildung von Combinationsformen die Aufgabe zu erledigen, wobei ihm aber die Umständlichkeit dieser Arbeit abschreckend erschien. Fermat fiel auf den gleichen Gedanken und muss ihn in einem verloren gegangenen Schreiben an Pascal auseinandergesetzt haben, wie aus der Antwort Pascal's vom 24. August zu ersehen ist[3]). Aus einem anderen Briefe Pascal's an Fermat vom

[1]) Pascal III, 221—225. [2]) Ebenda III, 221: *Votre méthode est très sûre, et c'est la première qui m'est venue à la pensée dans cette recherche. Mais parceque la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé.* [3]) Ebenda III, 226—231.

27. October 1654 erfahren wir aber auch, dass, was Pascal als combinatorische Methode sich dachte, von der Fermat's durchaus verschieden war[1]). Die Fermat'sche Methode ist für die oben auseinandergesetzte Aufgabe folgende: Wird auf 3 Gewinnspiele gespielt, und A steht auf 1, B auf 0, so ist in spätestens 4 Einzelspielen das Spiel zu Ende. Bezeichnet man nun jedes durch einen der Spieler gewonnene Einzelspiel durch den seinem Namen entsprechenden kleinen Buchstaben, so giebt es 16 Möglichkeiten: *aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb.* Davon sind die 8., 12., 14., 15., 16., also insgesammt deren 5 dem B günstig und die übrigen 11 dem A. Fermat dehnte diese seine Methode auch auf mehr als nur zwei Spieler aus, blieb aber damit Pascal unverständlich, bis er ihm am 25. September die Sache klarer auseinanderlegte[2]), worauf Pascal's erwähnte volle Zustimmung vom 27. October erfolgte.

Pascal hörte aber desshalb keineswegs auf, die ihm eigenthümliche Methode zu vervollkommnen, und bei ihrer Anwendung sich des arithmetischen Dreiecks bedienen zu können, erschien ihm mit Recht bemerkenswerth[3]). Man müsse, sagt Pascal, beachten, wie viele Gewinnspiele jedem der beiden Spieler, zwischen denen die Theilung erfolgen soll, noch fehlen, um überhaupt gewonnen zu haben. Die beiden Zahlen addirt man zusammen und sucht die sovielte Basis im arithmetischen Dreiecke, als jene Summe als Ordnungszahl betrachtet angiebt. Addirt man die Zellenzahlen von sovielen von unten, beziehungsweise von oben an gezählten Zellen dieser Basis, als durch die jedem Spieler fehlende Anzahl von Gewinnspielen vorgeschrieben wird, so liefern die beiden Summen die Verhältnisszahlen, nach welchen die Theilung in umgekehrter Reihenfolge der Spieler vor sich zu gehen hat. Fehlen beispielsweise dem ersten Spieler 2, dem zweiten 4 Gewinnspiele, so muss man zur $2 + 4 = 6$. Basis übergehen, und die Summe von 4 Zellen $1 + 5 + 10 + 10 = 26$ nebst der von 2 Zellen $1 + 5 = 6$ geben das Verhältniss an, in welchem der erste, beziehungsweise der zweite Spieler am Gesammteinsatze betheiligt ist. Der Beweis wird nach der Methode der vollständigen Induction geliefert[4]). Fehlten dem einen Spieler 2, dem anderen 3 Gewinnspiele und man müsste zur 5. Basis übergehen, so solle man

---

[1]) Pascal III, 235: *J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne.* [2]) Ebenda III, 232—234. [3]) Ebenda III, 257—266: *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties.* Vergl. besonders pag. 261 Problème I. [4]) Ebenda III, 263.

die Voraussetzung machen, es werde ein weiteres Spiel gespielt, welches entweder A oder B gewinnt. Dann fehlen entweder dem A 1, dem B 3 oder dem A 2, dem B 2 Gewinnspiele. Da

$$1 + 3 = 2 + 2 = 4$$

ist, so hat man es jetzt mit einer um 1 niedrigeren Anzahl von beiden Spielern zusammen fehlenden Gewinnspielen zu thun, für welche die Methode schon als bewiesen gilt. In den beiden angeführten Fällen haben also die beiden Spieler folgende Ansprüche:

A fordert $1 + 3 + 3$ und B fordert 1,
A fordert $1 + 3$ und B fordert $1 + 3$.

Die beiden Möglichkeiten vereinigen sich so, dass

A fordert $1 + (1 + 3) + (3 + 3)$ und B fordert $1 + (1 + 3)$.

Das sind aber gerade die dem A, beziehungsweise dem B durch die Regel zugewiesenen Zellenzahlen der 5. Basis, d. h. die Regel gilt für $n + 1$, wenn sie für n gilt. Ihre Geltung bei $n = 2$ ist aber augenscheinlich, da alsdann nur zwei Fälle denkbar sind: entweder einem Spieler fehlen 2, dem anderen 0 Gewinnspiele, dann theilen sie nach den Brüchen $\frac{1+1}{2}$ und $\frac{0}{2}$; oder jedem Spieler fehlt 1 Gewinnspiel, dann theilen sie nach den Brüchen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Beides ist aber in Uebereinstimmung mit der Regel, die dadurch allgemein bewiesen erscheint. Die grosse Eleganz dieser Untersuchung ist bestrickend, und nur der Vorzug erhebt Fermat's combinatorische Methode über die Pascal's, dass sie noch anwendbar bleibt, wo jene versagt, nämlich wenn es um mehr als zwei Spieler sich handelt.

Pascal hielt mit diesen Untersuchungen nicht zurück. Wie er gegen Fermat rückhaltslos sich äusserte, theilte er auch den Pariser Freunden, besonders Roberval, die beiderseitigen Ergebnisse mit[1]), ohne aber Verständniss oder gar Anerkennung zu finden. Einige Einwürfe mehr philosophischer als mathematischer Natur waren die ganze Frucht der Besprechung. Gleichwohl muss die Kunde von den eigenartigen, ganz neue Ergebnisse zu Tage fördernden Untersuchungen sich ziemlich herumgesprochen haben, wenn auch der Traité du Triangle erst 1665 in den Buchhandel kam (S. 749), der Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat noch viel später in die Oeffentlichkeit gelangte.

Von einer Abhängigkeit der 1657 gedruckten Exercitationes mathe-

---

[1]) Pascal III, 227: *Je communiquai votre méthode à nos messieurs; sur quoi M. de Roberval me fit cette objection* (Brief Pascal's an Fermat vom 24. August 1654).

maticae des jüngeren Franciscus van Schooten von Pascal wird man nicht reden können, wenn auch dort[1]) mancherlei combinatorische Untersuchungen sich finden, von welchen namentlich eine in Dreiecksgestalt geordnete Vereinigung sämmtlicher aus gegebenen Buchstaben zu bildenden Combinationen Erwähnung verdient. Jeder neue Buchstabe beginnt eine neue Zeile und tritt in derselben hinter alle bereits gebildeten Formen, beiläufig bemerkt genau das gleiche Verfahren, welches Buckley (S. 480) einhielt. Das Dreieck sieht so aus:

$$a\,.$$
$$b\,.\,ab\,.$$
$$c\,.\,ac\,.\,bc\,.\,abc\,.$$
$$d\,.\,ad\,.\,bd\,.\,abd\,.\,cd\,.\,acd\,.\,bcd\,.\,abcd.$$

Dagegen behaupten wir eine gewisse Abhängigkeit von Pascal für einen Anhang zu den Exercitationes mathematicae, eine 14 Druckseiten starke Abhandlung *De ratiociniis in ludo aleae* von Christian Huygens. Seine geometrischen Erstlingswerke aus den Jahren 1651, 1654, 1656 haben uns (S. 715) beschäftigt. Sie führten dazu, den Namen des noch jugendlichen Verfassers rasch bekannt zu machen, und als Huygens im Sommer 1655 nach Paris kam, trat er schon in fast gleichberechtigten Verkehr mit Roberval und anderen Mathematikern. Dort erfuhr Huygens jedenfalls von dem zwischen Pascal und Fermat brieflich Verhandelten. Als er nach Holland zurückkehrte, blieb er in Briefwechsel mit französischen Gelehrten, so auch mit Pierre de Carcavy[2]). Dieser war der Sohn eines reichen Bankiers. Am Anfange des XVII. Jahrhunderts geboren, nahm er 1622—1636, also gleichzeitig mit Fermat, die Stellung eines Parlamentsrathes in Toulouse ein. Im Jahre 1636 siedelte er als Rath nach Paris über. Vermögensverlust nöthigte ihn 1647 seine dortige Stelle zu verkaufen, und nun trat er 1648 in den Dienst des Herzogs von Liancourt. Seit 1663 war er dann an der königlichen Bibliothek in Paris angestellt, welcher bei seinem Tode 1684 die werthvollen Sammlungen zufielen, die er angelegt hatte. Carcavy also schrieb unter dem 22. Juni 1656 an Huygens und legte einen vor wenigen Tagen von ihm erhaltenen Brief Fermat's bei, in welchem Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nicht aber das Verfahren zu denselben zu gelangen mitgetheilt waren[3]). Huygens wies desshalb mit Recht in der am 27. April 1657 niedergeschriebenen Vorrede zur Abhand-

---

[1]) Van Schooten, *Exercitationes mathematicae*, pag. 373—387. [2]) Vergl. eine ausführliche Abhandlung von Ch. Henry im *Bulletino Boncompagni* T. XVII (1884). Ergänzungen und Berichtigungen dazu von P. Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61 (1893). [3]) *Oeuvres de Huygens* I, 431—434.

lung über das Würfelspiel die Ehre erster Erfindung zu Gunsten seiner französischen Vorgänger zurück, fügte aber mit gleichem Rechte hinzu, jene hätten ihre Methoden so geheim gehalten, dass er gezwungen gewesen sei, den ganzen Gegenstand von den ersten Anfängen an zu entwickeln[1]). Schon am 10. März 1656 waren Huygens Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gange, am 20. April war Einiges druckfertig, am 6. Mai hatte Franciscus van Schooten schon zugesagt, vielleicht schon begonnen, die holländisch geschriebene Abhandlung ins Lateinische zu übersetzen[2]), um sie dann 1657 unter dem oben angegebenen Titel seinen eigenen vermischten Untersuchungen als Anhang anzuschliessen, und alle diese Daten liegen vor dem des Briefes, in welchem Carcavy die Fermat'sche Einlage übersandte, eine Bestätigung unserer Behauptung, dass der Keim zu Huygens' Untersuchungen in Gesprächen gelegt wurde, welche bereits in Paris stattfanden.

Die Grundlage, auf welche Huygens seine Betrachtungen stützt, ist die des arithmetischen Mittels. Wenn, sagt er unter Anwendung allgemeiner Buchstaben, in p Fällen jeweil eine Summe a, in q Fällen jeweil eine Summe b mir zufällt, so ist in jedem einzelnen Falle meine Erwartung $\frac{ap+bq}{p+q}$. Daran knüpft er dann Theilungsaufgaben, welche er vollständig in Pascal's Sinne, bevor dieser das arithmetische Dreieck anwandte, behandelt, so dass es wahrscheinlich wird, er habe durch Roberval mehr Andeutungen über das Verfahren Pascal's als über dasjenige Fermat's erhalten. An die Theilung zwischen zwei Spielern knüpfen sich ähnliche Aufgaben unter Annahme von drei oder noch mehr Spielern und wir erinnern uns, dass hier Pascal rathlos geblieben war, wenigstens seines Dreiecks Bequemlichkeit einbüsste. Huygens wendet auch hier ein recurrirendes Verfahren an. Es wird berechnet, wieviel jedem einzelnen Spieler unter der Voraussetzung zukomme, es sei ein weiteres Spiel gemacht worden und der Reihe nach zu Gunsten jedes der betheiligten Spieler ausgefallen.

Ausser den Theilungsaufgaben waren von De Méré seiner Zeit auch Würfelaufgaben gestellt worden. Pascal und Fermat liessen sich diese, als leichter, wenig angelegen sein. Huygens dagegen setzt sie von Propositio X seiner Abhandlung an auseinander, und wieder auf

---

[1]) *Sciendum vero, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia geometras calculus hic agitatus fuerit, nequis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat. Caeterum illi, difficillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evoluere mihi necesse fuerit.* [2]) *Oeuvres de Huygens* I, 389, 405, 413.

der Grundlage des arithmetischen Mittels aus den unter den verschiedenen möglichen Voraussetzungen zu erwartenden Gewinnen, *sors* oder *aestimatio expectationis*. Will man mit einem Würfel auf einen Wurf 6 Augen werfen, so sind sechserlei Würfe möglich, von welchen einer den Gewinn a liefert und fünf den Gewinn 0, die Erwartung ist also $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot 0}{1 + 5} = \frac{a}{6}$. Stehen zwei Würfe frei, so liefert von sechs Möglichkeiten des ersten Wurfes eine den Gewinn a, die fünf anderen liefern wenigstens die Möglichkeit im zweiten Wurfe zu gewinnen, welche als mit $\frac{a}{6}$ zu veranschlagende bekannt ist. Die Erwartung ist also jetzt:

$$\frac{1 \cdot a + 5 \cdot \frac{a}{6}}{1 + 5} = \frac{11}{36} a,$$

und dem Gegenspieler kommen folglich $\frac{25}{36} a$ zu, so dass die beiderseitigen Erwartungen sich wie 11 : 25 verhalten[1]). Dieses Wettverhältniss geht bei 3 Würfen in 91 : 125, bei 4 Würfen in 671 : 625, bei 5 Würfen in 4651 : 3125, bei 6 Würfen in 31031 : 15625 oder annähernd in 2 : 1 über. Huygens hebt weiter auch noch hervor, dass die Zahl der Würfe durch die Zahl der bei einmaligem Wurfe gebrauchten Würfel ersetzt werden können, ohne übrigens diese Behauptung zu begründen, und fügt die mathematische Betrachtung einiger zusammengesetzten Spielarten mit Würfeln hinzu.

Auch nach dem Erscheinen der Ratiocinia in ludo aleae dauerte es wieder 14 Jahre, bis abermals in Holland eine Schrift über Wahrscheinlichkeitsrechnung gedruckt wurde. Das Jahr 1671 liegt aber bereits jenseits der Zeitgrenze dieses Bandes, und wenn wir auch mit einzelnen Abschnitten es weniger genau nehmen, über den Band hinaus wollen wir nicht greifen und versagen es uns desshalb, auf Jan de Witt's *Waerdye von lyf-renten nar proportie van los-renten*[2]) irgend näher einzugehen.

Dagegen erwähnen wir, dass John Graunt[3]) (1620—1674) sich mit Statistik beschäftigte und 1662 ein Buch unter dem Titel: *Natural and political observations mentioned in a following index and made upon the bills of mortality* veröffentlichte. Darin soll zuerst das Uebergewicht der Knabengeburten gegen Mädchengeburten im Ver-

---

[1]) *unde contracertanti lusori cedit reliquum* $\frac{25}{36} a$, *adeo ut sors utriusque sive aestimatio expectationis eam servet rationem quam* 11 *ad* 25. [2]) Ein Abdruck der sehr selten gewordenen Schrift erschien 1879 als Festgabe zum 100jährigen Jubiläum der *Wiskunig Genootschap te Amsterdam*. [3]) *Dictionary of national biography* (London 1890) XXII, 427—428.

hältnisse von 1068 : 1000 aus über 32 Jahre sich erstreckenden Beobachtungen gefolgert worden sein[1]).

Die Besprechung solcher Untersuchungen, welche an das Gebiet der algebraischen Analysis anstreifen, führt uns weiter zur Erfindung der Kettenbrüche.

Wir haben Pietro Antonio Cataldi als einen der Schriftsteller genannt (S. 596), welche ihre Stimmen gegen Scaliger erhoben, als er behauptete, die Kreisquadratur gefunden zu haben. Wir hätten ihn noch bei verschiedenen anderen Gelegenheiten nennen können, denn er war ein fruchtbarer Schriftsteller, wie ein beliebter Lehrer[2]). Schon 1563 war Cataldi Professor in Florenz; 1572 lehrte er in Perugia; 1584 trat er in den Verband der Universität Bologna, welchem er bis zu seinem Tode 1626 angehörte. Ueber 30 Schriften werden von ihm genannt. Die letzte, eine Vertheidigung Euklid's aus seinem Todesjahre 1626, muss er, da er die Florenzer Professur nicht leicht früher als mit 20 Jahren inne gehabt haben kann, in einem Alter von mindestens 83 Jahren geschrieben haben. Die erste Veröffentlichung Cataldi's ist aus dem Jahre 1572. Eine *Pratica aritmetica* hat er zwar mit 17 Jahren verfasst, aber ihr erster Theil kam erst 1602 unter dem aus Pietro Antonio umgestellten Pseudonym Perito Annotio im Drucke heraus, während der zweite Theil unter Cataldi's vollem Namen 1606 folgte. Die erste Schrift, welche Cataldi in Bologna vollendete, war eine Abhandlung über vollkommene Zahlen vom Jahre 1588. Das Manuscript kam ihm aber abhanden, und er war genöthigt, die ganze Arbeit neu zu vollenden, so dass der Druck erst 1603 erfolgen konnte. Aus dem gleichen Jahre ist eine Schrift über das Parallelenaxiom, *Operetta delle linee rette equidistanti*, welches auf einem Trugschlusse beruhen soll. Die Parallellinien werden darin als Linien gleichbleibenden Abstandes erklärt, eine Erklärung, welche Petrus Ramus wieder in die Geometrie eingeführt zu haben scheint, nachdem Posidonius (von Rhodos?) sie im Wesentlichen schon ausgesprochen hatte[3]). Fernere geometrische Schriften sind eine angenäherte Kreisquadratur von 1612, eine gegen Scaliger gerichtete Vertheidigung der Kreismessung Archimed's von 1620, eine Abhandlung über Dürer's Construction des regelmässigen Fünfecks gleichfalls von 1620, eine dreibändige Euklidausgabe von 1620—1625. Von diesen Schriften hätten wir die über vollkommene Zahlen dem 76. Kapitel aufsparen, die übrigen, wie gesagt, schon früher erwähnen müssen, wenn nicht nach dem uns vorliegenden

[1]) Moser, Die Gesetze der Lebensdauer (Berlin 1839), S. 210. [2]) Libri IV, 87—97. [3]) Proclus (ed. Friedlein), pag. 176 lin. 6—10.

Berichte deren Menge über ihren inneren Gehalt das Uebergewicht besessen zu haben schiene. Wir beschäftigen uns genauer nur mit einer 1613 gedruckten Abhandlung Cataldi's: *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*[1] (S. 623), weil in ihr eine Quadratwurzelausziehung mittels eines unendlichen Kettenbruches gelehrt ist. Zunächst ist allerdings ein anderer Weg eingeschlagen. Ist eine Zahl $N = a^2 + b$, und soll $\sqrt{N}$ ermittelt werden, so ist in erster Annäherung $\sqrt{N} \backsim a$ zu klein, in zweiter Annäherung $\sqrt{N} \backsim a + \frac{b}{2a} = A$ zu gross. Wird $A^2 - N$ gebildet und durch $2A$ getheilt, etwa $\frac{A^2 - N}{2A} = B$ gesetzt, so ist eine neue Annäherung $\sqrt{N} \backsim A - B$ wieder zu gross. Man kann sich unter Einsetzung der Werthe der einzelnen Buchstaben überzeugen, dass $(A - B)^2 = N + \frac{b^4}{16a^2(4a^2N + b^2)}$. Setzt man ferner $\frac{B^2 - N}{2B} = C$ und wählt $\sqrt{N} \backsim B - C$ als weitere Annäherung, so wird auch diese zu gross, wenn auch wieder dem wahren Werthe $\sqrt{N}$ beträchtlich näher kommend, und in ähnlicher Weise kann man fortfahren, immer andere Wurzelwerthe sich zu verschaffen, welche zwei Eigenschaften mit einander gemein haben: immer über dem wahren Werthe zu liegen und demselben näher und näher zu kommen. Einen allgemeinen Beweis führt Cataldi nicht und kann er nicht führen, weil er keiner allgemeinen Buchstaben sich bedient, sondern nur mit bestimmten Zahlenwerthen rechnet. Bestimmte Zahlenwerthe sind es auch wieder, mit denen allein er sich befasst, wo er die Kettenbruchmethode lehrt. In allgemeiner Darstellung ist sein Verfahren folgendes. Ist $\sqrt{a^2 + b} = a + x$, so ist $b = (2a + x)x$, $x = \frac{b}{2a + x}$ und folglich

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}$$

also beispielsweise

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cdots}}.$$

Die Schreibweise Cataldi's sieht fast genau so aus[2]), Cataldi schreibt nämlich zuerst

---

[1]) Libri IV, 92 Note 1 und 93 Note 1. — Favaro, *Notizie storiche sulle frazioni continue* im *Bulletino Boncompagni* VII, 534—547. [2]) Favaro l. c. pag. 535 hat die Stelle aus pag. 70—71 von Cataldi, *Trattato del modo brevissimo etc.* zum Abdrucke gebracht.

$$4 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8}}}$$

Er sagt aber dann, im Drucke sei ein so geformter Ausdruck schwer wiederzugeben, desshalb ziehe er vor, künftig $4 \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \frac{2}{8}$ setzen zu lassen, wo das Pünktchen, welches hinter der als Nenner auftretenden 8 stehe, die Bedeutung habe, der nächstfolgende Bruch solle ein gebrochener Theil eben dieses Nenners sein[1]). Dass Cataldi in Bologna die Algebra Bombelli's kennen lernen konnte, wenn nicht kennen lernen musste, und dass er in ihr die Anregung zu seinem Verfahren finden konnte (S. 622), ist nicht zu bezweifeln. Nicht weniger unzweifelhaft ist aber der ungeheure formale Fortschritt von Bombelli zu Cataldi bei einem Gegenstande, dessen Hauptvorzug gerade in der Form liegt.

Der nächste Schriftsteller, bei welchem Kettenbrüche sich finden, war Daniel Schwenter. Seine *Geometria practica* von 1618 ist uns schon bekannt geworden und bekannt auch, dass er in derselben der Kettenbrüche sich bediente, um gewisse Verhältnisse in kleineren Zahlen auszudrücken. Darauf haben wir jetzt genauer zurückzukommen[2]). „Wie man aber zwo grosse Zahlen, sagt Schwenter[3]), so numeri primi und Arithmetice nicht können auffgehebt werden, dem Gebrauch nach, kleiner machen soll, seynd bei den Logisticis und Rechenmeistern viel feine Regeln zu finden. Die beste, geheimeste und künstlichste will ich hierher setzen. Ich soll die zwo Zahlen 233 und 177, als welche für sich numeri primi, oder aber die Proportion $\frac{177}{233}$ in kleineren Zahlen Mechanice aussprechen: So mache ich nun folgende Disposition oder Ordnung. Wann nun ordentlich hierinnen verfahren, finde ich, aus gemeldter Tafel, dass ich für $\frac{177}{233}$ nehmen kann $\frac{79}{104}$ oder $\frac{19}{25}$ oder endlich $\frac{3}{4}$, welches denn eine sehr nützliche Regel zu diesem unserm Messen.“ Schwenter fügt hinzu, er habe aus gewissen Gründen in der ersten Auflage (das war 1618) sich begnügt, das Ergebniss anzusetzen, ohne zu enthüllen, wie er dazu gelangt sei; jetzt wolle er Alles auseinandersetzen. Nun folgt eine Figur, deren Entstehung er beschreibt:

---

[1]) *faciendo un punto all' 8 denominatore di ciascun rotto, a significare, che il sequente rotto e rotto d'esso denominatore.* [2]) Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, S. 7—11 (Weissenburg 1872). [3]) Schwenter, *Geometria practica* (III. Auflage von 1641), S. 68 des zweiten Tractates.

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	79	104
0	0	177	233

Zuerst werde in dem Felde links 233 und darunter, aber durch einen Strich getrennt, 177 angeschrieben. In dem mittleren Felde auf dessen rechter Seite wird „hinter die grösste Zahl, als hie 233, allzeit 1, hinter die kleiner, als hie 177, allzeit 0“ geschrieben. Nun dividire man: 177 in 233 gehe 1 mal, Rest 56, desshalb stehe 56 unter 177 und 1 dicht neben 177;' 56 in 177 gehe 3 mal, Rest 9, von diesen Zahlen stehe 3 neben, 9 unter 56; 9 in 56 gehe 6 mal mit dem Reste 2; 2 in 9 gehe 4 mal mit dem Reste 1; 1 in 2 gehe 2 mal mit dem Reste 0. Alle diese Zahlen finden ihren gleichmässigen Platz, die Quotienten neben, die Reste unter den jedesmaligen Divisoren. Neben dem letzten Reste 0, der wieder durch einen Horizontalstrich von den über ihm befindlichen Zahlen getrennt ist, erscheint eine zweite 0. Nunmehr geht es an die Bildung der im mittleren Felde auf der rechten Seite befindlichen Zahlen, deren beide obersten 1 und 0 durch einen Horizontalstrich von einander getrennt schon vorhanden sind. Jede Zahl wird mit ihrer linken Nachbarzahl des gleichen Mittelfeldes vervielfacht, die über ihr stehende Zahl hinzuaddirt, die Summe darunter gesetzt; also

$$1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 3 \cdot 1 + 0 = 3, \quad 6 \cdot 3 + 1 = 19, \quad 4 \cdot 19 + 3 = 79,$$
$$2 \cdot 79 + 19 = 177.$$

Das letzte Feld rechter Hand, in dessen oberste Sonderabtheilung man 1, 0 unter einander schreibt, wird in ganz ähnlicher Weise gefüllt. Multiplicatoren sind wieder die linksstehenden Zahlen des Mittelfeldes, vor deren Benutzung aber die in der oberen Sonderabtheilung des Mittelfeldes allein stehende 1 in Anwendung tritt. Die Zahlenbidung ist mithin

$$1 \cdot 0 + 1 = 1, \quad 1 \cdot 1 + 0 = 1, \quad 3 \cdot 1 + 1 = 4, \quad 6 \cdot 4 + 1 = 25,$$
$$4 \cdot 25 + 4 = 104, \quad 2 \cdot 104 + 25 = 233,$$

und diese letzte Zahl ist abermals durch einen Horizontalstrich von der ihr vorhergehenden 104 getrennt. Die Zahlen rechts im Mittelfelde und die gleicher Zeile im letzten Felde rechts stehen in nahezu gleichem Verhältnisse und geben von unten nach oben die Brüche

$\frac{177}{233}, \frac{79}{104}, \frac{19}{25}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}$. Deutlich genug ist diese Beschreibung Schwenter's der Kettenbruchentwickelung

$$\frac{177}{233} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}},$$

und von besonderer Geschicklichkeit zeigt die Einführung des Näherungswerthes $\frac{0}{1}$ zur bequemeren Fortsetzung des einmal begonnenen Rechnungsverfahrens bei Bildung der Näherungswerthe. Dass ein eigentlicher Beweis fehlt, wird man Schwenter kaum verübeln.

Schwenter starb 1636, und noch in dem gleichen Jahre gaben seine „hinterlassenen Söhne und Töchter", wie die Unterschrift eines an Herzog August zu Braunschweig und Lüneburg gerichteten Widmungsschreibens besagt, eine Sammlung unter dem Titel *Deliciae physico-mathematicae oder Mathematische und philosophische Erquickstunden* heraus, deren wir bald wiederholt gedenken müssen. Für den Augenblick haben wir es nur mit der 87. Aufgabe des I. Theils dieser Erquickstunden zu thun[1]), in welcher unter Berufung auf die Geometrica practica ebendieselbe Aufgabe wie dort behandelt ist, nämlich Näherungswerthe für den Bruch $\frac{177}{233}$ in kleineren Zahlen ausfindig zu machen. Die Methode ist die gleiche geblieben, ein Beweis findet sich auch hier nicht, aber eine wesentliche Zwischenbemerkung hat Schwenter über die Art der Annäherung eingeschaltet: „je weiter man von dem untersten hinaufsteiget, je mehr es fehlet. Zum Exempel $\frac{79}{104}$ seynd näher bei $\frac{177}{233}$ als $\frac{19}{25}$, und $\frac{19}{25}$ näher als $\frac{3}{4}$ und so fortan."

Schwenter und Cataldi, das kann man wohl mit voller Sicherheit behaupten, waren unabhängig von einander zur Erfindung der Kettenbrüche gelangt, denn hätte Schwenter von Cataldi's Wurzelausziehungsmethode Kenntniss gehabt, so hätte er sie zweifellos mitgetheilt, und ohne diese Methode gab es für Cataldi keine Kettenbrüche. Noch ein dritter, jedenfalls nicht minder unabhängiger Erfinder der Kettenbrüche trat in England auf. Es war Lord Brouncker[2]) (etwa 1620—1684), ein eifriger Anhänger der Monarchie und nach deren Wiederherstellung Kanzler und Grosssiegelbewahrer Karl II., in wissenschaftlicher Beziehung hochverdient um die Begründung der Royal Society, deren erster Vorsitzender er war. Zu den Freunden Brouncker's gehörte John Wallis (1616—1703), gleichfalls in nahen Beziehungen zu König Karl II. als dessen Kaplan stehend, und eines

---

[1]) Erquickstunden, S. 111—113. [2]) Poggendorff I, 309.

der ersten Mitglieder der Royal Society. In dessen *Arithmetica infinitorum* von 1659 war nun eine später nach dem Erfinder benannte Darstellung von π als Product unendlich vieler Factoren veröffentlicht, auf welche wir in anderem Zusammenhange zurückkommen. Wallis selbst war bei der ganz ungewohnten Form des von ihm gegebenen Ausdruckes seiner Sache nicht ganz sicher. Er legte seine Entwickelung Lord Brouncker vor, und dieser brachte das Product $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots$ in die Form des Kettenbruches

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}.$$

Wie Lord Brouncker diese Umwandlung vollzogen hat, ist nicht bekannt.

Ein von Wallis gegebener Beweis ist derart gekünstelt, dass man unmöglich annehmen kann, die Erfindung sei auf einem ihm entsprechenden Wege gemacht worden[1]). Dagegen ist aus dem von Wallis Entwickelten deutlich zu erkennen, dass ihm die Bildungsweise der aufeinander folgenden Näherungswerthe $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$ des Kettenbruches

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots+\cfrac{b_n}{a_n}}}$$

nicht minder gut bekannt war, als sie Schwenter in dem besonderen Falle $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ zu Gebote stand. Mit anderen Worten, wir müssen für Wallis die Kenntniss der Formeln

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

beanspruchen.

Auch Christian Huygens nimmt in der Geschichte der Kettenbrüche einen ehrenvollen Platz ein; aber was er auf diesem Gebiete leistete, ist erst in seiner *Descriptio automati planetarii* 1703 veröffentlicht worden und entzieht sich dadurch unserer Besprechung.

Wir haben zugesagt, auf Schwenter's Mathematische Erquickstunden zurückzukommen; wir haben früher eine Besprechung gewisser Aufgabensammlungen in Aussicht gestellt. Beide Zusagen werden gemeinsam erfüllt.

Dass in allen Werken, welche der Arithmetik und der Algebra,

---

[1]) Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen (Tübingen 1889), S. 14.

so weit sie in den einzelnen Zeiträumen schon vorhanden gewesen ist, gewidmet waren, stets ein Hauptgewicht auf zahlreiche Beispiele gelegt wurde, zeigt ein Blick in die Geschichte fast jedes Jahrhunderts, von welchem in diesem Bande die Rede war, und um so deutlicher, je weiter man gegen rückwärts blättert. Im XV. Jahrhunderte wurden besondere Sammlungen von Aufgaben angelegt, wie die aus Pamiers und die, welche dem Triparty folgt (S. 359). Anderwärts fand dieses Beispiel noch keine Nachahmung, noch weniger aber begnügte man sich mit der alten Form der Lehrbücher, welche man fast beschreiben könnte als Aufgaben mit darangeknüpften Erörterungen. Je mehr die Theorie sich vordrängte, um so mehr wurden die Lehrbücher zu Erörterungen mit als Beispiele dienenden Aufgaben. Im XVII. Jahrhunderte spaltete sich vollends das bisher Verbundene. Das Lehrbuch warf die Menge der Aufgaben als einen nicht an und für sich, aber für das Lehrbuch unnützen Ballast bei Seite und dafür erschienen wieder eigene Sammlungen von Aufgaben, in denen die Theorie kaum vorgetragen war, und die ihr Bestreben darauf richteten, die Aufgaben recht anmuthig und ergötzlich zu gestalten, den Lesern diese Eigenschaft auch im Titel so verlockend als möglich anzupreisen.

Der erste Schriftsteller, welcher dieses bald von Anderen befolgte Beispiel gab, war ein Franzose Claude Gaspard Bachet de Méziriac, der Herausgeber des Diophant im griechischen Urtexte (S. 655), welcher 1612 seine *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* dem Drucke übergab. Diesen folgte erst der Diophant 1621 und eine zweite Ausgabe der Problèmes plaisants 1624. Von deren ersten Ausgabe scheint kein einziges Exemplar mehr nachweisbar zu sein. Auch Exemplare der zweiten Auflage gehören zu den grössten Seltenheiten französischer Büchersammlungen, und es war ein, wie der Erfolg gezeigt hat, glücklicher Gedanke, in neuester Zeit weitere Auflagen des alten Werkes zu veranstalten[1]). Die Vorrede zur zweiten Auflage beginnt mit einer Erklärung Bachet's, welcher wir entnahmen, was wir über den Zweck des Titels *Problèmes plaisants* gesagt haben. „Elf Jahre, heisst es in jener Vorrede weiter, sind seit der ersten Druckgebung dieses Buches verflossen. Ich wollte es ans Licht bringen, ebensowohl um meine Kräfte zu versuchen, als um zu sondiren, wie man meine Leistungen beurtheilen werde, und damit es als Vorläufer zu meinem Diophant diene. Das kleine Werk ist von den hervorragendsten Geistern Frankreichs günstig aufgenommen worden; mit des Himmels Hilfe ist Diophant im Erscheinen

---

[1]) Einer 3. Auflage folgten rasch eine 4. und 5. Letztere von 1884 ist bezeichnet als *Cinquieme édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne.*

begriffen; es will mir daher scheinen, als könnte ich mit grösserer Zuversicht das Buch neuerdings veröffentlichen und mir eine gute Aufnahme desselben versprechen, da es in vollkommnerem Zustande erscheint als vordem." Worin die Vervollkommnung bestehe, spricht Bachet immer in ebenderselben Vorrede an einer etwas späteren Stelle aus: Fehler seien in geringerer Anzahl vorhanden, mehrere neue Aufgaben seien hinzugefügt, der Beweis, der zu dem 6. (in der früheren Ausgabe 5.) Probleme gehöre, sei vervollständigt. Ueberdies, meint Bachet, seien Dinge, wie sie in seinem Buche vorkommen, keineswegs ohne Nutzen, und beispielsweise erzählt er nun die Geschichte von Josephus, der nach der Einnahme von Jerusalem sein Leben rettete, indem er von einer Anordnung der mit ihm in einer Höhle eingeschlossenen Gefährten Gebrauch machte, welche dem Gedanken nach mit der von uns schon früher (S. 326 und 501) angeführten Aufgabe von den 15 Türken, welche mit 15 Christen auf einem Schiffe befindlich sind, während die Hälfte der Bemannung über Bord muss, übereinstimmt. Unter den von Bachet behandelten Aufgaben ist die der Zauberquadrate hervorzuheben, welche er nach einer Methode bildet, der der Name der Terrassenmethode beigelegt worden ist[1]). Am wichtigsten ist aber unzweifelhaft, wie Bachet selbst erkannte, jene 6. Aufgabe der zweiten Auflage. Sie ist eine zahlentheoretische und wird uns am Anfange des nächsten Kapitels beschäftigen. Jetzt haben wir noch von einigen Sammlungen zu sprechen, die in Nachahmung der Bachet'schen entstanden.

In dem gleichen Jahre 1624, welches die zweite Auflage von Bachet's Problèmes plaisants erscheinen sah, kam in Pont-à-Mousson ein Buch unter dem Titel *Récréations mathématiques* heraus. Als Verfasser nannte sich ein Van Etten. Es blieb aber nicht unbekannt, dass dieses nur ein Borgname war, und dass der Verfasser Jean Leurechon[2]) (etwa 1591—1670) hiess, ein Jesuit, welcher im Kloster seines Ordens in Bar-le-Duc in Lothringen Theologie, Philosophie und Mathematik lehrte. Leurechon hat in seine Sammlung die leichteren Aufgaben Bachet's übernommen, daneben eine Menge anderer Dinge, welche zum Theil aus Cardano's Büchern *De subtilitate* stammen mochten; an Bachet's wirklich werthvollen Kapiteln ist er vorbeigegangen.

Claude Mydorge gab 1630 im Anschlusse an die rasch verbreiteten Récréations ein *Examen du livre des récréations mathématiques et de ses problèmes* heraus, vielleicht etwas höher zu schätzen als das

---

[1]) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. [2]) Poggendorff I, 1438.

Buch, dessen Prüfung ausgesprochene Aufgabe war, aber den geometrischen Leistungen Mydorge's (S. 673) nicht ebenbürtig.

Leurechon's Buch kam auch nach Deutschland. Ein Gönner Schwenter's, wer es war, wissen wir nicht, schickte es ihm von Paris aus zum Geschenk. Schwenter, welcher in der Vorrede zu seinen Erquickstunden dieses erzählt, fügt hinzu, er sei der französischen Sprache nicht so mächtig gewesen, dass er sofort Alles verstanden hätte, aber der Inhalt habe an und für sich zum Verständniss der Sprache mitgeholfen, und sodann habe er Mühe und Kosten nicht gescheut, eine Persönlichkeit aufzufinden, welche des Französischen vollkommen kundig gewesen sei und ihn gegen Bezahlung beim Uebersetzen unterstützte. Anderes habe er lange Zeit vorbereitet und gesammelt gehabt und so sei endlich dieser Band zusammengekommen, der an Fülle des Inhaltes mit jenem französischen Musterwerkchen gar nicht mehr verglichen werden könne. Dass diese Behauptung Schwenter's nicht auf Ruhmredigkeit sich zurückführt, beweisen die 574 Druckseiten der Mathematischen Erquickstunden, beweisen Berufungen auch auf solche Werke, welche in hebräischer Sprache verfasst nur einem so gewandten Orientalisten, wie Schwenter es war, sich erschlossen, beweisen ihm eigene Untersuchungen, von welchen wir die über Kettenbrüche oben erörtert haben. Auch von den aus hebräischen Vorlagen stammenden Dingen wollen wir wenigstens ein Beispiel geben. Die Aufgabe von den 30 Menschen, welche so geschickt geordnet werden müssen, dass ein gewisses Abzählen eine zum voraus bestimmte Hälfte derselben dem Tode weiht, während die Anderen gerettet sind, und der Beziehung dieser Aufgabe zu Josephus haben wir wiederholt gedacht. Bei Schwenter tritt sie gleichfalls auf[1]). Auch ihr Vorkommen bei Christoph Rudolff, bei Leurechon wird erwähnt, die Stelle des Josephus wieder angeführt. Ueberdies aber ist eine älteste Quelle der Aufgabe als solcher genannt, welche Schwenter aufgestöbert habe. Elias Levita der Deutsche[2]) (1472—1549) verfasste ein 1518 in Rom gedrucktes Buch *Haharkava*, Abhandlungen über gemischte unregelmässige Sprachformen. Dort sei Ibn Esra als Erfinder des Kunststückchens genannt, welches er im Buche der Thaten beschrieben habe[3]). Die 30 zu ordnenden Leute sind dort zur Hälfte Ibn Esra's Schüler, zur Hälfte leichtfertige Gesellen. Ob das angeführte Buch der Thaten wirklich von Ibn Esra herrührt, ist eine andere, hier und für uns ziemlich gleichgiltige Frage. Sicher ist, dass ein sogenanntes „Maser-

[1]) Mathematische Erquickstunden S. 79—82. [2]) Allgem. deutsche Biographie XVIII, 505—507, Artikel von Ludw. Geiger. [3]) Vergl. auch Steinschneider in der Zeitschr. Math. Phys. XXV, Supplementheft S. 123—124.

Buch" mehrfach vorkommt und Erzählungen mannigfacher Art von und über jüdische Gelehrte enthält[1]). Sicher ist aber auch, dass Ibn Esra (1093—1168) nicht der Erfinder des Kunststückchens sein kann, da es mit der für dessen Ausführung zu benutzenden Regel schon in einer Handschrift des X. Jahrhunderts sich vorfindet[2]). Spätere Vorkommen gehören dem XI. Jahrhunderte u. s. w. an[3]).

Schwenter's Buch fand rasch Nachahmung und Erweiterung durch Georg Philipp Harsdörfer[4]) (1607—1658), einen Nürnberger Rathsherrn und vielseitigen, auch einflussreichen Schriftsteller, der sich besonders durch acht Bände Gesprächsspiele (1642—1649) und durch die Gründung des Blumenordens an der Pegnitz (1644) in weiten Kreisen bekannt gemacht hat. Er gab 1651 und 1653 zwei Bände Fortsetzungen zu den Erquickstunden heraus, aus welchen der Mathematiker allerdings Erquickliches kaum zu melden hat. Harsdörfer war offenbar bei riesiger allgemeiner Belesenheit in der Mathematik am wenigsten bewandert, und was geometrisch interessant bei ihm auftritt, dürfte sicherlich nicht sein Eigenthum sein, wenn wir auch nicht überall seine Quelle nachzuweisen vermögen.

Mit dieser Fortsetzung blieb Schwenter's Buch Jahre lang das vollständigste seiner Art, dann liefen ihm 1697, also wieder zu einer Zeit, welche uns näheres Eingehen verbietet, die *Récréations mathématiques* von Jaques Ozanam den Rang ab. Es bedürfte der Untersuchung, ob Ozanam mit Wahrscheinlichkeit die Erquickstunden kannte und benutzte, oder nicht. Genannt hat er sie jedenfalls nicht.

Ob und in wie weit die drei Bände Apiaria universae philosophiae mathematicae in quibus paradoxa et nova pleraque machinamenta exhibentur, welche der italienische Jesuit Mario Bettini[5]) (1582—1657) in den Jahren 1641—1642 herausgab, und deren dritter Band 1660 unter dem Namen Recreationum mathematicarum Apiaria XII novissima neu aufgelegt wurde, als ein durchaus selbständiges Werk betrachtet werden müssen, wissen wir nicht. Harsdörfer hat es jedenfalls ausgenutzt.

Der 1665 in Schleswig gedruckte Arithmetische Lustgarten von Johann Mohr[6]) dürfte dagegen sicherlich eine Nachahmung Schwenter's sein.

---

[1]) Private Mittheilung von Hrn. Herm. Schapira. [2]) Curtze in der *Biblioth. mathem.* 1895, S. 34—36. [3]) Curtze ebenda 1894, S. 116 und Zeitschr. Math. Phys. XL, Supplementheft S. 112 Note (1895). [4]) Allgem. deutsche Biographie X, 644—646. Artikel von W. Creizenach. Dann besonders K. Rudel in der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens (Nürnberg 1894), S. 301—403 über Harsdörfer als Physiker, Mechaniker u. s. w. [5]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I. Sammlung, S. 25—27. — Poggendorff I, 179. [6]) Poggendorff II, 170.

76. Kapitel.

Zahlentheorie. Algebra.

Zahlentheoretische Untersuchungen mannigfacher Art waren niemals ganz ausser Uebung gekommen, aber wesentlich Neues hatten sie weder nach der Richtung gebracht, dass die seit altgriechischer Zeit vorhandenen Gattungen von Aufgaben vermehrt worden wären, noch nach der Richtung, dass neue Methoden Anwendung gefunden hätten. Wenn Cataldi 1603 über vollkommene Zahlen schrieb (S. 761) und eine Divisorentabelle der Zahlen bis 1000 beigab, so ist darin wieder nichts Neues zu finden. Die Schrift hätte mehrere Jahrhunderte früher genau ebenso verfasst werden können. Das Gleiche gilt von der Tabelle mit den Primzahlen unterhalb 10000, gilt beinahe auch von der Abhandlung über befreundete Zahlen, welche der jüngere Franciscus van Schooten 1657 in seinen Exercitationes mathematicae drucken liess.

Ausserhalb der längst und wiederholt betretenen Pfade liegt die *Mathesis biceps vetus et nova*, welche 1670 ein gelehrter Bischof Johann Caramuel y Lobkowitz[1]) (1606—1682) veröffentlichte, und die wir bei der geringfügigen Zeitüberschreitung von zwei Jahren, deren wir uns dabei schuldig machen, noch in diesem Bande erwähnen. Caramuel trennte den Gedanken eines Zahlensystems überhaupt von dem auf der Grundzahl 10 sich aufbauenden decadischen System; er beschrieb vielmehr solche Systeme, deren Grundzahlen sämmtliche Zahlen von 2 bis zur 10 einschliesslich und überdies 12 und 60 sind. Im 2. Bande des umfangreichen Werkes ist ein besonderer Abschnitt der Combinatorik gewidmet, und in diesem heisst ein Kapitel *Kybeia*. Es enthält ziemlich unbedeutende Untersuchungen über das Würfelspiel[2]).

Vollends neue Bahnen eröffnete der Mann, welcher 1621 erstmalig den griechischen Diophant im Drucke herausgab: Bachet de Méziriac. Unter dem vollen Eindrucke des gewaltigen Virtuosen in der Kunst der unbestimmten Analytik (Bd. I, S. 448) stehend hat Bachet häufig Erörterungen und Zusätze eingestreut, welche den Werth der Ausgabe um ein Beträchtliches erhöhten. Am wichtigsten ist der Zusatz[3]) zu der Aufgabe IV, 41 des Diophant. Sein Inhalt ist

---

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 943—944. — Quetelet pag. 225—226. — Allgem. deutsche Biographie III, 778—781. Artikel von Stieve. [2]) Briefliche Mittheilung von H. Ambr. Sturm. [3]) In der II. Ausgabe (Toulouse 1670) auf pag. 194—198 abgedruckt.

unter Anwendung von Bezeichnungen, deren Bachet sich freilich nicht bediente, die aber dem heutigen Leser am geläufigsten sind, folgender. Die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 41 \quad \text{und} \quad 4x + 3y + \frac{1}{3}z = 40$$

sollen erfüllt werden. Wenn $3y + \frac{1}{3}z = 40 - 4x$, so ist

$$9y + z = 120 - 12x.$$

Daneben ist $y + z = 41 - x$, also mittels Subtraction

$$8y = 79 - 11x \quad \text{d. h.} \quad y = 9\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}x$$

und

$$z = 41 - x - y = 31\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x.$$

Jede Wahl von x würde daher Werthe von y und z finden lassen, welche mit x zusammen die beiden Gleichungen erfüllen. Nun verlangt Bachet nicht bloss positive Werthe für x, y, z, sondern hierin über Diophant hinausgehend auch ganzzahlige Werthe. In erster Linie muss also $9\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}x$ positiv sein, d. h. $x < \frac{9\frac{7}{8}}{1\frac{3}{8}}$ oder $x < 7\frac{2}{11}$. Für x stehen daher die Möglichkeiten der Werthe $x = 1$ bis $x = 7$ zur Verfügung. Dabei soll auch $31\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x$ ganzzahlig, mithin $1 + 3x$ durch 8 theilbar sein, und dieses Verlangen wird durch $x = 5$ erfüllt. So findet Bachet $x = 5$, $y = 3$, $z = 33$. Die Auffindung von $x = 5$ gelingt freilich nur durch versuchsweise Anwendung der in Frage kommenden möglichen Werthe, und insofern ist das Verfahren zweifellos recht langwierig, aber immerhin ist so eine Methode vorhanden zur Auflösung einer der Hauptsache nach neuen Aufgabe, denn — wir wiederholen es — in Europa ist vor Bachet niemals mit gleicher Bestimmtheit wie von ihm darauf abgehoben worden, dass es ausschliesslich um ganzzahlige positive Auflösungen der unbestimmten Aufgabe sich handle.

Dieser Zusatz in der Diophantausgabe war für Bachet nicht die erste, nicht die letzte Gelegenheit, sich über unbestimmte Aufgaben ersten Grades auszusprechen. Schon in den *Problèmes plaisants et délectables* von 1612 war in der 5. Aufgabe die Behauptung enthalten, man könne stets ein kleinstes ganzes Vielfaches einer gegebenen Zahl finden, welches ein ganzes Vielfaches einer zweiten gegebenen Zahl um eine dritte gegebene Zahl übertreffe, vorausgesetzt, dass die beiden ersten gegebenen Zahlen theilerfremd seien. In der zweiten Auflage der Sammlung

von 1624 ist die 5. Aufgabe zur 6. geworden, die blosse Behauptung zu einem bewiesenen Lehrsatze, und zum Zwecke des Beweises hat Bachet aus einem anderen Werke *Eléments d'arithmétique*, welches er noch herausgeben wollte, aber niemals herausgegeben zu haben scheint, etwa zehn Sätze entnommen und hier eingeschaltet[1]). Darunter war der für jede wissenschaftliche Zahlentheorie grundlegende Satz, dass, wenn $a, b, c \ldots$ unter einander theilerfremde Zahlen sind, und M deren Product $abc \ldots$ bedeutet, wenn überdies n_1 und n_2 Zahlen unterhalb M sind, welche der Reihe nach durch $a, b, c \ldots$ dividirt die Reste $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ beziehungsweise $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots$ übrig lassen, das System der ersten Reste mit dem der zweiten nicht in Uebereinstimmung sein kann.

Bachet's Diophant übte durch seine eigenen Zusätze bereichert eine um so mächtigere Wirkung aus, und insbesondere war es Pierre de Fermat, welcher im Besitze eines Exemplars dieses Werkes die Blätter desselben mit Randbemerkungen füllte, welche dann später 1670 in einer neuen, durch Fermat's Sohn besorgten Diophantausgabe ihren Abdruck fanden. Andere zahlentheoretische Sätze Fermat's wurden in den *Opera varia* veröffentlicht, deren Druck gleichfalls der Sohn überwachte, noch Anderes steht in dem *Commercium epistolicum*, welchen John Wallis 1658 herausgab[2]). Eine Frage, deren Beantwortung schwierig, wenn nicht unmöglich ist, betrifft die Randbemerkungen zum Diophant. Was war Fermat's Absicht, als er sie niederschrieb? Dachte er an den Druck einer neuen Ausgabe, wie sie wirklich nach seinem Tode veranstaltet wurde, oder machte er nur zum eigenen Gebrauche flüchtige Aufzeichnungen über das, was ihm beim Studium auffiel, und was künftigen Arbeiten als Gegenstand dienen sollte? Im zweiten Falle wären gewisse Aeusserungen über von Fermat besessene Beweise nicht haarscharf zu nehmen. Welcher Mathematiker hätte sich bei ganz neuen Untersuchungen nicht schon getäuscht und Beweise für streng und vollwichtig gehalten, die später, wenn sie der Oeffentlichkeit übergeben werden sollten, sich als allzuleicht erwiesen? Im ersteren Falle hätte man dagegen bei dem Lakonismus jener ebenerwähnten Aeusserungen an ein absichtliches Schweigen zu denken, welches vielleicht die neue Ausgabe mit einem Reize mehr versehen sollte, und welches zu brechen Fermat sich vorbehielt, wann und wie es ihm beliebte, vielleicht richtiger gesagt wann und wie er der ihm angeborenen Scheu vor Ausarbeitungen

---

[1]) Vergl. die Vorrede von 1624, S. 10 des neuen Abdrucks. [2]) Der *Commercium epistolicum* ist auch in den Gesammtwerken von Wallis (Oxford 1695—1699) abgedruckt.

Herr zu werden vermochte. Jedenfalls fehlen uns die Beweise, von denen wir hier reden, und ebenso sicher ist, dass Fermat sie besessen hat oder besessen zu haben glaubte, da es sonst unbegreiflich wäre, dass er sie den Gelehrten, mit welchen er einen regen Briefwechsel zu führen pflegte, hie und da anbot. Unbegreiflich freilich ist es auch, dass dieses Anerbieten niemals angenommen wurde, wodurch der von uns betrauerte Verlust nirgend, wo es gelohnt hätte, abgewendet worden ist. Wir wollen nun einige der Fermat'schen Sätze in der Reihenfolge, in welcher sie in der Diophantausgabe von 1670 erschienen, angeben.

1. „Es ist ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrate in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu schmal, ihn zu fassen“ [1]). Dieser Satz, welchem seine zufällige Stellung als Randnote den ersten Platz in unserem Berichte anweist, ist zugleich der berühmteste von allen, welche die Wissenschaft Fermat verdankt. Wie es sich mit jenem wirklichen oder vermeintlichen Beweise Fermat's verhielt, gehört zu den unlösbaren Räthseln. Nur sehr allmälig ist es verschiedenen hervorragenden Zahlentheoretikern [2]) gelungen, die Wahrheit des Satzes festzustellen. Sie benutzten dazu Beweismittel, welche Fermat zuverlässig nicht in seiner Gewalt hatte. Im Februar 1877 tauchte zwar in italienischen Zeitungen die Nachricht auf, ein H. Paolo Gorini habe einen einfachen Beweis entdeckt, doch ist in die eigentliche Fachliteratur nichts gedrungen, so dass jene Mittheilung gleich so manchen ähnlichen aus verschiedenen Ländern und Zeiten auf Irrthum beruht haben dürfte. Ganz zweifellos ist auch nicht der Zeitpunkt, zu welchem Fermat seinem Satze die erwähnte Form gab [3]). Wahrscheinlich im September oder October 1636 schickte Fermat an Pater Mersenne eine Anzahl von Aufgaben, welche einem Herrn de Sainte-Croix vorgelegt werden sollten. Vermuthlich ist damit der Prior des Klosters von Ste. Croix gemeint, welcher mit seinem

---

[1]) Diophant (1670), pag. 61. Vergl. die deutsche Diophantübersetzung von G. Wertheim (Leipzig 1890), S. 52. Wir citiren künftig die griechische Ausgabe von 1670 einfach als: Diophant, die Wertheim'sche Uebersetzung als deutsch mit nachfolgender Seitenzahl. [2]) Euler, Dirichlet, Kummer. [3]) Für alle diese Zeitbestimmungen vergl. C. Henry, *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* im *Bulletino Boncompagni* T. XII. Wir citiren Henry mit der Seitenzahl des Sonderabdrucks und in Klammern die Stelle des *Bullet. Boncamp.* Ferner P. Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* im *Bulletin Darboux*. 2. Série, T. VII (1883). Wir citiren die Seitenzahl des Sonderabdrucks.

weltlichen Namen André Jumeau hiess[1]). Unter diesen Aufgaben findet sich schon diejenige, zwei Kuben zu finden, deren Summe ein Kubus oder zwei Biquadrate, deren Summe ein Biquadrat sei[2]), und es ist mehr als nur wahrscheinlich, dass Fermat damals schon wusste, dass er hier Unmögliches verlangte, und dass er nur, um die Aufgabe noch schwieriger zu gestalten, nicht geradezu den Beweis der Unmöglichkeit verlangte. Wann aber die Ausdehnung des Satzes auf die Unmöglichkeit von $x^n + y^n = z^n$ bei $n > 4$ erfolgte, ist ganz unbekannt.

2. „Eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist nur einmal Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, ihr Quadrat ist es zweimal, ihr Kubus dreimal, ihr Biquadrat viermal u. s w.“[3]). An einem Beispiele, etwa dem der Primzahl 5, erläutert sich dieser Satz folgendermassen:

$$5^2 = 3^2 + 4^2; \quad 25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2;$$
$$125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2.$$

Im unmittelbaren Anschlusse an diesen Satz behauptet Fermat weiter:

3. „Eine solche Primzahl und ihr Quadrat lassen sich nur einmal in zwei Quadrate zerfällen, ihr Kubus und ihr Biquadrat zweimal, ihr Quadratokubus und ihr Kubokubus dreimal u. s. w.“ Beispielsweise ist

$$5 = 1 + 4; \quad 25 = 9 + 16; \quad 125 = 4 + 121 = 25 + 100;$$
$$625 = 49 + 576 = 225 + 400 \text{ u. s. w.}$$

4. „Wir können eine Aufgabe lösen, welche Bachet unbekannt war, nämlich eine aus zwei Kuben zusammengesetzte Zahl in zwei andere Kuben zerlegen, und zwar ist das auf unendliche viele Weisen möglich“[4]).

5. „Ich habe sogar den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt, dass jede Zahl entweder eine Dreieckszahl oder die Summe von 2 oder 3 Dreieckszahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von 2, 3 oder 4 Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckszahl oder die Summe von 2, 3, 4 oder 5 Fünfeckszahlen ist, und dass weiter derselbe allgemeine Satz für Sechseckszahlen, Siebeneckszahlen, überhaupt beliebige Polygonalzahlen gilt. Den Beweis desselben, der aus vielen mannigfaltigen und ganz verborgenen Geheimnissen der Zahlen hergenommen wird, kann ich hier nicht beifügen. Ich habe nämlich vor, ein besonderes Werk diesem Gegenstande zu widmen und die Arithmetik in diesem Theile über die alten und bekannten Sätze hinaus in wunderbarer Weise zu erweitern“[5]). Der letzte Aus-

---

[1]) Henry pag. 23 (XII, 497). [2]) Tannery pag. 8. [3]) Diophant pag. 127 (deutsch 112). [4]) Ebenda pag. 133 (deutsch 119). [5]) Ebenda pag. 180—181 (deutsch 162).

spruch ist wieder einer von denen, auf welche man sich dafür berufen könnte, dass Fermat's Randnoten zum Diophant auf künftige Veröffentlichung als solche gemeint waren. Der Satz selbst ist in dem mittelbar für den Herrn von Sainte Croix bestimmten Briefe von 1636 aufgefunden worden[1]). Dieser scheint ihn alsdann Descartes mitgetheilt zu haben, welcher seinerseits wieder in einem Briefe an Mersenne vom 27. Juli 1638 ihn wiederholt, indem er ihn das Eigenthum des H. von Ste. Croix nennt[2]). Ganz klar ist die Sache nicht. Jedenfalls erscheint es wunderbar, dass Mersenne, welcher die erste Uebermittelung des merkwürdigen Satzes an den, welcher jetzt als Urheber gelten sollte, besorgt hatte, nicht für das Recht des eigentlichen Erfinders eintrat. Wieder 16 Jahre später, am 25. September 1654, theilte Fermat den Satz brieflich auch Pascal mit[3]). Der Beweis, sagte er, beruhe auf dem Satze von der Zerfällbarkeit jeder Primzahl von der Form $4n + 1$ in zwei Quadrate. Ist dieser Beweis schon gleich bei Erfindung des Satzes in Fermat's Besitz gewesen, und ist dessen versuchte Datirung richtig, so stammt demnach auch ein Theil mindestens des vorhin unter 3. angegebenen Satzes ebenfalls aus dem Jahre 1636.

6. „Ich kann allgemein die Aufgabe lösen, beliebig viele Zahlen von der Beschaffenheit zu ermitteln, dass das Quadrat einer jeden eine Quadratzahl bleibt, mag man nun die Summe aller Zahlen zu denselben addiren oder von denselben subtrahiren“[4]).

7. „Warum sucht aber Diophant nicht zwei Biquadrate, deren Summe ein Quadrat sei? Diese Aufgabe ist allerdings unmöglich, wie mein Beweisverfahren in aller Strenge darthun kann“[5]).

Diesen Auszügen aus den Randbemerkungen zu Diophant lassen wir solche aus Briefen Fermat's folgen.

8. Die beiden ältesten Untersuchungen auf zahlentheoretischem Gebiete, mit denen Fermat sich beschäftigte, betrafen Zauberquadrate und vollkommene Zahlen. Wohin sie führten, ist unbekannt. Die Briefe, in welchen jene Andeutungen vorhanden sind[6]), führen die Daten von April und Juni 1640. Die Zauberquadrate hat Fermat in den Problèmes plaisants Bachet's kennen gelernt, deren er in der Ausgabe von 1624 sich bediente; es sind mehr als zehn Jahre, dass er selbst sich eine Methode zur Herstellung solcher Quadrate bildete.

9. Unter dem 18. October 1640 schrieb Fermat[7]) an Frénicle,

---

[1]) Tannery pag. 7. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 112. [3]) Pascal III, 234. [4]) Diophant pag. 221 (deutsch 203). [5]) Ebenda pag. 258 (deutsch 248). [6]) Fermat, *Varia Opera* pag. 173 und 176. *Oeuvres* II, 189—197. — Henry pag. 48 (XII, 522). — Tannery pag. 9. [7]) Fermat, *Varia Opera* pag. 163. *Oeuvres* II, 209.

jede Primzahl theile unfehlbar den um die Einheit verminderten Betrag irgend einer Potenz einer beliebigen Zahl, und der Exponent jener Potenz, *l'exposant de ladite puissance*, sei selbst ein Theiler der um die Einheit verminderten Primzahl. Dieser Satz erhielt in den zahlentheoretischen Lehrbüchern unserer Gegenwart den Namen des Fermat'schen Satzes. In der Bezeichnung von Gauss wird er so geschrieben: $a^t \equiv 1 \pmod p$ und $p \equiv 1 \pmod t$.

10. Englischen Mathematikern legte Fermat 1657 die Doppelaufgabe vor, eine Kubikzahl zu finden, welche um ihre Untervielfache vermehrt zur Quadratzahl werde, eine Quadratzahl zu finden, deren Untervielfache sie zur Kubikzahl ergänzen[1]). Als Beispiel einer Auflösung der ersten Aufgabe wies er auf $7^3 = 343$ hin, weil

$$343 + 1 + 7 + 49 = 400 = 20^2.$$

11. Eine hochwichtige Aufgabe ist die der ganzzahligen Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$, wenn die nichtquadratische ganze Zahl a gegeben sei[2]). Fermat legte sie 1657 erst Frénicle vor, dann allen lebenden Mathematikern. Seine eigene Auflösung kennen wir, wie wir noch sehen werden, nur in ihren allerallgemeinsten Umrissen. In England fanden Wallis und Lord Brouncker gemeinsam ein sehr umständliches Verfahren, welches in dem Commercium epistolicum von 1658 veröffentlicht ist. Eine zweite Veröffentlichung erfolgte zehn Jahre später. John Pell hatte 1654—1658 als Resident Cromwell's in der Schweiz gelebt und war dort mit Johann Heinrich Rahn (1622—1676) bekannt geworden, welcher 1659 eine „Teutsche Algebra" herausgab. Pell vermittelte eine englische Uebersetzung dieses Buches durch Thomas Brancker, welche 1668 gedruckt wurde. Rahn's Name blieb aber auf dem Titelblatte weg und kommt nur in der Vorrede in der Form Rhonius vor. Pell, der die Uebersetzung veranlasst hatte, gab auch einige Zusätze, und unter diesen ist der wiederholte Abdruck der englischen Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$ zu finden, ein anderes Verdienst hat Pell sich um diese Aufgabe nicht erworben, und gleichwohl ist sie als Pell'sche Aufgabe bekannt geblieben.

12. Ein Satz hat Fermat[3]) wiederholt beschäftigt. Wahrscheinlich war er ihm schon 1637, dann sprach er ihn als sicher am 18. October 1640 aus, und ebenso in einem Briefe vom 29. August

---

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 188. *Oeuvres* II, 332. [2]) Ebenda, *Varia Opera* pag. 190. *Oeuvres* II, 333. — Tannery pag. 10. — Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. — Allgem. deutsche Biographie XXVII, 174—175. [3]) Fermat, *Varia Opera* pag. 162. — Pascal III, 232. — Tannery pag. 10.

1654 an Pascal. Der Wortlaut dieser letzteren Mittheilung verdient von einem gewissen Absatze an Beachtung. Der Satz selbst besteht darin, dass die fortgesetzte Quadrirung von 2 bei Vermehrung der betreffenden Potenzen um 1 lauter Primzahlen gebe, dass also $2^{2^k}+1$ immer Primzahl sei. Als Beispiele führt Fermat an: $2^2+1=5$, $2^4+1=17$, $2^8+1=257$, $2^{16}+1=65537$, und nun fügt er hinzu: „Es ist das eine Eigenschaft, für deren Wahrheit ich einstehe; der Beweis ist sehr unangenehm, und ich bekenne, dass ich ihn noch nicht vollständig zu erledigen im Stande war. Ich würde Ihnen nicht vorschlagen, einen Beweis zu suchen, wenn ich damit zu Stande gekommen wäre." Das Eigenthümliche besteht darin, dass der Satz irrig ist, und dass, wenn Fermat in seinen Beispielen um einen einzigen Schritt weiter gegangen wäre, er mit

$$2^{32}+1=4294967297=641 \quad 6700417$$

die erste zusammengesetzte Zahl jener vermeintlichen Primzahlenform vor sich gehabt hätte. Fermat hat also in seiner Behauptung sich getäuscht. Um so schärfer tritt neben der festen Ueberzeugung von der Richtigkeit des Satzes die offene Erklärung entgegen, es sei ihm nicht geglückt, einen zureichenden Beweis aufzufinden. Sie muss uns in der Ueberzeugung bestärken, dass Fermat, wenn er auch vielleicht etwas rasch zu Verallgemeinerungen geneigt war, doch eine einfache Induction nicht als Beweis anerkannte, dass er also, wo er von thatsächlich geführten Beweisen sprach, auch wirklich solche, die ihm tadellos erschienen, besessen haben muss.

Worin bestanden aber die zahlentheoretischen Methoden Fermat's? Er rühmte sich solcher schon sehr frühe. Schon am 16. December 1636 schrieb er an Roberval[1]): *Pour ce qui est des nombres et de leurs parties aliquotes j'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre, de quoy j'ai fait dessein d'écrire un petit traité.* Allein da diese Abhandlung über aliquote Theile, vermuthlich also auch über deren Summe, über vollkommene Zahlen und dergleichen nicht zu Stande kam, so kann sie über die in ihr zur Anwendung gebrachte allgemeine Methode keine Auskunft ertheilen. Etwas bessere Ausbeute gewährt ein Bruchstück, welches unter der Aufschrift *Relation des découvertes en la science des nombres* in der Leidener Bibliothek aufgefunden worden ist[2]). Fermat erklärt darin, er habe, da die in den Büchern gelehrten Methoden sich beim Beweise schwieriger Sätze als untauglich erwiesen, eine neue Methode erfunden, welche er *la descente infinie ou indefinie*, die unendliche

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 149. [2]) Henry pag. 213—216 (XII, 687—690).

oder unbegrenzte Abnahme nannte. Insbesondere bei Unmöglichkeitssätzen sei dieses Verfahren angebracht, z. B. bei dem Satze, dass es kein ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck gebe, dessen Fläche als Quadratzahl auftrete. Man könne nämlich beweisen, dass, falls ein solches Dreieck vorhanden sei, immer ein zweites in kleineren Zahlen die gleiche Eigenschaft besitze. Von diesem gelange man zu einem dritten, zu einem vierten u. s. w. ins Unendliche; unendlich viele ganze Zahlen von abnehmender Grösse gebe es aber nicht, also sei die erste Annahme unrichtig. Wie er den Beweis von der Möglichkeit eines solchen Dreiecks auf die eines kleineren führe, sage er hier nicht, denn einmal sei die Erörterung zu lang, und ferner liege gerade darin das Geheimniss seines Verfahrens, und er möchte gern, dass die Pascal, die Roberval und Andere, auf diese Andeutung gestützt, es ihm nacherfänden. Für den Beweis von bestimmten Behauptungen[1] sei die Methode zunächst nicht anwendbar gewesen, wie z. B. für den Beweis des Satzes, dass jede Primzahl von der Form $4n+1$ Summe zweier ganzzahligen Quadrate sei. Da habe er sich folgendermassen geholfen: er habe gezeigt, dass, wenn irgend eine Primzahl von der Form $4n+1$ nicht die Summe zweier ganzzahligen Quadrate wäre, es eine kleinere Primzahl von gleicher Form und gleicher Eigenschaft geben müsste. Bei fortwährender Verkleinerung müsse man aber endlich zur kleinsten Primzahl von der Form $4n+1$ d. h. zu 5 gelangen, welche alsdann auch nicht Summe zweier ganzzahligen Quadrate sein könnte, während doch $5 = 1^2 + 2^2$ ist. Aehnlicherweise habe er unter Anwendung neuer, mitunter sehr schwierig aufzufindender Grundgedanken noch andere Sätze unter die Methode der unendlichen Abnahme untergebracht. Dahin rechne er den Satz, an dessen Beweis Bachet und Descartes — letzterer nach brieflichen Aeusserungen — geradezu verzweifelten, dass jede Zahl Quadratzahl oder Summe von 2, 3, 4 Quadratzahlen sei, dahin auch die ganzzahlige Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$, so oft a keine Quadratzahl sei. Die Herren Frénicle und Wallis hätten allerdigs einige besondere Auflösungen dieser letzteren Aufgabe geliefert, aber nicht die allgemeine. Diese beruhe eben auf der Methode der unendlichen Abnahme, und nun möchten die Herren sich wiederholt daran versuchen[2]. Auch der Satz, dass kein Kubus die Summe zweier Kuben sei, gehöre unter das gleiche Beweisverfahren.

---

[1]) *questions affirmatives* im Gegensatze zu den vorher erwähnten *propositions négatives.* [2]) *ce que leur indique, afin qu'ils adjoustent la demonstration et construction generale du theoreme et du probleme aux solutions singulieres qu'ils ont donnees.*

An diesen Auszug aus Fermat's Angaben knüpft sich von selbst die Frage, woher Fermat die Anregung zur Erfindung seiner Methode der unendlichen Abnahme erhalten haben mag? Man wird kaum irre gehen, wenn man den letzten Zusatz des Campanus zu Euklid IX, 16 (S. 105) als die Quelle nennt, aus welcher Fermat schöpfte. War doch das Studium Euklid's und seiner Erklärer noch ein selbstverständliches, dem Jeder oblag, welcher für Mathematik Sinn hatte, und Fermat hat gewiss der allgemeinen Uebung sich nicht entzogen. Aber sein Verdienst wird durch das Vorhandensein dieses um 300 Jahre älteren Vorgängers um nichts geschmälert. In jenen 300 Jahren haben Tausende vor und gleichzeitig mit Fermat den Grundgedanken der Methode der unendlichen Abnahme genau so wie er kennen gelernt. Sie alle haben nicht eingesehen, welcher Ausdehnung die einmalige Anwendung des Gedankens durch Campanus fähig war, sie alle gingen achtlos vorüber, die Perle im Fruchthaufen verschmähend, bis Fermat sie entdeckte und ihr die richtige Fassung verlieh.

Eine zweite Frage, welche sich anknüpft, ist die nach dem Zwecke und der Verbreitungsart der *Relation des decouvertes en la science des nombres*. Die Vermuthung spricht dafür, dass sie in zahlreichen Abschriften umlief, dass neben derjenigen, die in Leiden sich erhielt, andere an die in ihr zum Nacheifern geradezu herausgeforderten Mathematiker gegangen sein müssen, dass jene Herausforderung den eigentlichen Zweck des denkwürdigen Schriftstückes bildete. Der Erfolg aber war Null. So wenig wir zweifeln, dass Pascal und Roberval, Frénicle und Wallis die Relation erhielten und studirten — Bachet und Descartes waren schon todt, als sie 1659 verbreitet wurde[1]) — ebenso gewiss ist es, dass diese Männer nichts herausstudirt haben. Fermat's Geheimniss ist sein Geheimniss geblieben lange über das Grab hinaus.

Ausser in der Relation hat Fermat noch an einer Stelle seines Verfahrens unendlicher Abnahme gedacht, allerdings ohne diese Wortverbindung zu gebrauchen. Das erste in der Relation angeführte Beispiel der Anwendung der unendlichen Abnahme war das von der Unmöglichkeit eines ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks mit einer Quadratzahl als Fläche. Diesen Satz kannte Fermat 1636, als er für den Herrn von Ste. Croix Aufgaben zusammenstellte, welche Unmögliches verlangten[2]), auf ihn kam er in seinen Diophantanmerkungen zurück[3]). Der letzte Satz des VI. Buches des Diophant hatte Bachet

---

[1]) Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61—62. [2]) Tannery pag. 8.
[3]) Diophant pag. 338—339 (deutsch 294—295).

Gelegenheit geboten, noch eine ganze Anzahl von Aufgaben über das ganzzahlige rechtwinklige Dreieck folgen zu lassen. Die 20. derselben betraf die Auffindung eines rechtwinkligen Dreiecks von gegebener Fläche, und an sie knüpfte Fermat als Bedingung, unter welcher allein eine Auflösung möglich ist, den Ausschluss einer Quadratzahl als Fläche. Er hat auch den Beweis jener Unmöglichkeit in räthselhafter Kürze angedeutet, dessen Schluss allein ganz klar und verständlich ist: „Wenn es also zwei Quadrate giebt, deren Summe und Differenz Quadrate sind, so giebt es auch zwei andere ganze Quadratzahlen von derselben Beschaffenheit wie jene, welche aber eine kleinere Summe haben. Durch dieselben Schlüsse findet man, dass es eine noch kleinere Summe als die vermittels der ersteren gefundene giebt, und so werden ins Unendliche fort immer kleinere ganze Quadratzahlen gefunden werden, welche dasselbe leisten. Das ist aber unmöglich, weil es nicht unendlich viele ganze Zahlen geben kann, welche kleiner sind als eine beliebig gegebene ganze Zahl. Den Beweis ganz und ausführlicher hier mitzutheilen, dazu reicht der Raum nicht aus.“ Der vollständige Beweis findet sich in Frénicle's weiter unten zu nennenden Abhandlung über ganzzahlige rechtwinklige Dreiecke. Man wird ihn vielleicht als Fermat's Eigenthum betrachten müssen, da Fermat einmal ausdrücklich sagt[1]), er habe an Frénicle die durch unendliche Abnahme geführten Beweise einiger Unmöglichkeitssätze geschickt.

Wir haben die Namen der Männer hervorgehoben, welche Fermat vermuthlich unmittelbar, jedenfalls mittelbar zur Nacherfindung seines Verfahrens und dadurch zu einer Art von Wettkampf herausforderte. Von einer Thätigkeit Roberval's in der Zahlentheorie ist nichts bekannt. Fermat dürfte ihn nur erwähnt haben, weil er dessen Fähigkeiten überhaupt hoch anschlug, und weil Roberval in dem Briefwechsel zwischen Fermat und Pascal als eine Art von Vertrauensmann des letzteren vorkommt, so dass es für Fermat nahe lag, beide Persönlichkeiten zu verbinden.

Pascal hat wirklich zahlentheoretisch gearbeitet. Zwei kleinere Abhandlungen sind uns von ihm bekannt. Die erste[2]) beschäftigt sich mit dem Producte von Zahlen, welche in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar aufeinanderfolgen, also mit

$$a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1),$$

wo a und k positive ganze Zahlen sind. Er nennt ein solches Pro-

---

[1]) Fermat, *Oeuvres* II, 436. Auf diese Stelle hat uns H. G. Wertheim aufmerksam gemacht und die entsprechenden Folgerungen aus ihr gezogen.
[2]) Pascal III, 278—282.

duct *produit des nombres continus* und zwar *de l'espèce k*, in lateinischer Sprache *productum continuorum speciei k*. Es sei das erste Mal, meint Pascal, dass solche Producte untersucht würden, und wenn wir ihm hierin beizupflichten haben, so ist nicht minder richtig, dass Pascal's mathematischer Blick ihn auf einen Ausdruck leitete, der hinfort eine immer bedeutendere Rolle spielen sollte. Unter Pascal's Sätzen ist der erste folgender, dem wir freilich durch Anwendung der Buchstaben h und k eine bei ihm nicht vorhandene Gestalt geben: Wenn h und k ganze Zahlen sind, so findet das Verhältniss statt:

$$1 \cdot 2 \cdots (h-1) : k(k+1) \cdots (k+h-2)$$
$$= 1 \cdot 2 \cdots (k-1) : h(h+1) \cdots (h+k-2).$$

Im zweiten Satze ist die Theilbarkeit von $a(a+1) \cdots (a+k-1)$ durch $1 \cdot 2 \cdots k$ ausgesprochen und mittels der Betrachtung bewiesen, dass $\frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$ als a^{te} Zahl der $k+1^{\text{ten}}$ Ordnung eine ganze Zahl sein müsse. Dieser Beweis lässt uns zugleich den Zugangspunkt erkennen, von welchem aus Pascal in die Betrachtung der Eigenschaften ganzer Zahlen eintrat. Die weiteren Sätze der Abhandlung sind nicht von grosser Bedeutung.

Pascal's zweite Abhandlung[1]), die wir zu nennen haben, hat die Theilbarkeitsbedingungen von Zahlen zum Gegenstande, insofern dieselbe aus der Kenntniss der einzelnen Ziffern der zu prüfenden Zahl hervorgehe: *Caractères de divisibilité des nombres, déduits de la connaissance de la somme de leurs chiffres*, oder lateinisch: *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis.* Die Theilbarkeitsfrage sei allerdings schon vielfach behandelt, sagt Pascal in den einleitenden Worten, und das Kennzeichen der Theilbarkeit durch 9 sei Gemeingut, aber er wolle ein ähnliches Verfahren lehren, welches die Theilbarkeit durch irgend ein A zur Entscheidung bringe. In Pascal's eigener Bezeichnung ist seine Vorschrift die folgende. Er schreibt in eine Zeile die Zahlen 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Unter die rechts zu äusserst befindliche 1 schreibt er wieder eine 1. Diese vervielfacht er mit 10, dividirt das Product durch A und schreibt den Rest B unter die 2. Sodann bildet er das Zehnfache von B, um es wieder durch A zu dividiren und den Rest C unter die 3 zu setzen u. s. w., so dass schliesslich eine Doppelreihe

$$\begin{array}{cccccccccc} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ K & I & H & G & F & E & D & C & B & 1 \end{array}$$

vorhanden ist. Soll nun etwa $TVNM$, d. h. T Tausender, V Hun-

---

[1]) Pascal III, 311—322.

derter, N Zehner, M Einer auf Theilbarkeit durch A geprüft werden, so schreibt man die Zahl in eine dritte Zeile und zwar M unter 1, N unter B, V unter C, T unter D und vervielfacht so wie die Zeilenglieder unter einander stehen, worauf man die Producte addirt. Mit anderen Worten, man bildet die Summe $1 \cdot M + B \cdot N + C \cdot V + D \cdot T$ und mit ihr ist $TVNM$ gleichzeitig durch A theilbar oder nicht. Natürlich kann man die Summe, welche man erhielt, neuerdings einer ähnlichen Prüfung unterwerfen. Wir heben aus den Einleitungsworten noch besonders hervor, dass Pascal das volle Bewusstsein von dem Unterschiede hatte, welcher zwischen Zahlensystem überhaupt und dem an sich zufälligen decadischen Systeme[1]) besteht, und dass er hierin Vorgänger, aber jedenfalls unbekannter Vorgänger von Caramuel (S. 771) war.

Der zweite Mathematiker, den wir nächst Pascal in Frankreich als Zahlentheoretiker zu nennen haben, ist Bernhard Frénicle de Bessy[2]) (etwa 1602—1675). Er war im Münzamte angestellt und gehörte überdies der französischen Academie der Wissenschaften an, in deren Veröffentlichungen seine Abhandlungen vereinigt erschienen sind[3]). Ihr Gegenstand ist fast ausschliesslich zahlentheoretisch oder zahlentheoretisch-combinatorisch, indem wir z. B. die Zauberquadrate unter diese letztere Benennung unterbringen zu sollen glauben. Die rein zahlentheoretischen Abhandlungen beschäftigen sich vorzugsweise mit ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecken, *triangles rectangles en nombres*, um Frénicle's Ausdruck zu gebrauchen. Wenn eine Abhandlung die Ueberschrift *Méthode pour trouver la solution des problèmes par exclusion* trägt, so ist dieses ein einigermassen irreführender Titel. Eine Methode der Ausschliessung wird hier noch weniger gelehrt, als wir von Fermat sagen durften, er habe die Methode der unendlichen Abnahme gelehrt. Bei Frénicle besteht die Ausschliessung in Folgendem: Irgend ein Satz, z. B. ein Satz für die Seiten eines bestimmten ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecks wird ausgesprochen. Er sei, heisst es weiter, Sonderfall eines allgemeinen Satzes, dem man nachzuforschen habe. Nun versucht es Frénicle mit einer Erweiterung, aber ein anderes bestimmtes Beispiel passt für diese Erweiterung nicht, sie ist folglich unstatthaft. Aehnlich wird eine zweite, vielleicht eine dritte Erweiterung versucht und durch ihr widersprechende Beispiele ausgeschlossen. Das ist es, was unter der *exclusion* zu verstehen ist. Findet sich endlich eine allgemeine Formel, unter welche

---

[1]) *système dont la base est de pure convention contrairement à ce que le vulgaire pense sans raison aucun.* [2]) Poggendorff I, 798. — *Nouvelle Biographie universelle* XVIII, 803—805. [3]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences* (*depuis* 1666 *jusqu'à* 1699), Tome V. Paris 1729.

alle vorgeführten Einzelbeispiele passen, was aber nicht methodisch bewerkstelligt wird, sondern ganz zufällig sich ergiebt, so ist der gesuchte Satz vielleicht entdeckt, keinenfalls bewiesen, wenn man jene Induction nicht als Beweis gelten lassen will. Andere Untersuchungen Frénicle's müssen unter der Hand bekannt gewesen sein, denn aus diesen von der Academie veröffentlichten Arbeiten ist die grosse Hochschätzung, welche Fermat insbesondere Frénicle widmete, in keiner Weise zu erklären. Die im Commercium epistolicum (S. 773) von Wallis wiederholt erwähnte Schrift Frénicle's: *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos quae tanquam insolubilia universis Europae Mathematicis a clarissimo viro D. Fermat sunt proposita et a D. B. F. D. B. inventa*[1]), welche 1657 in Paris gedruckt wurde, ist zur Zeit unauffindbar.

Was Descartes und seine zahlentheoretischen Leistungen betrifft, so sind wir auf wenige Andeutungen angewiesen, welche in seinen Briefen an Pater Mersenne vorkommen. Die Zahlen 30240, 32760 u. s. w. bis zu einer zwölfziffrigen Zahl 403031236608 nennt Descartes als solche, deren aliquote Theile ihr Dreifaches als Summe haben, also 90720, 98280, ... endlich 1209093709824. Die aliquoten Theile von 14182439040 geben als Summe das Vierfache dieser Zahl 56729756160. Ganz zufälliges Auffinden so grosser Zahlen mit derartigen Eigenschaften ist wohl ausgeschlossen, aber wie verfahren worden ist, deutet Descartes nicht an. Er bediene sich seiner Analysis bei derartigen Fragen; sie so auseinanderzusetzen, dass sie von Leuten verstanden werden könne, welche auf andere Methoden eingeübt seien, nähme zu lange Zeit in Anspruch. In einem anderen Briefe redet Descartes von vollkommenen Zahlen und von der Möglichkeit, dass es solche gebe, welche ungerad seien, eine Möglichkeit, welche er allerdings auf den Fall beschränkt, dass die betreffende vollkommene Zahl Product einer Primzahl in die Quadrate anderer Primzahlen sein könnte. Auch Briefe an Frénicle sind vorhanden, welche ähnliche Fragen berühren, doch ist nirgend ein Hinweis auf Untersuchungsverfahren zu finden. Descartes vermeidet vielmehr und namentlich in Briefen an oder für Fermat, vielleicht weil er sich aus Gründen, von welchen später die Rede sein wird, diesem gegenüber doppelter Vorsicht befleissigen zu müssen glaubte, jedes Eingehen auf zahlentheoretische Dinge, gleich als wenn er sich nicht mehr damit beschäftigte[2]).

[1]) B. F. D. B. = Bernard Frénicle de Bessy. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 70: *Je supplie aussi M. de Fermat de m'excuser de ce que je ne réponds point à ses autres questions; car comme je vous ai mandé par mes précédentes, c'est un exercise auquel je renonce entièrement.*

Noch ein französischer Schriftsteller hat hier seinen Platz zu finden: Jaques de Billy[1]) (1602—1679), ein Mitglied des Jesuitenordens, Lehrer der Mathematik in Dijon. Sein Hauptwerk ist der 1643 erschienene, 493 Seiten starke Quartband *Nova Geometriae Clavis Algebra*, in welchem die mannigfachsten Aufgaben über proportionale Grössen erst algebraisch und dann auf Grund des gewonnenen Ergebnisses durch Zeichnung gelöst werden[2]). Von der gleichen Natur ist ein 1660 durch den Druck veröffentlichtes Werk: *Diophantus geometra sive opus contextum ex arithmetica et geometria.* Nach einem in schwülstige Worte gekleideten Lobe des Diophant, welcher in der Arithmetik das sei, was Cicero als Redner, Virgil als Dichter, Hippokrates als Arzt u. s. w., werden 81 Aufgaben aus den verschiedenen Büchern Diophant's mehr oder weniger ausführlich und zum Theil recht geschickt behandelt. Z. B. gleich die erste Aufgabe des I. Buches des Diophant, eine gegebene Zahl als Summe zweier Zahlen von gegebenem Unterschiede darzustellen, wird zunächst an den bestimmten gegebenen Zahlen behandelt (100 als gegebene Summe, 40 als gegebener Unterschied lassen 30 und 70 als die gesuchten Zahlen erkennen). Dann lässt Billy eine allgemeine algebraische Auflösung folgen und endlich die geometrische Darstellung, welche aber selbst eine dreifache ist, je nach dem Raumgebilde, welches zur Versinnlichung der Zahlen in Anwendung tritt. Es wird also eine Strecke, ein Quadrat, ein Würfel in zwei Gebilde gleicher Natur zerlegt, deren Unterschied wieder eine gegebene Raumgrösse derselben Art (Strecke, Quadrat, Würfel) ist. Die Constructionen, welche dazu dienen, sind zum Theil recht hübsch. Als zweiter Theil des Diophantus geometra sind noch weitere 59 algebraische Aufgaben geometrisch gelöst, welche nicht aus Diophant's Arithmetik stammen. Die vier unter Nr. 25—28 behandelten Aufgaben beziehen sich z. B. auf die Einbeschreibung von Quadraten und Rechtecken in gegebene Dreiecke, Aufgaben also, welche seit Heron von Alexandria (Bd. I, S. 361 und 684) Mathematiker der verschiedensten Zeiten beschäftigt haben. Ein drittes Werk führt den Titel: *Diophanti redivivi pars prior et pars posterior* und ist 1670 in Lyon gedruckt. Im ersten Theile werden in drei Kapiteln 172 Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck im Anschlusse an das sechste Buch des Diophant, im zweiten Theile 85 und in einem Epiloge noch sechs weitere unbestimmte Zahlenaufgaben behandelt. Billy stand auch mit Fermat in Briefwechsel über zahlentheoretische Gegenstände. Die schon oft von uns erwähnte Diophantausgabe von

---

[1]) Poggendorff I, 191. [2]) G. Wertheim brieflich über sämmtliche Schriften De Billy's.

1670 enthält als Einleitung eine Schrift Billy's: *Doctrinae analyticae inventum novum*, welche aber durch die Zusatzbemerkung zu dem Titel: *ex variis epistolis quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus,* mag sie von Billy herrühren oder von dem jüngeren Fermat beigefügt sein, jedenfalls kundgiebt, dass man Fermat mit grösserem Rechte als Billy als den Verfasser zu nennen hätte. Das Inventum novum beschäftigt sich mit sogenannten doppelten und dreifachen Gleichungen, d. h. mit der Auffindung von ganzen Zahlen, welche zwei oder drei Ausdrücke, in denen sie vorkommen, zu vollständigen Quadraten machen. Doppelte Gleichungen in diesem Sinne des Wortes hatte Diophant bereits, dreifache noch nicht.

Neben diesen Schriftstellern über Zahlentheorie nannten wir an verschiedenen Stellen gelegentlich und nennen wir jetzt wiederholt zwei Mittelspersonen wissenschaftlichen Verkehrs, deren weit verzweigter Briefwechsel ungefähr die wissenschaftlichen Zeitschriften späterer Zeit ersetzte, wenn auch ungenügend ersetzte, da es vielfach vom Zufalle, von der grösseren oder geringeren Mittheilungslust, von freundschaftlichen oder feindseligen Gesinnungen, von räumlichem Beisammensein oder augenblicklichen Entfernungen dieser oder jener Persönlichkeit abhing, ob die gemeldete Neuigkeit zur rechten Zeit an die rechte Bestimmung gelangte. Genug, es gab damals nur solchen Briefverkehr, auch die Druckgabe von Academieschriften fällt erst in das Ende des XVII. Jahrhunderts und noch später. Die Personen, welche wir meinen, sind Peter von Carcavy und Pater Mersenne in Frankreich. Von Carcavy haben wir (S. 758) das Nöthige mitgetheilt. Pater Marie Mersenne[1]) (1588—1648) gehörte dem Minoritenorden an und lebte in den Klöstern seines Ordens in Paris, Nevers, dann wieder in Pasis. Er machte aber auch verschiedene Reisen nach Italien und nach den Niederlanden, bei welchen er zahlreiche Verbindungen anknüpfte. Einen ähnlich weiten Bekanntenkreis wie Carcavy und Mersenne besass ein Engländer, der aber vermöge seines langen Aufenthaltes in Paris fast als Franzose gelten kann. Sir Kenelm Digby[2]) (1603—1665) war der Sohn eines Verschwörers und selbst politischen Umtrieben zugethan. So kam es, dass er seine Heimath wiederholt zu verlassen sich genöthigt sah. Er führte in Paris das Leben eines Flüchtlings. In Frankreich wurde er Anhänger der Descartes'schen Richtung. Die Beziehungen der drei Männer zu den zahlentheoretischen Bestrebungen der Zeit waren fol-

---

[1]) *Oeuvres complètes de Christian Huygens* I, 19 Note 1. [2]) Ebenda II, 12 Note 2.

gende. Mersenne haben wir als den Empfänger von Briefen bezeichnet, in welchen Fermat, in welchen Descartes manche zahlentheoretische Mittheilung machten. Durch Carcavy's Vermittelung kam Fermat's Relation nach Leiden. Digby übersandte in Fermat's Auftrage seine Aufgaben nach England, damit man dort an deren Auflösung sich versuche. So muss man sagen, dass Fermat überall im Vordergrunde steht, dass er nach Leonardo von Pisa zuerst wieder als Erweiterer der Mathematik nach zahlentheoretischer Richtung auftrat, während man von Regiomontan höchstens sagen kann, dass er über die längst gesteckten Grenzen hinausschaute, ohne sie hinauszuschieben. Jetzt war ein neues Reich der Wissenschaft eröffnet, es waren in ihm Ziele gesteckt, zu deren Erreichung selbst wieder neue Wege gebahnt werden mussten, welche von Geistesverwandten Fermat's in späteren Jahrhunderten eröffnet wurden.

Bereits nicht mehr so neu war die Algebra, die Lehre von den Gleichungen. Wir haben für sie den Zeitpunkt wesentlich neuer Entdeckungen schon vor und in der ersten Häfte des XVI. Jahrhunderts beginnen sehen, aber der erreichbar höchste Punkt war noch keineswegs wirklich erreicht. Wir haben auch in den ersten 60 Jahren des XVII. Jahrhunderts neue Fortschritte aufzuzeichnen, in deren Spuren eintretend unmittelbare Nachfolger weitere Stufen erstiegen.

Albert Girard gab 1629 seine *Invention nouvelle en l'algèbre*[1]) heraus, eine Schrift von nur 64 Quartseiten, aber reichen Inhaltes. Von trigonometrisch wichtigen Dingen, welche dort zu finden sind, war S. 709 die Rede. Jetzt haben wir es mit dem zu thun, was durch den Titel recht eigentlich in Aussicht gestellt ist. Zunächst sind einige Bezeichnungen Girard's zu bemerken und vor allem die Klammern als Zeichen der Zusammengehörigkeit verschiedener Ausdrücke zum Zwecke der Ausführung einer neuen Operation, welche Girard in die Buchstabenrechnung einführte. Weniger glücklich war er in Beibehaltung von Vieta's Zeichen $=$, welches zwischen zwei Ausdrücken befindlich ihre Differenz bezeichnen sollte, mag nun der erste oder der zweite der grössere sein (S. 631). Auch Zeichen für grösser und für kleiner benutzte Girard; $A\,ff\,B$ hiess: A ist grösser als B, während $B\,\S\,A$ gelesen wurde: B ist kleiner als A; beides kam bald in Vergessenheit. Zeichen der Addition ist bei Girard $+$, Zeichen der Subtraction — oder auch $\div$, Zeichen der Division ein Bruchstrich $\frac{A}{B}$. Zur Multiplication dient das einfache Nebeneinander-

[1]) H. Bierens de Haan hat 1884 in Leiden die ungemein selten gewordene Schrift neu drucken lassen. Auszüge in Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 52—57 und in den *Nouvelles annales de mathématiques* XIV, *Bulletin de bibliographie* pag. 135—152.

setzen zweier Buchstaben AB. Ein Gleichheitszeichen kommt nicht vor, Girard schreibt vielmehr statt dessen das Wort *egale*. Für die Unbekannten wendet Girard, offenbar in Nachfolge von Vieta, die Vocale an[1]). In der Potenzbezeichnung schliesst sich Girard einigermassen an Stevin an. Wie jener den Exponenten einringelte, so klammert Girard ihn ein und setzt ihn vor den zu potenzirenden Ausdruck, $\left(\frac{3}{2}\right)49$ bedeutet also $49^{\frac{3}{2}} = 343$. An Stevin erinnert auch der Glaube Girard's an ein weises Jahrhundert[2]). Die Unterscheidung positiver und negativer Zahlen bei der Quadratwurzelausziehung, sowie das Auftreten imaginärer Quadratwurzeln ist Girard ganz geläufig[3]) und ebenso das Auftreten solcher Zahlen als Gleichungswurzeln, welches er zu erklären unternimmt. Das Minuszeichen bedeute geometrisch eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne als das Pluszeichen[4]). An einer anderen Stelle sagt er, man dürfe negative Gleichungswurzeln nicht unbeachtet lassen[5]). Der Grund dazu liegt in Folgendem: Girard weiss, dass jede Gleichung so viele Wurzeln besitzt, als ihr Grad anzeigt, und dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen der Unbekannten aus den Combinationen der Wurzeln zu aufeinanderfolgenden Klassen sich zusammensetzen. Er nennt die Summe der Wurzelwerthe *premiere faction*, die ihrer Verbindung zu zweien, dreien *deuxieme faction*, *troisieme faction* u. s. w.[6]). An dem Gesetze der Coefficientenbildung wird er auch nicht irre, wenn gleiche Wurzeln vorkommen und ebensowenig, wenn imaginäre Wurzelwerthe auftreten. Bei der Gleichung, welche man gegenwärtig $x^4 - 4x + 3 = 0$ schreiben würde, und deren vier Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1 + \sqrt{-2}$, $x_4 = -1 - \sqrt{-2}$ er kennt, stellt er geradezu die Frage, wozu jene imaginären Wurzeln dienen, und er beantwortet die Frage dahin, dass es eben andere Wurzeln nicht gebe, und dass sie die Allgemeinheit des Bildungsgesetzes erläutern[7]). Diese Kenntnisse Girard's sind geläuterter, möchte man sagen, als die seiner Vorgänger, aber wesentlich neu sind sie nicht. Dieses Beiwort verdient dagegen ein

---

[1]) *les voyelles se posent pour les choses incognues.* [2]) *ceste science incognuë jusques à présent, si ce n'est devant le deluge.* [3]) *Soit + 9, sa racine est + 3 ou bien — 3, mais la racine de — 9 est indicible et n'est ny + ny —.* [4]) *Jusques icy nous n'avons encore explique, à quoy servent les solutions par — quand il y en a. La solution par — s'explique en geometrie en retrogradant et le — recule la ou le + avance.* [5]) *or les solutions par — ne se doivent omettre.* [6]) *la nature des equations qui est qu'icelles ont leurs termes composé des factions.* [7]) *On pourroit dire: à quoy sert ces solutions qui sont impossibles? Je reponds: pour trois choses, pour la certitude de la reigle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.*

von ihm ausgesprochener Satz: Girard weiss die Summen der vier ersten Potenzen der Wurzelwerthe einer Gleichung aus den Gleichungscoefficienten herzustellen. Er nennt bei dieser Gelegenheit die Coefficienten nicht *faction*, sondern *meslé* und bezeichnet sie durch aufeinanderfolgende Initialen, ohne Rücksicht darauf, dass ihm A sonst eine Unbekannte darstellt. Er kennt also A als *premier meslé*, B als *second*, C als *troisiesme*, D als *quatriesme* (nämlich immer *meslé* hinzugedacht). Dann schreibt er:

$$\text{Alors en toute sorte d'équation}\left\{\begin{array}{l} A \\ Aq - B2 \\ A\,\text{cub} - AB3 + C3 \\ Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4 \end{array}\right\}\text{sera la somme des}\left\{\begin{array}{l}\text{solutions}\\ \text{quarez}\\ \text{Cubes}\\ \text{quaré-quarez}\end{array}\right.$$

In heutiger Schreibweise würde der Satz so aussehen. Seien $x_1, x_2, \cdots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} - \cdots \pm a_n = 0,$$

so ist

$$\Sigma x = a_1, \quad \Sigma x^2 = a_1^2 - 2a_2, \quad \Sigma x^3 = a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3,$$
$$\Sigma x^4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4.$$

Den Werth anderer symmetrischer Functionen der Gleichungswurzeln giebt Girard nicht an, er wird also solche vermuthlich nicht weiter gekannt haben. Eine Bemerkung Girard's über das Ausziehen der Kubikwurzel aus der Summe einer rationalen Zahl und einer Quadratwurzel ist folgende. Es sei $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$, so folgt daraus $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ und ebenso $\sqrt[3]{b - a^2} = \beta - \alpha^2$, und darin besteht Girard's beweislos ausgesprochene Behauptung. Genau ebenso beweislos hatte (S. 446) Michael Stifel den allerdings nicht ganz so deutlich ausgesprochenen Zusammenhang als Zusatz zu der Rudolff-schen Coss veröffentlicht, doch scheint Girard keine Kenntniss davon besessen zu haben, weil er sonst kaum als Einleitung besonders betont hätte, Niemand habe die Kubikwurzelausziehung aus Binomien noch erfunden[1]). Die Regel, welche Girard aus $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ mit gleichzeitiger Berücksichtigung von $a = \alpha^3 + 3\alpha\beta$, also von $a > \alpha^3$, sich bildet, besteht darin: zuerst wird der Zahlenwerth $\sqrt[3]{a^2 - b}$ gesucht, dessen Rationalität allerdings vorausgesetzt ist; dann nimmt

[1]) *L'extraction Cubique des binomes n'estant encore inventée de personne, on se pourra servir de la reigle suyvante.*

man alle $\alpha > \sqrt[3]{a}$ und bildet aus ihnen α^2; zieht man von jedem α^2 die Zahl $\sqrt[3]{a^2 - b}$ ab, so erscheint das zu jenem α^2 gehörige β, und man gewinnt somit alle die Ausdrücke $\alpha + \sqrt{\beta}$, von denen einer $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ sein kann.

Früher als Girard's Invention nouvelle en l'algèbre wurde jedenfalls ein Werk verfasst, welches wir gleichwohl nach jenem nennen, weil es nicht früher als 1631 an die Oeffentlichkeit gelangte. Thomas Harriot[1]) (1560—1621) ist in Oxford geboren und als Schüler der dortigen Hochschule aufgewachsen. Im Jahre 1585 machte er im Auftrage von Sir Walter Raleigh eine Reise nach Virginien, um das Land auszumessen, wovon er die Ergebnisse 1588 unter der Ueberschrift: A brief and true report of the new found land of Virginia veröffentlichte. Einen reichen und sachverständigen Gönner fand Harriot in Henry Percy Earl of Northumberland, dem er seine Entdeckungen mitzutheilen pflegte. Die wichtigsten derselben gehören der Astronomie und der Physik an. Der Mathematiker Harriot ist ausschliesslich durch sein nachgelassenes Werk *Artis analyticae praxis* bekannt, welches 1631, mithin zehn Jahre nach dem Tode des Verfassers, durch Walter Warner herausgegeben wurde. Genannt hat sich der Herausgeber allerdings nicht, auch nicht innerhalb der offenbar von ihm herrührenden Vorrede, in welcher der Verdienste der Italiener, Stevin's und besonders Vieta's um die Algebra rühmend gedacht ist. Manches dürfte noch handschriftlich in Oxford aufbewahrt werden, dessen Durchmusterung wünschenswerth erscheint; denn wenn Percy, der Vertraute Harriot's, in einem erhaltenen Brieffragmente zu ihm sagt, Vieta habe ihn um die Ehre gebracht, Erfinder der Algebra geworden zu sein[2]), so ist man versucht, diesem Ausspruche eine breitere Grundlage zu geben, als die der Artis analyticae praxis, selbst wenn diese schon vor 1591, also vor dem Erscheinen von Vieta's *In artem analyticam isagoge* (S. 629) druckreif gewesen sein sollte. Ein so frühes Datum kann aber nicht vermuthet werden, weil sonst nicht in der Vorrede[3]) des Herausgebers und noch weniger in dem Werke selbst das Früherrecht gerade Vieta's so stark anerkannt sein könnte, als es der Fall ist[4]). Nehmen wir die grosse

[1]) Kästner III, 42—46 und 176—181. — Montucla II, 105—111. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 47—51. — v. Zach, Monatliche Correspondenz VIII, 43—60. [2]) *Vieta prevented you of the Gharland for the greate Invention of Algebra.* [3]) *Exegetice ista numerosa est quam hîc proferimus e Thomae Harrioti nostri schediasmatis deprompta; non quidem ut primis Vietae cogitationibus formata est, sed posterioribus Harrioti reformatam.* [4]) *Artis analyticae praxis* pag. 2, *Definitio* 7: *Huic analytices parti a Francisco Vieta, magno*

Aehnlichkeit mancher Kunstausdrücke hinzu, welchen wir bei Vieta und Harriot begegnen, so besteht kein Zweifel, dass so weit die Artis analyticae praxis allein massgebend bleibt, Harriot nur als Schüler, nirgend als Nebenbuhler Vieta's erscheint. Für Harriot ist jede Gleichung dadurch entstanden, dass Factoren von der Gestalt $a - b$ oder $a + c$ oder $a + d$, wobei a die Unbekannte bezeichnet, für welche Vieta die Initialvocale A u. s. w. benutzte, mit einander vervielfacht wurden. Alsdann wird das die Unbekannte nicht enthaltende Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben, alle übrigen Glieder bleiben links stehen, also etwa

$$aaa - baa + caa + daa - bca - bda + cda = bcd,$$

in der Schreibweise Harriot's, welcher die Producte durch einfaches Nebeneinanderschreiben der Buchstaben darstellte, mochten die Factoren einander gleich oder von einander verschieden sein. Ob das rechtsstehende Glied positiv oder negativ ausfällt, gilt Harriot gleich, der nur darauf sieht, dass das höchste Glied links mit keinem anderen Coefficienten als der nicht besonders geschriebenen positiven Einheit behaftet sei. Das Gleichheitszeichen Recorde's benutzt Harriot fortwährend, ausserdem noch den liegenden Winkel $<$ beziehungsweise $>$ für kleiner und grösser, wie er seitdem im Gebrauche geblieben ist. Die Gleichung in der oben angegebenen Form, bei welcher die Entstehung jedes einzelnen Gliedes deutlich hervortritt, heisst bei Harriot *aequatio canonica*, und das ist wohl das erste geschichtliche Vorkommen des Ausdruckes einer canonischen Form. Bei der aequatio canonica unterscheidet Harriot noch die *aequatio canonica primaria* von der *aequatio canonica secundaria*, welche dadurch entsteht, dass durch eigens getroffene Wahl von b, c, d Glieder, welche gleich hohe Potenzen von a enthalten, wegfallen, z. B. die Glieder mit aa, wenn $b = c + d$. Sind Glieder, deren Gesammtcoefficient nicht verschwindet, zusammengefasst und mit einfachem Buchstabencoefficienten oder mit einem Buchstabencoefficienten mit vorgesetztem Zahlencoefficienten versehen, in welchem das Bildungsgesetz nicht deutlich hervortreten kann, so nennt Harriot die Gleichung eine *aequatio communis*, und ihre Auflösung beruht dann regelmässig darauf, dass sie mit der canonischen Gleichung des gleichen Grades zusammengestellt wird. Harriot vergleicht[1]) z. B. $aaa - 3bba = 2ccc$, wobei $c > b$ vorausgesetzt ist, mit der durch $a = q + r$ erfüllten canonischen Gleichung $aaa - 3rqa = rrr + qqq$. Ist nun $bb = rq$,

---

artis analyticae magistro, Exegetices, quasi declaratoriae seu exhibitoriae nomen impositum est.

[1]) *Artis analyticae praxis. Sectio quinta. Propositio* 1, pag. 79.

$2ccc = rrr + qqq$, so ist der Uebergang der zweiten dieser beiden Gleichungen in eine solche, in welcher nur r oder nur q vorkommt und leicht daraus gefunden wird, ersichtlich, und man kann also auch $r + q$, d. h. die Wurzel der vorgelegten Gleichung finden. Die beigegebene Bedingung $c > b$ führt zu $c^6 > b^6$, d. h.

$$\frac{r^6 + 2r^3q^3 + q^6}{4} > \frac{4r^3q^3}{4} \text{ oder zu } \left(\frac{r^3 - q^3}{2}\right)^2 > 0,$$

was sicherlich wahr ist. Von negativen Gleichungswurzeln will Harriot nichts wissen, nur positive haben für ihn einen Sinn. Ja, er beweist sogar, dass Gleichungen nur positive Wurzeln besitzen![1]) Die Gleichung $eee - 3bbe = - ccc - 2bbb$ sei, behauptet Harriot, unmöglich, *impossibilis est.* Denn entweder müsste, wenn die Gleichung möglich sein sollte, $e = b$ oder $e > b$ oder $e < b$ sein. Die Annahme $e = b$ führe zu $ccc = 0$, was unmöglich sei. Die Annahme $e > b$ oder $e = b + d$ führe zu $3bdd + ddd + ccc = 0$, was wieder unmöglich sei. Endlich die Annahme $e < b$ oder $e = b - d$ führe zu $ddd - 3bdd = ccc$; daher müsse $d - 3b$ positiv, $d > 3b$ und um so mehr $d > b$ sein. Die Annahme $e = b - d$ schliesse aber $b > d$ ein, also sei auch hier ein Widerspruch vorhanden, der den Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung vollende, ein Beweis, der offenbar nur dann, dann aber in der That richtig ist, wenn andere als positive Wurzelwerthe ausgeschlossen sind. Eine zweite Abtheilung[2]) der Artis analyticae praxis führt die besondere Ueberschrift *Exegetice numerosa* und behandelt die Auflösung von Zahlengleichungen. Der Grundgedanke besteht darin, die unbekannte Grösse als Summe zweier Theile zu betrachten, deren einer bekannt ist, worauf der zweite näherungsweise gefunden wird. Lässt man dann ihre Summe die Rolle des ersten Theiles spielen, so gewinnt man wieder einen natürlich kleineren zweiten Theil und damit eine zweite Annäherung u. s. w. So der wesentliche Inhalt eines Werkes, von dessen Verfasser man gewiss nicht wird behaupten wollen, er verdiene nicht einen Platz in der Geschichte der Algebra, aber von dem man noch weit weniger behaupten darf, er sei Bahnbrecher auf diesem Gebiete gewesen, in dessen Werk man nicht hineinlesen darf, was nun und nimmermehr darin enthalten war[3]).

Einen wirklichen Markstein in der geschichtlichen Entwickelung der Lehre von den Gleichungen bildet dagegen die Geometrie von

---

[1]) *Artis analyticae praxis. Sectio sexta. Problema* 1. *Lemma* pag. 89—90. [2]) Ebenda pag. 117—180. [3]) Diesem Fehler verfiel John Wallis in seiner Algebra von 1685. Wer seinen Bericht mit der *Artis analyticae praxis* vergleicht, muss glauben, Wallis habe ein ganz anderes Werk vor Augen gehabt.

Descartes, insbesondere wenn man, wozu es an Berechtigung nicht fehlt, auch dasjenige dazu rechnet, was zur mitunter sehr nothwendigen Erläuterung von Anderen, Zeitgenossen und Schülern des Verfassers, hinzugefügt worden ist. Die *Geometrie* erschien zuerst 1637 in französischer Sprache[1]). Der jüngere Franciscus van Schooten veranstaltete 1649 die Ausgabe einer lateinischen Uebersetzung, und ihr folgte 1659 ein erneuter Abdruck mit zahlreichen Ergänzungen von verschiedenen Verfassern in zwei Bänden[2]). Wiewohl der Titel der in drei Bücher gegliederten Geometrie einen ganz anderen Inhalt vermuthen lässt, und wiewohl auch thatsächlich Descartes bei deren Veröffentlichung vorzugsweise die geometrischen Gedanken verbreiten wollte, welche ihm schon Grosses geleistet hatten, Grösseres in sichere Aussicht stellten, so ist die Bedeutung der Geometrie keineswegs in ihnen allein zu suchen. Als eine etwas bunt gewürfelte Vereinigung der verschiedenartigsten Untersuchungen stellt das Werk sich dar, schwer zu verstehen, namentlich damals schwer zu verstehen, als es erschien und dem Leser auf Schritt und Tritt ganz neue überraschende Dinge bot, die ihn schier zu verwirren geeignet waren. Nicht als ob der Schriftsteller, welcher über das methodische Denken geschrieben hat, nicht im Stande gewesen wäre, klar Erfasstes auch fassbar für Andere auszusprechen, weit entfernt davon! Aber er schrieb absichtlich dunkel. Er that es, wie er in einem seiner Briefe sich einmal ausgedrückt hat, weil man sonst behauptet haben würde, es sei weder Neues noch Bedeutendes an seinen Entdeckungen. Selbstverständlich war auch nicht Alles neu, aber Verbesserungen, Erweiterungen, Nutzbarmachung zu neuen Zwecken finden wir aller Orten bei ihm, wie aus dem kurzen Auszuge ersichtlich werden wird, den allein wir hier geben dürfen. Um bei dem Aeusserlichsten anzufangen, nahm die Bezeichnung der Grössen bei Descartes die Gestalt an, welche sie seitdem beibehielt. Statt der Vocale benutzte er die letzten Buchstaben des Alphabetes, vorzugsweise und in erster Linie x, sodann y, z zur Bezeichnung der Unbekannten, die ersten Buchstaben a, b, c u. s. w. zur Bezeichnung der bekannten Grössen. Wie er gerade auf diese Wahl kam, ist nirgend angedeutet. Die Annahme, dass er das 𝔛 früherer deutscher Werke, welches er auf seinen Reisen z. B. bei Faulhaber in Ulm, kennen gelernt haben muss, irrig als

---

[1]) Ein Abdruck in den *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) V, 313—428. Spätere besondere Neudrucke der *Géométrie* erfolgten in Paris 1886 und 1894. Eine deutsche Uebersetzung von Ludw. Schlesinger erschien Berlin 1894.

[2]) Da diese lateinische Ausgabe von 1659 die unter Mathematikern weitaus verbreitetste ist, so citiren wir ausschliesslich nach ihr unter dem Titel: Descartes, Geom. mit nachfolgender Angabe von Band und Seitenzahl.

x gelesen und durch diesen Buchstaben zu wiederholen gedacht habe, ist noch immer nicht ausgeschlossen, wenn auch auf die Möglichkeit hingewiesen worden ist, Cataldi's 𝟏 (S. 623) habe als Muster gedient und sei in x übergegangen[1]). Die Potenzbezeichnung nahm bei Descartes gleichfalls die Gestalt an, welche ihr bleiben sollte. Er bediente sich rechts erhöht stehender Exponenten. Den Exponenten 2 findet man aber bei Descartes nicht; statt dessen ist der quadrirte Buchstabe zweimal geschrieben[2]), also aa, nie a^2. Allgemeine Exponenten wie a^n schrieb Descartes noch nicht, und ebensowenig negative oder gebrochene. Auch Wurzelexponenten über den Wurzelzeichen kommen bei ihm noch nicht vor. Die Quadratwurzel ist durch ein einfaches Wurzelzeichen, die Kubikwurzel durch Hinzusetzung des Buchstaben C zum Wurzelzeichen angedeutet[3])

$$\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Diese Kubikwurzel bringt Descartes bei Auflösung kubischer Gleichungen bei, eine Auflösung, deren Erfindung, wie er sagt, Cardanus einem gewissen Scipio Ferreus zuschreibe. Wir erwähnen dieses, weil hier die einzige Stelle der Geometrie ist, in welcher überhaupt ein verhältnissmässig neuer Schriftsteller genannt ist. Sonst begegnet man höchstens Namen wie Pappus, Apollonius, also von Männern des Alterthums, welche als Vorgänger in der Algebra natürlich nicht in Frage kommen. Die Gleichungen sind meistens auf Null gebracht[4]), wie es vereinzelt schon bei Stifel vorkam. Eine Neuerung von Descartes besteht in der Andeutung solcher Glieder, die in dem Gleichungspolynome fehlen, durch ein Sternchen[5]):

$$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * \infty 0,$$

wo ausserdem zweierlei zu beachten ist: der Coefficient 1, welcher bei dem quadratischen Gliede sich findet, den aber Descartes nur bei späteren Gliedern des Gleichungspolynomes, nie bei dem ersten (hier y^4) schreibt, und das aus einer umgekehrten Verschlingung der Buchstaben *ae* entstandene Gleichheitszeichen ∞.

Jede Gleichung kann, sagt Descartes, so viele unterschiedene

---

[1]) G. Wertheim in der Zeitschr. Math. Phys. XLIV Histor.-liter. Abthlg. S. 48. [2]) Genau dieselbe Gewohnheit hatte auch Gauss, dessen Meinung war, eine Abkürzung müsse nur dann in Anwendung kommen, wenn sie wirklich geringeren Platz einnehme. Nun nimmt aa im Drucke nicht mehr Raum ein als a^2, also hat es bei der ersten Schreibweise zu verbleiben. [3]) Descartes, Geom. I, 93. [4]) Ebenda I, 41—42 erstmalig. [5]) Ebenda I, 71 erstmalig.

Wurzeln oder Werthe besitzen, als ihr Grad anzeigt[1]). Aber, setzt er auf derselben Seite hinzu, es kommt auch häufig vor, dass einige dieser Wurzeln falsch oder kleiner als Null sind[2]). Und wieder an einer anderen Stelle: Sowohl die wahren (positiven) als falschen (negativen) Wurzeln sind nicht immer reell, sondern mitunter nur imaginär, d. h. man kann in jeder Gleichung die Vorstellung von so vielen Wurzeln, als ich gesagt habe, sich bilden, aber inzwischen giebt es keine Grösse, welche unserer Vorstellung entspräche[3]). Dieses Vorkommen der beiden in Gegensatz zu einander gebrauchten Wörter reell und imaginär ist das erste, welches wir bemerkt haben. Die Sache selbst war keineswegs neu, und Descartes dürfte hier als Schüler von Girard's *Invention nouvelle en l'algèbre* sich verrathen, welche in Holland ihm unter allen Umständen nicht unbekannt geblieben sein kann.

Noch weniger neu war es, dass das Gleichungspolynom als Product binomer Factoren ersten Grades zu denken sei, dagegen zog Descartes zwei neue wichtige Folgerungen, welche, so nahe sie uns jetzt zu liegen scheinen, noch nicht gezogen worden waren. Es wird hervorgehoben[4]), dass das Gleichungspolynom, *summa aequationis*, einer Gleichung, welche mehrere Wurzeln besitzt, stets durch ein Binomium ersten Grades theilbar sei, welches aus der Unbekannten minus einem positiven Wurzelwerthe oder plus einem negativen Wurzelwerthe bestehe, und dass derartige Divisionen den Grad der Gleichung um ebensoviele Einheiten herabsetzen. Es wird ferner zu wiederholten Malen hervorgehoben[5]), was Cardano (S. 536) nur leise zu verstehen gab, dass die Wurzelwerthe einer Gleichung Theiler der Gleichungsconstanten sein müssen. Descartes sagt zwar nicht, dass er Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten und eben solcher Constanten meint, und dass er dann auch nur an ganzzahlige Theiler dieser letzteren denkt, aber die von ihm vorgeführten Beispiele dulden keine andere Auffassung. Besonders deutlich ist die Erörterung der Gleichung $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. Das letzte Glied, nämlich 64, lasse sich ohne Bruch, *sine fractione*, durch 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 theilen. Man solle daher der Reihe nach den Versuch machen, jene

---

[1]) Descartes I, 69: *Sciendum itaque, quod incognita quantitas in qualibet aequatione tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones.* [2]) Ebenda I, 69: *Verum saepe accidit, quod quaedam harum radicum sint falsae, seu minores quam nihil.* [3]) Ebenda I, 76: *Caeterum radices tam verae quam falsae non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae: hoc est, semper quidem in qualibet aequatione tot radices quot dixi imaginari licet; verum nulla interdum est quantitas, quae illis, quas imaginamur, respondet.* [4]) Ebenda I, 69—70. [5]) Ebenda I, 70 und deutlicher I, 77.

Gleichung durch eines der Binome $y^2 - 1$ oder $y^2 + 1$, $y^2 - 2$ oder $y^2 + 2$, $y^2 - 4$ oder $y^2 + 4$ u. s. w. zu dividiren; man werde finden, dass sie durch $y^2 - 16$ sich theilen lasse.

Weitaus am hervorragendsten ist freilich Descartes' Zeichenregel. Wir haben (S. 539) gesehen, dass Cardano eine Behauptung aufstellte, welche aus seiner undeutlichen Ausdrucksweise herausgeschält den Sinn besitzt, dass ein einmaliger Zeichenwechsel in einem Gleichungspolynome das Merkmal einer einzigen positiven Wurzel sei, während bei zweimaligem Zeichenwechsel entweder mehrere Wurzeln positiv oder alle imaginär seien. Es ist möglich, es ist vielleicht wahrscheinlich, dass Descartes, dessen Reisen, auf welchen er stets Kenntnisse zu sammeln bestrebt war, sich auch über Italien erstreckten, die Schriften Cardano's kennen lernte. Aber auch dieses als Thatsache vorausgesetzt, war jedenfalls Descartes der erste, welcher in dem erwähnten Cardano'schen Satze den Keim zu einer Verallgemeinerung sah, welche er folgendermassen aussprach: So viele Zeichenwechsel, so viele Zeichenfolgen ein Gleichungspolynom besitzt, so viele positive, so viele negative Wurzeln kann die Gleichung haben[1]. Descartes ist später wegen dieses Ausspruches vielfach gescholten worden. Eine Behauptung warf man ihm vor, sei kein bewiesener Satz, und überdies sei die Behauptung nicht einmal wahr, da sie die Fälle imaginärer Wurzeln unerörtert lasse. Beide Vorwürfe sind ungerecht. Der zweite scheitert an dem Worte *possint*, welches Descartes in vorsichtigster Weise gebraucht. Die Gleichung kann, sagt er, so und so viele positive, negative Wurzeln besitzen, und das ist buchstäblich wahr. Das enthält überdies auch mit eingeschlossen, dass es höchstens so und so viele Wurzeln sein können, denn man wird doch Descartes' *possint* nicht so aufzufassen im Stande sein, dass der Wurzeln auch noch mehrere sein können? Und der erste Vorwurf darf nicht Descartes, darf nur der Zeit gemacht werden. Beispiele unbewiesen ausgesprochener Sätze werden dem Leser mehr begegnen, wenn er nur in diesem Abschnitte zurückblättert. Man hatte sich noch nicht gewöhnt, jede mathematische Behauptung, auch wo sie nur gelegentlich auftrat, sofort mit strengem Beweise zu versehen.

Noch weitere algebraische Sätze spricht Descartes eben so gelegentlich, eben so ohne Beweis aus[2], wenn man nicht Ausführung

---

[1] Descartes I, 70: *Ex quibus etiam cognoscitur quot verae et quot falsae radices in unaquaque Aeqatione haberi possint. Nimirum tot veras haberi posse quot variationes reperiuntur signorum + et —; et tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quae se invicem sequuntur.*
[2] Ebenda I, 74—75.

an einzelnen Beispielen als Beweis gelten lassen will. Besitzt eine Gleichung keine Gleichungsconstante, so ist 0 eine ihrer Wurzeln, und der Grad der Gleichung kann mittels Division durch die Unbekannte herabgesetzt werden. Man kann auch umgekehrt durch Multiplication mit der Unbekannten die Gleichung im Grade erhöhen, worauf sie keine Gleichungsconstante mehr besitzt. Man kann dann weiter die Unbekannte als Summe einer neuen Unbekannten und einer an sich beliebigen Zahl betrachten, um eine neue Gleichung mit einer Gleichungsconstanten zu erhalten, und man kann dabei jene beliebige Zahl so bestimmen, dass ein absichtlich gewähltes Glied der neuen Gleichung den Coefficienten 0 erhalte, d. h. fehle.

So entsteht aus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die neue Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$, aus dieser durch $x = y + z$ die fernere $y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$, und endlich durch planmässige Bestimmung von z die Schlussgleichung $y^4 + py^2 + qy - r = 0$. Der Vortheil dieser Umwandlung, welche den Grad der Gleichung zwar erhöht, aber ihn zur geraden Zahl macht, besteht darin[1]), dass nunmehr eine Zerlegung in zwei Factoren gleich hohen Grades angestrebt werden kann.

Umgekehrt ist freilich jene Zerlegung, welche als eine Methode wesentlicher Erniedrigung des Grades einer aufzulösenden Gleichung aufgefasst werden kann, nur dann möglich, wenn es gelingt, zuvor eine Hilfsgleichung aufzulösen. Für die Gleichung

$$y^4 + py^2 + qy - r = 0$$

ist diese Hilfsgleichung

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0$$

formell vom 6., eigentlich vom 3. Grade und liefert damit eine neue Auflösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades mit Hilfe kubischer Gleichungen.

Wir haben schon (S. 795) darauf aufmerksam gemacht, dass Descartes die *Invention nouvelle en l'algèbre* zuverlässig kannte. Die gleiche Ueberzeugung gewinnt man aus einem Briefe, welchen Descartes unter dem 1. Februar 1640 an Jacob van Waessenaer richtete[2]). Ueber die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem aus einem rationalen Theile und einer irrationalen Quadratwurzel bestehenden Binomium war zwischen Stampioen und dem genannten Jacob van Waessenaer, einem in Utrecht wohnenden Anhänger von Descartes, ein Streit ausgebrochen. Descartes spielte, wenigstens

---

[1]) Descartes, Geom. I, 79 sqq. [2]) Veröffentlicht durch H. Bierens de Haan in der Zeitschr. Math. Phys. XXXII. Hist.-liter. Abthlg. S. 163 flgg. Vergl. auch Bierens de Haan, *Bouwstoffen* etc. II, 383—433.

hinter den Coulissen, eine Rolle in diesem Streite und versah seinen Schüler mit Gründen, welche dieser zur Verwerthung bringen könne. In dem erwähnten Briefe ist jener Satz über $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}$ bewiesen, welchen wir bei Stifel, bei Girard auftreten sahen (S. 789), und der in der Gleichung $\sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta$ seinen Ausdruck findet. Hat Descartes ihn vielleicht auch nicht bewusst von Girard entlehnt, so hält es doch schwer, nicht an ein unbewusstes Nachwirken des früher Gelesenen zu denken.

Mochte Jacob van Waessenaer damals noch als Anfänger zu betrachten gewesen sein, der in einer ziemlich einfachen Sache der Anleitung bedurfte, in einer um etwa 20 Jahre späteren Zeit finden wir ihn mit Untersuchungen beschäftigt, welche an Descartes anknüpfen, aber über ihn hinausgehen. Wir sahen, dass Descartes dazu kam, Probeversuche mit sämmtlichen positiv und negativ zu wählenden Theilern der Gleichungsconstante zu empfehlen, ob man so eine Gleichungswurzel entdecke. Van Waessenaer gab ein Mittel an[1]), diese der Zahl nach oftmals ausserordentlich vielen Versuche wesentlich einzuschränken. Sei z. B. die Gleichung $x^3 - x^2 - 30x + 72 = 0$ vorgelegt, so giebt es 12 Theiler von 72, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, welche alle positiv und negativ durchprobirt ein 24maliges Rechnen beanspruchen würden. Van Wassenaer nimmt statt dessen zunächst zwei Umformungen vor, die eine durch $x = y + 1$, die andere durch $x = z - 1$, und er vollzieht sie nicht einmal vollständig, sondern begnügt sich mit der Auffindung der neuen Gleichungsconstanten, welche in dem einen Falle (bei der Gleichung in y) $1 - 1 - 30 + 72 = 42$, in dem anderen Falle (bei der Gleichung in z) $-1 - 1 + 30 + 72 = 100$ wird. Damit sind die Probezahlen für y als 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 und die für z als 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, jede sowohl positiv als negativ, gewonnen. Weil aber $x = y + 1$ und $x = z - 1$, so entstehen zwei neue Reihen positiver Versuchswerthe für x: aus den y die 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, aus den z die 0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99. Nur $x = 3$ und $x = 4$ kommen gleichzeitig in allen drei Reihen möglicher Werthe von x vor, und mit diesen Zahlen hat man also die Rechnung wirklich anzustellen, welche alsdann zeigt, dass hier in der That Wurzelwerthe vorliegen.

Die Veröffentlichung dieses recht zweckmässigen Abkürzungsverfahrens fand, wie unser Citat erkennen lässt, in der zweiten lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 statt. Eine weitere Ausdehnung desselben auf irrationale Wurzeln von einer gewissen

---

[1]) **Descartes**, Geom. I, 307.

Form ist um 1700 dem Hamburger Mathematiker Heinrich Meissner gelungen [1]).

Unter den Erläuterungen, welche der lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 beigefügt sind, rühren die zuerst gedruckten von Florimond de Beaune [2]) (1601—1652) her, der zugleich als der erste französische Anhänger von Descartes zu nennen ist, welcher dessen Geometrie studirte und bewunderte. Descartes, welchem die Erläuterungen vor ihrer Veröffentlichung vorlagen, billigte dieselben vollkommen, als seine Gedanken durchaus richtig wiedergebend. Dabei war de Beaune nicht Mathematiker von Beruf, sondern zu Anfang Officier, später Rath am Gerichtshofe zu Blois, seiner Vaterstadt, wo auch Descartes, mit welchem er seit 1626 in Verbindung stand, 1644 eine Zeit lang sein Gast war. In den Erläuterungen geht De Beaune unter Anderem auf die gegenseitige Beziehung zwischen den beiden Gleichungen

$$y^4 + py^2 + qy - r = 0 \quad \text{und} \quad z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0$$

(S. 797) näher ein [3]). Zwischen den beiden Unbekannten y und z möge der Zusammenhang stattfinden:

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z} = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p = \frac{q}{2z} - zy.$$

Quadrirt man letztere Gleichung, so entsteht

$$y^4 + z^2y^2 + \frac{1}{4}z^4 + py^2 + \frac{1}{2}pz^2 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{q^2}{4z^2} - qy + z^2y^2$$

oder

$$y^4 + py^2 + qy + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}pz^2 - \frac{q^2}{4z^2} + \frac{1}{4}p^2 = 0.$$

Da aber $y^4 + py^2 + qy = r$ gegeben ist, so geht die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$\frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{2}pz^2 - \frac{q^2}{4z^2} + \frac{1}{4}p^2 + r = 0$$

über oder nach Vervielfachung mit $4z^2$ in

$$z^6 + 2pz^4 + (p^2 + 4r)z^2 - q^2 = 0,$$

wie es bei Descartes sich findet. Kennt man erst z aus der letzteren Gleichung, so ist es leicht, y aus der nach dieser Unbekannten nur noch quadratischen Gleichung

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z} = 0$$

zu finden. Man kann aber ausserdem jetzt auch $y^4 + py^2 + qy - r$ in zwei quadratische Factoren zerfällen, deren einer

---

[1]) Zeitschr. Math. Phys. XXXV. Hist.-liter. Abthlg. S. 180—181. [2]) Montucla II, 145. [3]) Descartes, Geom. I, 137—139.

$$y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}$$

heissen muss, während der andere $y^2 - zy + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}$ ist.

Franciscus van Schooten, welcher gleichfalls Erläuterungen beigab, hat die Factorenzerlegung des Gleichungspolynoms 4. Grades etwas anders eingeleitet[1]). Um $x^4 - px^2 - qx + r = 0$ auf zwei quadratische Gleichungen zurückzuführen, setzt er

$$x^4 - px^2 - qx + r = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v)$$
$$= x^4 + (z - y^2 + v)x^2 + (vy - zy)x + vz,$$

und nun zerfällt diese Gleichung nach einem Gedanken, der offenbar eine der ersten Anwendungen der Descartes'schen Methode der unbestimmten Coefficienten durch einen anderen als ihren Erfinder darstellt, in die drei neuen Gleichungen $z - y^2 + v = -p$, $-zy + vy = -q$, $vz = r$. Daraus ergebe sich, sagt Van Schooten, ohne den Gang des Eliminationsverfahrens anzudeuten, der übrigens bei den nach z und v linearen beiden ersten Gleichungen auf der Hand liegt, $z = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, $v = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\cdot$ Einführung dieser Werthe in $vz = r$ giebt nach weiteren Umformungen, welche Van Schooten wieder dem Leser überlässt, die nach y^2 kubische Gleichung $y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$, aus welcher die Kenntniss von y folgt. Einsetzung der Werthe z und v in die vorher angenommenen Factoren giebt denselben die Gestalt

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$$

und

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\cdot$$

Jeder dieser Factoren gleich Null gesetzt, lässt endlich zwei Wurzelwerthe von x entdecken.

De Beaune hat ausser jenen Erläuterungen zu bestimmten einzelnen Stellen der Descartes'schen Geometrie auch eine Schrift *De limitibus aequationum* hinterlassen, welche gleichfalls Aufnahme fand[2]). Sie hat einen Untersuchungsgegenstand ganz neuer Art. Sie fragt nämlich, wenn auch nur in ganz besonderen Fällen, nach leicht bestimmbaren Grenzwerthen, zwischen welchen die Gleichungswurzel enthalten sein muss. Aus $x^2 - lx + m^2 = 0$ folgt beispielsweise $m^2 = lx - x^2$, d. h. $lx - x^2$ muss positiv und $l > x$ sein. Andererseits folgt aber auch $x^2 = lx - m^2$, d. h. $lx - m^2$ muss positiv und $x > \frac{m^2}{l}$ sein. Bei der kubischen Gleichung

[1]) Descartes, Geom. I, 315. [2]) Ebenda II, 121—152.

$$x^3 + lx^2 - m^2x + n^3 = 0$$

ergeben sich die Grenzen folgendermassen. Es ist $x^3 + lx^2 = m^2x - n^3$ positiv, mithin $x > \frac{n^3}{m^2}$. Es ist aber auch $x^3 + n^3 = m^2x - lx^2$ positiv, mithin $x < \frac{m^2}{l}$. Statt der letzteren oberen Grenze ist auch eine anderweitige angebbar. Man kann nämlich das Positivsein von $lx^2 + n^3 = m^2x - x^3$ als massgebend betrachten, woraus $m^2 > x^2$, d. h. $x < m$ hervorgeht.

Die Factorenzerlegung eines Gleichungspolynoms, mit welchem nach Descartes De Beaune und Van Schooten, wie wir wissen, sich beschäftigten, reizte auch einen zweiten holländischen Schriftsteller: Johann Hudde[1]. Im Jahre 1628 in Amsterdam geboren und unter dem 23. April in das dortige Taufbuch eingetragen, begab er sich 1659 nach vollendetem Rechtsstudium nach Frankreich. Von dort zurückgekehrt, trat er 1667 in die Verwaltung seiner Vaterstadt, welcher er nicht weniger als 19mal als Bürgermeister vorstand. Er starb 1704. Schon im Juli 1657, also als Rechtsstudirender in einem Alter von wenig über 29 Jahren, schrieb Hudde an Van Schooten einen Brief: *De reductione aequationum*, welchen dieser abdrucken liess[2]. Unter Reduction versteht Hudde die Zerlegung des Gleichungspolynoms in Factoren. Dabei hat Hudde in der XXI. Regula, 4. Exemplum[3] auch die Auflösung kubischer Gleichungen, allerdings in nicht wesentlich verschiedener Art als die Italiener gelehrt. Ausgehend von $x^3 = qx + r$ setzt Hudde $x = y + z$ mithin $x^3 = y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 = qx + r$ und zerlegt die Gleichung in zwei neue $3zy^2 + 3z^2y = qx$ und $y^3 + z^3 = r$. Die erstere geht über in $3zyx = qx$ oder $y = \frac{\frac{1}{3}q}{z}$, und durch Einsetzung dieses Werthes verwandelt sich die zuvor in $y^3 = r - z^3$ umgeformte zweite Gleichung in $\frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} = r - z^3$. Daraus folgt

$$z^3 = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3} \text{ und } y^3 = r - z^3 = \frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}.$$

Weil aber y und z sich einzig dadurch unterscheiden, dass das vor-

[1]) *Oeuvres complètes de Christian Huygens* I, 514, Note 2. — D. J. Korteweg, Das Geburtsjahr von Johannes Hudde (Zeitschr. Math. Phys. XLI. Hist.-liter. Abthlg. S. 22—23). Den Eintrag in das Taufbuch fand K. O. Meinsma und widerlegte dadurch eine frühere Vermuthung, nach welcher Hudde schon 1623 geboren wäre. [2]) Descartes, Geom. I, 407—506. [3]) Ebenda I, 499—500.

kommende Doppelzeichen einmal $\pm$ und einmal $\mp$ heisst, und man nur der Summe $y + z$ bedarf, so genügt es beidemal, das obere Zeichen allein zu schreiben, und man hat

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Ferner findet sich schon in diesem Briefe als X. Regula[1]) gelegentlich die Frage behandelt, wie man entscheiden könne, ob eine Gleichung zwei oder gar mehrere gleiche Wurzeln besitze, und dieselbe sogenannte Hudde'sche Regel erscheint wieder, und zwar bewiesen[2]), in einem zweiten Briefe vom Januar 1658, welcher die Ueberschrift trägt: *De maximis et minimis.*

Die Regel besteht in Folgendem. Man bildet eine beliebige steigende oder fallende arithmetische Progression, unter deren Gliedern auch die Null vorkommen darf, und setzt dieselbe unter die auf einander folgenden Glieder des zu untersuchenden Gleichungspolynoms, dessen etwa fehlende Glieder mit dem Coefficienten 0 geschrieben oder sonstwie, etwa durch Sternchen, angedeutet werden. In dieser Stellung multiplicirt man jedes Glied des Gleichungspolynoms mit dem gerade unter ihm befindlichen Gliede der arithmetischen Reihe und vereinigt die sämmtlichen Producte zu einem neuen Gleichungspolynom, welches wieder gleich 0 gesetzt wird. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vorgelegte Gleichung mehrfach auftretende Wurzeln besass, besteht alsdann in dem Vorhandensein eines Gemeintheilers zwischen dem ursprünglichen und dem zuletzt erhaltenen Gleichungspolynome.

Suchen wir den Beweis einem heutigen Leser etwas mundgerechter zu machen, so sieht er folgendermassen aus. Es sei

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

multiplicirt mit $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$ und das Product gleich Null gesetzt, so wissen wir zum voraus, dass die so entstehende Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x^{m+2} + (a_1 - 2b)x^{m+1} + (a_2 - 2a_1 b + b^2)x^m + \cdots \\ & + (a_m - 2a_{m-1}b + a_{m-2}b^2)x^2 + (-2a_m b + a_{m-1}b^2)x \\ & + a_m b^2 = 0 \end{aligned}$$

zwei gleiche Wurzeln $x = b$ besitzen wird. Die darunter zu setzende arithmetische Reihe heisst in ihren drei Anfangsgliedern α, $\alpha + \delta$, $\alpha + 2\delta$, in ihren drei letzten Gliedern $\alpha + m\delta$, $\alpha + (m + 1)\delta$, $\alpha + (m + 2)\delta$. Multiplication der Reihenglieder mit den Gliedern

[1]) Descartes, Geom. I, 433—439. [2]) Ebenda I, 507—509.

der Gleichung I. in der vorbeschriebenen Weise liefert die neue Gleichung

$$\begin{aligned} \text{II. } & \alpha x^{m+2} + ((\alpha+\delta)a_1 - (2\alpha+2\delta)b)x^{m+1} \\ & + ((\alpha+2\delta)a_2 - (2\alpha+4\delta)a_1 b + (\alpha+2\delta)b^2)x^m + \cdots \\ & + ((\alpha+m\delta)a_m - (2\alpha+2m\delta)a_{m-1}b + (\alpha+m\delta)a_{m-2}b^2)x^2 \\ & + \big(-(2\alpha+(2m+2)\delta)a_m b + (\alpha+(m+1)\delta)a_{m-1}b^2\big)x \\ & + (\alpha+(m+2)\delta)a_m b^2 = 0 \end{aligned}$$

und diese Gleichung ebenso wie die Gleichung I. ist durch $x - b$ theilbar. Die Ausführung der Division des Gleichungspolynoms II. durch $x - b$ liefert nämlich den Quotienten

$$\begin{aligned} & \alpha x^{m+1} + ((\alpha+\delta)a_1 - (\alpha+2\delta)b)x^m \\ & + ((\alpha+2\delta)a_2 - (\alpha+3\delta)a_1 b)x^{m-1} + \cdots \\ & + \big((\alpha+m\delta)a_m - (\alpha+(m+1)\delta)a_{m-1}b\big)x \\ & - (\alpha+(m+2)\delta)a_m b. \end{aligned}$$

Wurde dagegen

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

nur mit $x - b$ multiplicirt und dieses Product gleich Null gesetzt, so wird, sofern über die Coefficienten a ganz frei verfügt werden kann, die nunmehr entstehende Gleichung I′. keine zwei gleiche Wurzeln $x = b$ enthalten, dagegen durch $x - b$ selbstverständlich theilbar sein. Man behandelt sie genau so wie vorher die Gleichung I. Das Ergebniss ist alsdann eine neue Gleichung

$$\begin{aligned} \text{II}'. \ & \alpha x^{m+1} + (\alpha+\delta)(a_1 - b)x^m + (a+2\delta)(a_2 - a_1 b)x^{m-1} + \cdots \\ & + (\alpha+(m-1)\delta)(a_{m-1} - a_{m-2}b)x^2 \\ & - (\alpha+m\delta)a_{m-1}bx - (\alpha+(m+1)\delta)a_m b = 0, \end{aligned}$$

deren Gleichungspolynom nicht durch $x - b$ theilbar ist. Die Ausführung der Division lässt nämlich gleich in den Anfangsgliedern des Quotienten

$$\alpha x^m + ((\alpha+\delta)a_1 - \delta b)x^{m-1} + ((\alpha+2\delta)a_2 - \delta a_1 b - \delta b^2)x^{m-2} + \cdots$$

erkennen, dass der Coefficient jeder folgenden Potenz von x immer länger wird. Er besteht bei x^m aus einem, bei x^{m-1} aus zwei, bei x^0 aus $m+1$ Theilen, und diese können mit $-b$ multiplicirt unter keinen Umständen $-(\alpha+(m+1)\delta)a_m b$ liefern, d. h. die Division geht nicht auf.

Fermat's Namen in der Geschichte der algebraischen Untersuchungen auftreten zu sehen wird Niemand in Verwunderung setzen Es sind zwei hochbedeutende Aufgaben, welche er sich stellte, und welche er mit einander in Verbindung brachte. Die erste ist die

des Rationalmachens von Gleichungen[1]). Fermat erläutert zwar sein Verfahren nur an einem einzelnen Beispiele, aber es ist so methodisch, dass es als Muster für das Verfahren auch in jedem anderen Falle dienen kann. Wir benutzen bei der Darstellung gleich Fermat lateinische Initialen, A als Unbekannte, B, D als bekannte Grössen, aber ungleich Fermat wenden wir Wurzelzeichen, Exponenten und Gleichheitszeichen an. Die Gleichung

$$\sqrt[3]{2A^2 - A^3} + \sqrt[3]{A^3 + B^2A} = D$$

sei also von den Assymetrien, wie die Irrationalitäten nach Vieta's Vorgange genannt werden, zu befreien. Man bringt eine Wurzelgrösse z. B. $\sqrt[3]{2A^2 - A^3}$ allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens und ersetzt sämmtliche andere auf der entgegengesetzten Seite des Gleichheitszeichens vorhandene Wurzelgrössen (hier nur die einzige $\sqrt[3]{A^3 + B^2A}$) durch einfache Buchstaben. Man gewinnt also zwei Gleichungen

$$\sqrt[3]{A^3 + B^2A} = E \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{2A^2 - A^3} = D - E.$$

Wäre etwa noch eine dritte Wurzelgrösse vorhanden, welche mit I bezeichnet würde, so käme als dritte Gleichung die Definitionsgleichung von I hinzu, während in der zweiten Gleichung ein weiteres Glied $-I$ zur Rechten aufträte. Sämmtliche nunmehr vorliegende Gleichungen lassen durch einfache Potenzerhebung sich rationalisiren. In dem gegebenen Falle genügt die Erhebung auf die 3. Potenz, welche folgende zwei neue Gleichungen liefert:

$$A^3 + B^2A = E^3, \quad 2A^2 - A^3 = D^3 - 3D^2E + 3DE^2 - E^3,$$

und die Aufgabe ist somit gelöst, wenn zwischen diesen Gleichungen die Hilfsunbekannte E eliminirt werden kann. Das Rationalmachen einer Gleichung, innerhalb deren n Irrationalgrössen auftreten, ist folglich auf eine durchaus andere Aufgabe zurückgeführt, auf die der Elimination von $n-1$ Unbekannten zwischen n Gleichungen höheren Grades. Diese zweite Aufgabe behandelt Fermat gleichfalls methodisch, allerdings zunächst unter der Voraussetzung $n = 2$, also so dass, wie in dem angeführten Beispiele, eine Unbekannte zwischen zwei Gleichungen wegzuschaffen ist. Er verfährt dabei folgendermassen[2]): Die Gleichungen werden so geschrieben,

---

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 60 und in der neuen Ausgabe der *Oeuvres de Fermat* (Paris 1891) I, 184—188. Die Darstellung in Klügel's Mathematischem Wörterbuche II, 953 ist ganz ausnahmsweise durchaus mangelhaft.
[2]) Ebenda pag. 58—59. *Oeuvres* I, 181—184: *Nova secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus.*

dass alle Glieder, welche die zu eliminirende Grösse enthalten, auf der einen, alle, welche sie nicht enthalten, auf der anderen Seite des Gleichheitszeichen stehen. Division mittels der die zu eliminirende Grösse nicht enthaltenden Gleichungsseite bringt jede der beiden Gleichungen auf die Form, dass die Einheit einem Ausdrucke gleich kommt, welcher die zu eliminirende Grösse als heraustretenden Factor besitzt. Gleichsetzung der beiden Einheitswerthe gestattet demnach eine durch Division zu bewirkende Herabsetzung des Grades in Bezug auf die zu eliminirende Grösse. Fortsetzung des gleichen Verfahrens unter stetiger Anwendung der vorhandenen Gleichungen niedrigsten Grades lässt schliesslich die zu eliminirende Grösse ganz in Wegfall bringen. Das Beispiel Fermat's ist $A^3 + E^3 = Z^3$ nebst

$$BA + E^2 + DE = N^2.$$

Fermat findet $1 = \frac{E^3}{Z^3 - A^3}$ und $1 = \frac{E^2 + DE}{N^2 - BA}$, also $\frac{E^2}{Z^3 - A^3} = \frac{E + D}{N^2 - BA}$. Letztere Gleichung geht über in $1 = \frac{(N^2 - BA)E^2 - (Z^3 - A^3)E}{D(Z^3 - A^3)}$ und dieser Einheitswerth wird mit $1 = \frac{E^2 + DE}{N^2 - BA}$ verglichen. Dabei erscheint nach abermaliger Division durch E die neue Gleichung

$$\frac{E + D}{N^2 - BA} = \frac{(N^2 - BA)E - (Z^3 - A^3)}{D(Z^3 - A^3)},$$

welche die Auffindung von E gestattet. Einsetzung von dessen Werth in $E^2 + DE = N^2 - BA$ vollendet die Elimination, aber diese letzten mit allgemeinen Buchstabenausdrücken mühseligen Ausführungen schenkt Fermat sich und seinen Lesern. Zum Schlusse der kurzen Abhandlung deutet Fermat an, dass wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten vorliegen, zunächst auf die Elimination einer Unbekannten hingearbeitet werden müsse, so dass man noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten behalte, worauf das eben gelehrte Verfahren zur wiederholten Anwendung gebracht eine Schlussgleichung mit einer einzigen Unbekannten entstehen lasse, und das Gleiche gelte bei noch mehr Gleichungen mit einer entsprechenden Anzahl von Unbekannten.

Was die Frage betrifft, wann Fermat diese algebraischen Untersuchungen anstellte, so ist mit Recht der 26. December 1638 als Zeitpunkt angegeben worden, zu welchem er sie schon besass[1]), denn in einem Briefe an Mersenne von jenem Tage spricht er bereits von

[1]) Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat* pag. 13 mit Bezugnahme auf Henry, *Recherches sur les manuscrits de Fermat* pag. 178 (*Bullet. Boncamp.* XII, 652).

einer Curve, an welche er die Tangente ziehen könne, und welche (wenn wir neuere Schreibart anwenden) die Gleichung

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{cx - x^2} + \sqrt{\frac{x^3 - ax^2}{b}} + \sqrt{\frac{x^4 + b^2x^2}{a^2 + x^2}}$$

besitze. Er setzt hinzu, seine Methode genüge auch, wenn der Werth der Ordinate hundert und noch mehr Glieder enthielte, *serait composée de centinomies ou plus grand nombres de termes.* Später am 20. August 1650 kam Fermat in einem Briefe an Carcavy[1]) auf eine ganz ähnliche Tangentenaufgabe zu reden, in welcher die Curvengleichung 2., 3., 4. und 5. Wurzeln enthält. Er habe, sagt er dabei, nicht zögern wollen mit der Uebersendnng seiner *Méthode genérale pour le debrouillement des assymétries.* Damals waren also die betreffenden Abhandlungen jedenfalls niedergeschrieben.

77. Kapitel.

Geometrische Gleichungsauflösungen. Analytische Geometrie.

Bei Schilderung der algebraischen Leistungen der unserer Betrachtung unterworfenen Zeit haben wir bisher eine Gattung von Untersuchungen vernachlässigt, diejenigen, welche trigonometrische und geometrische Lehren in den Dienst der Algebra stellen. Vieta hatte bereits (S. 636) den irreductiblen Fall der kubischen Gleichungen trigonometrisch behandelt. Es müsste Staunen erregen, wenn Männer, wie die von uns in diesem Abschnitte behandelten, die aus Vieta's Schriften die mannigfachste Anregung geschöpft haben, gerade an diesen Dingen vorbeigegangen wären.

Girard in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* löst die Gleichung $x^3 = 13x + 12$ geometrisch wie folgt (Figur 144). Mit $\sqrt{\frac{13}{3}}$ als Halbmesser wird um H als Mittelpunkt ein Halbkreis beschrieben. Dann wird $12 : \frac{13}{3} = FG$ aufgetragen, welches immer möglich sei, und der Bogen GK mit Hilfe einer Hyperbel (denn mit Zirkel und Lineal gehe es nicht) in drei gleiche Theile GJ, JL, LK getheilt; FL ist alsdann eine Gleichungswurzel. Wird wieder um H mit KL als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, der FL in M und N

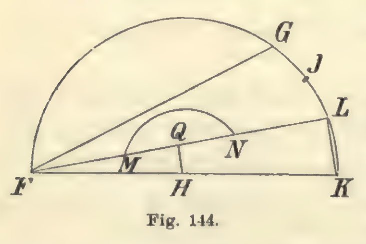


Fig. 144.

[1]) Henry l. c. pag. 193 (XII, 667).

schneidet, so seien $-FN$ und $-FM$ die beiden anderen Gleichungswurzeln. Ein Beweis, den Girard kaum andeutet, lässt sich ziemlich leicht herstellen. Die Gleichung heisse $x^3 = px + q$, und es sei $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; der Halbmesser r des Halbkreises wird von der Länge $\sqrt{\frac{p}{3}}$ gewählt und $FG = q : \frac{p}{3} = \frac{3q}{p} < 2r$ unter Voraussetzung der angegebenen Ungleichung, so dass man die Richtigkeit der Bemerkung erkennt, FG, welches kleiner als der Durchmesser ist, könne als Sehne eingezeichnet werden. Nun heisse der Winkel $GFK = 3\varphi$, der Winkel $LFK = \varphi$. Es ist

$$FG = 2r \cdot \cos 3\varphi, \quad FL = 2r \cdot \cos\varphi.$$

Aber

$$\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi,$$

demnach

$$FG = 2\sqrt{\frac{p}{3}}(4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi) = \frac{3q}{p}$$

und folglich

$$q = \sqrt{\frac{p^3}{27}}(8\cos\varphi^3 - 6\cos\varphi).$$

Nun ist weiter

$$8\cos\varphi^3 = \frac{FL^3}{r^3} = \frac{FL^3}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}, \quad 6\cos\varphi = \frac{3FL}{r} = \frac{p}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}FL.$$

Die gefundene Gleichung geht dadurch in $q = FL^3 - p \cdot FL$ über, woraus $FL = x$ ersichtlich ist. Zieht man die bei Girard nicht vorhandene Hilfslinie $HQ \parallel KL$, so ist leicht abzuleiten

$$-FM = 2r \cdot \cos(120^0 - \varphi), \quad -FN = 2r \cdot \cos(120^0 + \varphi),$$

wodurch auch diese Wurzelwerthe sich rechtfertigen.

Nur sehr unwesentlich verschieden ist die Figur, unter deren Zugrundelegung (Figur 145) Franciscus van Schooten eben jene Gleichung $x^3 = 13x + 12$, von welcher er sagt, dass er sie Girard entlehne, zur Auflösung bringt[1]). Der Kreishalbmesser FH ist wieder $\sqrt{\frac{13}{3}}$, die Sehne FG wieder $\frac{36}{13}$, der Kreisbogen GK ist in die drei gleichen Theile $GJ = JL = LK$ getheilt und sodann $FL = x$ gezogen. Neu ist aber, dass nunmehr das gleich-

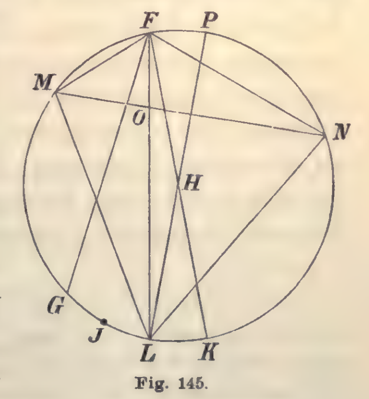


Fig. 145.

[1]) Descartes, Geom. *Appendix de cubicarum aequationum resolutione* I, 345—368, vergl. namentlich pag. 349.

seitige Sehnendreieck LMN mit L als Eckpunkt gezeichnet wird und dadurch die Sehnen FM, FN zur Construction gelangen, welche negativ genommen die beiden anderen Gleichungswurzeln sind. Auch der Beweis ist bei Van Schooten anders angelegt als bei Girard, nämlich alterthümlicher. Von irgend trigonometrischen Functionen ist nicht Gebrauch gemacht, vielmehr sind noch weitere Hilfslinien gezogen, welche ähnliche Dreiecke hervorbringen, und dann führen die Proportionalitäten entsprechender Seiten zu dem gewünschten Ergebnisse.

Auch die Auflösung einer kubischen Gleichung mittels der Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Parabel fehlt nicht in dieser Literatur. Descartes hat sie gelehrt[1]) und Van Schooten hat in seinen Erläuterungen gezeigt[2]), dass die Durchschnittspunkte eines Kreises mit einer Hyperbel zum Auffinden der Wurzeln einer vollständigen kubischen Gleichung führen, ohne dass man genöthigt wäre, das quadratische Glied zuvor wegzuschaffen, wie Descartes es thut. Aehnliches endlich lehren beide, Descartes und Van Schooten für die geometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen ohne und mit kubischem Gliede[3]).

Demselben Gebiete gehören die Leistungen eines belgischen Schriftstellers an. René François de Sluse[4]) (1622—1685) stammt aus Visé an der Maas zwischen Lüttich und Maastricht. Sein Vater war Notar, Oheime von mütterlicher Seite waren kirchliche Würdenträger. Einer derselben zog De Sluse um 1643 nach Rom, wo er am Collegium der Sapienza die vielseitigen Studien fortsetzte, welche er in Lüttich begonnen hatte, und wo er den Titel eines Doctors beider Rechte erwarb. Seit 1651 war er Domherr in Lüttich. Er gab 1659 unter dem Titel *Mesolabum* eine Schrift heraus, welche die Aufgabe der Einschaltung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Strecken und ebenso die Aufgabe der Dreitheilung eines gegebenen Winkels mit Hilfe eines Kreises und irgend eines Kegelschnittes löste. Eine zweite Auflage des Mesolabum von 1668 brachte als wesentliche Ergänzung die Erörterung, dass jene Aufgaben auf kubische Gleichungen führten und deshalb ebenso wie alle ähnlichen Aufgaben durch die benutzten Curven construirt werden könnten[5]).

---

[1]) Descartes, Geom. I, 85—95. [2]) Ebenda I, 327. [3]) Ebenda, I, 85—95 und 325. [4]) Ueber De Sluse hat C. Le Paige eine umfassende, alle einschlagenden Fragen behandelnde Abhandlung im *Bulletino Boncompagni* XVII veröffentlicht. Dort ist auch die Richtigkeit der Schreibart Sluse gegenüber von Sluze festgestellt. Ueber die mathematischen Leistungen verbreiten sich pag. 470—480. [5]) *Ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas.*

Eine geometrische Aufgabe, welche algebraisch behandelt zu einer biquadratischen Gleichung geführt hätte, ist in einem 1630 gedruckten Werke, dessen Verfasser aber schon 1627 verstorben ist, behandelt. Marino Ghetaldi, um ihn handelt es sich, ist uns (S. 653) als Wiederhersteller einer Schrift des Apollonius bekannt geworden. Wir hätten unter den eigentlichen Geometern ihn gleichfalls im Vorbeigehen nennen dürfen wegen seiner *Variorum problematum collectio*[1]) von 1607, welche geometrisch solche Aufgaben löst, an die Regiomontanus und Andere mit den Hilfsmitteln der Algebra herangetreten waren. Hier haben wir es mit seinem nachgelassenen Werke *De resolutione et compositione mathematica*[2]) zu thun. Es sind fünf Bücher, von denen die vier ersten algebraischen und geometrischen Behandlungen von Aufgaben gewidmet sind, welche sämmtlich in Gleichungsform gebracht den zweiten Grad nicht übersteigen und sonderliche Schwierigkeiten nicht darbieten, auch neue Gedanken nicht nöthig machten noch förderten. Das 5. Buch in vier Kapitel getheilt hat einen anderen Charakter. Das 1. Kapitel beschäftigt sich ausser mit der archimedischen Kronenaufgabe mit arithmetischen Progressionen, löst aber die hier auftretenden Aufgaben nicht nach den damals längst bekannten Formeln, sondern nach Proportionen. Die erste dieser Aufgaben verlangt z. B. die Herstellung sämmtlicher Glieder der Progression, wenn deren Summe, das erste und das letzte Glied gegeben sind. Auffindung der Differenz d mittels jener gegebenen Grössen s, a, t ist demnach erforderlich. Ghetaldi geht dazu von der Proportion aus $2s:(a+t)=(t-a+d):d$, aus welcher die weitere folgt $(2s-a-t):(a+t)=(t-a):d$, und nun ist die Aufgabe gelöst. Das 2. Kapitel hat es mit neun unmöglichen Aufgaben[3]) zu thun, und Ghetaldi versteht darunter solche, die zu Gleichungen mit nur imaginären Wurzelwerthen führen oder zu der Wurzel 0, welche geometrischer Deutung unfähig ist. Zur letzteren Gattung gehört die Aufgabe, eine gerade Linie so zu schneiden, dass das Rechteck unter ihren Theilen mit dem Quadrate des Unterschiedes der Theile so viel betrage, als die Summe der Quadrate der Theile. Ist $2b$ die Summe, $2a$ der Unterschied der Theile, so heissen die Theile selbst $b+a$ und $b-a$, und es wird also verlangt

$$(b+a)\cdot(b-a)+(2a)^2=(b+a)^2+(b-a)^2$$

oder

$$b^2+3a^2=2b^2+2a^2,\ \text{d. h. } b^2=a^2, \text{ und } b=\pm a,$$

---

[1]) Kästner III, 187—188. [2]) Ebenda III, 188—195. — E. Gelcich in Zeitschr. Math. Phys. XXVII, Supplementheft, besonders S. 199—214. [3]) *Problemata impossibilia, ex quorum resolutionibus cognoscitur eorum impossibilitas.*

wodurch einer der Theile zu 0 wird, d. h. die Linie ist gar nicht geschnitten. Zur anderen Gattung gehört die neunte Aufgabe, welche als Gleichung $3x(a - x) = a^2$ heisst. Denn diese giebt

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{6}\sqrt{-3}.$$

Das 3. Kapitel vereinigt fünf eitle oder Scherzaufgaben[1]. Auch unter diesem Namen sind zweierlei Gruppen vereinigt: Aufgaben, die durch jede beliebige, und solche, die durch unendliche viele Annahmen befriedigt werden[2]. Die erste Gruppe ist also dadurch gekennzeichnet, dass sie auf identische, die zweite dadurch, dass sie auf unbestimmte Gleichungen sich zurückführt. In die erste Gruppe gehört z. B. die erste Aufgabe: Eine gegebene Strecke a derart zu theilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem Unterschiede der Theile nebst dem Quadrate des kleineren Theiles dem Quadrate des grösseren Theiles gleich werde, denn

$$a \cdot \left[\left(\frac{a}{2} + x\right) - \left(\frac{a}{2} - x\right)\right] + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

ist eine Identität. Andere Aufgaben sind unbestimmt, so die vierte: Ueber einer gegebenen Grundlinie ein Dreieck zu zeichnen, dessen beide anderen Schenkel die halbe Grundlinie zum Unterschiede haben. Die Spitze des Dreiecks liegt auf einer Hyperbel, was aber Ghetaldi nicht bemerkt zu haben scheint[3]. Das 4. Kapitel endlich enthält acht Aufgaben, welche nicht in das Bereich der Algebra fallen[4], d. h. solche, welche Ghetaldi nicht in Gleichungsform zu bringen wusste. Unter ihnen ist gleich die erste diejenige, welche wir meinten, als wir von einer Aufgabe sprachen, die richtig angefasst zu einer Gleichung 4. Grades hätte führen müssen. Eine Seite eines gegebenen Rhombus wird verlängert, dann soll in dem entstehenden Aussenwinkel eine gegebene Strecke so eingezeichnet werden, dass ihre Verlängerung in den Eckpunkt des Rhombus eintrifft, welcher dem Scheitel des Aussenwinkels gegenüberliegt[5]. Ist (Figur 146) a die Seitenlänge des Rhom-

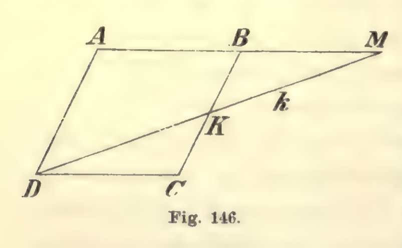


Fig. 146.

[1]) *Problema vanum seu nugatorium.* [2]) *cum id, quod Problema fieri jubet, quacumque ratione fiat Problemati satisfit, vel cum Problema infinitis modis construi potest.* [3]) Ist $2a$ die gegebene Grundlinie zugleich Richtung der Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfangspunkt in der Mitte der Grundlinie liegt, so heisst die Gleichung des Ortes der Dreiecksspitze

$$y^2 - 3x^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

Vergl. Kästner III, 190. [4]) *De resolutione et compositione problematum quae sub Algebram non cadunt.* [5]) *Rombo dato et uno latere producto aptare sub*

bus, k die Länge der einzuzeichnenden Strecke MK, und wird $\sphericalangle BCD = \alpha$, $BM = x$ gesetzt, so ist

$$KD = \frac{ak}{x}, \quad KC = a - BK = a - \frac{ax}{x+a} = \frac{a^2}{x+a}$$

und im Dreiecke CDK findet die Gleichung statt

$$\left(\frac{ak}{x}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{x+a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a^2}{x+a} \cdot \cos\alpha$$

oder

$$(x^2 - k^2)(x+a)^2 = (2(a+x)\cos\alpha - a)ax^2,$$

welche zu construiren bleibt[1]). Ghetaldi benutzt aber diesen Weg nicht, wie er überall die Anwendung trigonometrischer Functionen vermeidet, so sehr die Lösung der Aufgaben dadurch beschleunigt würde. Ihm war offenbar, trotz Regiomontanus und Vieta, welche er sorgsam studirt hatte, die Handhabung jener Functionen nicht ganz geläufig. Er versuchte lieber, und so auch bei der Aufgabe, von der wir gerade reden, eine geometrische Analysis in antikem Sinne und liess dann die Construction und deren Beweis folgen.

Fasst man die Leistungen Ghetaldi's mit denen von Girard, von Descartes, von Van Schooten, von Sluse zusammen, über welche wir hier neben einander berichtet haben, so erkennt man überall das Bestreben, bald die Geometrie der Algebra, bald die Algebra der Geometrie dienstbar zu machen, aber nirgend erhebt sich das Bestreben höher als bis zur Construction gewisser Strecken, die in Gleichungen als Unbekannte vorkommen. Am nächsten war Ghetaldi einem grossen, jetzt mit Nothwendigkeit zu vollziehenden Fortschritte bei den unbestimmten Aufgaben des 3. Kapitels seines 5. Buches. Dort musste er bei richtiger Fragestellung zu einer Gleichung zwischen zwei unbekannten Strecken gelangen, musste er dem geometrischen Sinne dieser Gleichung nachforschen. Er hat die Frage nicht richtig gestellt, und so entging ihm der Blick in ein von Oresme aus der Ferne gezeigtes, aber noch niemals eigentlich betretenes Gebiet.

Glücklicher, denn etwas Glück gehört auch zu den grössten Entdeckungen, waren Fermat und Descartes. Jener dürfte den entscheidenden Schritt früher unternommen haben, dieser veröffentlichte früher seine unabhängig von Fermat gewonnenen Ergebnisse, und da die Geschichte unwiderruflich die Veröffentlichungszeit als allein massgebend betrachten muss, wo Erstlingsrechte zu vergeben sind, so müssen wir zur Géométrie des Descartes von 1637 und deren geo-

---

angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertingat.

[1]) Ueber die Bedeutung der vier Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung vergl. Kästner III, 192—193.

metrischen Inhalt uns wenden. Er besteht, um ihn mit einem heute allgemein verständlichen Namen zu kennzeichnen, aus der analytischen Geometrie der Ebene mit einem fast verstohlen geäusserten Gedanken einer analytischen Geometrie des Raumes.

Eine Schaar von unter einander parallelen Geraden wird gedacht, welche auf einer zu ihr senkrechten Geraden gewisse Strecken von einem angenommenen Anfangspunkte aus abschneidet. Endpunkte der Parallelen liegen dann in irgend einer Curve, und wenn zwischen den Strecken der geschnittenen Geraden und der durch sie und die Curve begrenzten Länge der Parallelen eine von Punkt zu Punkt der Curve sich nicht ändernde Gleichung besteht, so heisst diese die Gleichung der Curve. Die Parallelen selbst heissen *omnes ordinatim applicatae*[1]), woraus die Namen Ordinaten und Applicaten entstanden, welche von nun an der analytischen Geometrie angehören sollten. Erfunden hat Descartes diese Namen nicht. *Lineae ordinatae* hiessen irgend welche Parallellinien schon bei den römischen Feldmessern (Bd. I, S. 515) und auch die Wortverbindung *ordinatim applicata* ist in einem 1615 herausgegebenen Werke Kepler's gebraucht[2]).

Von einer Begriffsbestimmung der analytischen Geometrie von der Art, wie sie hier ausgesprochen worden ist, nimmt Descartes allerdings so wenig seinen Ausgangspunkt, dass sie sich sogar nirgend bei ihm ausdrücklich ausgesprochen vorfindet; man muss sie da und dort aus seinem Verfahren herauslesen. Sein Gedankengang ist vielmehr folgender:

Das I. Buch beginnt mit der Behauptung, jede geometrische Aufgabe laufe darauf hinaus, eine Anzahl von Strecken zu kennen. Eine solche, an sich beliebig, muss dabei als Einheit angenommen werden[3]). Buchstaben, welche alsdann für einzelne Strecken gewählt werden, können in Ausdrücken in gleichen Dimensionen, *aequemultis semper dimensionibus*, vorkommen, aber nothwendig ist es nicht, weil die Einheit immer zur Erklärung zur Verfügung steht, *ubique subintellegi potest*, wo sich zu viele oder zu wenige Dimensionen finden. Ist z. B. aus $a^2b^2 - b$ die Kubikwurzel zu ziehen, so muss man sich denken, a^2b^2 sei einmal durch die Einheit dividirt, b zweimal mit derselben multiplicirt[4]). Mittels der für die Strecken eingesetzten Buchstaben, seien es Stellvertreter bekannter oder unbekannter Werthe, sind nach den Bedingungen der Aufgabe Gleichungen herzustellen,

---

[1]) Descartes, Geom. I, 38 und häufiger. [2]) Kepler, *Opera* (ed. Frisch) IV, 598: *Sit a tactu B ad diametrum ordinatim applicata BA.*
[3]) Descartes, Geom. I, 1: *quae vocetur unitas ut eo commodius ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.* [4]) Ebenda I, 3.

so viele an der Zahl, als Unbekannte vorkommen. Werden, trotzdem nichts in der Aufgabe Enthaltene vernachlässigt wurde, weniger Gleichungen als Unbekannte gefunden, so dient solches zum Beweise, dass die Aufgabe keine durchaus bestimmte ist[1]. Nun werden zunächst bestimmte Gleichungen zweiten Grades coustructiv mittels des Kreises und der Geraden gelöst, dann wird der Uebergang zur ersten unbestimmten Aufgabe gemacht, zur sogenannten Aufgabe des Pappus. Sie besteht (Bd. I, S. 423) darin, den geometrischen Ort eines Punktes von der Beschaffenheit zu finden, dass, wenn man von ihm Linien unter gegebenem Winkel nach gegebenen Geraden der Ebene zieht, das Product gewisser dieser Verbindungsgeraden zu dem Producte aller übrigen in einem gegebenen Verhältnisse stehe. Descartes behandelt sie nach seiner Methode. Er findet, dass, wenn auf einer der gegebenen Geraden ein Anfangspunkt A gewählt wird, der von dem Durchschnittspunkte B mit der nach dieser Geraden gezogenen Verbindungslinie CB von der Länge y die Entfernung x besitzt, alsdann sämmtliche übrige Verbindungslinien Längen besitzen, welche aus drei Theilen bestehen, einem Vielfachen von y, einem Vielfachen von x und einem nur Bekanntes enthaltenden Theile, jeder bald positiv bald negativ[2]. Daraus folgt aber, dass, wenn $2n$ oder $2n - 1$ Gerade gegeben sind, die Producte von n oder $n - 1$ Verbindungslinien den n^{ten} Grad nicht übersteigen und damit den Grad der entstehenden Gleichung bedingen. Bei fünf Geraden ist eine Gleichung 3. Grades zu erwarten. Nimmt man dabei y als bekannt an, so kann, weil die erste Verbindungslinie, von x unabhängig, ihre Länge einfach mit y bezeichnet, nur eine nach x quadratische Gleichung auftreten, so dass der betreffende Durchschnittspunkt B auf der ersten Geraden mittels Zirkel und Lineal gefunden werden kann. Die Länge $CB = y$ ist aber nicht bestimmt, es können als solche andere und andere Werthe ins Unendliche gewählt werden, und entsprechend finden sich unendlich viele Werthe x nebst unendlich vielen Punkten C, welche eine Curve bilden[3]. Wir brauchen kaum besonders darauf hinzuweisen, dass dieses eine von den Stellen ist, welche wir oben im Auge hatten, als wir sagten, man müsse da und dort aus Descartes' Verfahren herauslesen, worin seine Methode bestehe.

Im II. Buche giebt Descartes zunächst die Dreitheilung der

---

[1]) Descartes I, 4. [2]) Ebenda I, 14. [3]) Ebenda I, 15: *Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujusmodi est punctum C, quorum ope quaesita curva linea describetur.*

Aufgaben nach antikem Vorbilde an (Bd. I, S. 284). Ebene Oerter waren ihnen Gerade und Kreis, körperliche Oerter die Kegelschnitte, lineare Oerter alle übrigen Curven der Ebene. Descartes verlangt dagegen, man solle die Curven nach dem Grade unterscheiden[1]). Man bedürfe zu ihrer Herstellung nicht so weit hergeholter Mittel, wie z. B. das Schneiden eines Kegels durch eine Ebene, vielmehr genüge die Bewegung von zwei oder mehr Linien, die sich gegenseitig treffen[2]). Dann solle man des Weiteren die wirklich mechanischen Curven abtrennen, welche wie die Spirale, die Quadratix durch zwei Bewegungen verschiedener Natur erzeugt werden, zwischen welchen eine in genauen Zahlen ausgedrückte Beziehung nicht stattfindet[3]). Offenbar ist damit die Unterscheidung zwischen algebraischen und transcendenten Curven gemeint, wie der heutige an Leibniz sich anlehnende Sprachgebrauch sich ausdrückt. Vielleicht war die Aufgabe des Pappus für Descartes Veranlassung zu einer weiteren Unterscheidung der algebraischen Curven, deren er sich bedient. Dort sah er, dass, wenn $2n$, beziehungsweise $2n - 1$ Gerade gegeben waren, ein Product aus n Strecken gebildet werden musste, welches zu einem Producte gleicher Dimension entweder aus lauter Unbekannten oder aus $n - 1$ Unbekannten und der Einheit in Verhältniss trat. Jetzt im II. Buche unterscheidet er neben dem Grade, *gradus*, noch das Geschlecht, *genus*, der Curven. Der $2n - 1^{\text{te}}$ und $2n^{\text{te}}$ Grad bilden ihm gemeinschaftlich das n^{te} Geschlecht[4]). Dabei beeinflusst die Wahl des geradlinigen Coordinatensystems, so verschieden sie getroffen werden kann, das Geschlecht der Curven nicht[5]). Nochmaliges Zurückgreifen auf die Aufgabe des Pappus führt Descartes nun dazu, eine gewisse Strecke $\sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$ näher zu untersuchen[6]). Kommt $\frac{p}{m}x^2$ in dem Radicanden überhaupt nicht vor, so ist der Kegelschnitt, welcher als geometrischer Ort auftritt, eine Parabel; hat jenes Glied das Vorzeichen $+$, so ist eine Hyperbel entstanden, und endlich eine Ellipse, wenn das Vorzeichen $-$ heisst. Nach einigen weiteren Auseinandersetzungen gelangt Descartes zur Aufgabe, in einem Punkte einer gegebenen Curve eine Senkrechte

---

[1]) Descartes, Geom. I, 17: *Verum satis mirari non possum, quod non ulterius progressi lineas hasce magis compositas in certos distinxerint gradus.* [2]) Ebenda I, 18. [3]) Ebenda I, 18—19: *Quandoquidem illas duobus motibus describi imaginamur, qui a se invicem sunt diversi, nec ullam inter se relationem habent, quae exacte mensurari possit.* [4]) Ebenda I, 21. [5]) Ebenda I, 22: *fieri potest, ut linea eiusdem generis esse appareat.* Deutlicher war der französische Wortlaut: *on peut tousjours faire que la ligne paraisse de même genre. Oeuvres* (ed. Cousin) V, 339. [6]) Ebenda I, 29.

zu der Curve oder ihrer Berührungslinie, *contingens*, zu ziehen[1]), über deren Auflösung wir im 79. Kapitel berichten werden. Die Anwendung der Methode der Normalenziehung wird unter Anderem bei der Conchoide gemacht[2]) und besonders bei einigen Curven, welche als die Descartes'schen Ovalen[3]) bekannt geblieben sind. Es sind sogenannte Diakaustiken, d. h. sie haben die Eigenschaft, dass alle von einem Punkte ausgehenden und auf sie auffallenden und in Folge des Brechungsgesetzes gemäss einem gegebenen Brechungsexponenten abgelenkten Strahlen nach einem Punkte weiter geworfen werden, in welchem sie sich vereinigen, so dass man gewissermassen von Brennpunkten reden dürfte. Wie Descartes zu diesen Ovalen gelangt ist, sagte er nicht. Am Schlusse des II. Buches findet sich[4]), was wir einen Gedanken über die analytische Geometrie des Raumes genannt haben. Was über ebene Curven gelehrt wurde, sagt Descartes ungefähr, ist leicht auf alle solche auszudehnen, welche durch regelmässige Bewegung von Punkten im dreidimensionalen Raume, *in spatio trium dimensionum*, entstanden sind. Man braucht nur von jedem Punkte der Curve Perpendikel auf zwei zu einander senkrechte Ebenen zu fällen, denn die Endpunkte dieser Perpendikel bilden zwei Curven, je eine auf einer der beiden Ebenen, die man nach der gelehrten Methode beide auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen beziehen kann, und alsdann ist die dreidimensionale Curve vollständig bestimmt. Sogar die Normale zur Raumcurve in einem ihrer Punkte könne man so erhalten. Jenem Punkte entspricht je ein Punkt in jeder der beiden ebenen Curven, also auch je eine Normale an die betreffende ebene Curve, und Ebenen, welche durch diese Normalen senkrecht zu den Curvenebenen gelegt sind, schneiden sich in der gesuchten Normale der Raumcurve. In dieser Allgemeinheit ist die Behauptung allerdings nicht richtig, vielmehr nur dann zutreffend, wenn die Raumcurve eben ist[5]).

Das III. Buch lässt sich fast als ein Lehrbuch der Algebra bezeichnen. Nachdem in den beiden ersten Büchern gezeigt worden war, wie geometrische Aufgaben auf Gleichungen zurückgeführt werden, erwächst das Bedürfniss, mit deren Lehre genau bekannt zu sein, und desshalb setzt hier Descartes neben Anderem auch jene Sätze auseinander, über welche im 76. Kapitel berichtet ist. Eines Irrthums freilich machte er sich schuldig. Gleich zu Anfang des III. Buches giebt Descartes als Vorschrift[6]), man solle eine vor-

---

[1]) Descartes, Geom. I, 40 sqq. [2]) Ebenda I, 49. [3]) Ebenda I, 50: *Explicatio quatuor generum novarum ovalium opticae inservientum.* [4]) Ebenda I, 66. [5]) Auf die Nothwendigkeit dieser Einschränkung machte uns H. P. Stäckel aufmerksam. [6]) Ebenda I, 67.

gelegte Aufgabe nicht durch beliebige zweckdienliche Curven lösen, sondern durch die einfachsten, welche man anwenden könne. Diese Vorschrift, muss man denken, hatte er noch vor Augen, als er an die Behauptung, nur zur Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades könne man Kegelschnitte verwenden[1]), später eine weitere unrichtige Behauptung knüpfte, die sich kurz so aussprechen lässt: zur Auflösung von Gleichungen $2n - 1^{\text{ten}}$ oder $2n^{\text{ten}}$ Grades bedürfe es einer Linie n^{ten} Geschlechtes[2]). So wurde sie wenigstens von gleichzeitigen und von späteren Lesern[3]) verstanden und als irrig aufgefasst, wie wir bald sehen wollen.

Die Geometrie kam, wie wir wissen, 1637 heraus. Vor ihrem Erscheinen schrieb Fermat unter dem 22. September 1636 einen Brief an Roberval[4]), welcher für das Vorhandensein des darin Enthaltenen, bevor Fermat Einsicht in Descartes' Geometrie gewinnen konnte, beweiskräftig ist. Fermat beruft sich hier auf seine Methode *De maximis et minimis*, welche Roberval durch einen Herrn Despagnet kennen gelernt habe, welchem er, Fermat, sie vor sieben Jahren in Bordeaux mittheilte. Wir kommen damit bis zum Jahre 1629 zurück, und da die erwähnte Methode, welche wir im 79. Kapitel schildern, durchaus auf analytisch-geometrische Betrachtungen sich aufbaut, so müssen jene Grundbetrachtungen für Fermat spätestens 1629 vorhanden gewesen sein. Veröffentlicht freilich hat Fermat seine Untersuchungen erst nach 1637, in einer der betreffenden Abhandlungen kommt Descartes' Name wiederholt vor.

Die augenscheinlich älteste Fermat'sche Abhandlung über analytische Geometrie führt den Titel *At locos planos et solidos isagoge*[5]). Fermat sagt in dieser sogen. Isagoge, dass, wenn er diese Erfindung schon besessen hätte, als er vor langer Zeit die ebenen Oerter des Apollonius wiederherstellte, er dort weit eleganter hätte verfahren können[6]). Eine Zeitbestimmung ist damit so eigentlich nicht verbunden, da man nicht weiss, wann jene synthetisch-geometrische Schrift verfasst wurde. Ein Nekrolog Fermat's, vielleicht aus der Feder Carcavy's, jedenfalls von diesem beeinflusst, behauptet, die Isagoge sei geschrieben gewesen, bevor die Descartes'sche Geometrie gedruckt war[7]). Aber gelte dieses auch nicht für denjenigen Wortlaut, in welchem die Isagoge 1679 in den nachgelassenen Varia Opera er-

---

[1]) Descartes, Geom. I, 96: *Cur problemata solida construi non possint absque sectionibus conicis, nec quae magis composita sunt, sine aliis lineis magis compositis.* [2]) Ebenda I, 106. [3]) Jacobi Bernoulli *Opera* I, 343. [4]) Fermat, *Varia Opera* pag. 136. [5]) Ebenda pag. 2—11. *Oeuvres de Fermat* I, 91—110. [6]) *Varia Opera* pag. 8. *Oeuvres* I, 103. [7]) *Oeuvres de Fermat* I, 359—361.

schien, sei bei dieser letzten Niederschrift Fermat mit jener Geometrie von 1637 bekannt gewesen, jedenfalls geht sie in wesentlichen Dingen weit über Descartes hinaus. Nirgend hat Descartes die Herstellung der Gleichung eines geometrischen Ortes so klar beschrieben, wie Fermat gleich am Anfange der Isagoge es thut. Die Gleichungen, sagt er, können in bequemer Weise hergestellt werden, wenn wir zwei unbekannte Strecken unter gegebenem Winkel, zu welchem wir meistens einen rechten Winkel wählen, aneinandersetzen und für eine der beiden Strecken einen Anfangspunkt wählen[1]). Diesen Anfangspunkt bezeichnet Fermat regelmässig mit N und die von ihm beginnende Strecke mit A, die dazu senkrechte andere Strecke mit E. Ihr Fusspunkt heisst Z, der Punkt des geometrischen Ortes, wo sie endigt, J. Solche ein für allemal gewählten Bezeichnungen sind mehr als blosse Bezeichnungen. Sie bilden einen Theil des methodischen Verfahrens, und Niemand hat Fermat in dieser Beziehung übertroffen. Man könnte alle seine Feststellungen als mustergiltig rühmen, wenn er nicht allzusehr durch die Fesseln der Vieta'schen Schreibweise beengt gewesen wäre. Statt des Gleichheitszeichens schrieb er noch *egale*, statt der rechts erhöhten Zahlenexponenten die lästigen Anfangsbuchstaben der Potenzbenennungen. In diesen beiden Unbequemlichkeiten sei es uns gestattet, uns von Fermat zu entfernen, während wir im Uebrigen ihm genau folgen. Wir können alsdann folgenden Inhalt der Isagoge angeben, den man mit unseren Auszügen aus Descartes' Geometrie vergleichen mag.

$DA = BE$ bedeutet eine durch den Anfangspunkt N gehende Gerade. $Z^2 - DA = BE$ oder, indem $Z^2 = DR$ gesetzt wird, $D(R - A) = BE$ bedeutet dieselbe Gerade unter Verschiebung des Anfangspunktes. Fermat besitzt also ausdrücklich die Gleichung der geraden Linie, welche man bei Descartes vergebens sucht. Die Gleichung $AE = Z^2$ ist die einer Hyperbel auf ihre Asymptoten bezogen. $E^2 = DA$ und $DE = A^2$ sind zwei Parabeln, welche nur durch ihre Lagen sich unterscheiden, indem die Applicaten bald der einen, bald der anderen von zwei zu einander senkrechten Richtungen parallel sind. $B^2 - A^2 = E^2$ ist Kreisgleichung und auf eben diese Form ist jede Gleichung, welche noch Vielfache von A und von E enthält, zurückführbar, falls nur A^2 und E^2 gleiche Coefficienten besitzen, z. B. $B^2 - 2DA - A^2 = E^2 + 2RE$ geht über in

$$P^2 - (A + D)^2 = (E + R)^2, \text{ wo } P^2 = R^2 + B^2 + D^2.$$

---

[1]) *Commode autem possunt institui aequationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, et alterius ex illis positione datae terminus unus sit datus.*

Ist dagegen $B^2 - A^2$ nicht gleich E^2, sondern steht zu E^2 in einem gegebenen Verhältnisse, so ist damit die Gleichung einer Ellipse gegeben; die Gleichung der Hyperbel ist dagegen vorhanden, wenn $A^2 + B^2$ zu E^2 in gegebenem Verhältnisse steht. Das sind Ergebnisse, welche in der Isagoge auf wenige Seiten zusammengedrängt erscheinen.

Ein zweiter Aufsatz, als Anhang zur Isagoge bezeichnet[1]), zeigt wie man mittels zweier Curven Gleichungen höherer Grade, in welchen nur eine Unbekannte vorkommt, bewältigen könne. Es ist die gleiche Aufgabe, welche wir in der Ueberschrift dieses Kapitels als geometrische Gleichungsauflösungen bezeichnet haben und welche wir noch vor der analytischen Geometrie zur Sprache brachten. Dorthin würde also streng genommen Fermat's Anhang zur Isagoge auch gehört haben, wenn ihm nicht das ganz abweichende elegantere Verfahren seinen Platz an dieser späteren Stelle angewiesen hätte. Fermat setzt regelmässig in der vorgelegten Gleichung jede der beiden Seiten, die desshalb mit Geschick auszuwählen sind, einem und demselben dritten Ausdrucke gleich, welcher mit beiden vorhandenen Ausdrücken Gemeintheiler besitzt, durch welche dividirt werden kann. Sei etwa $A^3 + BA^2 = Z^2B$ zu lösen. Fermat wählt als Vergleichsausdruck BAE, und nun geht $A^3 + BA^2 = BAE$ in $A^2 + BA = BE$ und $Z^2B = BAE$ in $Z^2 = AE$ über, d. h. Parabel und Hyperbel schneiden sich in einem Punkte, dessen A die vorgelegte Gleichung befriedigt. In einem anderen Falle sei $A^4 = Z^2A^2 - Z^3D$ aufzulösen. Fermat formt die Gleichung zunächst um zu

$$(A^2 - B^2)^2 = (B^4 - Z^3D) - (2B^2 - Z^2)A^2$$

und nimmt dann N^2E^2 als Vergleichsausdruck, wo $N^2 = 2B^2 - Z^2$. So werden eine Parabel $A^2 - B^2 = NE$ und ein Kreis

$$\frac{B^4 - Z^3D}{N^2} - A^2 = E^2$$

als die zur Lösung führenden Curven ermittelt. Ob Fermat Cardano's Schrift *De Regula Aliza* gelesen und dort die Methode gefunden hatte, eine Gleichung unter Beiziehung einer Hilfsgrösse in zwei Gleichungen zu spalten (S. 536), sei dahingestellt. Wahrscheinlich ist es uns nicht, und jedenfalls ging Fermat nicht algebraisch wie Cardano, sondern geometrisch zu Wege.

Der gleichen Methode bediente sich Fermat in einer ziemlich viel späteren Abhandlung: *De solutione problematum geometricorum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie con-*

---

[1]) *Appendix ad Isagogem Topicam continens solutionem problematum solidorum per locos. Varia Opera* pag. 9—11. *Oeuvres* I, 103—110.

venientes[1]). Sie muss 1660 entstanden sein, wie aus einem Briefe Carcavy's an Huygens vom 25. Juni 1660 hervorgeht. Ein vom 9. März 1661 datirter Auszug findet sich heute noch in Leiden, in der reichen Sammlung von Briefen an und von Huygens[2]). Fermat machte hier auf jenen Missgriff von Descartes aufmerksam, den wir oben bereits berührt haben, und der darauf hinauslief, dass Descartes nicht erkannte, dass zwei Curven, deren eine vom m^{ten}, die andere vom n^{ten} Grade ist, genügen, um eine Gleichung vom mn^{ten} Grade zu lösen, während Fermat die volle Einsicht davon hatte. Die Abhandlung ist also entschieden gegen Descartes gerichtet, aber um so mehr lohnt es sich, einige Stellen wiederzugeben, welche zeigen, wie Fermat wissenschaftliche Gegnerschaft übte. Man möge sich überzeugen, beginnt die Abhandlung, dass auch ein Descartes, wo es um geometrische Dinge sich handle, ein Mensch sei, dass dessen Zurückführung von Gleichungen auf Curvendurchschnitte mit einem Fehler behaftet sei. Wenn Fermat sich dann bei seiner Richtigstellung an Descartes und alle Cartesianer wendet, so liegt die Vermuthung nahe, er habe dieses desshalb gethan, weil in der mit Erläuterungen versehenen lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659 an jenem Irrthume schweigend vorübergegangen ist, als ob gar keine Veranlassung zur näheren Erörterung hier vorläge. Jene Vermuthung wäre gleichwohl wahrscheinlich unberechtigt, wie daraus hervorgeht, dass in Fermat's Abhandlung überall die Seitenzahlen der französischen Geometrie von 1637, nicht die der späteren Ausgaben citirt sind. Er sei, setzt Fermat dann hinzu, von der Bewunderung jenes übernatürlichen Genius so erfüllt[3]), dass er Descartes, wo er fehlgehe, immer noch höher schätze als Andere, die auf richtigem Wege wandern. Wir führen einige der Beispiele an, durch welche Fermat sein Verfahren erläutert. $A^7 = B^6 D$ wird durch den Vergleichsausdruck DA^4E^2 auf zwei Curven 3. Grades $A^3 = DE^2$ und $B^3 = A^2E$ zurückgeführt. $A^{13} = B^{12}D$ geht mittels des Vergleichsausdruckes DA^8E^4 in $A^5 = DE^4$ und $B^3 = A^2E$, durch den Vergleichsausdruck DA^9E^3 in $A^4 = DE^3$ und $B^4 = A^3E$ über; man bedarf also entweder einer Curve 5. und einer 3. Grades, oder zweier Curven 4. Grades. Endlich $A^{257} = B^{256}D$ geht unter Anwendung des Vergleichsausdruckes $DA^{240}E^{16}$ in eine Curve 17. Grades $A^{17} = DE^{16}$ und eine Curve 16. Grades $B^{16} = A^{15}E$ über.

Einen Versuch, die analytisch-geometrische Methode auf den Raum

---

[1]) *Varia Opera* pag. 110—115. *Oeuvres* I, 118—131. [2]) *Oeuvres complètes de Huygens* III, 85 und 256. [3]) *Tanta me portentosissimi ingenii incessit admiratio.*

auszudehnen, wie wir ihn bei Descartes in geistreicher Andeutung vorfanden (S. 815), hat Fermat nicht gemacht. Wohl hat er sich in einem aus dem Jahre 1643 stammenden Briefe an Carcavy[1]) sogar mit Oberflächen zweiter Ordnung beschäftigt, aber nicht in analytisch-geometrischer Weise, sondern indem er, nicht ganz fehlerlos, die Curven besprach, in welchen eine solche Oberfläche durch eine Ebene geschnitten werde.

Der nächste Schriftsteller, den wir zu nennen haben, ist John Wallis. Er gab 1655 einen *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis*[2]) heraus, dessen neue Methode eben die der analytischen Geometrie ist, deren Verbreitungskreis sich durch diese Veröffentlichung entschieden erweiterte. In Wallis' Schrift über Kegelschnitte findet sich, was man zuletzt dort suchen würde, das heutige Zeichen ∞ für unendich gross[3]).

Die Zeitfolge führt uns wiederholt zur lateinischen Ausgabe der Descartes'schen Geometrie von 1659, welche, wie wir mehrfach erinnerten, auch Zuthaten anderer Verfasser enthielt. Wir haben algebraisch Bemerkenswerthes daraus im vorigen Kapitel zu melden gehabt; Algebra war ein schon etwas geläufigerer Gegenstand der Betrachtung. Neuer, ungewohnter war die analytische Geometrie, und wenn wir oben hervorhoben, die Erläuterer seien an der geometrischen Lösung von Gleichungen sammt den von Descartes begangenen Irrthümern ahnungslos vorbeigegangen, so gilt das Gleiche von den wichtigsten geometrischen Gedanken, welche wir zu bewundern hatten. Die breiten Bettelsuppen der *Notae breves* von Florimond de Beaune[4]), des *Commentarii* von Franciscus van Schooten[5]) enthalten kaum einen einzigen Brocken, den man herausfischen könnte, aber, sind wir genöthigt hinzuzusetzen, ihre Leere ist den Verfassern nicht allzuhoch anzurechnen; die grosse Menge, auch wenn die grosse Menge der Fachgelehrten allein unter dem Worte begriffen ist, verstand die Feinheiten der Geometrie noch nicht. Eine Ausnahmestellung nimmt die Bestimmung der Inflexionspunkte der Conchoide durch Franciscus van Schooten[6]) ein. Dieser weiss, dass die Gleichung, welche die Ordinate y eines Punktes der Conchoide mit dem durch die Normallinie an jenen Punkt auf der Ordinatenaxe abgeschnittenen Stücke r verbindet, vom 4. Grade in y ist, und dass sie im Inflexionspunkte drei gleiche Wurzeln besitzen muss. Er bildet also das Product $(y - e)^3 \cdot (y - f)$ und setzt dasselbe Glied

---

[1]) *Oeuvres de Fermat* I, 111—117. [2]) Abgedruckt in Johannis Wallis, *Opera mathematica* (Oxford 1699) I, 291—354. [3]) Ebenda pag. 297: *Esto* ∞ *nota numeri infiniti.* [4]) Descartes, Geom. I, 107—142. [5]) Ebenda I, 147—344. [6]) Ebenda I, 258—259.

für Glied in Uebereinstimmung mit dem Gleichungspolynome der Gleichung 4. Grades, von welcher soeben die Rede war. So gelangt er zu

$$e^3 = -3be^2 + 2bc^2$$

oder, weil im Inflexionspunkte $y = e$ sein muss, zu

$$y^3 = -3by^2 + 2bc^2,$$

woraus der betreffende Werth von y zu berechnen sei. Etwas mehr als die beiden schon Genannten leistete Johann de Witt in seinen *Elementa curvarum linearum*[1]). Dieselben zerfallen in zwei Bücher. Das erste Buch lehrt die Kegelschnitte als Ort des Durchschnittspunktes einer parallel verschobenen Geraden und des einen Schenkels eines um seinen Scheitelpunkt drehbaren Winkels kennen und steht daher, so interessant es für die Lehre von den Kegelschnitten ist, zur analytischen Geometrie in nur sehr loser Beziehung. Das zweite Buch dagegen ist eine elementare analytische Geometrie der Ebene. Die Gleichungen der geraden Linie, der einzelnen Kegelschnitte werden der Reihe nach vorgeführt. Möglicherweise waren die Kegelschnitte von Wallis nicht ohne Einfluss auf De Witt.

Eine wahrhaft reiche Ausbeute gewährten aber die analytisch-geometrischen Methoden nicht den Schriftstellern, welche auf elementarem Boden verblieben, sondern nur denjenigen, welche sie zur Grundlage einer höheren Curvenlehre machten, indem sie zu Betrachtungen sich aufschwangen, welche man sich gewöhnt hat, als infinitesimale zu benennen.

78. Kapitel.

Infinitesimalbetrachtungen. Kepler. Cavalieri.

Wir sind in unseren Auseinandersetzungen dahin gelangt, die Infinitesimalbetrachtungen in der Zeit von 1600 bis 1668 zu schildern, wobei gleich die letzten Worte des vorigen Kapitels Anlass geben, eine an sich naturgemässe Gegenseitigkeit anzukündigen. Die Infinitesimalbetrachtungen konnten auf analytischer Geometrie sich aufbauend eine höhere Curvenlehre stützen. Die analytische Geometrie fand erhöhte Wirksamkeit, als sie thatsächlich schon vorhandenen Infinitesimalbetrachtungen sich zugesellte. Jene Betrachtungen sind auch wirklich älter als die Geometrie Descartes' von 1637.

Nicht als ob wir auf die Continuitätsbetrachtungen zurückgreifen

---

[1]) Descartes, Geom. II, 159—340.

wollten, welche seit dem XIV. Jahrhunderte an Namen und Begriff des Contingenzwinkels sich knüpften. Wir meinen Untersuchungen, welche einen viel weiter rückwärts liegenden Anknüpfungspunkt besitzen. Wir meinen Körperausmessungen, welche, durch einen zeitlichen Zwischenraum von nahezu 1900 Jahren von den Entdeckungen Archimed's getrennt dennoch aus deren unmittelbaren geistigen Fortwirkung ihre Entstehung herleiten.

Wir haben (S. 662) gesehen, dass Kepler 1596 in Graz seine erste astronomische Schrift, das *Mysterium cosmographicum* verfasste, in welcher von Sternvielecken die Rede war, dass er in der *Harmonice mundi* von 1619 den Gegenstand weiter verfolgte. Wir haben (S. 708) eine Gleichung zwischen einem Bogen und dessen Sinus besprochen, welche Kepler 1609 in der *Astronomia nova* aufstellte. Dieses Werk ist in Prag verfasst und enthält auch die beiden sogenannten ersten Kepler'schen Gesetze der Ellipticität der Planetenbahnen und der Gleichheit der von den Leitstrahlen in gleichen Zeiten beschriebenen Sectoren. Es erscheint nicht unangebracht, auf die grosse mathematische Bedeutung der beiden Gesetze ein Streiflicht zu werfen. Das erste zeigte, dass eine Ellipse bestimmt sei, wenn man eine Anzahl von Punkten derselben kenne, das zweite schloss den Begriff der Flächenbestimmung elliptischer Sectoren in sich ein. Das dritte Gesetz von der Proportionalität der Quadrate der Umlaufszeiten und der Würfel der grossen Axen der Bahnen gehört der von Linz aus herausgegebenen erstgenannten *Harmonice mundi* an. Dorthin war Kepler, welchen Lebensschicksale, an denen er meistens unschuldig war, von Ort zu Ort trieben, seit 1612 übergesiedelt und hatte in der neuen Heimath sich wohnlich eingerichtet. Damals war, erzählt Kepler in der Vorrede[1]) zu dem Buche, über welches wir berichten wollen, ein reiches und vortreffliches Weinjahr in Oesterreich gewesen, und Frachtschiffe hatten gefüllte Fässer ohne Zahl die Donau hinaufgeführt, welche in Linz um ein Billiges zu erstehen waren. Kepler kaufte einige Fässer, und als nun der Verkäufer mit einer Messruthe durch den Spund die Entfernung bis zur entgegengesetzten Fasswölbung mass, um, ohne Rücksicht auf die Art der Krümmung der Fassdauben oder sonstige Abmessungen, daraus den Inhalt des Fasses zu entnehmen, war Kepler überaus erstaunt darüber, insbesondere da er wusste, dass man am Rheine viel umsichtiger zu Werke zu gehen pflegte und entweder den Inhalt des Fasses, Krug um Krug, wirklich mass, oder, falls man eines Visirstabes sich bediente, mindestens eine ganze Anzahl von Messungen

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) IV, 553—554.

vornahm, statt mit der einzigen Spundtiefe sich zu begnügen. Dreitägiges Nachsinnen genügte für Kepler, die richtige Berechnung des Fassinhaltes zu ermitteln. Länger freilich dauerte die Niederschrift der Doliometrie, wie man vielfach das Werk nennt, welchem Kepler die Ueberschrift *Stereometria doliorum* gab, noch länger währte es, bis die Schrift gedruckt war. Kepler hatte beabsichtigt, sie in Augsburg zu verlegen, aber trotz der Fürsprache des gelehrten Marcus Welser weigerte sich der Drucker auf das Unternehmen einzugehen, da einem lateinischen Buche solchen Inhaltes, wenn auch von einem noch so berühmten Verfasser herrührend, die Verkäuflichkeit fehle. Kepler sah nach 16monatlichem Zuwarten sich genöthigt, das Werk auf eigene Kosten zu drucken und bediente sich dazu eines Linzer Druckers, Hans Plank, bei welchem 1615 die lateinische Schrift, 1616 auch eine deutsche volksthümlichere Bearbeitung erschien, welche aber in der Geschichte der Mathematik nicht entfernt die Rolle spielt, wie das lateinische Werk, auf dessen Entstehung wir so weitläufig eingehen zu dürfen glaubten, weil Kepler's Doliometrie die Quelle aller späteren Kubaturen geworden ist.

Man kann die Aufgabe, welche Kepler in der *Stereometria doliorum*[1]) aufzulösen beabsichtigte, kurzweg als die der Bestimmung des Rauminhaltes von Umdrehungskörpern bezeichnen, würde aber damit der Methode, welche Kepler anwandte, ebensowenig gerecht werden wie den mancherlei hochwichtigen Zwischenbemerkungen, welche er einstreute. Wir müssen desshalb auf Einzelheiten eingehen. Die Eintheilung des Werkes ist folgende. Ein I. Theil, *Stereometria Archimedea*, beschäftigt sich mit Körpern, welche bereits Archimed bekannt waren. Ihm schliesst ein *Supplementum ad Archimedem* sich an, das der Betrachtung von neuen Körpern gewidmet ist, so dass schliesslich nicht weniger als 92 Körper in Untersuchung genommen sind[2]), von denen einige mit den Namen von Früchten, denen sie gleichen, belegt wurden, so der apfelförmige, der citronenförmige, der olivenförmige Körper. Den II. Theil bildet die *Stereometria dolii Austriaci in specie*, in welchem hauptsächlich von der sachdienlichen Gestalt der in Oesterreich üblichen Fässer die Rede ist. Ein III. Theil, *Usus totius libri circa dolia*, lehrt, wie man in der Praxis zu verfahren habe, um den Inhalt von Fässern zu bestimmen.

---

[1]) *Opera Kepleri* (ed. Frisch) IV, 551—646. Ueber den Inhalt der Doliometrie und den deutschen Auszug vergl. Kästner III, 313—331. — Montucla II, 29—31. — Chasles, *Aperçu hist.* pag. 56 (deutsch 53). — Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis (1855), S. 15—18. — Gerhardt, Math. Deutschl. S. 109—112. [2]) *Opera Kepleri* IV, 582: *Summa* 87, *quibus additae figurae* 5 *ex circulo, veluti capita familiarum, efficiunt formas nonaginta et duas.*

Den Zugaug zur Körpermessung findet Kepler im I. Theile von der Flächenausmessung aus, und zwar im 2. Satze[1]) von der Quadratur des Kreises aus. Archimed habe sich indirecter Beweisführung bedient, deren Sinn aber auf Folgendes hinauslaufe. Die Kreisperipherie hat so viele Theile als Punkte, also unendlich viele, *partes habet totidem, quot puncta, puta infinitas*; jedes Theilchen ist als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks anzusehen, so dass innerhalb der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke zu unterscheiden sind, die sämmtlich mit ihren Spitzen im Kreismittelpunkte zusammenstossen. Ein einziges Dreieck mit dem Halbmesser als Höhe, der Kreisperipherie als Basis besitzt also alle jene unendlich viele Dreiecksgrundlinien aneinandergefügt, und über jeder derselben giebt es ein Dreieck mit dem Kreismittelpunkte als Spitze, welches einem jener früheren gleichschenkligen Dreieckchen flächengleich ist. Folglich liefert das ganze Dreieck die ganze Kreisfläche, *id est triangulum ex omnibus illis constans aequabit sectores circuli omnes, id est aream circuli ex omnibus constantem.* In einem Analogieschlusse, für welchen Kepler auf Archimed verweist, der aber bei Archimed nicht vorkommt, wird im 3. Satze[2]) auf den Cylinder und das ihm umschriebene rechtwinklige Parallelopipedon das Verhältniss des Kreises zu seinem Tangentenquadrate ausgedehnt, jene Körper stellten gewissermassen zu Körpern gewordene Flächen dar, *sunt veluti quaedam plana corporata.* Auch eine Erweiterung des Zerlegungsgedankens des Kreises auf die Kugel spricht der 11. Satz[3]) deutlich aus: Der Körper der Kugel enthält nach Analogie dessen, was im 2. Satze ausgesprochen wurde, der Möglichkeit nach unendlich viele kegelartige Gebilde, *potestate in se continet infinitos veluti conos*, welche mit ihren Spitzen im Mittelpunkte der Kugel zusammentreffen und mit ihren Grundflächen, deren Stelle Punkte vertreten, *quorum vicem sustinent puncta*, auf der Oberfläche aufstehen. Der 16. Satz zerschneidet den Kegel, und hier tritt wieder eine figürliche Redensart auf, der wir im 3. Satze schon begegneten. Der Kegel wird nämlich erstlich geschnitten durch eine Ebene, welche durch seine Spitze hindurchgeht und ihn bis zum Grundkreise durchdringt, zweitens durch einen dünneren Kegel, der die Spitze mit dem geschnittenen Kegel gemein hat, und dessen Grundkreis ein Theil des Grundkreises dieses geschnittenen Kegels ist. Legt man in beiden Fällen der Grundfläche parallele Ebenen durch den Kegel, so zeigt jeder dieser Schnitte Abtheilungen, welche in gleichem Verhältnisse wie die Abtheilungen des Grundkreises des geschnittenen Kegels stehen, denn der Kegel ist hier

[1]) *Opera Kepleri* IV, 557—558. [2]) Ebenda IV, 559. [3]) Ebenda IV, 563.

gleichsam ein zum Körper gewordener Kreis, *nam conus est hic veluti circulus corporatus*[1]), und ganz ähnlich wird im 17. Satze der gerade Cylinder mit kreis- oder ellipsenförmiger Grundfläche ein zum Körper gewordener Kreis, beziehungsweise Ellipse genannt, wenn die Schnittebene der Axe parallel läuft, dagegen eine zum Körper gewordene Linie, *veluti linea corporata*, wenn die Schnittebene senkrecht zur Axe steht[2]).

Wir gelangen zu dem *Supplementum ad Archimedem.* Der erste hier in Betracht gezogene Körper ist der Ring, *annulus*, dessen Rauminhalt im 18. Satze dem Cylinder gleichgesetzt wird, welcher den kreisförmigen Durchschnitt des Ringes als Grundfläche und als Höhe die Kreisperipherie besitzt, welche der Mittelpunkt des den Ring durch Umdrehung um eine feste Axe erzeugenden Kreises beschreibt. Die Umdrehungsaxe gehe (Figur 147) durch A, so wird der Ring[3]) durch Schnitte, welche von A ausgehen, in unendlich viele kleinste Scheibchen zerschnitten, *annulo secto ex centro A in orbiculos infinitos eosque minimos.* Diese Scheibchen sind nun allerdings von ihrer eigenen Mitte aus von ungleicher Dicke, um so dünner je näher dem Punkte A, um so dicker je weiter nach aussen. Das gleicht sich gegenseitig aus, und die Dicke an der inneren Grenze E zusammen mit der an der äusseren Grenze D haben als Summe das Doppelte der Dicke bei F, *duplum ejus crassitiei, quae est in orbiculorum medio.* Allerdings, setzt Kepler hinzu, sei ein solcher Schluss nicht immer zulässig und würde irre führen, wenn nicht ein ganz symmetrisches Verhalten aller unter einander überdies congruenten Scheiben, welche zwischen F und G gebildet werden, einträte. Solches ist, ausser bei dem durch den in Umdrehung befindlichen Kreis gebildeten Ringe, beispielsweise dann der Fall, wenn ein Quadrat in drehende Bewegung gesetzt wird. Interessanter in mancherlei Beziehung ist der im 20. Satze[4]) erörterte Apfel, d. h. der Umdrehungskörper eines Kreisabschnittes, welcher grösser als der Halbkreis ist, um seine Sehne. Die gedrehte Figur wird durch zur Sehne parallele Gerade in gleichbreite kleinste linienartige Stücke zerlegt, *secetur area MDN lineis parallelis ipsi MN in aliquot segmenta aequelata minima, quasi linearia.* Bei der darauf folgenden drehenden Bewegung bildet das Theilchen nächst der Sehne so gut wie keinen Raum, weil es die geringste Bewegung hat, *cum*

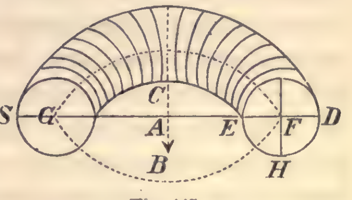


Fig. 147.

[1]) *Opera Kepleri* IV, 568. [2]) Ebenda IV, 570. [3]) Ebenda IV, 583. [4]) Ebenda IV, 584—585.

igitur figura circa MN circumagitur, nihil fere creat areola MN, quia minimum movetur. Die Bewegungsgrösse jedes folgenden Punktes eines folgenden Theilchens ist durch eine Kreisperipherie gemessen, welche als Gerade senkrecht zur Ebene der Anfangslage der gedrehten Figur aufgetragen wird. Dadurch verwandeln die ringförmigen Elementartheile des Apfels sich in cylinderartige, und deren Summirung liefert den gesuchten Körperraum. Wird der um seine Sehne in Drehung versetzte Kreisabschnitt kleiner als ein Halbkreis angenommen, so entsteht statt des Apfels die Citrone[1]). Derselbe Abschnitt kann aber auch um seine Höhe in Drehung versetzt werden und bildet dann einen Kugelabschnitt. Der 25. Satz setzt dann diesen Kugelabschnitt zu jener Citrone in Beziehung und meint, sie schienen sich zu verhalten, *videtur eam habere proportionem*, wie die halbe Sehne zur Höhe[2]). Dieses Ergebniss ist freilich falsch, und Kepler giebt auch dadurch, dass er Anderen die Aufgabe vorlegt, einen rechtmässigen Beweis zu führen, *demonstrationem legitimam quaerant alii*, ebenso wie durch das vorsichtige *videtur* zu verstehen, dass er selbst nicht vollkommen überzeugt ist. Aber, meint er, was ich nicht beweisen kann, darauf kann ich doch hinweisen, *quod non possum apodictice, comprobato dictice*, und in diesem Sinne führt er verschiedene Gründe an, deren erster jene mittelalterliche von Nicolaus von Cusa, welchen Kepler übrigens nicht nennt, vielfach in den Vordergrund gestellte Folgerungsweise ist: was bei dem Grössten und bei dem Kleinsten einer Gattung Geltung habe, müsse auch in den dazwischen liegenden Zuständen wahr sein. Die beiden äussersten Fälle sind hier folgende. Erstlich sei der Kreisabschnitt, welcher durch Drehung die beiden Körper hervorbringt, der grösstmögliche, ein Halbkreis, dann ist die halbe Sehne gleich der Höhe gleich dem Kreishalbmesser, und Citronen- wie Kugelabschnitt gehen beide in eine und dieselbe Halbkugel über. Ist aber zweitens der Kreisabschnitt der kleinstmögliche, dann sind die beiden genannten Körper kaum von den ihnen einbeschriebenen Kegelchen zu unterscheiden, welche wie ihre Höhen, d. h. wie die vorgenannten Strecken sich verhalten, aber auch hier misstraut sich Kepler mit Recht, denn er gesteht zu, die Schlussfolgerung von dem absolut Kleinsten zu dem jenem Kleinsten Nächststehenden sei nicht immer sicher, *fateor ab eo, quod est absolute minimum, ad id, quod minimo proximum, non ubique tutam esse collectionem.*

---

[1]) Bei ihrer Besprechung im 21. Satze heisst es pag. 585 fast wörtlich gleichlautend mit dem bei der Entstehung des Apfels gebrauchten Ausdrucke: *segmentum areolae in ipsum JOK terminans fere nihil creat, quia pene nihil movetur.* [2]) *Opera Kepleri* IV, 594.

Als höchst merkwürdig wollen wir noch den 27. Satz des Supplementum[1]) hervorheben (Figur 148). In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC sei der Winkel B durch die Gerade BN halbirt, so ist $AN : NC = AB : BC$, d. h. $AN < NC$, und halbirt man AC in O, so liegt O zwischen N und C. Nun lasse man BC zur Berührungslinie eines durch B hindurchgehenden Kegelschnittes werden, dessen Axe AC ist, so hängt die Art dieses Kegelschnittes nur noch von der Lage seines Scheitelpunktes auf der AC ab. Liegt derselbe zwischen O und C in V, so hat man eine Hyperbel vor sich. O selbst ist Scheitelpunkt einer Parabel, N eines Kreises. Durch die J und E zwischen N und O, beziehungsweise zwischen N und A geht eine Ellipse, deren grosse Axe in dem ersten, deren kleine Axe in dem zweiten Falle auf AC liegt. Die Art einer Curve ist also hier bestimmt, indem von einer gegebenen Berührungslinie der Ausgangspunkt der Untersuchung genommen ist, oder mit anderen Worten: Kepler hat hier die erste **inverse Tangentenaufgabe** gestellt.

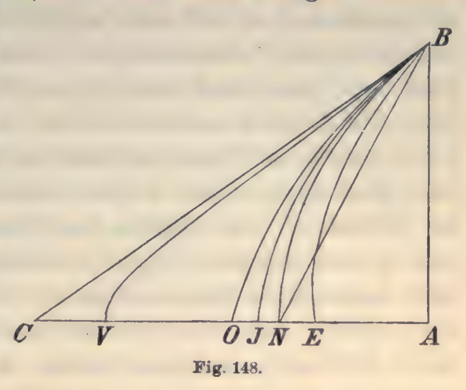


Fig. 148.

Als Inhalt des zweiten Hauptabschnittes der Doliometrie bezeichneten wir den Nachweis, dass die in Oesterreich häufigste Fassgestalt zugleich die zweckmässigste sei. Nicht als ob irgend ein Mathematiker die dortigen Böttcher jedesmal angewiesen hätte, gerade dieser Abmessungen sich zu bedienen, denn wenn eine solche wissenschaftlich begründete Vorschrift vorhanden gewesen wäre, so sei undenkbar, dass sie nicht auch zu den am Rheine wohnenden Böttchern gedrungen wäre und die dort übliche weniger sachdienliche Fassgestalt verdrängt hätte. Nein, die Natur lehrt mit Hilfe eines dunkeln Gefühls ohne Bildung von Schlüssen die Geometrie[2]), sie hat unsere Böttcher gelehrt, auf blosses Augenmaass hin und mit Rücksicht auf schönere Form, *solis oculis et speciei pulchritudine ducti*, die geräumigsten Fässer herzustellen. Wenn aber, wie die hier angeführten Worte erkennen lassen, Kepler unter zweckmässiger Fassgestalt diejenige versteht, welche bei Verbrauch der geringsten Menge von Fassholz den grössten Inhalt besitzt, so muss dieser zweite Ab-

---

[1]) *Opera Kepleri* IV, 598—599. [2]) Ebenda IV, 612: *Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere geometriam?*

schnitt wiederholt auf Fragen zu reden kommen, welche grösste und kleinste Werthe betreffen, und welche den im V. Buche des Pappus, auf welches Kepler sich ausdrücklich beruft[1]), behandelten isoperimetrischen Untersuchungen (Bd. I, S. 418) nahe stehen. In der That sind fast sämmtliche Sätze dieses Abschnittes Maximalsätze, und ihre Beweise enthalten Bemerkungen, welche zeigen, wie tief Kepler in die Natur grösster und kleinster Werthe eingedrungen ist. Als Beispiel eines solchen Satzes führen wir den 4. Satz an[2]), der Würfel sei dem Inhalte nach das grösste Parallelopipedon, welches in eine gegebene Kugel einbeschrieben werden könne. Als Beispiel jener Bemerkungen diene der 2. Zusatz zum 5. Satze, wo gezeigt wurde, dass eine gewisse Ausdehnung sich bis zu einem gewissen Punkte G erstrecken müsse. Andere Gestaltungen, heisst es[3]), welche bis zu Punkten sehr nahe bei G diesseits oder jenseits sich erstrecken, ändern nur wenig an dem Rauminhalte, der für AGC der grösstmögliche ist. Einem grössten Werthe auf beiden Seiten Benachbartes zeigt nämlich am Anfange nur unmerkbare Abnahme, *circum maximum vero utrimque circumstantes decrementa habent initio insensibilia.* Und kaum weniger bezeichnend sind andere Stellen[4]), so dass man namentlich im Hinblicke auf die letzte derartige Stelle im 27. Satze vollberechtigt ist, für Kepler die Kenntniss in Anspruch zu nehmen, dass die Veränderungen einer Function dicht beim Maximalwerthe verschwinden, denn deutlicher kann man ohne Anwendung von Worten, welche der damaligen Zeit noch fremd waren, sich doch wohl nicht ausdrücken, als wenn man sagt: An solchen Stellen, wo der Uebergang von einem Kleineren zum Grössten und wieder zum Kleineren stattfindet, ist der Unterschied immer bis zu einem gewissen Grade unmerklich, *in iis vero articulis, in quibus a minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia.* Einen Beweis freilich besass Kepler nicht für die von ihm erkannte Thatsache, darin ging er gar nicht so sehr weit über die Ahnung Oresme's (S. 131), dessen Schriften Kepler wie Descartes wie Fermat leicht gelesen haben kann, hinaus. Statt einer Begründung müssen nämlich die drei von uns unübersetzt gelassenen Worte *lege aliqua circuli* dienen, es geschehe nach einem Gesetze, welches vom Kreise sich herschreibe. Kepler meint wohl das dichte Anschmiegen der Berührungslinie des Kreises an den Kreisbogen, welches in der

---

[1]) *Opera Kepleri* IV, 607: *Haec omnia Pappus habet libro quinto.* [2]) Ebenda IV, 607—609. [3]) Ebenda IV, 612. [4]) Ebenda IV, 622 lin. 11—14; 628 lin. 18—19; 634 lin. 9—12.

gerade damals noch lebhaftes Interesse erregenden Frage des Contingenzwinkels seine Rolle spielte.

Wenn somit das Werk von 1615 als ein für die Entstehung der Infinitesimalrechnung grundlegendes in dem Sinne gelten muss, als die Zerlegung eines Raumes in Elementartheile und deren Vereinigung zu einer Summe der Lehre von den bestimmten Integralen vorgriff, und als das Hauptmerkmal ausgesprochen war, welches mit dem Vorhandensein eines Maximalwerthes verbunden ist, so war doch noch keineswegs jeder Irrthum ausgeschlossen, wie wir z. B. oben an der Vergleichung von Citronen- und Kugelabschnitt gesehen haben. Zur vollständigen Würdigung Kepler's reicht auch die Doliometrie nicht aus. Man wird bei einer solchen immer den Astronomen Kepler als der Beurtheilung unterworfen zu betrachten haben, dem seine Verdienste um einzelne Theile der Physik wie der reinen Mathematik zur grossen Zierde gereichen, ohne das Wesentlichste seiner Leistungen darzustellen. Und auch wenn wir, wozu wir hier genöthigt sind, aus dem angeführten Grunde auf eine zusammenfassende Würdigung Kepler's verzichtend seine einzelnen reinmathematischen Arbeiten besprechen, können wir noch nicht der Aufgabe uns zuwenden, die Wirkung zu verfolgen, welche das Erscheinen der Doliometrie übte, bevor wir noch zwei Einzelheiten aus anderen Schriften Kepler's erwähnt haben werden, welche gleichfalls bis zu einem gewissen Grade der Infinitesimalrechnung angehören.

Dahin gehört erstlich die Rectification von Curven. Kepler hat in der *Astronomia nova* von 1609 sich daran versucht. Der Umfang der Ellipse von den Axen $2a$, $2b$ sei sehr nahezu, *proxime*, gemessen durch $\pi(a+b)$ [1]).

Zweitens ist eine Untersuchung zu nennen, welche zur Auswerthung des bestimmten Integrals

$$\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi = 1 - \cos\varphi$$

geführt hat [2]). Wir wissen, dass 1609 die Jahreszahl des Erscheinens der *Astronomia nova* war. In ihr hat Kepler eine Lehre von einem planetarischen Magnetismus aufgestellt, vermöge dessen die magnetische Sonne S (Figur 149) auf die magnetischen Pla-

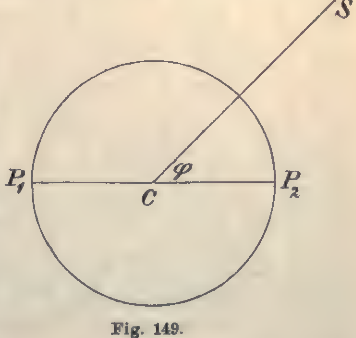


Fig. 149.

[1]) *Opera Kepleri* III, 401. [2]) Günther, Ueber eine merkwürdige Beziehung zwischen Pappus und Kepler (Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1888, pag. 81—87).

neten in der Weise einwirke, dass dem Pole P_1 eine Anziehung, *appetentia*, a_1, dem Pole P_2 eine Abstossung, *fuga*, a_2 zukomme, welche von dem Winkel φ abhänge, den die Verbindungsgerade CS des Planetenmittelpunktes und der Sonne mit der Planetenaxe $P_1 P_2$ bildet. Es kam Kepler darauf an, den Quotienten $\frac{a_1}{a_2}$ in seiner Abhängigkeit von φ darzustellen, so dass derselbe bei $\varphi = 90^0$ den Werth 1 annehme. Ohne ausreichende Begründung wird $a_1 = k(1 - \cos\varphi)$, $a_2 = k(1 + \cos\varphi)$, mithin $\frac{a_1}{a_2} = \left(\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}\right)^2$ gesetzt, so dass, wenn ein a gegeben ist, das andere von selbst folgt und also mit Auffindung von a_1 der ganzen Aufgabe Genüge geleistet ist; Maass der Stärke, *fortitudinis*, jenes Winkels φ sei aber dessen Sinus, und so ergebe sich das ganze a_1 als die Summe der Sinusse aller Winkel von 0 bis φ, und das ist doch $\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi$. Zunächst nimmt Kepler $\varphi = 90^0$ und lässt die einzelnen Winkel gradweise zunehmen. Entnimmt man $\sin 1^0$, $\sin 2^0, \ldots \sin 90^0$ den Sinustafeln und bildet ihre Summe, so entsteht 1, beziehungsweise $1 - \cos\varphi$, oder, wie der Gewohnheit der Zeit entsprechend gesagt wurde, der Sinusversus von φ. Das Gleiche bewahrheitet sich in einem anderen ähnlicher Rechnung unterworfenen Sonderfalle, und daraus schliesst Kepler auf die Richtigkeit der allgemeinen Formel, ein Schluss, der sich, wie es in der *Epitome* von 1618 heisst[1]), *per numeros et anatomiam circuli*, d. h. durch Zahlenrechnung bei gleichmässiger Zunahme des Bogens rechtfertigt. Ob Kepler den Satz durch Herumtasten an Zahlenbeispielen entdeckte? Wer kann das nachträglich ergründen! Unmöglich scheint bei Kepler keine derartige Vermuthung, da gerade in der *Astronomia nova* die Elliptícität der Marsbahn auf Grund zahlloser Rechnungen erschlossen ist. Als Kepler die Astronomia nova schrieb, hatte er, wie er an der erwähnten Stelle seiner Epitome hinzufügt, Pappus noch nicht gelesen. Später beschäftigte er sich eifrig mit diesem Schriftsteller, auf den er, wie wir sahen, in der Doliometrie von 1615 sich berief. Gestützt auf Pappus V, 36, d. h. auf den Satz, dass die Oberflächen zweier durch unter einander parallelen Kreise begrenzter Kugelcalotten derselben Kugel sich wie deren Höhen verhalten[2]), entwarf Kepler einen anderen Beweis. Die Kräfte a_1 und a_2 denkt er sich nämlich als den Oberflächen der von der Anziehung, beziehungsweise der Abstossung beherrschten Kugelcalotten proportional, und bei der Allgemeingiltigkeit des Satzes von Pappus macht es nichts aus, wie

---

[1]) *Opera Kepleri* IV, 407. [2]) Pappus (ed. Hultsch) I, 406.

gering der Unterschied von je zwei Kugelcalotten gewählt wird. Man kann die Kugeloberfläche in unendlich viele gleich breite Gürtel zerlegt denken, deren jeder gewissermassen als Kreis ohne jede Breite erscheint[1]). Die Summation solcher unendlich vieler Verhältnisse entspricht dann der von ebensovielen Sinussen von Winkeln, die nicht durch einzelne Winkelgrade, sondern in beliebig naher Aufeinanderfolge wachsen, und deren Summe liefert nicht nur beinahe, *fere*, sondern ganz genau den Sinusversus. Das ist aber genau die Verfahrungsweise der Zusammenfassung von Elementartheilchen, wie Kepler sie in der Doliometrie sich angewöhnt hatte, um sie auch nach 1615 weiter zu üben.

Wir haben den Wirkungen nachzugehen, welche das Erscheinen der Doliometrie hervorbrachte. Sie bilden, wenn auch nicht sehr zahlreich, mit voller Gewissheit nachweisbar, immerhin einen Beweis für die rasche Verbreitung der Schrift. Zuerst fand ein Gegner sich ein. Alexander Anderson, den wir früher als einen Bearbeiter Vieta'scher Manuscripte kennen gelernt haben, veröffentlichte schon 1616 seine *Vindiciae Archimedis* und verwahrte darin den genialen Griechen gegen den Vorwurf, als ob seine Exhaustionsmethode irgend etwas mit Kepler's Infinitesimalbetrachtungen gemein habe. Bewundernd und zustimmend äusserte sich dagegen Henry Briggs, der zu Anfang des Jahres 1625 seine 1624 gedruckte *Arithmetica logarithmica* Kepler zuschickte und sie mit einem Briefe begleitete[2]), welcher den in logarithmischer Rechnung erbrachten Zahlenbeweis enthielt, dass wirklich der der Kugel einbeschriebene Würfel einen grösseren Inhalt besitze, als ein nur wenig von der Würfelgestalt abweichendes einbeschriebenes Parallelopipedon, dass also Kepler's 4. Satz im II. Theile der Doliometrie richtig sei.

Ausser aller Beziehung zu Kepler's Doliometrie, ja man könnte sagen, ausser aller Beziehung zu Infinitesimalbetrachtungen steht ein Werk, welches wir im Vorübergehen hier nennen, weil bei dem nächsten Schriftsteller, von welchem ausführlich gehandelt werden wird, Erwähnung davon geschehen muss. Bartholomäus Souvey[3]) (um 1577—1629), lateinisch Soverus, war aus Crisie unweit Freiburg in der Schweiz. Er studirte in Rom, lehrte dann in Turin, später in Padua. Sein Versuch, eine Professur in Bologna zu erlangen, scheiterte daran, dass er gedruckte Belege seiner wissenschaftlichen Tüchtigkeit nicht vorlegen konnte. Erst nach seinem Tode

---

[1]) *Atqui si sphaerica superficies intelligatur divisa in zonas infinitas aeque latas, erit quaelibet zona ut circulus aliquis latitudine carens.* [2]) *Opera Kepleri* IV, 659—662. [3]) Kästner III, 62—66. — Favaro im *Bulletino Boncompagni* XV und XIX.

erschien 1630 sein *Tractatus de recti et curvi proportione.* Dem Titel nach sollte man ausgiebige Untersuchungen über Rectification von Curven erwarten, und auf sie verweist auch ein im VI. (letzten) Buche ausgesprochener Grundsatz: *lineam curvam extendi posse.* Wesentlich Neues in dieser Richtung scheint sich aber nicht zu finden. Hervorzuheben dürfte sein, dass im V. Buche Figuren mittels einer Parallelbewegung gerader Linien erzeugt werden, dass im VI. Buche eine Spirallinie unter dem Namen *spiralis quadrantis* durch einen Punkt erzeugt wird, der in gleichmässiger Bewegung den Halbmesser eines Kreises durchläuft, während der Halbmesser in gleichfalls gleichmässiger Bewegung einer Drehung um 90^0 unterworfen ist, eine Curve also, welche einen besonderen Fall der archimedischen Spirale (Bd. I, S. 291—292) darstellt.

Eingehend haben wir uns nun mit Bonaventura Cavalieri[1]) zu beschäftigen. Er gab seine *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* zuerst 1635, dann in verbesserter Ausgabe 1653 heraus; zwischen beiden Veröffentlichungen erschienen 1647 *Exercitationes geometricae sex.* Das erstere werden wir, wie es üblich ist, kurz als die Indivisibilien bezeichnen, ohne wohl eine Verwechselung befürchten zu müssen, wo wir des gleichen Wortes in einer geometrischen Bedeutung uns zu bedienen haben. Die Indivisibilien also sind 1635 erstmalig im Drucke erschienen. Es ist nicht unwichtig, die Entstehung des Werkes nach rückwärts zu verfolgen, und solches gelingt bis zum Jahre 1626.

Am 21. März 1626 schrieb Cavalieri an Galilei[2]): „Was das Indivisibilienwerk betrifft, so wäre es mir sehr lieb, wenn Eure Herrlichkeit sich so rasch als möglich daran hielte, damit ich auch das meinige fördern könnte, an welchem ich mittlerweile feilen werde.“ Und eine ähnliche Mahnung liess er am 4. April folgen[3]): „Ich bin daran, mein Werk über die Körper in Buchform zu bringen. Pater Benedetto ⟨Castelli⟩ sagte mir, es würde sehr wohl aufgenommen werden, wenn ich es italienisch (*in lingua volgare*) schriebe, und ich schreibe es mithin so und gebe Eurer Herrlichkeit davon Nachricht, damit auch Sie mit Ihren Indivisibilien ähnlich verfahren oder, wenn Sie es missbilligen sollten, mir Nachricht gäben, damit ich mich mit Eurer Herrlichkeit in Einklang setze. Aber ich bitte dringend, machen Sie sich rasch daran, damit ich so schnell als möglich Etwas von

---

[1]) Kästner III, 205—209. — Montucla II, 38—42. — Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 415—428. — Gerhardt, Entdeckung der höheren Analysis S. 18—27. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 70—90. [2]) Venturi, *Memorie e lettere inedite finora o disperse di Galileo Galilei* II, 96 (1819). [3]) Campori, *Carteggio Galileano inedito* (1881) pag. 243.

dem Meinigen zeigen und mich davon los an andere Gegenstände machen kann."

Antwortschreiben Galilei's sind nicht bekannt, und so können wir aus diesen Briefstellen nur zwei Thatsachen entnehmen: erstens die, dass im März 1626 die Niederschrift der Cavalieri'schen Indivisibilien begonnen hat, welche gewiss noch vielfach umgemodelt wurden, bis sie zu dem 1635 gedruckten lateinischen Werke wurden, von welchem gesagt worden ist[1]), dass es den Preis der Dunkelheit verdiente, wenn solche Preise vergeben würden; und zweitens die, dass Galilei mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt war, von welchen aber nichts an die Oeffentlichkeit gelangt ist. Wir werden auf diese Thatsachen noch zurückkommen müssen.

Zunächst wenden wir uns zu dem Inhalte der Indivisibilien, wobei wir bemerken, dass alle unsere Hinweise auf die II. vervollkommnete Ausgabe von 1653 sich beziehen. Das Werk zerfällt in sieben Bücher, deren allgemeine Inhaltsangabe durch Cavalieri's Ueberschriften geliefert ist. Im I. Buche werden darnach[2]) elementare Sätze über die Schnitte von Cylindern und von Kegeln vorausgeschickt, sowie auch Sätze, von welchen in den nachfolgenden Büchern Gebrauch zu machen ist. Im II. Buche[3]) ist vorzugsweise vom Dreiecke und dem Parallelogramme die Rede und von den durch sie erzeugten Körpern, überdies wieder von Sätzen zur Anwendung in den folgenden Büchern. Das III. Buch[4]) überliefert die Lehre vom Kreise und der Ellipse und den von ihnen aus erzeugten Körpern. Aehnlicherweise ist das IV. Buch[5]) der Parabel und ihren Körpern, das V. Buch[6]) der Hyperbel, welche aus einander gegenüberstehenden Schnitten, *oppositis sectionibus*, hervorgeht und ihren Körpern gewidmet. Das VI. Buch[7]) handelt von den Räumen der Spirale und ihrer Körper und von einigen Folgerungen aus dem Vorangegangenen. Im VII. Buche[8]) endlich wird Alles, was in den vorhergehenden Büchern der Indivisibilien bewiesen wurde, in anderer Weise und unabhängig von jenen gezeigt.

Was sind nun, sollte man in erster Linie eine Antwort erwartend fragen, die Indivisibilien? Das Wort war seit Bradwardinus (S. 120), vielleicht schon länger, in der Wissenschaft bekannt, aber ein ganz klarer Begriff war damit nicht verbunden, und eine klare Auskunft hat auch Cavalieri nie gegeben. Eine so grosse Anzahl von Definitionen an die Spitze des ersten Buches gestellt ist, keine

---

[1]) Marie l. c. IV, 90. [2]) *Indivisibilien* pag. 1. [3]) Ebenda pag. 99. [4]) Ebenda pag. 197. [5]) Ebenda pag. 285. [6]) Ebenda pag. 365. [7]) Ebenda pag. 429. [8]) Ebenda pag. 482.

erklärt jenes Wort, welches zudem im ganzen I. Buche nicht vorkommt.

Dagegen ist ein anderes wichtiges Wort, *regula*, ebendort in seinem Sinne bestimmt. Bei jedem geschlossenen ebenen Gebilde, *figura*, lässt eine Gerade als Berührungslinie sich denken, welche einen Scheitel, *vertex*, genannten Berührungspunkt mit dem Gebilde gemein hat. Ihr parallel giebt es Gerade in beliebiger Zahl, endlich wieder eine, welche die Figur berührt und ihr gewissermassen als Abschluss dient. Sie wird die gegenüberliegende Tangente, *tangens opposita*, genannt. Bei Körpern findet Aehnliches statt, sofern statt des Wortes Gerade das Wort Ebene eingeführt wird. Regula heisst nun[1]) jene erste Gerade, beziehungsweise erste Ebene, mit Bezug auf welche die Begriffe des Scheitels und der gegenüberliegenden Berührenden festgestellt sind. Der Gebrauch der Regula in der Ebene ist folgender. Seien EO, BC etwa zwei gegenüberliegende Tangenten. Durch die als Regula benutzte EO wird eine Ebene gelegt, zu welcher eine Parallelebene durch BC vorhanden ist. Die erste Ebene wird in paralleler Lage bewegt, bis sie mit der zweiten zusammenfällt, eine Bewegung, welche als Fliessen bezeichnet wird. Die Durchschnittsgeraden der bewegten oder fliessenden Ebene mit der Figur, *communes sectiones talis moti sive fluentis plani et figurae*, bilden die Gesammtheit der Geraden der Figur, *omnes lineae figurae*[2]). Aehnlich ist der Gebrauch der Regula im Raume. Dort wird die fliessende Ebene selbst in gewissen durch die Gestalt des Raumgebildes bedingten Begrenzungen den Körper erzeugen, und Gesammtheit der Ebenen des Körpers, *omnia plana solidi*[3]), heissen alle ebenen Figuren, welche bei jener Bewegung entstehen. Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnisse wie die Gesammtheiten ihrer Geraden, ihrer Ebenen, welche nach irgend einer Regula genommen wurden[4]).

Cavalieri ist sich der Schwierigkeit voll bewusst gewesen, welche der Vorstellung einer solchen Gesammtheit anhaftet und damals in ganz anderer Weise anhaftete als heute, wo wir an ähnliche Begriffsbildungen so sehr gewöhnt sind, dass wir, höchstens wenn wir besonders darauf aufmerksam gemacht werden, den Widerspruch empfinden, der darin enthalten ist. Schon bevor er daher den erwähnten Satz aussprach, suchte er seine Leser darüber zu beruhigen[5]). „Man könnte, sagt er, Schwierigkeiten machen, wie der Anzahl nach unbe-

---

[1]) *Indivisibilien* pag. 3, Definitio E. [2]) Ebenda pag. 104. [3]) Ebenda pag. 105. [4]) Ebenda pag. 113, Liber II, propositio III. [5]) Ebenda pag. 111, Scholium.

stimmte, *indefinitae numero*, Gerade oder Ebenen, welche von mir die Gesammtheit der Geraden, der Ebenen genannt worden sind, in Vergleich gebracht werden können. Daher erscheint mir der Wink nothwendig, dass, wenn ich die Gesammtheiten der Geraden, der Ebenen eines Gebildes betrachte, ich nicht deren uns unbekannte Anzahl vergleiche, sondern nur die Grösse, welche dem von eben diesen Geraden[1]) eingenommenen Raume zukommt, und weil dieser Raum in Grenzen eingeschlossen ist, so ist auch jene Grösse in denselben Grenzen eingeschlossen, und man kann sie zuzählen, abzählen, ohne ihre eigene Anzahl zu kennen. Solches aber genügt zu deren Vergleichung, weil sonst die Rauminhalte der Figuren auch nicht unter einander vergleichbar wären. Ein Continuum ist entweder nichts Anderes als die Indivisibilien, oder es ist Anderes[2]). Ist es nichts Anderes als die Indivisibilien, und deren Zusammenfassung, *congeries*, lässt sich nicht vergleichen, so ist auch das Räumliche oder das Continuum der Vergleichung unfähig, weil wir eben gesagt haben, es sei nichts Anderes als die Indivisibilien selbst. Ist dagegen das Continuum noch Anderes ausser den Indivisibilien, so muss jenes Andere zwischen den Indivisibilien liegen. Wir haben also ein Continuum, welches in Bestandtheile von noch unbestimmter Anzahl zerlegbar ist, *disseparabile in quaedam, quae continuum componunt, numero adhuc indefinita.* Zwischen je zwei Indivisibilien muss Etwas von jenem Anderen liegen, welches ausser den Indivisibilien zum Continuum gehört, denn derselbe Grund, welcher es zwischen zwei Indivisibilien aufhebt, hebt es zwischen allen anderen auf. In diesem Falle aber können wir Continuum oder Räume wieder nicht mit einander vergleichen, weil eben das Zusammenzufassende und zusammengefasst zu Vergleichende, nämlich was das Continuum bildet, der Anzahl nach unbestimmt ist. Nun ist doch unerhört zu sagen, in Grenzen eingeschlossene Continuen seien nicht vergleichbar, mithin ist auch unerhört zu sagen, die Zusammenfassungen der Gesammtheiten der Geraden oder Ebenen zweier Raumgebilde seien nicht vergleichbar, wenn auch das Zusammengefasste in seiner Anzahl unbestimmt ist, weil dieses der Vergleichung der Continuen nicht im Wege steht. Mag demnach das Continuum, oder mag es nicht aus den Indivisibilien bestehen, die Zusammenfassungen der Indivisibilien sind mit einander vergleichbar und stehen in einem Verhältnisse.“ Sehr deutlich wird man diese weitschweifige Begründung nicht nennen wollen, weil sie, wie wir schon oben betonten, gerade das nicht sagt,

[1]) Hier beschränkt sich Cavalieri auf *omnes lineae* und lässt, offenbar um nicht allzu schleppend zu werden, *omnia plana* bei Seite. [2]) Man beachte das plötzliche unvermittelte Auftreten des Wortes Indivisibilien!

was zu wissen vorzugsweise nothwendig wäre, nämlich was Cavalieri unter Indivisibilien verstehe. Und doch stützt er auf das Verhältniss der im Unklaren verbleibenden Gesammtheiten seine ganze Lehre. „Um das Verhältniss zweier ebenen oder räumlichen Gebilde kennen zu lernen, heisst es nur wenige Seiten später[1]), genügt es, das Verhältniss der Gesammtheiten der von irgend einer Regula aus beginnenden Geraden oder Ebenen zu finden. Das ist das Fundament, welches ich dieser meiner neuen Geometrie zu Grunde lege.“

Wie geht nun diese neue Geometrie zu Werke? Im 15. Satze des II. Buches[2]) soll bewiesen werden, dass der Inhalt ähnlicher ebener Raumgebilde sich verhalte, wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Bei beiden Figuren werden einander entsprechende gegenüberliegende Berührungslinien, bei beiden einander entsprechende der Regula parallele Gerade gezogen, deren Länge proportional sein muss der Länge entsprechender Zwischengeraden in einander ähnlichen Dreiecken, die jeweils zwischen den beiden Paaren gegenüberliegender Berührungslinien liegen. Die Gesammtheiten der Geraden der Figuren verhalten sich also wie die Gesammtheiten der Geraden der Dreiecke, die Figuren selbst wie die Dreiecke. Dass aber ähnliche Dreiecke sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, wird alsdann mittels des Durchgangs durch ein anderes Dreieck gezeigt (Figur 150). Das dem grösseren Dreiecke ABC ähnliche kleinere Dreieck EBD wird so auf ersteres gelegt, dass die Winkel bei B sich decken, und dann wird CE gezogen. Die Dreiecke ABC, EBC haben gleiche Höhe. In beiden können daher gleich viele, gleich weit von einander abstehende Parallele zur Grundlinie gedacht werden, die alle in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, wie die Grundlinien AB, EB. Deren Gesammtheiten stehen also in gleichen Verhältnissen oder $\triangle ABC : \triangle EBC = AB : EB$. Aber die Dreiecke EBC, EBD besitzen ebenfalls gleiche Höhen. Unter gleicher Begründung kann man daher folgern

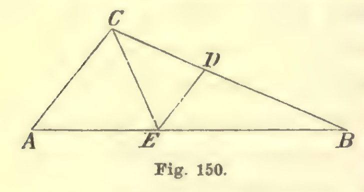


Fig. 150.

$$\triangle EBC : \triangle EBD = BC : BD = AB : EB.$$

Also findet er durch Vereinigung beider Verhältnisse

$$\triangle ABC : \triangle EBD = AB^2 : EB^2$$

nach einem Beweise, der von dem bei Euklid VI, 19 sich kaum anders unterscheidet, als durch das neu auftretende Wort der Gesammtheiten der Geraden. Nichtsdestoweniger weiss Cavalieri sich auf den Be-

[1]) *Indivisibilien* pag. 115, Corollarium. [2]) Ebenda pag. 127—131.

weis und namentlich auf dessen ersten Theil, der das Verhältniss ähnlicher Figuren überhaupt auf das ähnlicher Dreiecke zurückführt, sehr viel zu gute[1]). Welcher Fortschritt, ruft er aus, gegen die Methode früherer Schriftsteller! Dort musste für Dreiecke, Vierecke, Kreise der Beweis gesondert geführt werden; die neue Methode vereinigt Alles in einen Satz. Ganz ähnlich wird alsdann im 17. Satze des II. Buches[2]) gezeigt, dass ähnliche Körper sich wie die Würfel gleichliegender Seiten verhalten. Der 19. Satz[3]) behauptet, das Parallelogramm werde durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, deren jedes halb so gross sei als das Parallelogramm (Figur 151). Man betrachtet AF, CD als gegenüberliegende Tangenten, nimmt $CB = FE$ und zieht die Zwischengeraden BM, EH. Sie sind einander gleich, gleich also auch die Gesammtheiten der Geraden in den beiden Dreiecken CAF, FDC und gleich die Dreiecke selbst. Mithin ist jedes die Hälfte der Summe beider Dreiecke, d. h. des Parallelogramms.

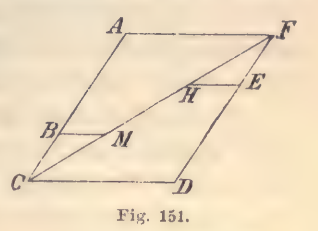


Fig. 151.

Immer noch im II. Buche, in dem 24. Satze[4]), gelangt Cavalieri dazu, nicht mehr Gesammtheiten einfacher Geraden, sondern solche der Quadrate dieser Geraden in Betracht zu ziehen. Ein Parallelogramm und das dessen Hälfte darstellende Dreieck sind die Figuren, deren Geraden gemeint sind. *Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum constitutorum sunt in ratione tripla*, d. h. die betreffenden Gesammtheiten verhalten sich wie 3 : 1. Der Beweis, welchen Cavalieri giebt, stützt sich rückwärts auf allzuviele vorhergehende Sätze, als dass es möglich wäre, ihn kurz zusammenzufassen. Dass der Satz wahr ist, lässt sich daraus entnehmen, dass, sofern a, b die beiden Seiten des Parallelogramms sind, die genannten Gesammtheiten sich als

$$\int_0^a \frac{kb^2x^2}{a^2}dx = \frac{kab^2}{3}$$

und als

$$\int_0^a kb^2dx = kab^2$$

darstellen, wo k von der Grösse der Winkel des Parallelogramms abhängt. Weiter wird alsdann gefolgert[5]), dass jeder Cylinder das Dreifache des Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe sei

---

[1]) *Indivisibilien* pag. 133. [2]) Ebenda pag. 133—145. [3]) Ebenda pag. 146—147. [4]) Ebenda pag. 159—160. [5]) Ebenda pag. 185.

(Figur 152). Die Diametralebene $ACED$ zerschneidet die beiden Körper in dem Parallelogramme $ACED$ und dem Dreiecke BED, welche als Erzeugende der Körper betrachtet werden können. Da das Dreieck mit dem Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe besitzt, kann der 24. Satz auf diese Figuren ausgedehnt werden. Parallelschnitte zum Grundkreise $DFEH$ schneiden Cylinder und Kegel in Kreisen, welche sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, d. h. wie die Quadrate eines Paares von Geraden des Parallelogrammes und des Dreiecks. Die Körper verhalten sich also wie die Gesammtheiten dieser Quadrate, und das ist wie 3 : 1.

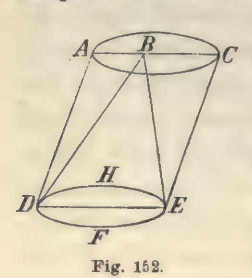


Fig. 152.

Wir wollen nicht länger bei dem II. Buche verweilen, vielmehr noch Weniges aus anderen Büchern berichten. Der 11. Satz des III. Buches[1]) beschäftigt sich mit der Quadratur der Ellipse. Ist $2a$ deren grosse, $2b$ deren kleine Axe und construirt man mit letzterer als Durchmesser den eingeschriebenen Kreis, überdies das der Ellipse umschriebene Rechteck und das dem Kreise umschriebene Quadrat, so ist vorhergegangenen Sätzen leicht zu entnehmen, dass die Ellipse und der Kreis sich wie jenes Rechteck und jenes Quadrat, diese sich wie die grosse und kleine Axe verhalten, dass also $ab\pi$ die Ellipsenfläche darstellen muss. Des Weiteren sind im III. Buche jene Umdrehungskörper von Kreisabschnitten auf ihren Rauminhalt geprüft, mit welchen Kepler sich theilweise mangelhaft beschäftigt hatte. Der 1. Satz des IV. Buches[2]) (Figur 153) spricht aus, dass ein Parallelogramm $AEHF$, der Parabelabschnitt $FCMH$ und das Dreieck FCH, deren Lagenverhältnisse aus der Figur einleuchten, sich wie 6 : 4 : 3 verhalten. Man zieht $NM \parallel CG \parallel EH$. Vermöge der Eigenschaften der Parabel ist

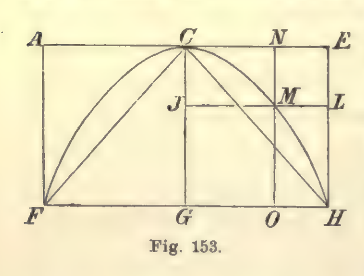


Fig. 153.

$$EH : NM = CE^2 : CN^2$$

oder $$NO : NM = CE^2 : CN^2.$$

Die Gesammtheit der NO verhält sich desshalb zur Gesammtheit der NM, d. h. das Parallelogramm $CGHE$ zu dem dreilinigen Raume, *trilineum*, $CMHE$ wie die Gesammtheit der Quadrate der Geraden im Parallelogramm $CGHE$ zu der der Quadrate der Geraden CN, d. h. der Geraden im Dreiecke CHE. Deren Verhältniss war 3 : 1 mithin ist das erwähnte Trilineum ein Drittel des Parallelogrammes,

[1]) *Indivisibilien* pag. 213. [2]) Ebenda pag. 285—286.

und das ergänzende Trilineum $CMHG$ zwei Drittel desselben, während das Dreieck CHG dessen Hälfte ist. Da links von CG ähnliche Verhältnisse obwalten, so ist damit der Satz bewiesen. Mit Uebergehung des ganzen V. Buches erwähnen wir den 9. Satz des VI. Buches[1]), welcher die Quadratur der Archimedischen Spirale enthält. Diese war, ebenso wie die Quadratur der Parabel, allerdings schon von Archimed ermittelt (Bd. I, S. 289—290), es bedurfte also keiner neuen Entdeckung, sondern nur eines neuen Beweises vom Gesichtspunkte der Indivisibilien aus. Bei dem ohnedies verwickelten Gegenstande sei ohne Veränderung des Ganges der Darstellung, wie Cavalieri sie giebt, eine etwas veränderte Ausdrucksweise hier gestattet (Figur 154). Unter Fläche der Spirale wird der Raum $ADCBA$ verstanden, welcher begrenzt ist durch die Spirale von ihrem Anfangspunkte A bis zu B, wo die erste Umdrehung des erzeugenden Leitstrahles vollendet ist, und von dem letzten Leitstrahle AB. Sie kann als Unterschied zweier anderer Flächen aufgefasst werden, nämlich des mit

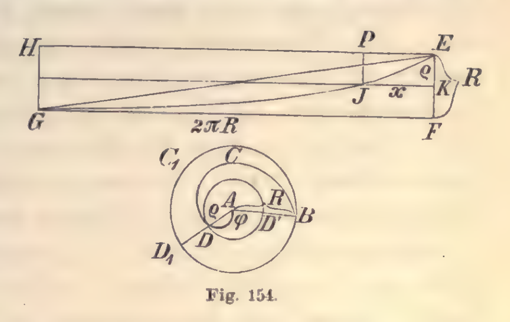


Fig. 154.

$AB = R$ als Halbmesser beschriebenen Kreises πR^2 und des Raumes $ADCBC_1D_1B$, welcher Q heissen mag. Die Gleichung der Spirale ist $\varrho = k\varphi$, wo ϱ den Leitstrahl, φ das Längenmaass des Kreisbogens vom Halbmesser 1 bedeutet, welcher die vollzogene Drehung des Leitstrahles bespannt. Da nun der Annahme nach $\varphi = 2\pi$ bei $\varrho = R$ wird, so ist $R = 2\pi k$, $k = \frac{R}{2\pi}$, $\varrho = \frac{R\varphi}{2\pi}$, $\varphi = \frac{2\pi\varrho}{R}$, $\varphi\varrho = \frac{2\pi\varrho^2}{R}$ = der Länge des Kreisbogens $D'D$, welcher als eine gekrümmte Indivisibilie des Raumes Q betrachtet werden kann. Nun werde ein Rechteck $EFGH$ mit der Grundlinie $FG = 2\pi R$ und der Höhe $EF = R$ gezeichnet, dessen Inhalt demnach $2\pi R^2$ ist. Innerhalb des Rechtecks mit E als Scheitel, EH als Axe, wird eine durch G hindurchgehende Parabel $y^2 = ax$ gezeichnet. Der vorgeschriebenen Bedingung der Zeichnung gemäss ist $R^2 = a \cdot 2\pi R$, $a = \frac{R}{2\pi}$, also die Parabelgleichung $y^2 = \frac{Rx}{2\pi}$ oder $x = \frac{2\pi y^2}{R}$. So oft folglich $y = \varrho$, ist x gleich der Länge des Kreisbogens $D'D$. Man kann aber x als Indivisibilie des Trilineums $EFGJE$ betrachten, in

[1]) *Indivisibilien* pag. 436—439.

welchem es alle Werthe von 0 bis $2\pi R$ annimmt, genau so wie der Kreisbogen $D'D$ im Raume Q. Die Gesammtheiten beider müssen also gleich sein, d. h. $Q = EFGJE$ neben $2\pi R^2 = EFGH$ oder $\pi R^2 = \triangle EFG$. Daraus folgt $\pi R^2 - Q = EJGE =$ der Fläche der Spirale, deren Auffindung dadurch auf die Quadratur eines Parabelabschnittes zurückgeführt ist. Letztere wurde, wie wir oben sahen, als Drittel des Dreiecks EFG, d. h. als $\frac{\pi R^2}{3}$ erkannt, und ebensogross ist die Fläche der Spirale. Mit dem VI. Buche ist dasjenige, was Cavalieri nach der Methode der Indivisibilien erörtert hat, abgeschlossen.

Er fühle selbst, erklärt die Vorrede zu dem sich anschliessenden VII. Buche[1]), dass dem Leser manche Zumuthungen gemacht worden seien. Die Philosophen stritten sich herum über die Zusammensetzung des Continuums, über das Unendliche; die Vorstellung von der Gesammtheit von Geraden oder Ebenen möge Manchen unfassbar sein, sowie auch, dass die Meinung des Verfassers auf eine Zusammensetzung des Continuums aus Indivisibilien hinauslaufe. Jene Gesammtheiten seien am leichtesten negativ zu verstehen, nämlich so, dass keine Gerade, keine Ebene ausgeschlossen sei. Auf alle Fälle wolle er eine zweite Methode mittheilen, welche von jenen dem Zweifel ausgesetzten Betrachtungen frei sei. Ihre Grundlage stellt der 1. Satz des VII. Buches[2]) dar: Raumgebilde der Ebene wie des Raumes sind inhaltlich gleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Strecken beziehungsweise gleiche Flächen ergeben.

Die Dunkelheit der Cavalieri'schen Darstellung mag manche Leser abgeschreckt, andere nur um so stärker angezogen haben, ähnlichen Erfolg mögen die neuen Auffassungen gehabt haben, welche hier entgegentraten, jedenfalls erhoben sich in ungleich stärkerem Maasse als bei Kepler's Doliometrie Stimmen gegen die Geometrie der Indivisibilien neben solchen, welche Cavalieri beipflichteten.

Als Gegner offenbarte sich Paul Guldin[3]) (1577—1643), der in St. Gallen geboren war und als Goldschmiedgeselle anfing. Im 20. Lebensjahre trat er 1597 zu Freisingen gegen den Willen seiner protestantischen Eltern in den Jesuitenorden ein und verwandelte bei der Glaubensänderung seinen früheren Namen Habakuk in Paul. Guldin's Obere erkannten seine grosse mathematische Begabung und liessen ihn in Rom weiter ausbilden, wo er später selbst als Lehrer wirkte, bevor er zu gleicher Thätigkeit nach Wien, dann nach Graz

[1]) *Indivisibilien* pag. 482—483. [2]) Ebenda pag. 484. [3]) Gerhardt, Math. Deutschl. S. 129—130.

geschickt wurde. Er veröffentlichte ein aus vier Büchern bestehendes Werk *Centrobaryca*, dessen 1. Buch 1635, das 2. Buch 1640, das 3. und 4. Buch 1641 erschien. Schwerpunktsbestimmungen in vollständigerer Auswahl von Beispielen, als Guldin's Vorgänger (S. 695—696) sie geliefert hatten, bilden den Inhalt des 1. Buches. Im 2. Buche findet sich die sogenannte Guldin'sche Regel, dass der Rauminhalt eines Umdrehungskörpers durch das Product der erzeugenden Figur in den Weg ihres Schwerpunktes gemessen wird. Die letzten Bücher verwenden diese Regel bei Körpern, welche von Kepler und von Cavalieri untersucht worden waren, und das 4. Buch insbesondere ist der Bekämpfung dieser Mathematiker gewidmet. Kepler habe zu wenig Gewicht auf geometrische Reinheit und Genauigkeit gelegt, habe sich auf Analogieen und Conjecturen verlassen, nicht immer wissenschaftlich geschlossen und überdies Alles in dunkler Weise vorgestellt. Viel schärfer war noch der Tadel, welchen Guldin über Cavalieri aussprach. Ihm machte er den Vorwurf, als eigene Erfindung veröffentlicht zu haben, was er aus den Schriften von Souvey und Kepler entnommen habe.

Theils um diesen Vorwürfen zu begegnen, theils zur Erläuterung der Indivisibilien schrieb Cavalieri seine *Exercitationes geometricae sex* von 1647, auf deren Inhalt wir eingehen. Die Ueberschriften der sechs Abhandlungen, aus welchen der Band besteht, lauten: I. *De priori methodo Indivisibilium;* II. *De posteriori methodo Indivisibilium;* III. *In Paulum Guldinum e societate Jesu dicta Indivisibilia oppugnantem;* IV. *De usu eorundem Indivisibilium in potestatibus cossicis;* V. *De usu dictorum Indivisibilium in uniformiter difformiter gravibus;* VI. *De quibusdam proportionibus miscellaneis.*

Die I. Abhandlung, der Hauptsache nach eine Erläuterung zum II. Buche der Indivisibilien, vermeidet zwar streng genommen nicht minder als jenes Werk eine wirkliche Definition des Wortes Indivisibilien aufzustellen, aber sie erörtert deren Begriff immerhin etwas deutlicher mit Hilfe eines Bildes[1]). Ebene Figuren seien als Gewebe aus parallelen Fäden hergestellt zu denken, Körper als Bücher, welche aus einander parallelen Blättern bestehen. Dabei sei allerdings ein wesentlicher Gegensatz zu bemerken. Die Fäden des Gewebes, die Blätter des Buches seien in begrenzter, *finitum*, Anzahl vorhanden und haben einzeln eine gewisse Dicke, *crassitiem*; die Geraden der ebenen Figuren, die Ebenen der Körper dagegen seien in unbegrenz-

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 3: *Hinc manifestum est figuras planas nobis ad instar telae parallelis filis contextae concipiendas esse: solida vero ad instar librorum, qui parallelis foliis coacervantur.*

ter, *indefinitum*, Anzahl vorhanden und untheilhaft jeder Dicke, *omnis crassitiei expertia*. Es giebt zwei Methoden der Indivisibilien, welche zwar beide von jenen Geraden und Ebenen Gebrauch machen, aber in verschiedener Weise; die erste Methode benutze sie vereinigt, *collective*, die zweite einzeln, *distributive*[1]). Innerhalb zweier mit einander zu vergleichender Figuren muss die Entfernung der als unter einander gleich nachgewiesenen Geraden in der einen wie in der anderen Figur dieselbe sein[2]), aber davon, dass die Indivisibilien einer Figur der Bedingung gleicher gegenseitiger Entfernung unterworfen wären, ist keine Rede[3]). Die Geraden sind, in Uebereinstimmung mit dem im ersten Werke Vorgetragenen, auch Durchschnittslinien der gegebenen ebenen Figur mit einer im Flusse begriffenen Ebene, *planum motum seu fluens*[4]).

Man könnte die Frage aufwerfen, wesshalb eine solche Entstehungsweise der durch eine sich fortschiebende Gerade vorgezogen ist? Cavalieri äussert sich nicht darüber, aber vielleicht bestach ihn, dass diese Auffassung ihm gestattete, den Satz von dem Verhältnisse der Gesammtheiten von Quadraten der Geraden des Parallelogrammes und des halb so grossen Dreiecks den Sinnen näher zu bringen[5]). Besitzt die fliessende Ebene, welche man senkrecht zu den gegebenen Figuren sich vorstellen darf, die Gestalt eines Quadrates derjenigen Geraden, durch welche sie just hindurchgeht, so bilden alle diese Quadrate über dem Parallelogramme ein Parallelopipedon, über dem Dreiecke eine Pyramide, welche, da beide Körper von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche sind, ein Drittel des Parallelopipedons an Rauminhalt besitzt.

Die II. Abhandlung wendet sich der im VII. Buche der Indivisibilien gelehrten zweiten Methode zu und erläutert namentlich die drei ersten Sätze jenes VII. Buches, ohne Dinge hinzuzufügen, welche ein Verweilen gebieten.

Anders ist es mit der III. gegen Guldin und seinen Tadel gerichteten Abhandlung, in welcher Bemerkenswerthes enthalten ist. Guldin war 1643 gestorben, die Erwiderung gilt also einem Todten, und Cavalieri bedauert dieses[6]), sowohl weil die Wissenschaft an Guldin etwas verloren habe, als auch, weil er selbst jetzt in seiner Entgegnung einigermassen behindert sei. So sehr behindert, wie er

---

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 4. [2]) Ebenda pag. 17, Nr. XV. [3]) Wenn ebenda pag. 3, Nr. III die Linien *parallelae*, die Ebenen *aequidistantia* genannt sind, so ist mit letzterem Worte auch nur Parallelismus der Ebenen gemeint, wie aus anderen Stellen z. B. pag. 11 lin. 14 v. u. deutlich zu ersehen ist. [4]) Ebenda pag. 12, 16 und häufiger. [5]) Ebenda pag. 52—55. [6]) Ebenda pag. 177.

angiebt, fühlte sich übrigens Cavalieri doch nicht, denn er geht in seinen Gegenvorwürfen, wie wir sehen werden, ziemlich weit. Guldin, sagt Cavalieri, beschuldige ihn, Kepler ausgenutzt und nur dessen Erfindung aus dem Schatten in das Tageslicht gebracht zu haben. Beide Auffassungen seien aber wesentlich verschieden[1]). Kepler setzte aus kleinsten Körperchen grössere zusammen und liess sie dabei aneinanderstossen, er, Cavalieri, sage nur, die ebenen Figuren verhielten sich wie die Gesammtheiten paralleler Linien, die Körper wie die Gesammtheiten gleichfalls paralleler Ebenen, *plana esse ut aggregata omnium linearum aequidistantium, et corpora ut aggregata omnium planorum pariter aequidistantium.* An späterer Stelle[2]) verwahrt sich Cavalieri noch stärker, er habe nie gesagt, Körper und Gesammtheit der Ebenen sei das Gleiche, *nunquam autem ipse dixi, solidum et omnia plana idem esse.* Ferner solle er in der sogenannten zweiten Methode der Indivisibilien Souvey ausgenutzt haben. Dieser Vorwurf ist noch leichter zu entkräften[3]). Souvey's Schrift ist 1630 veröffentlicht worden, die Indivisibilien waren 1629 so weit vollendet, dass eine ganze Reihe namentlich angeführter Männer Einsicht von ihnen erhalten konnte Der Vorwurf, andere Schriftsteller ausgenutzt zu haben, sei freilich leicht gemacht. Könnte man nicht sagen, Guldin habe seine Regel zur Bestimmung des Rauminhaltes von Umdrehungskörpern Kepler entnommen?[4]) Wenn letzterer den Ringinhalt als Product eines Querschnittes in die Kreislinie, welche der Mittelpunkt, gleichzeitig Schwerpunkt des Querschnittes, durchlaufe, zu berechnen lehre, so sei das die Guldin'sche Regel, und Guldin's Begründung derselben weiche gleichfalls von derjenigen, welche Kepler (S. 841) am angegebenen Orte ausspreche, kaum ab. Auch hier ist eine etwas spätere Stelle[5]) zu vergleichen, wo statt Kepler's ein anderer Vorgänger Guldin's in der Person von Johann Antonio Rocca genannt ist, der zwei Jahre vor dem Erscheinen des zweiten Buches von Guldin's Centrobaryca, mithin 1638, einen ganz ähnlichen Satz mitgetheilt habe. Es spricht nicht für die Belesenheit der damaligen Gelehrten, dass weder Cavalieri noch irgend ein Anderer die Rückverfolgung der Guldin'schen Regel bis zu Pappus fortsetzte, welcher sie schon besass (Bd. I, S. 421), und dessen Schriften Guldin in anderem Zusammenhange anführt, also jedenfalls gelesen hatte. Einen weiteren Vorwurf hatte Guldin der Methode Cavalieri's in der Richtung gemacht, dass sie zur Ableitung des Archimedischen Satzes von der Gleichheit der Kugeloberfläche mit der vierfachen Fläche des Grössten-

---

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 180. [2]) Ebenda pag. 200. [3]) Ebenda pag. 183. [4]) Ebenda pag. 183—185. [5]) Ebenda pag. 230.

kreises nicht ausreiche. Die Richtigkeit dieses Vorwurfes gesteht Cavalieri unbedingt zu[1]). Den Flächeninhalt gekrümmter Oberflächen könne er mittels Indivisibilien nicht entdecken, das sei wahr, aber, fragt Cavalieri weiter, einen Gegenvorwurf aus seinem Eingeständnisse bildend, reiche denn etwa Guldin's vielgerühmte Schwerpunktsbenutzung aus, jene Aufgabe zu bewältigen? Auch die ganze Schlussweise der Indivisibilien hatte Guldin bemängelt. Die Gesammtheit der Geraden einer Figur sei eine Unendlichkeit, die der Geraden einer zweiten Figur gleichfalls eine Unendlichkeit; zwischen Unendlichkeiten finde aber ein bestimmtes Verhältniss nicht statt. Ganz richtig, erwidert Cavalieri[2]), wenn einfach von Unendlichem die Rede ist, woher es nur immer stamme, unrichtig aber, wenn von Unendlichem gesprochen werde, welches mit Beziehung auf ein Endliches in Verhältnisse eingehe. Diese Bemerkung ist ungemein interessant, da sie zeigt, dass Cavalieri mit Bezug auf Unendlichgrosses denselben Unterschied zu machen wusste, der etwa zwischen einem Rechnen mit Differentialien und einem solchen mit Differentialquotienten besteht. Endlich bringt Cavalieri selbst eine Schwierigkeit zur Rede, die Guldin, wenn er denn doch die Methode der Indivisibilien bemängeln wollte, hätte hervorheben können, die ihm aber entgangen sei[3]) (Figur 155).

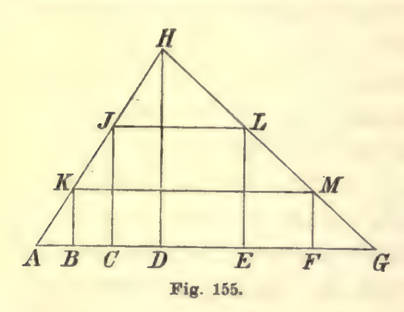


Fig. 155.

Die zwei ungleichen rechtwinkligen Dreiecke ADH und GDH sollen mit der gemeinsamen Kathete DH aneinanderhängen. Zieht man KM und JL der Grundlinie AG parallel, so zeigt sich $KB = MF$, $JC = LE$, kurz jeder HD parallel gezogenen Geraden in ADH entsspricht eine ihr gleiche in GDH; die Gesammtheiten derselben müssen also gleich sein, d. h. die ungleichen Dreiecke zugleich auch gleich sein. Das wäre doch wenigstens ein Einwurf von scheinbarer Gefährlichkeit gewesen, aber freilich auch nur scheinbar, weil die Geraden BK, CJ, DH nicht in derselben Entfernung von einander auftreten, wie die FM, EL, DH, was in der ersten Abhandlung[4]) ausdrücklich als nothwendig hervorgehoben sei (S. 841).

In den Indivisibilien, in den drei ersten Abhandlungen der Exercitationes war die Beweisführung eine ungewohnte, aber bis auf verhältnissmässig geringe Ausnahmen waren die Ergebnisse bereits be-

---

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 194—195. [2]) Ebenda pag. 202. [3]) Ebenda pag. 238—239. [4]) Ebenda pag. 17, Nr. XV.

kannt, und man konnte fast als Vorwurf äussern, was Cavalieri in der III. Abhandlung einmal zu Gunsten seiner Methode sagte[1]), man könne Alles, was er mit Hilfe von Indivisibilien zeige, auch in die Sprache Archimed's übersetzen, wenn man Umschweife nicht scheue. Wesentlich neu dagegen war der Inhalt der IV. Abhandlung. Wir haben (S. 837) gesagt, das was Cavalieri von der Gesammtheit der Quadrate eines Dreiecks behaupte, sei in den Zeichen heutiger Mathematik in Uebereinstimmung mit

$$\int_0^a \frac{k b^2 x^2}{a^2} dx = \frac{k a b^2}{3}.$$

In der gleichen Zeichensprache heisst der Gegenstand der IV. Abhandlung:

$$\int_0^a \frac{k b^n x^n}{a^n} dx = \frac{k a b^n}{n+1}.$$

Cavalieri sprach die von ihm entdeckte Wahrheit zuerst 1639 als letzte Aufgabe seiner in Bologna gedruckten *Centuria di varii problemi per dimostrare l'uso e la facilita dei logaritmi nella Gnomonica, Astronomia, Geografia* aus. In den Exercitationes erzählt er dann[2]), wie er zu dem Satze gekommen sei. Eine Aufgabe aus Kepler's Doliometrie veranlasste ihn, die Gesammtheiten der vierten Potenzen der Geraden eines Parallelogrammes und des halb so grossen Dreiecks in Verhältniss zu setzen, wobei er 5 : 1 fand. Er erinnerte sich, dass die Gesammtheiten der Geraden selbst und die ihrer Quadrate in den gleichen Figuren den Verhältnisszahlen 2 : 1 und 3 : 1 gehorchten. Um keine Lücke zu lassen, untersuchte er noch die Gesammtheiten der Würfel eben jener Geraden und fand ihr Verhältniss 4 : 1, und nun begriff er bewundernd, *ita ut denique non sine magna admiratione comprehenderim*, dass jenes Zahlengesetz sich der natürlichen Zahlenreihe entsprechend fortsetze. Die Richtigkeit der Verallgemeinerung hat Cavalieri niemals bewiesen. Die ersten Einzelfälle dagegen sind von ihm streng durchgearbeitet worden. Er stützte sich dabei zum Theil auf folgende von ihm erkannte Identitäten[3]):

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

---

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 235. [2]) Ebenda pag. 243—244.
[3]) Ebenda pag. 269—271.

Wir entnehmen ihm den Gang des Beweises für das Verhältniss 4 : 1 der Gesammtheiten der Würfel der Geraden im Parallelogramme und im Dreiecke[1]). Zunächst seien einige Zeichen erklärt, welche bei Cavalieri, wie wir fast überflüssigerweise bemerken, nicht vorkommen, deren wir uns aber zur Abkürzung bedienen wollen (Figur 156). Um die Summe der n^{ten} Potenzen aller Geraden in einer gegebenen Figur zu bezeichnen, schreiben wir das Summenzeichen vor die n^{te} Potenz einer Geraden und über das Summenzeichen die Figur, auf welche die Summirung sich bezieht. Mithin ist $\sum\limits^{ACDF} AF^3 =$ Summe der Würfel aller Geraden im Parallelogramme $ACDF$, und dafür kann man, weil im Parallelogramme die Geraden sich nicht ändern, auch $AF \cdot \sum\limits^{ACDF} AF^2$ schreiben. Ferner ist $\sum\limits^{ACF} NH^3 =$ Summe der Würfel aller Geraden im Dreiecke ACF u. s. w. Sind Producte wie $NH \cdot HE$ zu summiren oder ähnlich gebaute, deren erster Factor dem Dreiecke ACF, der zweite dem Dreiecke CDF angehört, so schreiben wir die Figur, über welche hier der erste, beziehungsweise der zweite Factor zu nehmen ist, oberhalb beziehungsweise unterhalb des Summenzeichens. $\sum\limits_{CDF}^{ACF} NH \cdot HE^2$ bedeutet also: solche Producte $NH \cdot HE^2$ sollen durch das ganze Parallelogramm $ACDF$ derart gebildet werden, dass der lineare Factor immer dem Dreiecke ACF, der quadratische dem Dreiecke CDF angehört. Nach der Formel

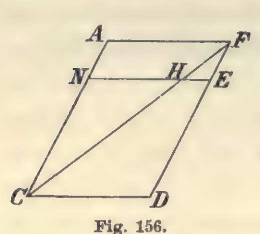


Fig. 156.

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

ist nun leicht ersichtlich

$$\sum^{ACDF} AF^3 = \sum^{ACF} NH^3 + \sum^{CDF} HE^3 + 3\sum_{CDF}^{ACF} NH \cdot HE^2 + 3\sum_{CDF}^{ACF} NH^2 \cdot HE.$$

Andererseits

$$\sum^{ACDF} AF^3 = AF \sum^{ACDF} AF^2,$$

und da

$$\sum^{ACDF} AF^2 = 3 \sum^{CDF} HE^2,$$

so ist ein zweiter Werth von

$$\sum^{ACDF} AF^3 = 3AF \sum^{CDF} HE^2 = 3\sum_{CDF}^{ACDF} NE \cdot HE^2 = 3\sum_{CDF}^{ACF} NH \cdot HE^2 + 3\sum^{CDF} HE^3.$$

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 273—274.

Die beiden Werthe von $\sum^{ACDF} AF^3$ sind einander gleichzusetzen, und das beiden gemeinsame $3\sum_{CDF}^{ACF} NH \cdot HE^2$ fällt dabei weg. Es bleibt

$$3\sum^{CDF} HE^3 = \sum^{ACF} NH^3 + \sum^{CDF} HE^3 + 3\sum_{CDF}^{ACF} NH^2 \cdot HE.$$

Aber offenbar ist $\sum^{ACF} NH^3 = \sum^{CDF} HE^3$, diese Werthe können mithin auch auf beiden Seiten noch weggelassen werden, und man behält nur noch $\sum^{CDF} HE^3 = 3\sum_{CDF}^{ACF} NH^2 \cdot HE$. Wegen der vollständigen Symmetrie der Figur muss ebenso $\sum^{CDF} EH^3 = 3\sum_{CDF}^{ACF} NH \cdot HE^2$ sein. $\sum^{CDF} HE^3 = \sum^{ACF} HN^3$ haben wir bereits benutzt. $\sum^{CDF} HE^3 = \sum^{CDF} HE^3$ ist identisch wahr, und nunmehr lassen sämmtliche Glieder der ersten Entwickelung von $\sum^{ACDF} AF^3$ sich durch $\sum^{CDF} HE^3$ ersetzen, so dass man erhält:

$$\sum^{ACDF} AF^3 = 4\sum^{CDF} HE^3$$

und das ist der Satz, welcher bewiesen werden sollte.

Auch die V. Abhandlung, in welcher Cavalieri Guldin's eigenstes Gebiet der Schwerpunktsbestimmung betrat, enthält wesentlich Neues. Man hatte stets nur Schwerpunkte homogener Figuren und Körper, d. h. solcher von überall gleicher Dichtigkeit, untersucht. Cavalieri ging darüber einen wesentlichen Schritt hinaus. Er fragte nach dem Schwerpunkte solcher Gebilde, deren Dichtigkeit mit der Entfernung von einer gewissen Anfangsgrenze zunimmt, eine Frage, deren Gleichberechtigung mit den Untersuchungen eines Galilei und Torricelli über Ortsbewegung, mögen diese mit der Natur im Einklange stehen oder nicht, er beansprucht[1]). Man hat diese Aeusserung eines Schülers von Galilei auffallend gefunden, und sie wäre es in der That, wenn man nicht in Erwägung ziehen will, dass Cavalieri Ordensgeistlicher war, und dass man nach den Erfahrungen, welche man mit der Koppernikanischen Lehre gemacht hatte, nie wissen konnte, ob die Curie nicht auch in Galilei's mechanischen Gesprächen von 1638 noch Glaubensgefährliches wittern werde.

---

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 322.

Die VI. und letzte Abhandlung mit ihren aus verschiedenen Gebieten entlehnten Gegenständen weicht darin namentlich von der vorhergehenden ab, dass sie keine Indivisibilien anwendet. Wir wären daher berechtigt, mit Schweigen darüber hinwegzugehen, wollten wir nicht einer Aufgabe gegenüber eine Ausnahme machen, derjenigen von der Aufsuchung eines Punktes, dessen Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinste Summe habe[1]). Cavalieri zeigt zunächst, dass, wenn die drei Punkte in einer Geraden liegen, der gesuchte Punkt derselben Geraden angehören müsse, und, wenn die Punkte Eckpunkte eines Dreiecks sind, der Ebene des Dreiecks. Er zeigt ferner, dass alsdann von dem gesuchten Punkte aus die drei Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel von 120° erscheinen.

Wir haben über die beiden Hauptwerke Cavalieri's ausführlich berichtet und uns, um den Gesammteindruck nicht zu stören, mit keiner Zwischenbemerkung über Grund oder Ungrund der gegen den Verfasser erhobenen Vorwürfe unterbrochen. Diese nothwendige Erörterung ist jetzt nachzuholen. Unzweifelhaft ist der Vorwurf auch nur der leisesten Anlehnung an Souvey ohne jede Begründung, da die von Cavalieri geltend gemachten Zeitdatirungen den schlagenden Gegenbeweis führen. Etwas anders steht es mit den Beziehungen Cavalieri's vielleicht auch Galilei's zu Kepler und dessen Doliometrie. Kepler und Galilei standen in Briefwechsel; sie verehrten sich gegenseitig Bücher, und wenngleich aus den erhaltenen Briefen nicht nachzuweisen ist, dass auch von dem Werke von 1615 ein Exemplar an den italienischen Fachgenossen geschenkweise gelangte, so ist doch beinahe ausgeschlossen, dass Galilei nicht von dem Werke gehört, und wenn er davon hörte, es nicht gelesen haben sollte, zumal, wie wir früher sahen, die Verbreitung der Doliometrie rasch vor sich ging. Nehmen wir weiter an, dass mit Galilei, vielleicht durch Galilei, auch Cavalieri das Buch kennen lernte, dass Beide über den Gegenstand mit einander verkehrten, so begreift sich die früher hervorgehobene beiderseitig gleichzeitige Beschäftigung mit den Indivisibilien, deren in Cavalieri's Briefen vorkommender Name (S. 832) Beiden geläufig gewesen sein muss. Warum Cavalieri Guldin gegenüber nicht ruhig zugab, was eigentlich schon in der Vorrede zu den Indivisibilien, wo von Kepler ausdrücklich die Rede ist, mittelbar eingestanden war? Man kann sich verschiedene Erklärungsversuche bilden. Cavalieri behauptet in jener Vorrede, die eigentliche Methode der Indivisibilien besessen zu haben, als er Kepler's Schrift

[1]) *Exercitationes Geometricae* pag. 504—510.

und in ihr Beispiele zur Prüfung seiner Methode kennen lernte[1]). Vielleicht ist dieses buchstäblich wahr, wenn, wie wir als möglich aussprechen, Galilei es war, der Cavalieri die erste Anregung zu den neuen Untersuchungen gab. Vielleicht wollte Cavalieri nur Guldin kein Zugeständniss machen, weil dieser die geistige Beeinflussung als einen geistigen Diebstahl dargestellt hatte. Vielleicht war er sich selbst nicht ganz klar darüber, ob er Kepler etwas verdanke. Welchem Forscher wäre es nicht schon begegnet, dass ihm bei eifrigem, erfolgreichem Nachdenken über einen wissenschaftlichen Gegenstand aus dem Gedächtnisse entschwand, was ihn veranlasste, gerade diese Aufgabe zu behandeln? Das aber ist unter allen Umständen anzuerkennen, dass Cavalieri's Forschung von Erfolg begleitet war, dass er einen gewaltigen Schritt über Kepler hinaus machte. Nicht darin finden wir denselben, dass Kepler kleinste Raumelemente summirte, während Cavalieri nur von einer Gesammtheit sprach, zu welcher das betreffende Raumgebilde in einem Verhältnisse stehe. Dieser Unterschied ist mehr philosophisch als mathematisch. Wir sehen den Fortschritt von Kepler zu Cavalieri vielmehr in zwei Dingen. Erstens darin, dass Kepler's Raumelemente nicht immer einander parallel waren, während Cavalieri an dieser Grundbedingung festhielt. Zweitens darin, dass Cavalieri zu Gesammtheiten von Potenzen der Geraden überging. Gerade dieses Fortschrittes war Cavalieri sich deutlich bewusst. In der Vorrede zu den Indivisibilien macht er darauf aufmerksam, dass, wenn man ein Rechteck und das halb so grosse rechtwinklige Dreieck um die eine Rechtecksseite in Umdrehung versetzt denke, die beiden Körperräume, Cylinder und Kegel, im Verhältnisse von 3 : 1 stehen, und dass man dieses neuauftretende Verhältniss aus den Eigenschaften der sich drehenden Figuren zu entnehmen nicht im Stande sei. In der IV. Abhandlung der Exercitationes vollends zieht er die etwas gewagte Verallgemeinerung des Satzes in Betracht, er vergleicht Gesammtheiten irgend welcher Potenzen und ist der Bewunderung voll über das Ergebniss.

Dem Ursprunge eines anderen bei Cavalieri auftretenden Begriffes können wir leicht nachgehen. Wenn er der Ebene, die der Regula parallel sich fortschiebt, eine „fliessende" Bewegung beilegte, so ist dieses offenbar Clavius (S. 556) oder Neper (S. 730) nachgebildet; aber ob Cavalieri wusste, wesshalb gerade dieses die Continuität der

[1]) *Cum ergo iam expeditam metiendarum figurarum novam, ac, si dicere fas est, valde compendiosam methodum adinvenissem, foeliciter mecum actum esse existimavi, ut haec solida, praeter illa Archimedea, mihi suppeditarentur, circa quae illius vim ac energiam experiri liceret.*

Bewegung so deutlich schildernde Wort ihm in die Feder kam, vermögen wir nicht zu sagen.

Ein Zusammentreffen Cavalieri's mit einem anderen Mathematiker macht freilich grosse Schwierigkeit und wirft, je nachdem man es zu erklären sucht, unter Umständen einen solchen Makel auf einen sonst berühmten Schriftsteller, dass man zu einem Gesammturtheile über denselben sich nur schwer entschliessen kann. Wir haben (S. 839) gesehen, dass in den Indivisibilien von 1635 die Quadratur der Spirallinie durch eine Gleichsetzung des in Frage stehenden Flächenraumes mit einem Parabelabschnitte gefunden wird. Dieselbe gewiss nichts weniger als nahe liegende Methode findet sich in dem *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* des Gregorius von St. Vincentius und führt dort den besonderen Namen *Spiralis et parabolae symbolizatio*[1]). Es genügt nicht, auf das Druckjahr 1635 der Indivisibilien, auf dasjenige 1647 des grossen Werkes von Gregorius hinzuweisen, denn dieser Schriftsteller erzählt in der Vorrede zum ganzen Werke, dasselbe sei bis auf einen besonders genannten anderen Abschnitt schon 1625 vollendet gewesen; er wiederholt dann in der Einleitung zur Symbolizatio, er habe diese Methode 1625 in Rom dem Pater Christoph Grienberger mitgetheilt, welcher sein Mitschüler im Unterrichte durch Pater Clavius gewesen sei. Aber andererseits ist auch diese Erzählung nicht gegen jeden Zweifel gesichert, denn Grienberger war seit 1636 todt und konnte die auf ihn bezügliche Thatsache 1647 weder bestätigen noch Lüge strafen. Cavalieri dagegen starb im Erscheinungsjahre des Opus geometricum und kann dadurch an der Abwälzung des auf ihn geworfenen Verdachtes verhindert gewesen sein, er kann auch geschwiegen haben, weil er sich schuldig fühlte. Hier tritt also unvermittelt, und wie uns scheint, unvermittelbar das Dilemma zu Tage: entweder Gregorius hat eine geradezu lügenhafte Angabe gemacht, und dabei einen passenden Namen zu einer von Cavalieri herrührenden Methode erfunden, oder Cavalieri hat als sein Eigenthum vorgetragen, was er nicht erfand, was aber, weil dabei, wenn auch kreisförmig gekrümmte Indivisibilien, immerhin Indivisibilien in Anwendung kamen, sehr wohl seinem Geiste entstammt sein konnte. Oder will man den dritten Ausweg für möglich halten, dass beide Männer, jeder für sich, auf den fast sonderbar zu nennenden Einfall kamen? Wir verzichten darauf, für das Eine oder für das Andere oder für das Dritte uns zu entscheiden.

---

[1]) *Opus geometricum* pag. 664.

79. Kapitel.

Descartes. Fermat.

Wir wollten Cavalieri's Untersuchungen, welche man ähnlich wie die vorausgegangene Doliometrie Kepler's als Quadraturen und Kubaturen bezweckend bezeichnen wird, im Zusammenhange vortragen. Wir haben dadurch eine Anzahl von Jahren zwischen der ersten Ausgabe der Indivisibilien und dem Erscheinen der Exercitationes zunächst übersprungen, welche für die Geschichte der Infinitesimalbetrachtungen sehr fruchtbar waren. Kehren wir in die nächste Zeit nach 1635 zurück, zum Jahre 1637, dem Druckjahre der Geometrie des Descartes.

Dort ist zum ersten Male die Auflösung einer Aufgabe in die Oeffentlichkeit getreten, welche von nun an Jahrzehnte hindurch nicht aufgehört hat, die Mathematiker zu beschäftigen, der Tangentenaufgabe.

Descartes fasste sie etwas anders auf; für ihn war es die Normalenaufgabe[1]); er suchte solche Gerade, welche gegebene Curven oder, was ihm für das Gleiche gilt, deren Berührungslinien in gegebenen Punkten rechtwinklig durchschneiden. Er sagt eine allgemeine Auflösung dieser Aufgabe zu und scheut sich nicht, es auszusprechen, sie sei die nützlichste und allgemeinste nicht blos von denen, die er kenne, sondern die er jemals innerhalb der Geometrie zu kennen gewünscht habe[2]). Der Gedanke Descartes', wenn auch natürlich nicht der Wortlaut seiner Darstellung, ist folgender[3]) (Figur 157). Die Normale an die Curve AB mit der Gleichung $F(x, y) = 0$ im Punkte M sei MN. Um N als Mittelpunkt wird mit einem beliebigen Halbmesser r ein Kreisbogen beschrieben, welcher die gegebene Curve in den Punkten M_1 und M_2 schneidet. Diese Durchschnittspunkte muss man mit Hilfe der Curvengleichung einestheils, der Kreisgleichung anderntheils finden können, d. h. deren Ordinaten M_1P_1, M_2P_2 müssen als die Wurzeln einer quadratischen

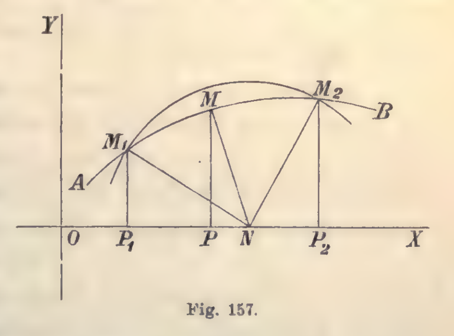


Fig. 157.

[1]) Descartes, Geom. I, 40 sqq. [2]) *Nec verebor dicere, Problema hoc, non modo eorum, quae scio, utilissimum et generalissimum esse; sed etiam eorum, quae in Geometria scire unquam desideraverim.* [3]) Schon Montucla II, 130—131 hat die Methode gut erfasst.

Gleichung sich ergeben, in welcher r gleichfalls vorkommt. Fallen die beiden Durchschnittspunkte M_1 und M_2 in M zusammen, d. h. wird der Kreis zum Berührungskreise, so bleibt die erwähnte quadratische Gleichung immer noch bestehen, aber mit zwei identischen Wurzeln. Die Bedingung dafür, dass solches stattfinde, muss darin bestehen, dass die linke Seite der Gleichung die Gestalt besitzt, welche aus der Multiplication von $y - e$ mit sich selbst hervorgeht[1]), also $y^2 - 2ey + e^2$, und dieses erzwingt man dadurch, dass r einen gewissen Werth annimmt. Kennt man diesen, so kennt man MN, also die gesuchte Normale.

Als Beispiel mag die Parabel $y^2 = ax$ gewählt werden. Abscisse von N sei z, so ist die Gleichung des um N mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises $(x - z)^2 + y^2 = r^2$. Man ersetzt x durch $\frac{y^2}{a}$, so wird $\left(\frac{y^2}{a} - z\right)^2 + y^2 = r^2$, beziehungsweise

$$y^4 - 2\left(az - \frac{a^2}{2}\right)y^2 = a^2(r^2 - z^2),$$

folglich

$$y^2 = az - \frac{a^2}{2} \pm a\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - az},$$

und ein einziges positives y erscheint nur, wenn $r^2 + \frac{a^2}{4} - az = 0$, $r^2 = az - \frac{a^2}{4}$ ist. Der Berührungskreis hat folglich die Gleichung $(x - z)^2 + y^2 = az - \frac{a^2}{4}$, während der Berührungspunkt als Punkt der Parabel die Gleichung $y^2 = ax$ bedingt. Man erhält also als weitere Umformung

$$(x - z)^2 + a(x - z) + \frac{a^2}{4} = \left(x - z + \frac{a}{2}\right)^2 = 0, \quad z = x + \frac{a}{2}$$

und damit den Punkt N.

Descartes blieb bei dieser Darstellung seiner Methode nicht stehen. In einem Mitte Mai 1638 geschriebenen Briefe deutete er noch eine etwas andere Einkleidung des gleichen Gedankens an[2]), d. h. des Gedankens, die Auffindung der Berührungslinie einer Curve mit dem Vorhandensein identischer Wurzeln einer Gleichung in Zusammenhang zu bringen (Fig. 158). Von der Berührungslinie MT als gegeben ausgehend zieht er von M noch nach einem anderen Punkte S der Abscissenaxe eine Gerade MS, und diese schneidet die Curve in einem Punkte M_1. Die Gleichung der Curve und die Lage von

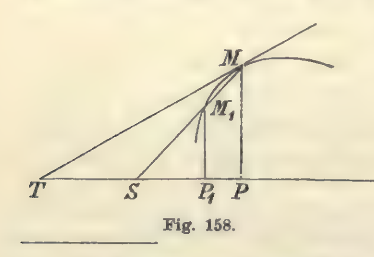


Fig. 158.

[1]) Descartes, Geom. I, 45 lin. 24—28. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 62—64.

S auf der Abscissenaxe müssen genügen, um die beiden Ordinaten MP und $M_1 P_1$ zu Wurzeln einer Gleichung zu machen, welche nur dann identisch werden, wenn S nach T fällt. So ist die Lage dieses Punktes, ähnlich wie in der Geometrie die von N, von dem Verschwinden einer gewissen Wurzelgrösse abhängig.

Descartes hat noch ein anderes Problem der Curvenlehre in seiner Geometrie und in nachgelassenen Papieren berührt, das der Rectification von Curven. In der Geometrie[1]) spricht sich Descartes in ganz negativer Weise über diese Aufgabe aus. Ein Verhältniss zwischen geraden und krummen Linien ist, sagte er, nicht bekannt und wird Menschen nicht bekannt werden. In seinem Nachlasse dagegen findet sich eine Methode[2]), um in beliebiger Annäherung zwar auch keine Rectification, aber das Entgegengesetzte derselben, eine Arcufication einer gegebenen Strecke zu liefern (Figur 159). Es handelt sich um die Auffindung des dem Quadrate $abkf$ isoperimetrischen Kreises. Zur Abkürzung und Vermeidung von Missverständnissen bezeichnen wir die Fläche eines Rechteckes durch zwei einander gegenüberliegende Eckpunkte desselben mit einem Horizontalstriche darüber, so dass z. B. $\overline{bf}$ die Fläche von $abkf$ bedeutet. Nun suche man den Punkt c, welcher der Bedingung genüge:

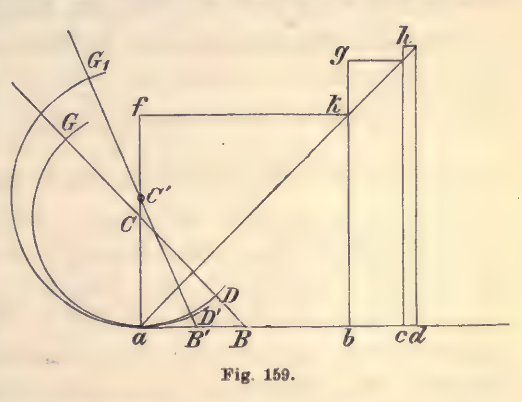


Fig. 159.

$$\frac{\overline{bf}}{4} = ac(ac - ab) = bg \cdot bc = \overline{cg}.$$

Ferner suche man den Punkt d, welcher der Bedingung genüge:

$$\frac{\overline{cg}}{4} = ad(ad - ac) = ch \cdot cd = \overline{dh}$$

u. s. w. ins Unendliche. Man nähert sich dabei einem Grenzpunkte t, dessen Entfernung at von a der Durchmesser des gesuchten Kreises wird. Zugleich ist auch die Summe der Flächeninhalte aller immer höher und schmaler werdenden Hilfsrechtecke bekannt. Sie ist mit Einschluss des ursprüngliches Quadrates

[1]) Descartes, Geom. I, 40. [2]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) XI, 442—443.

$$\overline{bf}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{4}{3}\overline{bf}.$$

Die Construction der Punkte $c, d\ldots$ ist sehr einfach. Man halbirt ab in B, af in C und zieht BC bis zum Durchschnitte G mit dem um C als Mittelpunkt mit Ca als Halbmesser beschriebenen Kreise. Dann ist $BG\cdot BD = BG(BG-ab) = Ba^2 = \frac{\overline{bf}}{4}$ und folglich $BG = ac$. Weiter macht man $aB' = \frac{1}{2}aB$, $aC' = \frac{1}{2}ac$ und zieht $B'C'$ bis zum Durchschnitte G' mit dem um C' als Mittelpunkt mit $C'a$ als Halbmesser beschriebenen Kreise, so ist

$$B'G'\cdot B'D' = B'G'(B'G'-ac) = B'a^2 = \frac{\overline{bf}}{4^2}$$

und folglich $B'G' = ad$ u. s. w. Die Bedeutung der Annäherung endlich ist folgende. Es ist $ab = \frac{4ab}{4}$ Durchmesser des Kreises, dessen regelmässiges Tangentenviereck die Seite ab besitzt. Der Kreis mit dem Durchmesser ac besitzt ein regelmässiges Tangentenachteck von der Seite $\frac{ab}{2} = \frac{4ab}{8}$. Zu dem Kreise mit ad als Durchmesser gehört ein regelmässiges Tangentensechzehneck von der Seite $\frac{4ab}{16}$ u. s. w. Jeder neuen Länge entspricht, wenn man sie als Kreisdurchmesser wählt, ein regelmässiges Tangentenvieleck von 2^n Seiten, deren jede die Länge $\frac{4ab}{2^n}$ besitzt, wodurch augenscheinlich alle diese Tangentenvielecke isoperimetrisch werden, und die Gesammtlänge ihrer Seiten auf $4ab$ bringen. Bei wachsendem n ist aber das Tangentenvieleck von 2^n Seiten schliesslich vom Kreise selbst nicht mehr zu unterscheiden.

In dem Briefwechsel von Descartes sind da und dort noch manche Dinge enthalten, welche bei der damals allgemeinen Sitte, von der wiederholt die Rede war, Briefe bei Fachgenossen herumzuzeigen und mit Rücksicht darauf den Inhalt der eigenen Briefe genau zu überlegen, sie sogar aufzusetzen, als veröffentlicht gelten dürfen und darum als wissenschaftliches Eigenthum des Briefschreibers in fast gleicher Weise beansprucht werden müssen, als wenn sie im Drucke erschienen wären. Wir heben einige solcher Dinge hervor, welche der höheren Curvenlehre angehörend hier den richtigsten Platz finden, da sie mit Infinitesimalbetrachtungen eng verbunden sind.

Ein Brief vom 13. Juli 1638 enthält Schwerpunktsbestimmungen und Quadraturen von Parabeln verschiedener Ordnung und Kubaturen von deren Umdrehungskörpern[1]). Beweise giebt Descartes

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 429—430.

nicht. Er meint die Mühe, sie niederzuschreiben, wäre zu gross, auch reiche die Mittheilung der Ergebnisse hin, weil Niemand zu denselben gelangen könne, ohne die Beweise zu kennen. Hat Descartes sich eigener Methoden bedient, ist er Cavalieri's Spuren nachgegangen? Wir möchten die letztere Vermuthung hegen, insbesondere dadurch unterstützt, dass auch eine andere Briefstelle auf den gleichen Schriftsteller als Quelle wird gedeutet werden müssen.

Wir meinen eine Stelle aus einem Briefe an Mersenne[1]) vom 27. Juli 1638. Er handelt von der Quadratur der Cycloide, und dort sagt Descartes, die Gleichheit zweier Figuren gehe schon daraus hervor, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe besitzen, und wenn alle Parallelen zur Grundlinie, die in beiden Figuren in gleicher Höhe gezogen werden, einander gleich seien, ein Satz, der vielleicht nicht von Jedem zugegeben wird, *un théorème qui ne serait peut-être pas avoué de tous.* Das klingt doch sehr, als wenn damals Descartes das VII. Buch der Indivisibilien, welches durchaus auf jenem Satze beruht, gekannt hätte.

Am 23. August theilte dann Descartes Mersenne auch die Tangentenconstruction bei der Cycloide[2]) mit. Auf diese Curve ist Galilei zuerst 1590 aufmerksam geworden[3]), und er hatte schon daran gedacht, ihre Quadratur zu ermitteln. Er gab ihr auch den Namen. Französische Gelehrte legten ihr andere Namen bei, den der Rolllinie, *Roulette*, den der *Trochoide*, und seit 1634 etwa hat die Curve Jahrzehnte lang nicht aufgehört, die Gelehrten Frankreichs, Italiens, Englands zu beschäftigen. Wir kommen auf die Geschichte dieser Cycloide später noch zurück; gegenwärtig kümmert uns nur die von Descartes in dem genannten Briefe gelehrte Tangentenconstruction (Figur 160). Descartes zeichnet die Mittellage des rollenden Kreises und von dem Cycloidenpunkte B aus, an welchen die Berührungslinie verlangt wird, die Gerade BN parallel zur Grundlinie bis zum Durchschnitte N mit jener Mittellage des Kreises. Dann verbindet er ND und zieht $BO \parallel ND$, welches die Normale an die Cycloide wird. Descartes' Beweis gründet sich auf die Eigenschaften einer Curve, welche beim Rollen eines geradlinig begrenzten regel-

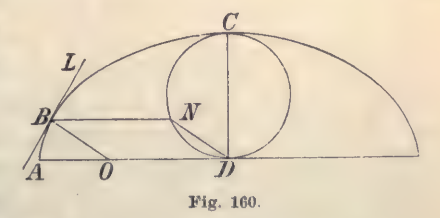


Fig. 160.

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 113—118, besonders pag. 117 zweites Alinea. [2]) Ebenda VII, 88—90. [3]) Fabbroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt* (1778) II, 12. — Favaro, *Galileo Galilei e lo studio di Padova* I, 34.

mässigen Vielecks entsteht, und welche unverändert bleiben, wenn die Seitenzahl des Vielecks ins Unendliche wächst. Er setzt hinzu[1]), diese Curven seien mechanische, von welchen in der Geometrie abgesehen sei; daher sei nicht zu verwundern, dass die dort gegebenen Regeln zur Tangentenziehung bei ihnen den Dienst versagen.

In dem gleichen Briefe[2]) bespricht Descartes die Curve, deren Gleichung $x^3 + y^3 = nxy$ ist. Sie hat später den Namen des Cartesischen Blattes, *folium Cartesii*, erhalten und vermag dadurch Interesse zu erwecken, dass es vermuthlich eine der ersten, wenn nicht die erste Schleifenlinie ist, mit welcher man sich beschäftigt hat.

Am 12. September 1638 finden wir Descartes im Besitze einer neuen Curve[3]), der logarithmischen Spirale. Ihre Gleichung schreibt er allerdings nicht an, aber er weiss, dass die Berührungslinien mit den von dem Anfangspunkte aus nach den Berührungspunkten gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel bilden.

Endlich erwähnen wir noch eine Stelle[4]) eines Briefes vom 20. Februar 1639 an Florimond de Beaune. Dieser hat, wie wir uns erinnern (S. 820), Erläuterungen zu Descartes' Geometrie geschrieben, welche er schon 1639 dem Verfasser des erläuterten Werkes überschickte, denn in dem Briefe, von welchem wir gegenwärtig reden, ist warmer Dank für die mitgetheilten Anmerkungen, an denen nichts auszusetzen sei, ausgesprochen. De Beaune's Brief muss aber noch ein Weiteres enthalten haben, nämlich die Aufgabe: die Quadratur derjenigen Curve zu finden, bei welcher die Ordinate sich jedesmal zur Subtangente verhalte, wie eine gegebene Strecke zum Unterschiede der Ordinate und Abscisse[5]). Das war, wenn man die von Kepler behandelte Aufgabe über Kegelschnitte (S. 827) mitzählt, die zweite überhaupt gestellte inverse Tangentenaufgabe, aber von geschichtlich entschieden höherer Bedeutung als jene. Sie war nicht auf eine bestimmte Gruppe von Curven beschränkt, deren besondere Art nur ermittelt werden sollte, und vor Allem gab ihr der Umstand Wichtigkeit, dass Descartes sie zu würdigen wusste. Die Eigenschaft, schreibt dieser, deren Beweis Sie mir zuschicken, scheint mir so schön, dass ich sie der Archimedischen Quadratur der Parabel vorziehe. Jener untersuchte eine gegebene Curve, Sie bestimmen die Fläche einer nicht gegebenen Curve. Ich glaube nicht, dass es möglich ist, eine allgemeine Umkehrung meiner Tangentenregel oder derer, welcher Herr von Fermat sich bedient, und deren Anwendung in

---

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 93—94. [2]) Ebenda VII, 94—97. [3]) Ebenda VII, 336—337. [4]) Ebenda VIII, 105 sqq. [5]) In der heute üblichen Bezeichnung $y : \frac{y}{y'} = a : (y - x)$ oder $a = (y - x)y'$.

manchen Fällen leichter als die der meinigen ist, zu finden. Dann geht Descartes auf einige Eigenschaften der De Beaune'schen Curven ein, auf ihre Asymptote u. s. w. Da man aber den Brief, welcher die Aufgabe und, dem Wortlaute der Antwort nach, auch zum mindesten einen Theil der Auflösung enthielt, nicht besitzt, so ist nicht zu unterscheiden, wie viel Descartes dem hinzufügte, was De Beaune schon gefunden hatte.

Was wir hier den nicht sofort gedruckten Arbeiten Descartes' zu entnehmen hatten, war keineswegs unwichtig und gereichte dem Erfinder zur hohen Ehre. Gleichwohl müssen wir unserer Anerkennung eine gewisse Einschränkung geben. Descartes zeigte sich als reich an Kunstgriffen, deren jeder einzelne für seine Genialität Zeugniss ablegt. Methodisch ist er, abgesehen von dem Grundgedanken der analytischen Geometrie und der Methode der unbestimmten Coefficienten, welche geometrisch keine Verwerthung durch ihn fand, nur bei der Auflösung der Tangentenaufgabe für algebraische Curven vorgegangen und an einen geistigen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Aufgaben, welche nachgerade eine höhere Mathematik darzustellen anfingen, hat er zunächst wenigstens nicht gedacht.

Dazu erhob sich erst Peter von Fermat. Wir haben (S. 816) gesehen, dass Fermat schon 1629 mit Maximal- und Minimalfragen sich beschäftigte, und dass er damals seine Methode einem Herrn Despagnet in Bordeaux mitgetheilt hat. Wollte man aber sagen, wozu nicht der leiseste Grund vorliegt, die Wahrheit dieser erst sieben Jahre später in einem Briefe an Roberval ausgesprochenen Zeitangabe sei dem Zweifel unterworfen, der Brief selbst ist vom 22. September 1636, mithin jedenfalls geschrieben, bevor Fermat von dem Inhalte der Descartes'schen Geometrie von 1637 Kenntniss haben konnte. Kaum war dieses Werk erschienen, so schickte Fermat gegen den 10. Januar 1638 durch Vermittelung von Mersenne seine Methode an Descartes und zwar vermuthlich in der lateinischen Niederschrift, welche später in den Varia Opera von 1679 als *Methodus ad disquirendum maximum et minimum* nebst den weiteren Aufsätzen über Tangenten und über Schwerpunkte, deren Ermittelung Fermat nur als einen Sonderfall der Bestimmung grösster oder kleinster Werthe betrachtet wissen wollte, veröffentlicht worden ist[1]). Später hat alsdann Fermat eine französische Bearbeitung[2]) des Tangentenproblems nachgeschickt, weil er entweder sich früher undeutlich ausgedrückt

---

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 63—73 und *Oeuvres* I, 133—179 unter Aufnahme mancher noch ungedruckter Stücke. [2]) Henry, *Recherches sur les manuscrits de Fermat* pag. 184—189 (*Bulletino Boncampagni* XII, 658—663).

oder Descartes die lateinische Ausdrucksweise falsch verstanden habe. Am Schlusse erklärt Fermat, er sei seit acht bis zehn Jahren im Besitze seiner Methode, und seit fünf bis sechs Jahren habe er sie verschiedenen Persönlichkeiten gezeigt. Demgemäss wäre als Datum der französischen Niederschrift etwa 1638 zu vermuthen, was auch damit übereinstimmt, dass die Tangente an die Curve $x^3 + y^3 = nxy$ gesucht wird, mit welcher Descartes im Sommer 1638 sich beschäftigte. Fermat hat seine Methode etwa folgendermassen geschildert:

Man setze in dem zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Ausdrucke statt der Unbekannten A die Summe zweier Unbekannten $A + E$ und betrachte die beiden Formen als annähernd gleich, wie Diophant sage, *adaequentur, ut loquitur Diophantus*. Wir unterbrechen hier für einen Augenblick unseren Bericht, um hervorzuheben, dass Fermat mit jenen Worten auf die *παρισότητος ἀγωγή* des Diophant anspielt, von welcher dieser in der 12. und 14. Aufgabe seines V. Buches Gebrauch macht[1]). Damit gewinnen wir die zur Beurtheilung von Fermat's Geistesrichtung ungemein lehrreiche Erkenntniss, dass ihm auch die Infinitesimalbetrachtungen ein Ausfluss zahlentheoretischer Begriffsbildung waren. Ist die annähernde Gleichsetzung vollzogen, so streicht man auf beiden Seiten, was zu streichen ist und behält dadurch lauter mit E behaftete Glieder. Theilt man durch E und streicht alsdann wiederholt, *elidantur*, die E noch enthaltenden Glieder, so bleibt endlich die Gleichung übrig, welche den Werth von A liefert, der das Maximum oder Minimum hervorbringt.

In Zeichen geschrieben, welche Fermat und seine Zeit nicht kannten, heisst die Vorschrift, man solle A aus

$$\left[\frac{F(A+E)-F(A)}{E}\right]_{(E=0)} = 0$$

suchen oder aus

$$\frac{dF(A)}{dA} = 0.$$

Das erste Beispiel Fermat's verlangt B in zwei Theile zu zerlegen, welche das grösste Product geben, die erste Annahme wählt die Theile A und $B - A$, die zweite $A + E$ und $B - A - E$. Man muss also $A(B - A) = (A + E)(B - A - E)$ setzen oder

$$0 = E(B - 2A - E).$$

Nach Division durch E entsteht $B = 2A + E$. Nun *elidatur* E, so bleibt $2A = B$, $A = \frac{1}{2}B$.

---

1) *Diophant* (deutsch von Wertheim), S. 214.

Eine zweite Aufgabe[1]) verlangt $A^2(B-A)$ zu einem Maximum zu machen. Die aufeinander folgenden Schritte der Auflösung sind:

$$A^2(B-A) = (A+E)^2(B-A-E);$$
$$E(2AB - 3A^2 + BE - 3AE - E^2) = 0;$$
$$2AB - 3A^2 + E(B - 3A - E) = 0;$$
$$2AB - 3A^2 = 0; \quad A = \frac{2}{3}B.$$

Als drittes Beispiel[2]) entnimmt Fermat aus Pappus die Aufgabe[3]), (Figur 161) eine Strecke OD, auf welcher zwei Punkte M, J gegeben sind, in N so zu theilen, dass $\frac{ON \cdot ND}{MN \cdot NJ}$ ein Minimum werde. Fermat setzt $OM = B$, $MD = Z$, $MJ = G$, $MN = A$. Zum Minimum soll also $\frac{(B+A)(Z-A)}{A(G-A)}$ werden. Hier sind die einzelnen Schritte:

O M N J D

Fig. 161.

$$\frac{(B+A)(Z-A)}{A(G-A)} = \frac{(B+A+E)(Z-A-E)}{(A+E)(G-A-E)};$$
$$(B+A)(Z-A)(A+E)(G-A-E) = (B+A+E)(Z-A-E)A(G-A);$$
$$E[BZ(G-E) + (BE+EG-EZ-2BZ)A + (G+B-Z)A^2] = 0;$$
$$BZ(G-E) + (BE+EG-EZ-2BZ)A + (G+B-Z)A^2 = 0;$$
$$(Z-B-G)A^2 + 2BZA = BGZ,$$

woraus endlich der Werth von A zu finden sei. Derselbe werde in Uebereinstimmung mit der Behauptung von Pappus der Proportion genügen: $OM \cdot MD : OJ \cdot JD = MN^2 : NJ^2$. In der That schreibt sich diese Proportion mittels der eingeführten Abkürzungen

$$BZ : (B+G) \cdot (Z-G) = A^2 : (G-A)^2,$$

und aus dieser folgt Fermat's Gleichung.

Auf eine Begründung des Verfahrens darf man freilich sich nicht Rechnung machen, und noch zwei Schwierigkeiten entgingen Fermat's Beachtung, wie es scheinen möchte. Er unterschied nicht zwischen grössten und kleinsten Werthen. Er wusste nicht, dass der erste Differentialquotient den Werth Null annehmen kann, ohne dass ein Maximum oder Minimum stattfände.

Einige dieser Maximalaufgaben Fermat's und zugleich einige seiner Tangentenbestimmungen sind durch Hérigone in dem *Supplementum Cursus mathematici* in beiden Auflagen, der von 1642 und der von 1644, im Drucke veröffentlicht worden[4]). Wir wollen Fer-

[1]) *Varia Opera* pag. 66. *Oeuvres* I, 140. [2]) *Varia Opera* pag. 67. *Oeuvres* I, 142. [3]) Pappus (ed. Hultsch), pag. 756—758. Liber VII propositio 61. [4]) Fermat, *Oeuvres* I, 171 Note 1. Auch Montucla II, 117 hat auf diesen Abdruck aufmerksam gemacht.

mat's Verfahren bei Lösung der Tangentenaufgabe wieder in die Sprache späterer Mathematiker kleiden.

Sei $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve, ihre *proprietas specifica*, wie Fermat sich ausdrückt. Sei M der Berührungspunkt mit den Coordinaten $x \mid y$ und P der Fusspunkt seiner Ordinate. Sei endlich MT die Berührungslinie, PT mithin die Subtangente A, auf deren Auffindung es ankommt. Ein M benachbarter Curvenpunkt M' mit den Coordinaten $x' \mid y'$ besitze den Fusspunkt P' der Ordinate, und P' stehe von P nur um das Stückchen E ab. Weil $x \mid y$ und $x' \mid y'$ Curvenpunkte sind, muss $F(x, y) = 0$ und $F(x', y') = 0$ sein. Ausserdem kann aber M' auch als Punkt der MT aufgefasst werden, so dass $\triangle MPT \sim \triangle M'P'T$, und aus dieser Aehnlichkeit folgen Beziehungen zwischen x', y', E, x, y, A, welche, wenn man $F(x, y) = F(x', y') = 0$ mit berücksichtigt, eine neue Gleichung $\Phi(x, y, E, A) = 0$ entstehen lassen, bei welcher E als Factor hervortritt. Durch ihn dividirt man die Gleichung, lässt sodann die Glieder weg, welche nach vollzogener Division noch E enthalten, und gewinnt so endlich $A = f(x, y)$.

Im einzelnen Falle nimmt das Verfahren, ohne dass der Grundgedanke sich änderte, mitunter einen etwas verschiedenen Gang, wie wir an dem Beispiele der Cissoide[1]) kennen lernen wollen (Figur 162). Damit an den Punkt H der Cissoide die Berührungslinie HF gezogen werden könne, soll $DF = A$ berechnet werden. Als bekannt wird vorausgesetzt $AD = Z$, $DG = N$, $DH = R$, und angenommen ist $DE = E$. *Ex proprietate specifica cissoidis* weiss man 1) $MD : DG = DG : DH$ und ähnlicherweise muss 2) $NE : EG = EG : EO$ sein. Weil aber O auch als Punkt der HF zu betrachten ist, muss weiter stattfinden 3) $EO : EF = DH : DF$. Folgert man aus diesen Proportionen unter nachmaliger Einführung der angegebenen Abkürzungen Gleichungen, denen wir die gleichen Ordnungsziffern geben, wie die Proportionen, aus welchen sie abgeleitet sind, sie führen, so ist 1) $DM \cdot DH = DG^2$; $MD^2 \cdot DH^2 = DG^4$; $AD \cdot DG \cdot DH^2 = DG^4$; $AD \cdot DH^2 = DG^3$ oder endlich 1') $ZR^2 = N^3$. Ferner ist 3) $EO = \frac{DH \cdot EF}{DF}$ oder 3') $EO = \frac{R(A - E)}{A}$. Weiter hat man 2)

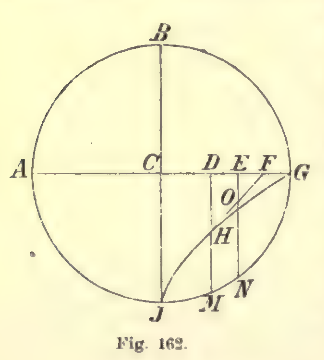


Fig. 162.

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 69—70. *Oeuvres* I, 159—161.

$$NE \cdot EO = EG^2;\ NE^2 \cdot EO^2 = EG^4;\ AE \cdot EG \cdot EO^2 = EG^4;$$
$$AE \cdot EO^2 = EG^3$$

oder unter Benutzung von 3′) auch $(Z + E)\,\frac{R^2(A-E)^2}{A^2} = (N - E)^3$, beziehungsweise

$$2')\ A^2R^2Z + (A^2R^2 - 2AR^2Z)\,E + (R^2Z - 2AR^2)\,E^2 + R^2E^3$$
$$= A^2N^3 - 3A^2N^2E + 3A^2NE^2 - A^2E^3.$$

Wegen 1′) fallen die ersten Glieder auf beiden Seiten von 2′), nämlich $A^2R^2Z = A^2N^3$, weg. Dann zeigt sich der Factor E, durch welchen dividirt werden muss, und es entsteht:

$$A^2R^2 - 2AR^2Z + (R^2Z - 2AR^2)\,E + R^2E^2$$
$$= -3A^2N^2 + 3A^2NE - A^2E^2.$$

Man elidirt wieder die mit E behafteten Glieder, so bleibt nur noch $A^2R^2 - 2AR^2Z = -3A^2N^2$ oder

$$(R^2 + 3N^2)\,A^2 = 2R^2ZA \quad \text{und} \quad A = \frac{2R^2Z}{R^2 + 3N^2}.$$

Nun benutzt man wieder 1′) $ZR^2 = N^3$ und gewinnt dadurch

$$A = \frac{2R^2Z \cdot Z}{R^2Z + 3N^2Z} = \frac{2N^3Z}{N^3 + 3N^2Z} = \frac{2NZ}{N + 3Z}.$$

Man könnte begierig sein, zu erfahren, ob Fermat, der bei Anwendung seiner Methode auf die Cissoide Wurzelgrössen aus dem Wege gehen musste, aber auch ihnen aus dem Wege zu gehen wusste, bei nichtalgebraischen Curven einen Ausweg kannte, wo Descartes (S. 856) das Unvermögen seine Methode anzuwenden eingestand. Bei der Cycloide[1]) tritt dieser Vorzug des Fermat'schen Verfahrens in ein helles Licht (Figur 163). Von dem Berührungspunkte R der Cycloide geht die Berührungslinie RB und die zur Grundlinie parallel gezogene RD aus, beide bis zum Durchschnitte mit dem senkrechten Durchmesser des rollenden Kreises in der Lage, wo der obere Endpunkt dieses Durchmessers zugleich Höhepunkt der Cycloide ist. Die RD schneidet jene Mittellage des erzeugenden Kreises in M, und dort ist die Berührungslinie MA an den Kreis gezeichnet. Ausser-

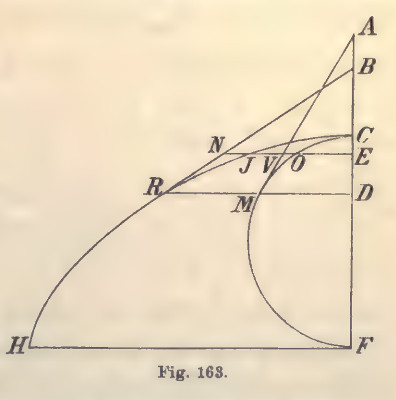


Fig. 163.

[1]) Fermat, *Varia Opera* 71—72. *Oeuvres* I, 162—165.

dem ist von dem nahe bei D gelegenen Punkte E aus die EN parallel zur Grundlinie gezogen. Proprietas specifica der Cycloide ist $RD = \text{arc } CM + MD$, eine Behauptung, von deren Wahrheit man sich leicht überzeugt. Nach heutiger Schreibweise ist, wenn P die Bezeichnung des Fusspunktes der Ordinate von R giebt und $HP = x$, $CF = 2r$, arc $MF = r\alpha$ gesetzt wird, $x = r\alpha - r \cdot \sin\alpha$. Mithin ist

$$RD = HF - x = r(\pi - \alpha) + r \cdot \sin\alpha.$$

Dabei ist aber $r(\pi - \alpha) = \text{arc } CM$, $r \cdot \sin\alpha = MD$, also die Fermat'sche Gleichungsform hergestellt. Die Abkürzungen, deren Fermat sich bedient, sind $DB = A$, $DE = E$ (wie immer), $DA = B$, $MA = D$ $MD = R$, $RD = Z$, arc $COM = N$. Die erste Gleichung heisst also 1) $Z = N + R$. Ferner ist.

$$NE = \text{arc } CO + OE = \text{arc } CM - \text{arc } MO + OE,$$

und bei der Kleinheit von DE fällt arc MO mit dem Tangentenstück MV und zugleich OE mit VE zusammen. Es ist also

$$NE = N - MV + VE.$$

Da aus der Aehnlichkeit von Dreiecken $RD : NE = DB : EB$ folgt, so ist unter Einführung der schon gewonnenen Werthe

$$2)\quad (N + R) : (N - MV + VE) = A : (A - E).$$

Aber MV entspricht der Proportion $MV : MA = DE : DA$ und ist folglich $MV = \frac{D \cdot E}{B}$. Die andere noch auszurechnende Strecke VE entspricht der Proportion $VE : MD = AE : DA$ und ist demnach $VE = \frac{R(B - E)}{B}$. So geht die Proportion 2) über in

$$(N + R) : \left(N - \frac{DE}{B} + \frac{R(B - E)}{B}\right) = A : (A - E)$$

und diese zur Gleichung umgebildet liefert nach Wegschaffung des Nenners B und Wegstreichung gleicher Grössen auf beiden Seiten die einfachere Form $E(RA + DA - BN - BR) = 0$. Man lässt den Factor E weg und erhält $A = \frac{B(N + R)}{R + D} = \frac{BZ}{R + D}$ unter Mitbenutzung von 1). Nun ist beim Kreise nicht schwer zu beweisen, dass die Verbindungsgerade MC den Winkel AMD halbirt, dass also $AM : DM = AC : CD$. Daraus folgt $AM : AC = DM : CD$, ferner

$$(AM + MD) : (AC + CD) = DM : CD$$

oder $(AM + MD) : AD = DM : CD$ und $\frac{AD}{AM + MD} = \frac{CD}{MD}$, d. h. $\frac{B}{D + R} = \frac{CD}{MD}$, mithin $A = \frac{CD \cdot RD}{MD}$ oder $MD : CD = RD : BD$ und das findet statt, wenn $RB \parallel MC$. Ersichtlich steht auf der MC

die MF senkrecht. Dieser letzteren wird also die Normale an die Cycloide in R parallel laufen müssen, und das ist die Construction von Descartes, von welcher folglich die Fermat's nur als eine Umformung zu betrachten ist. Nach der Cycloide spricht Fermat noch von der Conchoide[1]) und bemerkt, sie habe einen Inflexionspunkt auf jeder Seite. Solche *puncta inflexionum* besitzen, behauptet er, die Eigenschaft, dass in ihnen der von der Berührungslinie mit der Abscissenaxe gebildete Winkel ein Minimum sei, wie man leicht beweisen könne, *ut facile est demonstrare*. Wegen Rückbeziehungen im 89. Kapitel ist es zweckmässig zu bemerken, dass Fermat's Abhandlung erst 1679 im Druck erschien.

In der französischen Darstellung, welche wir vermuthungsweise in das Jahr 1638 verwiesen haben, ging Fermat in der Anwendung der gleichen Buchstaben für gleiche geometrische Dinge noch einen Schritt weiter. Er setzte[2]) nicht bloss (Figur 164) ein für alle Mal die Subtangente $BD = A$, die Entfernung der Ordinate des Berührungspunktes von der benachbarten Ordinate $BF = E$, sondern auch die Ordinate des Berührungspunktes $BA = B$ und seine Abscisse $CB = D$. Der Fusspunkt F der benachbarten Ordinate hat demnach die Abscisse $D - E$ und sie selbst bis zum Durchschnittspunkte mit der Berührungslinie gehorcht der Proportion $FE : (A - E) = B : A$, ist also regelmässig $FE = \frac{AB - BE}{A}$ und wird immer so, wie hier geschehen, genannt werden[3]). Ist dieses geschehen, fährt Fermat fort, so ist gewiss, dass der Punkt E der EF, weil er auf der Tangente liegt, ausserhalb der Curve sich befinden wird, und daher wird die FE grösser oder kleiner als die bis zur Curve reichende, von F ausgehende Ordinate[4]). Sie ist grösser, wenn die Curve nach aussen gewölbt ist, *convexe en dehors*, kleiner, wenn die Curve nach innen gewölbt ist, *convexe en dedans*, denn die Regel genügt für alle Curven und bestimmt mit Hilfe der Gleichung der Curve, *par la propriété de la courbe*, nach welcher Seite hin sie gewölbt ist. Wenn nun auch die FE der von F bis zur Curve gezogenen Ordinate ungleich ist, so betrachte ich sie nichtsdestoweniger als ihr gleich und vergleiche sie

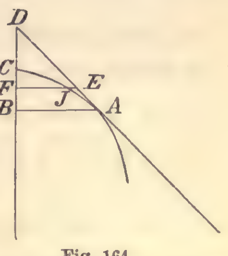


Fig. 164.

---

[1]) Fermat, *Varia Opera* 73. *Oeuvres* I, 166. [2]) Henry l. c. pag. 184 (XII, 658). [3]) *Et de quelque nature que soit la courbe nous donneront toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.*

[4]) Fermat sagt überall *l'appliquée,* aber wir ziehen im Texte den jetzt gebräuchlichen Namen vor.

folglich durch annähernde Übereinstimmung, *par adaequation*, mit der aus der Curvengleichung ermittelten FJ. Nach der Ableitung des allgemeinen Werthes von FE und der Erläuterung seiner eigentlichen Methode zeigt Fermat deren Anwendung[1]) auf die Descartes'sche Curve $B^3 + D^3 = NBD$. Statt $CF^3 + FJ^3 = N \cdot CF \cdot FJ$ wird näherungsweise richtig $CF^3 + FE^3 = N \cdot CF \cdot FE$ gesetzt, d. h.

$$(D - E)^3 + \left(\frac{AB - BE}{A}\right)^3 = N(D - E)\,\frac{AB - BE}{A}.$$

Unter Wegschaffung der Brüche wird dann ausmultiplicirt und links $A^3B^3 + A^3D^3$ gegen rechts NA^3BD weggelassen. Weiter wird durch E dividirt, und dann erscheint

$$-3A^3D^2 - 3A^2B^3 + E(3A^3D + 3AB^3 - A^3E - B^3E)$$
$$= -NA^2BD - NA^3B + NA^2BE.$$

Die Regel verlangt, Alles was noch mit E behaftet blieb, wegzulassen. So erhält man $-3A^3D^2 - 3A^2B^3 = -NA^2BD - NA^3B$, daraus $3AD^2 + 3B^3 = NBD + NAB$ und endlich $A = \frac{NBD - 3B^3}{3D^2 - NB}$. Als grossen Vorzug seiner Methode gegenüber der von Descartes rühmt Fermat[2]), dass er die ursprüngliche Curvengleichung sofort benutze, ohne sie, was grosse Schwierigkeiten haben könne, und verwickelte Wurzelausziehungen erheische, nach der Ordinate aufzulösen. Dass man auch inverse Tangentenaufgaben stellen könne, bemerkt Fermat gleichfalls, spricht sich aber nicht über die Möglichkeit der Lösung solcher Aufgaben aus[3]).

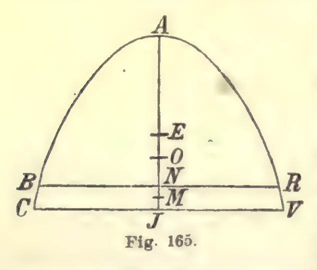


Fig. 165.

In der lateinischen Bearbeitung, welche, wie wir wissen, älter ist und nach einer und derselben Methode Maximalaufgaben und Tangentenaufgaben umfasst, ist noch eine dritte Gattung von Aufgaben behandelt, die der Schwerpunktsbestimmung eines Umdrehungsparaboloides[4]) (Figur 165). Das Paraboloid sei durch Umdrehung der Parabel CAV um ihre Axe AJ erzeugt, ein anderes wenig kleineres durch Umdrehung der Parabel BAR um AN, wobei $NJ = E$ ist. Der Schwerpunkt des ersteren Paraboloides sei in O, der des zweiten in E, und $AO = A$. Ausserdem sei $AJ = B$. Fermat dehnt nun

---

[1]) Henry l. c. pag. 185—186 (XII, 659—660). [2]) Ebenda pag. 188—189 (XII, 662—663). [3]) Ebenda pag. 189 (XII, 663): *On pourrait de suite chercher la converse de cette proposition, et la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe, à qui cette propriété doit convenir.* [4]) *Varia Opera* pag. 65—66. *Oeuvres* I, 136—139.

einen von Archimed für die Parabel bewiesenen Satz[1]) ohne Weiteres auf das Paraboloid aus, den Satz, dass die Schwerpunkte ähnlicher Paraboloide deren Axen in gleichem Verhältnisse theilen, dass also hier $AO : AE = AJ : AN$ oder in den Abkürzungen $A : (A - OE) = B : (B - E)$, woraus $OE = \frac{A \cdot E}{B}$. Die Körperräume der beiden Paraboloide stehen im Verhältnisse der Quadrate ihrer Axen oder

$$\text{vol. } CAV : \text{vol. } BAR = AJ^2 : AN^2 = B^2 : (B - E)^2,$$

woraus weiter

$$(\text{vol. } CAV - \text{vol. } BAR) : \text{vol. } BAR = (B^2 - (B - E)^2) : (B - E)^2.$$

Der Unterschied vol. CAV — vol. BAR stellt aber den Umdrehungskörper von $CBRV$ dar, und dessen Schwerpunkt mag in M liegen. Vereinigen sich die Umdrehungskörper von $CBRV$ und von BAR, so liegt deren gemeinsamer Schwerpunkt O von den einzelnen Schwerpunkten M und E derart entfernt, dass die Entfernungen den Körperinhalten selbst umgekehrt proportional sind, d. h.

$$OM : OE = \text{vol. } BAR : \text{vol. } CBVR = (B - E)^2 : (2BE - E^2)$$

und

$$OM = \frac{(B - E)^2}{2BE - E^2} \cdot EO = \frac{(B - E)^2 \cdot A \cdot E}{(2BE - E^2) \cdot B},$$

indem man den vorher gefundenen Werth von OE einführt. Je kleiner E angenommen wird, um so näher muss M an J heranrücken, während allerdings genau gesprochen $OM < OJ$ bleibt; OJ selbst ist $= B - A$. In angenäherter Gleichung ist aber $B - A = \frac{(B - E)^2 \cdot A \cdot E}{(2BE - E^2) B}$, und nun verfährt man nach der oft benutzten Regel. Wegschaffung des Bruches, Umstellung einiger Glieder, Division durch E liefert

$$2B^3 - B^2E + 3ABE = 3AB^2 + AE^2.$$

Endlich lässt man fort, was noch E enthält und hat nur noch $2B^3 = 3AB^2$, mithin $A = \frac{2}{3} B$.

Wir haben uns soweit mit Fermat's Untersuchungen, welche nach heutigem Sprachgebrauche Anwendungen der Differentialrechnung zu nennen sind, beschäftigt. Wir müssen seine Spuren auch in der Integralrechnung verfolgen. Er hat hier der Aufgabe der Quadratur und der Rectification von Curven sich zugewandt.

Ein vor 1644 durch Vermittelung von Mersenne an Cavalieri geschicktes Schriftstück[2]), welches als Beantwortung Cavalieri-

[1]) *De planorum aequilibriis* Liber II, propos. 7 in Archimed (ed. Heiberg) II, 210. [2]) Fermat, *Oeuvres* I, 195—198.

scher Fragen bezeichnet ist und demgemäss wohl in einem gewissen Zusammenhange mit der IV. Abhandlung von Cavalieri's Exercitationes (S. 845) gestanden haben muss, wenn Cavalieri dort den Namen Fermat's auch nicht genannt hat, giebt ohne Beweis Quadraturen von Parabeln verschiedener Ordnung und Kubaturen von Umdrehungskörpern derselben, sowie Schwerpunktsbestimmungen eben dieser Körper. Theoretisch ungleich bedeutsamer ist Fermat's Aufsatz *Proportionis Geometricae in quadrantis infinitis parabolis et hyperbolis usus*[1]) für die Lehre von den Quadraturen.

Fermat gründet sie auf einen sehr einfachen Satz von unendlichen geometrischen Progressionen mit fallenden Gliedern. Eine solche besitze die Summe S, das Anfangsglied c und das zweite Glied cq mit $q < 1$, dann ist $(c - cq) : cq = c : (S - c)$ oder in Worten: Die Differenz der beiden ersten Glieder, aus welchen man das Gesetz der Progression ersieht, *differentia terminorum progressionem constituentium*, verhält sich zum zweiten Gliede wie das erste zur Summe aller nachfolgenden. Die Wahrheit des Satzes folgt aus $S = \frac{c}{1 - q}$. Sei nun eine auf zwei zu einander senkrechte Asymptoten bezogene Hyperbel irgend welcher Ordnung gegeben, worunter Fermat erklärt verstehen zu wollen, dass irgend welche Potenzen der Abscissen sich umgekehrt wie irgend welche Potenzen der Ordinaten verhalten, mithin Curven mit Gleichungen wie $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$. Im besonderen Falle soll $y = \frac{a^3}{x^2}$ sein. Die Aufgabe besteht darin, die zwischen der Curve und ihrer Asymptote gelegene Fläche zu messen. Fermat zerlegt dazu diese Fläche in gemischtlinige Viereckchen, welche klein genug sind, um als Rechteckchen betrachtet zu werden, als deren

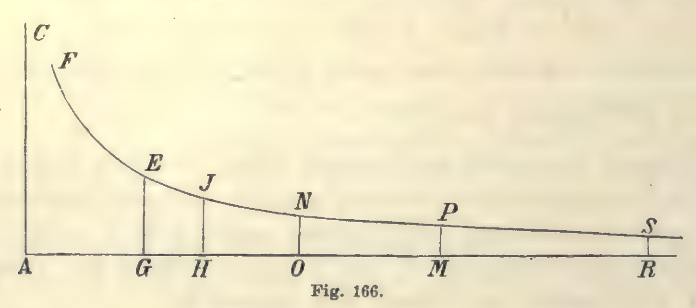


Fig. 166.

Höhe jeweils die links als Grenze dienende Ordinate gilt, und welche überdies einzeln genommen eine fallende geometrische Reihe darstellen, damit der obige Hilfssatz Anwendung finden könne. Solches

[1]) *Varia Opera* pag. 44—57. *Oeuvres* I, 255—285.

geschieht, indem man die Grundlinien der ihrer Höhe nach rasch abnehmenden Rechteckchen zunehmen lässt. Die Zunahme erfolgt nach Maassgabe eines zweiten hier einzuschaltenden Hilfssatzes: Heisst eine steigende geometrische Progression b, $b(1+\alpha)$, $b(1+\alpha)^2$ u. s. w., so ist die Differenz irgend zweier unmittelbar auf einander folgender Glieder das α-fache des kleineren der beiden Glieder oder

$$b(1+\alpha)^{\nu+1} - b(1+\alpha)^{\nu} = \alpha \cdot b(1+\alpha)^{\nu}.$$

Nun seien (Figur 166) die von A aus gemessenen Abscissen die Glieder einer solchen Reihe $AG = x$, $AH = x(1+\alpha)$, $AO = x(1+\alpha)^2$, $AM = x(1+\alpha)^3$, $AR = x(1+\alpha)^4$ u. s. w. Unter Anwendung des eben ausgesprochenen Satzes und unter Auswerthung der Ordinaten EG, JH, NO, PM, SR u. s. w. findet man:

$$GH = \alpha x, \qquad EG = \frac{a^3}{a^2}, \qquad GH \cdot EG = \frac{\alpha a^3}{x},$$

$$HO = \alpha x(1+\alpha), \qquad JH = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^2}, \qquad HO \cdot JH = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)},$$

$$OM = \alpha x(1+\alpha)^2, \qquad NO = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^4}, \qquad OM \cdot NO = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)^2},$$

$$MR = \alpha x(1+\alpha)^3, \qquad PM = \frac{a^3}{x^2(1+\alpha)^6}, \qquad MR \cdot PM = \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)^3},$$

u. s. w.

Jedes folgende Rechteckchen ist mithin das $\frac{1}{1+\alpha}$ fache des vorhergehenden und der erste am Anfang ausgesprochenn Hilfssatz ist anwendbar; man hat nur $c = \frac{\alpha a^3}{x}$ und $q = \frac{1}{1+\alpha}$ zu setzen, dann bedeutet S die bei EG beginnende Fläche. Die Proportion lautet alsdann

$$\left(\frac{\alpha a^3}{x} - \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)}\right) : \frac{\alpha a^3}{x(1+\alpha)} = \frac{\alpha a^3}{x} : \left(S - \frac{\alpha a^3}{x}\right)$$

und aus ihr folgt $S = \frac{a^3}{x}(1+\alpha)$. Die beanspruchte Möglichkeit, die gemischtlinigen Viereckchen als Rechtecke betrachten zu dürfen, nöthigt aber dazu, nicht etwa $\alpha = \frac{1}{2}$ zu wählen, wie es um der deutlicheren Zeichnung willen in unserer Figur geschah, sondern α so klein zu nehmen als man immer kann, und dann wird $S = \frac{a^3}{x}$, indem $\frac{\alpha a^3}{x}$ verschwindet, *evanescit et abit in nihilum.*

Neben Hyperbeln irgend welcher Ordnung werden auch beliebige Parabeln der Quadratur unterworfen. Das Musterbeispiel ist die semicubische Parabel[1] (Figur 167), deren Definition in der

[1]) *Varia Opera* pag. 48. *Oeuvres* I, 263.

Proportion $AB^3 : JE^3 = BC^2 : EC^2$ enthalten ist. Die Curve erscheint bei Fermat gegen die Axe CB concav, während gewöhnlich C zwar auch Anfangspunkt ist, aber CD als Axe der Curve gilt, gegen welche dieselbe alsdann convex erscheint. Fermat verfährt wie folgt, wenn wir seinen Schlussfolgerungen genau nachgehen und nur die Bezeichnung etwas übersichtlicher machen. Er nimmt auf BC verschiedene Punkte, deren Entfernungen von C in der Weise abnehmen, dass sie eine fallende geometrische Reihe bilden, und die so nahe bei einander liegen, dass gemischtlinige Vierecke wie $ABEJ$, wie $EJNO$ noch als Rechtecke von den Seiten AB und BE, beziehungsweise JE und EN betrachtet werden dürfen. Indem er also etwa $BC = a$, $VC = aq$, $RC = aq^2$, $\ldots NC = aq^6$ ansetzt, nimmt er zwar $q < 1$, aber nur sehr wenig von 1 verschieden. Unter

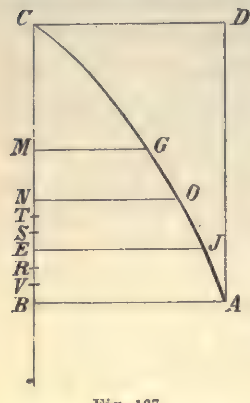


Fig. 167.

Benutzung dieser Werthe erkennt man sofort die Richtigkeit der Proportion $BC^2 : EC^2 = BC^3 : RC^3$ (d. i. $a^2 : a^2 q^6 = a^3 : a^3 q^6$). Es war aber $BC^2 : EC^2 = AB^3 : JE^3$, mithin ist

$$AB^3 : JE^3 = BC^3 : RC^3 \text{ und 1) } AB : JE = BC : RC.$$

Ferner finden noch zwei Proportionen statt

2) $BE : EN = BC : EC$ (d. i. $(a - aq^3) : (aq^3 - aq^6) = a : aq^3$) und

$$3)\ BC : EC = RC : TC \text{ (d. i. } a : aq^3 = aq^2 : aq^5).$$

Aber auch zwischen den Rechteckchen $ABEJ$ und $JENO$ findet eine Proportion statt, welche unter allmähliger Anwendung von 1), 2), 3) folgende Gestalt annimmt:

$$ABEJ : JENO = AB \cdot BE : JE \cdot EN = BC^2 : EC \cdot RC$$
$$= RC \cdot BC : TC \cdot RC = BC : TC = 1 : q^5,$$

und einem eben solchen Verhältnisse werden je zwei aufeinanderfolgende Rechteckchen unterworfen sein, die somit eine fallende geometrische Reihe bilden, auf welche der erste Hilfssatz Anwendung findet, und dieser lautet hier

$$ABEJ : JECG = (BC - TC) : TC = BT : TC.$$

Daraus folgt weiter

$$ABEJ : ABCJ = BT : BC = AB \cdot BT : AB \cdot BC = AB \cdot BT : ABCD,$$

also auch

$$ABCD : ABCJ = AB \cdot BT : ABEJ = AB \cdot BT : AB \cdot BE = BT : BE.$$

In BT sind 5 einander nahezu gleiche Streckenelemente, in BE deren 3, also verhält sich das Rechteck $ABCD$ zur Fläche $ABCJ$ wie $5:3$, und dabei ist $5 = 3 + 2$ die Summe der Exponenten. Als allgemeine Regel[1]) findet man somit, dass wenn $AB^m : JE^m = BC^n : EC^n$, daraus $ABCD : ABCJ = (m + n) : m$ folgt. Wir würden heute sagen: aus $y^m = k^{m-n} x^n$ folge $\int_0^a y\,dx = \left(\frac{m}{m+n} xy\right)_{x=a}$.

Es lässt sich nicht verkennen, dass die Art, in welcher Fermat mit nahezu gleichen Elementen umspringt, eine sehr kühne ist. Ist die Gleichung der Curve verwickelter Natur, d. h. steht nicht x^n allein mit constanten Coefficienten auf der ersten Seite, sondern

$$k_1^{m-n_1} x^{n_1} + k_2^{m-n_2} x^{n_2} + \cdots,$$

so verwandelt Fermat die einzelnen Theile dieser Summe in $l^{m-1} v_1$, $l^{m-1} v_2, \cdots$, so dass $y^m = l^{m-1}(v_1 + v_2 + \cdots) = l^{m-1} v$ wird, und nun sind verschiedene parabolische Räume einfacher Natur zu quadriren.

Nächst der Quadratur von Curven, für welche noch andere Umformungen als die soeben angedeuteten in Kraft treten, hat Fermat auch mit Rectificationen sich beschäftigt. Die Abhandlung *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione*[2]) erschien zu Fermat's Lebzeiten 1660 im Drucke als Anhang zu einem Werke des Antoine de Lalouvère von Toulouse, dessen wir im 81. Kapitel kurz zu gedenken haben. Schon am 25. Juni 1660 schickte Carcavy das neu gedruckte Schriftchen an Huygens[3]), woraus man entnehmen mag, wie rasch es bekannt wurde.

Fermat's Grundgedanke ist folgender (Figur 168). Es sei $AHMG$ ein Stück irgend einer gegen AF concaven Curve, eine Bestimmung, welche Fermat in die Worte kleidet, die Tangente solle die AF und auch die FG ausserhalb der Curve schneiden, *in qua tangentes extra curvam cum base AF et axe FG concurrant.* Eine solche Tangente sei JHK und von J, H und K aus werden senkrecht zu AF die JRB, HC, KMD gezogen, ausserdem von K aus die Tangente KN, sowie parallel zu AF von J, H, K aus die JX, HV, KY. Fermat behauptet nun, es sei $HJ <$ arc HR, $HK >$ arc HM. Das

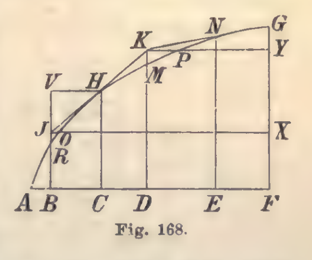


Fig. 168.

[1]) *Varia Opera* pag. 49. *Oeuvres* I, 265: *Canon vero universalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AJCB ut aggregatum potestatum applicatae et diametri ad exponentem potestatis applicatae.* [2]) *Varia Opera* pag. 89—109. *Oeuvres* I, 211—254. [3]) *Oeuvres de* Huygens III, 85.

erstere folgt daraus, dass HJ der senkrecht auf VB aufstehenden HV näher liegt als die Sehne HR, welche selbst kleiner als der Bogen HR ist. Die zweite Behauptung folgt daraus, dass $HK + KN >$ arc HMN als denselben umfassend, die eine Strecke $KN <$ arc MN nach Analogie der ersten Ungleichung, also der Rest $HK >$ arc HM sein muss. Nachdem diese Ungleichungen feststehen, wird (Figur 169) eine und dieselbe Curve APH zweimal gezeichnet.

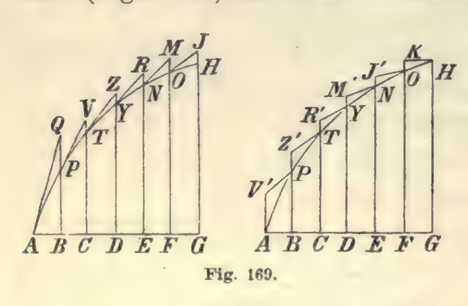


Fig. 169.

Auf ihrer Axe AG werden beliebig klein gewählte gleiche Stückchen abgemessen $AB = BC = CD = DE = EF = FG$ und in jedem Theilpunkte errichtet man eine Senkrechte bis zum Durchschnitte mit der Curve. Nun werden in der ersten Zeichnung in $A, P, \ldots O$ Tangenten nach rechts, in der zweiten in $P, \ldots O, H$ Tangenten nach links gezogen bis zum jedesmaligen Durchschnitte mit der benachbarten Ordinate. Bei der gleichbleibenden Entfernung je zweier Ordinaten ist ersichtlich $PV = PV'$, $TZ = TZ'$, $\ldots OJ = OJ'$. Nur AQ in der ersten, HK in der zweiten Zeichnung treten vereinzelt auf, und sie allein stören die volle Uebeinstimmung der in beiden Zeichnungen zu bildenden Tangentensummen. Gleichwohl ist vermöge der bewiesenen Ungleichungen:

$$AQ + PV + \cdots + OJ > \text{arc}\, AH > PV' + \cdots + OJ' + HK.$$

Bei der Nähe sämmtlicher Ordinaten kann aber unmöglich AQ um Beträchtliches von HK sich unterscheiden. Um so eher ist es daher gestattet, die eine oder die andere Tangentensumme als Curvenlänge zu benutzen. Das ist die allgemein gehaltene Vorbereitung, welche die Möglichkeit einer Rectification darzuthun beabsichtigt.

Fig. 170.

Als besonderes Beispiel wird (Figur 170) wieder die semicubische Parabel AJM benutzt, bei welcher also, da AN die Axe der Curve, wie Fermat sie zu zeichnen pflegte, darstellt, die Proportion stattfindet

$$MN^3 : JF^3 = AN^2 : AF^2 \quad \text{oder} \quad y^3 = cx^2,$$

wo y die Ordinaten MN, JF, ..., x die Abscissen AN, AF, ... der Reihe nach bedeuten kann. Fermat bediente sich allerdings bei der Rectification keiner Abkürzungen, sondern schrieb die Benennungen der einzelnen Strecken hin und ebenso eine Strecke AD statt unseres c. In seiner Figur ist auch an MN

noch jenseits N ein Stück $NX = \frac{4}{9} AD = \frac{4}{9} c$ angesetzt. In J wird die Tangente JE gezogen und nach der Tangentenmethode die Subtangente EF gesucht, welche als $\frac{3}{2} x$ sich erweist, d. h. $2EA = AF$. Mithin ist $EF^2 = \frac{9}{4} x^2 = \frac{9}{4} \frac{y^3}{c}$, während $JF^2 = y^2$ und $JE^2 = y^2 + \frac{9y^3}{4c}$ ist, sowie $JE = y\sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$. Wird statt der Länge JE der ganzen Tangente bis zum Durchschnitte mit der Axe AN nur das Stück JO bis zu dem Durchschnitte mit der sehr nahe bei JH verlaufenden VG gesucht, so wird $JO : JE = JQ : JF$ zu benutzen sein. Daraus folgt

$$JO = \frac{JQ}{JF} \cdot JE = \frac{HG}{y} \cdot y\sqrt{1 + \frac{9y}{4c}} = HG \cdot \sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$$

und

$$\frac{JO^2}{HG^2} = \frac{y + \frac{4}{9} c}{\frac{4}{9} c} = \frac{HX}{NX},$$

eine Gleichung, welche ohne weiteres als Proportion aufgefasst werden kann. Es kommt aber darauf an, über die ganze Curve hin solche Tangentenstückchen JO, beziehungsweise $HG \cdot \sqrt{1 + \frac{9y}{4c}}$ zu summiren (Figur 171). Fermat zeichnet zu diesem Zwecke neuerdings die semicubische Parabel, theilt die Schlussordinate EJ in beliebig viele gleiche Theile $EF = FG = \cdots = HJ$ und errichtet in jedem Theilpunkte eine Senkrechte bis zu dem jenseits der Curve gelegenen Durchschnittspunkte mit der Tangente, welche an den der vorhergehenden Senkrechten angehörenden Curvenpunkt gezeichnet ist. Endlich macht man wieder

$$AD = c, \quad JK = KL = \frac{4}{9} c$$

und bildet mit JK als Brennweite und K als Scheitel die Apollonische Parabel $KMN \ldots Q$,

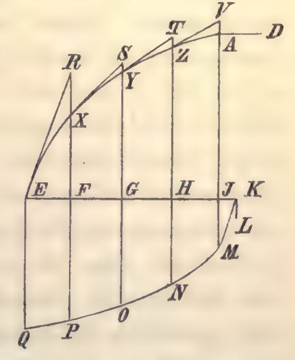


Fig. 171.

deren Gleichung, unter Annahme der KE als Axe der ξ und unter Bezeichnung der dazu senkrechten Ordinaten durch η, als

$$\eta^2 = 4 \cdot \frac{4}{9} c\xi = \frac{16}{9} c\xi$$

erscheint. Wendet man die Buchstaben der neuen Figur, welche abgesehen von den Abkürzungsbuchstaben x, y, c, ξ, η genau mit den von Fermat

hier benutzten übereinstimmen, gleichwie dieses bei der vorigen Figur der Fall war, auf die oben bewiesene Proportion $JO^2 : HG^2 = HX : NX$ an, so geht sie über in $ZV^2 : HJ^2 = HK : JK$. Zugleich ist $HK : JK = HN^2 : JM^2$. Durch Vergleichung beider Proportionen erhält man $ZV^2 : HJ^2 = HN^2 : JM^2$ und $ZV : HJ = HN : JM$. Genau in gleicher Weise entsteht $YT : GH = GO : JM$ u. s. w. Statt Proportionen kann man aber Gleichungen $JM \cdot ZV = HJ \cdot HN$, $JM \cdot YT = GH \cdot GO$ u. s. w. bilden, und addirt man diese, so entsteht

$$JM(ZV + YT + \cdots) = HJ \cdot HN + GH \cdot GO + \cdots.$$

Die Einzelproducte rechts sind, je kleiner $EF = FG = \cdots = HJ$ gewählt wurde, um so mehr in Uebereinstimmung mit den Flächen der gemischtlinigen Viereckchen $HJMN$, $GHNO$, ..., ihre Summe ist also die von der Parabel begrenzte Fläche $EJMQ$. Das Product links ist $JM . \text{arc}\, AZE$, und da $JM = 2JK = \frac{8}{9} c$ und ebenso die Fläche $EJMQ$ bekannt ist, so ist die Rectification der semicubischen Parabel erzielt, erzielt durch Zurückführung auf eine Quadratur, oder in der Sprache der Neuzeit durch Zurückführung eines bestimmten Integrals auf ein anderes. Fermat blieb übrigens bei dieser ersten Rectification nicht stehen, sondern führte auch diejenige zahlreicher anderer Curven auf sie zurück.

Eine Frage muss jetzt noch erörtert werden, bevor wir die zuletzt besprochenen beiden Abhandlungen verlassen, nämlich die nach ihrer Entstehungszeit. Wir sind im Stande, sie ziemlich genau zu beantworten. Ueber die Entstehungszeit der Abhandlung über Rectificationen, von deren 1660 erfolgten Drucklegung wir schon wissen, geben die Anfangssätze Auskunft, welche, nach verschiedenen Richtungen von Interesse, hier mitgetheilt werden sollen: „Meines Wissens haben die Mathematiker noch nicht eine rein geometrische Curve einer gegebenen geradlinigen Strecke gleichgesetzt. Was von jenem scharfsinnigen englischen Mathematiker jüngst gefunden und bewiesen worden ist, dass die Cycloide die vierfache Länge des Durchmessers des erzeugenden Kreises besitzt, das scheint nach dem Dafürhalten sehr gelehrter Mathematiker nur unter Einschränkung hierher zu gehören. Sie verkündigen als Gesetz und Ordnung der Natur, dass eine Strecke, welche einer Curve gleich sei, nicht gefunden werden könne, wenn man nicht voraussetze, eine andere Curve sei bereits einer anderen Strecke gleich. Das sei bei dem vorgebrachten Beispiele von der Cycloide der Fall, und wir können dieses nicht in Abrede stellen. Die Bildungsweise der Cycloide selbst bedarf der Gleichheit einer anderen Curve mit einer Strecke, nämlich der des erzeugenden Kreises mit jener Strecke, welche alsdann Grundlinie der

Cycloide wird." Fermat macht sich dann diesem Einwurfe gegenüber anheischig, die semicubische Parabel zu rectificiren, und wir haben sein Verfahren dabei ausführlich genug dargestellt.

Der Engländer nun, von welchem die Rectification der Cycloide jüngst aufgefunden wurde, war Christoph Wren, und dessen Entdeckung drang, wie wir noch sehen werden, im October 1658 in die Oeffentlichkeit. Die Fermat'sche Abhandlung muss also zwischen diesem Zeitpunkte und dem 25. Juni 1660 (S. 869) verfasst worden sein, etwa 1659. Später als sie ist die Abhandlung über die Quadraturen niedergeschrieben, denn in dieser wird die Quadratur der semicubischen Parabel durch die Worte eingeleitet[1]): von dieser Curve sei in der Abhandlung *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* die Rede. Viel später als jene ist sie aber nicht geschrieben, wie aus einer zweiten Stelle[2]) geschlossen werden darf. Schwerpunktsbestimmungen, sagt Fermat, Tangentenbeziehungen und deren Abhängigkeit von der Methode der Maxima und Minima seien längst, d. h. seit rund 20 Jahren den neueren Mathematikern bekannt gegeben, *dudum Geometris recentioribus innotuit hoc est ante viginti plus minus annos.* Wir wissen (S. 857), dass Fermat 1638 seinen Aufsatz über die genannten Gegenstände an Descartes gelangen liess. Die Zeit von rund 20 Jahren kann mithin kaum länger als wieder bis etwa 1659 ausgedehnt werden. Hatte Fermat inzwischen andere Versuche auf dem gleichen Gebiete kennen gelernt, welche er anzuführen sich nicht veranlasst sah, welche aber bewusst oder unbewusst ihn in seinen eigenen Untersuchungen förderten? Darauf werden wir antworten müssen, wenn wir noch andere Schriftsteller kennen gelernt haben.

Fermat schickte, sagten wir, 1638 seine Abhandlung über Fragen der Differentialrechnung an Descartes, der am 18. Januar dieses Jahres gegen Mersenne über das erhaltene Schriftstück sich äusserte. Das war indessen nicht die erste wissenschaftliche Begegnung beider Männer, und wiewohl die Ereignisse, von denen wir eine Andeutung geben müssen, weniger die Geschichte der Mathematik als die der Mathematiker angeht, so dürfen sie doch nicht ganz übergangen werden[3]).

Der Band Descartes'scher Schriften, welcher um Juni 1637 die Presse verliess, enthielt ausser der Geometrie noch andere Abhandlungen, darunter die Dioptrik. De Beaugrand, dessen Name uns

[1]) *Varia Opera* pag. 48 lin. 9. *Oeuvres* II, 263 lin. 14. [2]) *Varia Opera* pag. 49 lin. 16—20. *Oeuvres* I. 266 lin. 14—16. [3]) Gratien-Arnoult, *Polémique de Descartes et de Fermat durant les années* 1637 *et* 1638 in den *Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse* 1870, p. 383—401.

mehr begegnen wird, begierig, noch vor der eigentlichen Veröffentlichung die neue Lehre von der Lichtbrechung kennen zu lernen, verschaffte sich von Mersenne das Exemplar, welches Descartes zum Zwecke der Erwerbung eines französischen Privilegiums diesem anvertraut hatte[1]) und welches die ganze Dioptrik enthielt, und schickte es an Fermat zum Lesen. Dieses erfuhr Mersenne und schrieb nun seinerseits an Fermat, Descartes hege den Wunsch, Alle, denen er sein Buch als Geschenk zuschicke, möchten ihm ihre Bemerkungen darüber zukommen lassen, und wenn er, Fermat, die Dioptrik auch nicht auf diesem unmittelbaren Wege erhalten habe, so werde er doch gewiss gleichfalls den Wunsch des Verfassers erfüllen. Die Absicht war, dass nicht schon vor dem Erscheinen der Dioptrik Bemängelungen laut würden, und diese Absicht wurde erreicht. Fermat schickte kritische Bemerkungen in erheblicher Anzahl ein, aber wenn auch der Geschichte der Physik die eigentliche Aufgabe zufällt, diejenigen Streitigkeiten zu schildern, welche jetzt schon über die Dioptrik zwischen Fermat und Descartes entstanden, wir dürfen nicht verschweigen, dass Fermat wenigstens anfangs im Unrecht war, und dass man es Descartes kaum verübeln kann, wenn er am 18. Januar 1638 Mersenne auftrug, Fermat zu sagen, er möge ihm fernerhin nicht so unverdaute Dinge vorlegen.

Damals war aber Descartes gerade in Besitz der Abhandlung über Maxima und Minima gelangt, und, wie es im Leben so häufig vorkommt, er liess sich dieser Abhandlung gegenüber den gleichen Fehler in erhöhtem Grade zu Schulden kommen, den Fermat gegen seine Dioptrik begangen hatte. Bei der Dioptrik handelte es sich immerhin um Theorien, welche Naturerscheinungen zu erklären bestimmt waren, und über solche Versuche war und ist Meinungsverschiedenheit unvermeidlich. Bei der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen handelt es sich um eine mathematische Aufgabe, die gelöst oder nicht gelöst, richtig oder unrichtig aufgefasst, verstanden oder missverstanden werden musste, wenn es darüber zum Zwiste kommen sollte. Descartes verstand weder die Aufgabe, noch Fermat's geistreiche Auflösung derselben[2]).

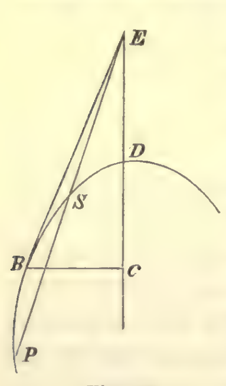


Fig. 172.

Die Tangentenaufgabe, meinte er, sei immer eine Maximalaufgabe, denn (Figur 172) die Berührungslinie EB an eine Curve sei die längste Gerade, welche von E aus an die Curve gezogen werden könne. Man

[1]) Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 62. [2]) Montucla II 139—140 stellte sich in dieser Frage schon ganz richtig auf Fermat's Seite.

dürfe nicht mit dem Einwande kommen, es sei $EP > EB$, denn auf EP liege der Curvenpunkt S näher bei E als P. Daher sei hier ES als die von E nach der Curve gehende Strecke zu betrachten, und sie sei kleiner als EB. Wolle man aber Fermat's Methode der grössten Werthe auf EB anwenden, so komme Unrichtiges.

Mersenne schickte diese Einwürfe nicht an Fermat, sondern gab sie Roberval und Pascal zu lesen, d. h. Etienne Pascal, dem Vater des damals $14\frac{1}{2}$ Jahr alten Blaise Pascal, und diese beiden Freunde Fermat's beeilten sich, Descartes über das Missverständniss aufzuklären, welches darin bestand, dass Descartes leugne, die von E nach P gezogene Gerade sei als Entfernung des Punktes E von einem Curvenpunkte aufzufassen. Weitere Briefe wurden von beiden Seiten gewechselt, ohne dass Descartes seinen Irrthum einsah, oder dass er in der recht schwachen Meinung, welche er von Fermat's Fähigkeiten äusserte, wankend geworden wäre. *Votre conseiller de Minimis* und ähnlich nennt er ihn in den an Mersenne gerichteten Briefen.

Im Juli 1638 schrieb endlich Fermat, der Hetzereien durch Mittelpersonen müde, selbst an Descartes, und wir gehen vielleicht nicht irre, wenn wir annehmen, die französische Niederschrift seiner Tangentenmethode (S. 857) sei diesem Briefe beigelegen. Wir schliessen es aus Descartes' Antwort vom 22. Juli 1638, in welcher von dem letzten Verfahren zur Tangentenbestimmung, *la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes*, die Rede ist. Dieses sei sehr gut und würde seinen Widerspruch nicht hervorgerufen haben, wenn Fermat es gleich auf solche Weise erläutert hätte. Noch ein Brief von Descartes an Fermat aus dem Monate September hat sich erhalten, in welchem er dem früheren Gegner das Lob grössten Wissens in der Geometrie spendet[1]). Ob das wirklich ernst gemeint, ob es höfliche Redewendung war, über welche Descartes als feiner Stylist in reichem Maasse verfügte, das ist hier nebensächlich und braucht nicht untersucht zu werden. Verdient war das Lob, auch wenn das engere Wort Geometrie durch das allgemeinere: Mathematik ersetzt gewesen wäre. Verdient wäre das gleiche Lob von Fermat in Bezug auf Descartes ausgesprochen worden.

Man kann über die persönliche schriftstellerische Liebenswürdigkeit von Fermat und Descartes, wenn wir dieses Ausdruckes uns bedienen dürfen, abweichender Meinung sein; man kann Neigung und Abneigung zwischen Beiden ungleich verteilen, und wir machen z. B. kein Hehl daraus, dass uns Descartes immer eine wenig an-

---

[1]) *Je n'ai jamais connu personne, qui m'ait fait paraître qu'il sût tant que vous en géométrie.*

genehme Persönlichkeit gewesen ist, während Fermat uns stets sympathisch war, aber darüber muss Einstimmigkeit herrschen, dass innerhalb der Zeit, welche dieser letzte Abschnitt des Bandes behandelt, kein grösserer Mathematiker als Descartes und Fermat gelebt hat. Vielseitigkeit und Grossartigkeit der Entdeckungen gehen bei ihnen Hand in Hand, und synthetische wie analytische Geometrie, Zahlentheorie wie Algebra, endlich und keineswegs am wenigsten die Lehre von den Infinitesimalbetrachtungen müssen die Namen der grossen Zeitgenossen mit dem Lorbeer wohlverdienten Ruhmes in ihrer Geschichte aufzeichnen. Ob auf dem einen Blatte, vielleicht dem der Algebra, Descartes, auf dem anderen, vielleicht dem der Infinitesimalbetrachtungen, jedenfalls dem der Zahlentheorie, Fermat obenan steht, das hat für die Gesammtwürdigung beider Geisteshelden keine Bedeutung.

80. Kapitel.

Roberval. Torricelli.

Unter den Gelehrten, deren Briefwechsel mit Descartes und mit Fermat von uns erwähnt wurde, kam der Name Roberval wiederholt vor. Giles Personnier[1], latinisiert Personerius (1602—1675), ist in einem Dorfe *Roberval* unweit von Beauvais im nordwestlichen Frankreich geboren und nahm von seinem Geburtsorte den Beinamen Persone de Roberval an, der allmählig in Roberval allein überging. Mit 25 Jahren kam er nach Paris, wurde bald Professor der Philosophie am Collège St. Gervais daselbst und erhielt später die mathematische Professur am Collège Royal auf drei Jahre, welche Anstellung ihm dann regelmässig nach Ablauf dieser durch die Satzungen der Anstalt vorgeschriebenen Frist wieder erneuert wurde. Roberval selbst hat in einem fast mehr als groben Briefe an Torricelli eine Geschichte seiner mathematischen Entdeckungen gegeben, welche wir zunächst, ohne noch deren Glaubwürdigkeit zu prüfen, einfach annehmen wollen[2].

Roberval will 1628 durch Pater Mersenne auf die Trochoide, wie Roberval sie nennt, auf die Cycloide, wie wir zu sagen fortfahren, aufmerksam gemacht worden sein. Untersuchungen über diese Curve

---

[1]) Montucla II, 49—51. — Poggendorff II, 665. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 112. — Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 63. [2]) Roberval's Schriften, darunter auch der Brief an Torricelli, sind vereinigt in dem VI. Bande der *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* in der Ausgabe von 1730. Wir citiren *Mém. Acad. Sci.* VI mit nachfolgender Seitenzahl.

überstiegen damals seine Kräfte, und volle sechs Jahre dachte er nicht mehr daran. Gegen 1634 erfand er die Lehre vom Unendlichen, *doctrinam infiniti*, welche ungefähr das Gleiche war wie Cavalieri's Methode der Indivisibilien[1]), freilich mit einem kleinen Unterschiede[2]). Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und desshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. Er, Roberval, habe sich davor gehütet, Ungleichartiges mit einander in Vergleich zu bringen. Für ihn bestehe die Linie aus unendlich vielen oder der Zahl nach unbestimmt vielen Linien, *ex infinitis seu indefinitis numero lineis*, die Oberfläche, der Körper, der Winkel aus unendlich vielen Flächen, Körpern, Winkeln. Da habe Mersenne ihm die Cycloide ins Gedächtniss zurückgerufen und dabei angedeutet, er werde wohl absichtlich ihrer Untersuchung sich enthalten haben, weil die Schwierigkeit ihn zurückgeschreckt hätte, und nun sei ihm mit Hilfe der Indivisibilien sehr leicht geworden, was ohne dieses Hilfsmittel sehr schwer aussah. Das Jahr 1634 ist demnach dasjenige, in welchem Roberval die Quadratur der Cycloide ermittelt haben will.

Nachdem er die Lehre vom Unendlichen genügend ausgebildet hatte, wandte er sich der Tangentenaufgabe zu. Zuerst fand er durch die Kraft der Analyse[3]), *vi Analyseos*, eine Methode, welche viel später als allgemein anwendbar sich erwies, damals aber noch nicht in solchem Lichte erschien, und besonderen Kunstgriffen legte er keinen Werth bei. Die Cycloide gab ihm dann Gelegenheit, auf die Zusammensetzung von Bewegungen zu achten, und nur einer solchen Gelegenheit bedurfte es, damit er aus der Zusammensetzung der Bewegungen eine allgemeine Methode ableitete. Um 1636 habe er diese in die Oeffentlichkeit gebracht. Ein Herr Du Verdus aus Bordeaux habe die Vorlesungen nachgeschrieben und Viele eine Abschrift davon genommen[4]). Auch hieraus ist ein Ergebniss und zwar, wie wir glauben, ein zweifaches zu entnehmen, erstens dass Roberval zwei Tangentenmethoden besessen haben will, zuerst eine Methode, von deren genaueren Schilderung er Abstand nimmt, welche ihm nicht allgemein genug war, dann eine andere, welche auf die Bewegungs-

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 366. [2]) Ebenda VI, 368—369. [3]) Ebenda VI, 370. [4]) *Occasio satis fuit, ac propositionem universalem tangentium inde deductam vulgarimus circa annum 1636. Exstant adhuc et circumferuntur hac de re lectiones nostrae a nobilissimo D. du Verdus nostro discipulo collectae, atque a multis exscriptae.*

lehre sich gründete, und zweitens, dass er von dieser letzteren Methode seit 1636 kein Geheimniss gemacht haben will.

Noch weitere Arbeiten entstanden in Folge seines Briefwechsels mit Fermat, dessen Eröffnung Carcavy 1635 vermittelte. Fermat wies ihn auf Spirallinien höherer Ordnung hin und hiess ihn Arbeit auf die Auflösung der gestellten Aufgaben zu verwenden, wie er, Fermat, es auch gethan habe. In der Arbeit bestehe ja hauptsächlich das Vergnügen. Roberval folgte der Mahnung und fand nun die Quadratur aller Parabeln beliebiger Ordnung. Fermat schlug sodann Schwerpunktsbestimmungen vor, und auch hier gelang es Roberval, zur Lösung der Aufgabe vorzudringen. Fermat hatte der Analyse sich bedient[1]); *ille quidem ad analysim recurrit*, und seine Methode war, wie es bei analytischen Erfindungen meist der Fall ist, sehr versteckt, sehr fein, sehr elegant. Seine, Roberval's, um einige Monate jüngere Methode sei einfacher und allgemeiner. Aus diesen Bemerkungen heben wir hervor, dass Roberval auf Fermat's Schwerpunktsbestimmungen das gleiche Wort der Analysis bezieht, welches er nur drei Seiten früher zur Kennzeichnung seiner ersten Tangentenmethode gebrauchte, dass also auch dort von analytischen Betrachtungen ausgegangen worden sein wird und man sich nicht versuchen lassen darf, an jener ersten Stelle Analysis etwa durch Analyse der Bewegungserscheinungen zu übersetzen.

Lassen wir diesem Auszuge aus Roberval's Briefe an Torricelli seine eigentlichen Leistungen folgen und zwar zuerst die Quadratur der Cycloide. Roberval hatte ihren durch den dreifachen Erzeugungskreis hergestellten Betrag 1634 Mersenne mitgetheilt. Im folgenden Jahre 1635 fanden Fermat und Descartes unabhängig von einander Beweise dieses Satzes, welche, wie sie keinerlei Aehnlichkeit mit einander besitzen, auch von dem Roberval'schen Beweise sich unterscheiden. Roberval hat seinen Ideengang in der Abhandlung *De Trochoide ejusque spatio* niedergelegt[2]). Er bedient sich dabei einer zweiten Curve, welche er erfunden hat, und welcher er den Namen *trochoidis comes* oder *socia* beilegt[3]), der ins Französische als *compagne de la cycloide* übersetzt worden ist (Figur 173). Die Entstehung dieser Curve $AV'VH$ ist folgende. Von jedem Punkte E' des zur Grundlinie senkrechten Durchmessers AC des Erzeugungskreises in seiner Anfangslage wird parallel zur Grundlinie die $E'V'$ gezogen, welche den ersten Erzeugungskreis in B schneidet. Nimmt man auf ihr $E'V' =$ arc AB', so ist V' ein Punkt der Gefährtin der Cycloide, welche, wie man leicht erkennt, jenseits HF sich in einem

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 373. [2]) Ebenda VI, 295—345. [3]) Ebenda VI, 302.

zu $AV'VH$ symmetrisch-congruenten Aste bis nach L fortsetzt. Roberval bedient sich nur dieser geometrischen Definition, ohne sie in die Formelsprache der analytischen Geometrie zu kleiden. Mit Benutzung derselben findet man Folgendes. Der Halbmesser des er-

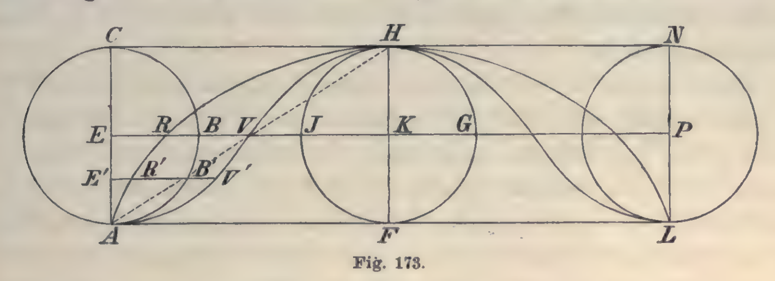


Fig. 173.

zeugenden Kreises heisse r, der Centriwinkel AEB' heisse α, und $x|y$ seien die Coordinaten von V' bezogen auf AL als Abscissenaxe, AC als Ordinatenaxe. Nun ist $x = r\alpha$, $y = r - r \cdot \cos\alpha$ und bei Verschiebung des Coordinatenkreuzes nach dem neuen Anfangspunkte V, wobei VP die neue Abscissenaxe ist und $\xi|\eta$ die neuen Coordinaten bezeichnen, ist sofort

$$\xi = x - \frac{r\pi}{2} = r\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = y - r = -r \cdot \cos\alpha = -r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = r \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

oder endlich, indem r als Einheit gewählt wird, $\eta = \sin\xi$, so dass Roberval als Erfinder der Sinuslinie betrachtet werden muss. Wie nun die Gefährtin der Cycloide zu deren Quadratur führt, ist ebenso sinnreich als einfach. Der Raum $AR'RHF$, welcher die halbe Cycloidenfläche bildet, besteht aus zwei Theilen, erstens der halben Fläche der Gefährtin $AV'VHF$ und zweitens dem zwischen beiden Curven befindlichen Raume $AR'RHVV'$. Man braucht nur die Gerade AVH gezogen zu denken, um zu erkennen, dass die beiden Abschnitte, welche diese Gerade mit der Gefährtin bilden, und von denen der eine obere ihrer Fläche angehört, der andere untere nicht, einander congruent sind, dass also $AV'VHF = \frac{1}{2} ACHF$, d. h. dem erzeugenden Kreise gleich. In dem von beiden Curven begrenzten Raume ist immer $R'V' = E'B'$. Unter Festhaltung der oben eingeführten Bezeichnungen ist nämlich $E'B' = r \cdot \sin\alpha$, ausserdem $E'V' = r\alpha$ und, weil R' ein Punkt der Cycloide ist, $E'R' = r\alpha - r \cdot \sin\alpha$, mithin

$$R'V' = E'V' - E'R' = r \cdot \sin\alpha = E'B'.$$

Der Raum $AR'RHVV'$ besitzt also in gleicher Höhe lauter gleiche Parallelen zur Grundlinie wie der Halbkreis $ACBB'$, dem er folg-

lich flächengleich ist, und damit ist der Satz bewiesen, dass die ganze Cycloidenfläche dem dreifachen erzeugenden Kreise gleich ist. Wir wiederholen, dass Roberval 1634 Mittheilung davon an Mersenne gelangen liess, dass auch Descartes und Fermat den Satz kennen lernten. Im Jahre 1637 vollends sprach ihn Mersenne gelegentlich in einem Druckwerke aus[1]).

Roberval hat in einer anderen Abhandlung, in seinem *Traité des Indivisibles* auch ein Stück einer gekrümmten Oberfläche der Messung unterworfen, mithin eine sogenannte Complanation zu Wege gebracht. Dort ist nämlich gezeigt[2]), dass ein Kreis, der mit einer dem Durchmesser eines geraden Kreiscylinders gleichen Zirkelöffnung auf der Oberfläche dieses Cylinders beschrieben wird, genau die Fläche des Quadrates des Cylinderdurchmessers besitzt.

Wir kommen nun zu Roberval's Tangentenbestimmung, einer ungleich bedeutenderen Leistung als was wir bisher auseinanderzusetzen hatten, da es hier um eine wahrhafte Methode sich handelt. Wir entnehmen sie der Abhandlung *Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*[3]), welche allerdings nicht von Roberval selbst herrührt, sondern von seinem Schüler Du Verdus, dessen Name uns aus Roberval's Brief an Torricelli bekannt ist. Im Jahre 1668 theilte Roberval die Abhandlung mit einigen Verbesserungen, aber nicht allen, deren sie bedurft hätte, der Academie mit[4]). Schon vorher, nämlich 1644, hatte Mersenne eine Andeutung des von Roberval ersonnenen Verfahrens in seinen *Cogitata Physico-Mathematica* veröffentlicht[5]). Der Schüler Roberval's spricht es als ein Axiom aus, dass eine Kraft, welche einen beweglichen Punkt zwingt, eine Kreisbahn zu beschreiben, in der Senkrechten zu dem Durchmesser, an dessen Endpunkt der bewegliche Punkt sich gerade befindet, ihre Wirkung ausübt[6]). Daran schliesst sich der erste Lehrsatz: Wenn ein beweglicher Punkt zwei Bewegungen unterworfen ist, deren jede geradlinig und gleichförmig ist, so verläuft die aus beiden zusammengesetzte Bewegung wieder geradlinig und gleichförmig und, wenn auch von beiden verschieden, in der gleichen Ebene mit ihnen, so dass die von dem beweglichen Punkte beschriebene Gerade Dia-

[1]) Montucla II, 54. [2]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 241—253: *Tracer sur un cylindre droit un espace égal à un quarré donné, et ce d'un seul trait de Compas.* [3]) Ebenda VI, 3—67. [4]) Ebenda VI, 2: *Il est vray qu'en 1668 M. Roberval revit cet ouvrage avant que de le lire dans l'Académie Royale des Sciences, mais il n'y mit pas la dernière main.* [5]) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* VIII, 274—275. [6]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 5.

gonale eines Parallelogrammes ist, dessen Seiten sich zu einander wie die Geschwindigkeiten der beiden gegebenen Bewegungen verhalten[1]). Jenes Axiom und dieser Lehrsatz ermöglichen es, die Entstehung jeder Curve, vorausgesetzt, dass sie durch fortschreitende oder drehende Bewegung erzeugt wird, auf zwei geradlinige Bewegungen von gegebener Richtung und gegebenem Verhältnisse, wenn auch nicht gegebener absoluter Grösse zurückzuführen, und die Diagonale des aus ihnen gebildeten Parallelogrammes ist die Berührungslinie an die Curve[2]). Als erstes Beispiel ist die Parabel behandelt[3]) (Figur 174). In jedem ihrer Punkte E ist die nach dem Brennpunkte A gerichtete EA gleich der Entfernung des Fusspunktes J der Ordinate von E von dem festen Punkte B. Die Kräfte, welche die Parabel erzeugen, sind also EA und die ihr gleiche,

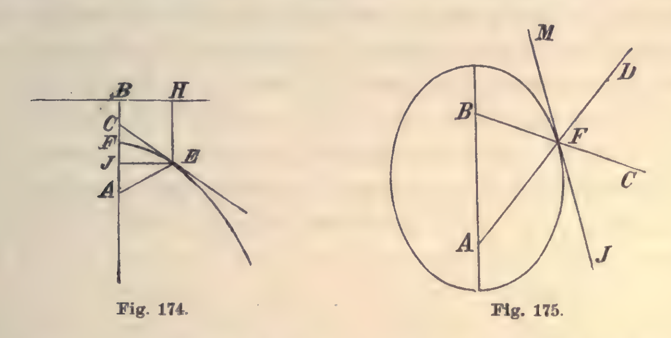


Fig. 174. Fig. 175.

parallel zu AB gezogene EH. Bei zwei gleichen Kräften halbirt die Diagonale ihres Parallelogrammes den von beiden eingeschlossenen Winkel, also ist die Halbirungslinie EC des Winkels HEA die Berührungslinie der Parabel. Sei ferner (Figur 175) die Berührungslinie an den Punkt F einer Ellipse gesucht[4]). Die Brennpunkte der Ellipse sind A und B. Man weiss, dass AF und BF gleich bleibende Summen besitzen, wo auch F auf der Ellipse liege; nimmt also die Entfernung des Punktes F von A (oder B) ab, so nimmt die von B (oder A) um ein jener Abnahme gleiches Stück zu. Die bewegenden Kräfte sind also entweder in den Richtungen FA und FC oder in denen FB und FD zu erkennen und sind jedenfalls von gleicher Grösse. Die Berührungslinie halbirt daher den Winkel AFC, beziehungsweise BFD. Ein anderes Beispiel liefert die Curve, welche *Limaçon de Monsieur Paschal*[5]) genannt wird. Es ist der Ort derjenigen Punkte aller von einem und demselben Peripheriepunkte

---

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 6. [2]) Ebenda VI, 22. [3]) Ebenda VI, 23. [4]) Ebenda VI, 27. [5]) Ebenda VI, 23 lin. 8. Bei Gelegenheit der Tangentenziehung auf pag. 35—40 ist nicht der volle Name des Erfinders der Curve genannt, sondern nur von dem *Limacon de M. P.* die Rede.

eines Kreises ausgehenden Sehnen, welche von dem zweiten Durchschnittspunkte der Sehne mit der Kreislinie gleichweit entfernt sind; es ist mithin eine Kreisconchoide. Wenn Pascal als Erfinder der Curve bezeichnet ist, so kann darunter nicht Blaise Pascal verstanden sein, welcher zu Ende der dreissiger Jahre gewiss noch nicht genügend Mathematiker war, um Derartiges zu versuchen, sondern nur der Vater Etienne Pascal[1]), von welchem wir wissen, dass er mit Curvenlehre sich befasste, dass er sogar (S. 875) gemeinsam mit Roberval in den Streit über die Lehre von den grössten und kleinsten Werthen eintrat. Die Cycloide ist erst das elfte Beispiel, an welchem die Methode der Tangentenziehung zur Ausübung gelangt[2]) (Figur 176). Die beiden Bewegungen, welche dem Cycloidenpunkte E, der zugleich ein Punkt des erzeugenden Kreises in der Lage OEN ist, angehören, sind erstens eine Bewegung im Sinne des Kreises, also gemäss dem ersten Axiome in dessen Berührungslinie EP, zweitens eine Fortbewegung mit dem Kreise parallel zur Grundlinie, also in der Richtung EM. Weil die Grundlinie der Kreisperipherie gleich ist, müssen beide Bewegungen in jedem Augenblicke von gleicher Grösse sein, und die Diagonale ihres Parallelogrammes halbirt folglich den durch ihre Richtungen gebildeten Winkel PEM, d. h. EH ist

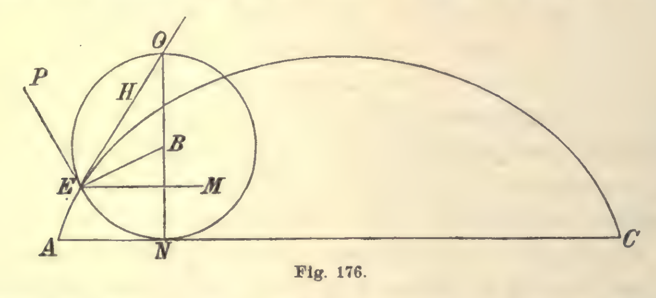


Fig. 176.

die gesuchte Berührungslinie. Dass dieselbe durch den Peripheriepunkt O des erzeugenden Kreises hindurchgehen müsse, ist weder ausdrücklich gesagt, noch in der der Abhandlung beigegebenen Figur beachtet[3]), wo die EH die ON unterhalb O schneidet. Roberval, beziehungsweise dessen Schüler, scheint also diese Eigenschaft der Cycloide nicht gekannt zu haben. Dagegen war ihm die sogenannte gedehnte oder verlängerte und ebenso die sogenannte verkürzte Cycloide bekannt, und er lehrte ihre Berührungslinien finden.

---

[1]) Diese Bemerkung rührt von Herrn P. Tannery her, der sie uns brieflich mittheilte. [2]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 58—63. [3]) Ebenda Figurentafel VIII zu pag. 66, Figur 1. Im *Traité des Indivisibles* pag. 211 dagegen, wo die Aufgabe wiederkehrt, ist der Eigenschaft zwar auch nicht gedacht, aber die Figur (Tafel XV zu pag. 214, Figur 3) ist wenigstens etwas richtiger.

Endlich ist es auch Roberval gewesen, welcher die Kubatur der beiden Umdrehungskörper der Cycloide vollbrachte, desjenigen, bei welchem die Grundlinie, und desjenigen, bei welchem die mittlere grösste Ordinate Umdrehungsaxe ist. Diese Untersuchungen sind ebenso wie die Rectification der Cycloide in der von uns schon angeführten Abhandlung *De Trochoide ejusque spatio* enthalten. Roberval will alle diese Dinge zwischen 1635 und 1640 entdeckt und mit Ausnahme der Rectification kein Geheimniss aus ihnen gemacht haben. Mittheilungen seien in seinen Vorlesungen, in gelehrten Zusammenkünften, im Privatverkehre mit gelehrten Freunden gemacht worden[1]). Die von ihm einzig verschwiegen gehaltene Rectification habe viele Jahre später ein geschickter Engländer ebenfalls zu Wege gebracht[2]).

So Roberval's Darstellung, und, wenn man ihr vollen Glauben beimessen dürfte, hätte Roberval eigentlich die ganze höhere Curvenlehre geschaffen. Cavalieri veröffentlichte zwar die Indivisibilien, die er längst kannte, Wren die Länge der Cycloide, die ihm nicht entgangen war, unbewusste Aneignungen dessen, was ihm gehörte; ein Schriftsteller dagegen habe sich offenen Raubes an ihm schuldig gemacht, und dieser sei Torricelli.

Pascal, der Sohn des nahen Freundes Roberval's, machte sich einfach zum Sprachrohre dieses schweren Vorwurfes[3]), und, was die Gehässigkeit des Angriffes noch steigert, er that es im November 1658, also elf Jahre nach Torricelli's Tode, und das war derselbe Pascal, dessen physikalische Erfolge auf die Erfindung des Barometers durch Torricelli sich gründeten, derselbe Pascal, der die Grösse des italienischen Gelehrten noch 1651 in einem Briefe an Herrn von Ribeyre ganz und voll anerkannte[4]). Wir müssen zusehen, welches Verbrechen Torricelli eigentlich begangen haben soll, und ob wir es einem Manne von derjenigen geistigen Bedeutung, die wir (S. 699—700) an Torricelli kennen gelernt haben, zutrauen dürfen.

Torricelli gab 1644 ein mathematisches Sammelwerk, *Opera Geometrica,* heraus[5]). Dasselbe beginnt mit zwei Büchern *De solidis sphaeralibus,* dann folgen zwei Bücher *De motu* und hierauf *De dimensione parabolae* und *De solido hyperbolico cum Appendicibus de Cycloide et Cochlea.* Im 18. Satze des 1. Buches De motu stellt sich Torricelli die Aufgabe, eine Berührungslinie an einen Punkt der Parabel zu ziehen und löst sie mit Hilfe des Parallelogrammes der

[1]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 342 [2]) Ebenda VI, 344. [3]) Pascal III, 338—339. [4]) Ebenda III, 76—77. [5]) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* XII, 265—304.

Kräfte. Seine Lösung ist, wenn auch nicht dem Wortlaute nach, doch dem Gedankeninhalte nach, folgende[1]) (Figur 177). Sei cba die Parabel von der Gleichung $y^2 = px$ und f ihr Brennpunkt, mithin $fb = \frac{p}{2}$. Sei ausserdem $cd = ce = x$, $de = 2x$. Der die Parabel beschreibende Punkt war erst in b, dann in a und gelangte dorthin, indem er einer doppelten Bewegung unterworfen war, deren eine parallel mit cd, die andere senkrecht zu cd zu denken ist. Wäre der Weg von b nach a ein geradliniger gewesen, so hätte er die geradlinige Diagonale des Parallelogrammes der beiden genannten Bewegungen dargestellt, und es wäre auch weiter diese Diagonale eingehalten worden, die Entfernung jedes folgenden Punktes der Diagonale von der Axe cd hätte sich nach dem Verhältnisse $da : fb$ gerichtet. Nun ist bei $y^2 = px$ auch $y : \frac{p}{2} = 2x : y$, also lässt statt $da : fb$ das Verhältniss $ed : da$ sich einsetzen, welches bei der Parabel die Verhältnissgrösse der mehrgenannten beiden Bewegungen kundgiebt, und welches die Diagonale ea zur Folge hat, die somit die verlangte Berührungslinie ist. Wenn, setzt Torricelli hinzu, dieser Beweis ein besonderer für die Parabel ist, so kann man ihn doch für jeden Kegelschnitt verallgemeinern, indem man gleiche Bewegungen eines Punktes beachtet, der in gleicher Weise auf jeder vom Brennpunkte aus gezogenen Linie — Torricelli meint damit offenbar die Ordinate bf des Brennpunktes — sich bewegt. Bei der Archimedischen Spirale führe ein ähnliches Verfahren zum Ziele. Er habe den kleinen Satz einmal unter Freunden mitgetheilt und derselbe habe sich des brieflich ausgesprochenen Lobes des berühmten Galilei zu erfreuen gehabt[2]). Auch die Berührungslinie an die Cycloide könne man mittels des einen Satzes finden, was am Schlusse des Bandes ohne Beweis kurz berührt werden solle, ebenso wie die Körper der Cycloide und deren Schwerpunkte.

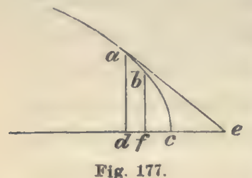


Fig. 177.

Unzweifelhaft ist Torricelli's Methode, mag man von deren Anwendung im Falle der Parabel denken, wie man will, der Roberval's nahe verwandt. Man hat nun, da die Jahreszahlen des Druckes der Mersenne'schen *Cogitata physico-mathematica* und der Torricelli'schen *Opera geometrica* übereinstimmend 1644 lauten, noch etwas näher

---

[1]) Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto metodo del Roberval* im *Bulletino Boncompagni* XII, 268—269. [2]) *Quae propositiuncula cum olim inter amicos a me vulgata fuisset Clar. Virum Galileum meruit habere laudatorem, ut extant ipsius epistolae apud me.*

untersucht, in welchen Monat jede der beiden Veröffentlichungen zu setzen ist. Die letzte Druckerlaubniss der Opera geometrica ist vom 9. April 1644; an einer Stelle spricht Torricelli von einer halbjährigen Unterbrechung seiner Arbeiten, *omissa per integrum semestre libellorum cura;* fällt also, was nicht geradezu gesagt ist, dieses halbe Jahr in die Zeit während des Druckes, so gelangt man etwa zum October 1644 als Zeit der eigentlichen Ausgabe[1]). Daneben ist ein Brief Torricelli's vom 1. Mai 1644 zu beachten, in welchem er Mersenne berichtet, zwei seiner kleineren Schriften seien fertig gedruckt[2]). Das waren aber doch wohl die beiden ersten, also auch die *De motu*, welche den in Frage kommenden Satz enthält. Nun die Cogitata. Bei ihnen ist ein Zweifel nicht möglich. *Peracta haec est impressio die 15 Septembris 1644* heisst es am Schlusse[3]), und wenn vom Ende des Druckes bis zur Versendung nur wenige Wochen gerechnet werden, so kommen wir gleichfalls zum October 1644. Die beiden Bücher gelangten demnach so gut wie gleichzeitig an die Oeffentlichkeit, jedenfalls so nahe beieinander, dass es ausgeschlossen ist, dass Torricelli aus dem Buche von Mersenne oder Roberval aus dem Buche von Torricelli seine Methode entnehmen konnte. Letzterer Vorwurf ist überhaupt nie erhoben worden. Wenn aber ersterer auch in nichts zerfällt, worauf stützt sich dann Roberval's schwere Anklage geistigen Diebstahls gegen Torricelli?

Pascal erzählt es uns[4]). Es handelt sich gar nicht um die Tangentenziehung, bei welcher die Verwandtschaft der beiderseitigen Gedanken einen Zweifel an Torricelli's Unabhängigkeit allenfalls hätte entstehen lassen können, sondern um den Flächenraum der Cycloide. Im Jahre 1638 habe De Beaugrand alle von Roberval entdeckten Sätze über die Cycloide und Fermat's Methode der grössten und kleinsten Werthe an Galilei geschickt, ohne den eigentlichen Erfinder zu nennen, weil er damit wahrscheinlich die Meinung hervorrufen wollte, als sei Alles sein Eigenthum. Er habe diese irrige Meinung noch dadurch gestützt, dass er statt von der Trochoide oder Rolllinie zu reden, den Namen der Cycloide benutzte, den er sich ausgedacht hatte. Als nun Galilei und De Beaugrand beide gestorben waren, und Torricelli unter den Papieren des Ersteren den Brief des Letzteren fand, habe er geglaubt, sich Alles aneignen zu können mit alleiniger Ausnahme der Erfindung der Cycloide, welche er Galilei zuwies, dem sie aber ebensowenig angehörte als ihm das Uebrige.

Als Pascal 1658 diese Erzählung veröffentlichte, von welcher er

[1]) Jacoli l. c. pag. 269—270. [2]) Ebenda pag. 271. [3]) Ebenda pag. 275.
[4]) Pascal III, 338.

nicht sagt, wie er selbst sie in Erfahrung gebracht habe, war von allen betheiligten Personen einzig Roberval am Leben. Dieser muss also wohl Pascal's Zuträger gewesen sein. Wer hätte es auch selbst in früherer Zeit, als De Beaugrand, als Torricelli lebten, sein sollen? De Beaugrand, auf welchen der Erzählung gemäss ein recht empfindlicher Flecken fällt? Oder Torricelli, der Angeklagte? Nachträglich wenigstens behauptet Pascal, habe Torricelli Alles eingestanden, und die Briefe seien vorhanden[1]). Wo, bei wem sie vorhanden seien, ob er selbst Einsicht davon genommen habe, darüber bleibt Pascal die Erklärung schuldig.

Jedenfalls ist niemals ein Brief Torricelli's von Roberval oder einem seiner Freunde veröffentlicht worden, dessen Datum 1644 oder noch später wäre. Nur ein Brief Torricelli's an Roberval über die Cycloide ist unter Roberval's gesammelten Abhandlungen veröffentlicht[2]). Er ist am 1. October 1643 geschrieben, mithin bevor die Opera geometrica ausgegeben wurden. Sehen wir zu, was er enthält. Galilei habe vor 45 Jahren (das war also 1598) der Cycloide ihren Namen gegeben; er habe versucht, deren Fläche zu messen und sich dazu unter anderem auch einer Wage bedient, auf welcher er die materielle Cycloidenfläche und ebenso den materiellen erzeugenden Kreis abwog, *appensis ad libellum spatiis figurarum materialibus.* Immer sei die Cycloidenfläche weniger als dreimal so schwer als der Kreis gewesen, und darauf habe Galilei seine Versuche aufgegeben, weil er vermuthete, es handle sich um ein incommensurables Verhältniss, *ob incommensurabilitatis suspicionem.* Später habe er, Torricelli, die Cycloidenfläche wider alles Hoffen, ja fast ohne darnach zu suchen, gefunden, und fünf verschiedene Beweise dafür ermittelt. Wie man die Berührungslinie an die Cycloide ziehe, habe Viviani ihm gezeigt. Ueber Umdrehungskörper der Cycloide besitze er nichts, *quoad solida nihil habeo.* Auch ein Brief von Roberval an Torricelli, über welchen wir schon berichtet haben, ist in jener Roberval'schen Sammlung gedruckt. Ein Datum ist ihm nicht beigegeben, aber da in ihm die Stelle vorkommt *ac tum demum anno 1645 ad id animum applicuistis*, so muss er später als 1645 geschrieben sein. Andererseits ist ein Brief Torricelli's vom 24. August 1647 an den nachmaligen Cardinal Michelangelo Ricci bekannt[3]), demzufolge er

---

[1]) *Mr. Roberval s'en plaignit donc à Torricelli par une lettre qu'il lui en écrivit la même année* (1644), *et le P. Mersenne en même temps, mais encore plus sévèrement: il lui donna tant de preuves, et imprimées et de toutes sortes, qu'il l'obligea d'y donner les mains, et de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ses lettres, que l'on garde écrites de sa main, du même temps.*
[2]) *Mém. Acad. Sci.* VI, 359—361. [3]) Jacoli l. c. pag. 282.

damals von einem beleidigenden offenen Briefe Roberval's gehört, ihn aber noch nicht zu Gesicht bekommen habe. Folglich ist jener gedruckte Brief Roberval's vermuthlich vom Frühjahre 1647. Roberval's Papiere enthielten also keinen früheren Brief von Torricelli, keinen solchen von Torricelli aus dem Jahre 1644, welche zu Roberval's Gunsten hätten gedeutet werden können, denn wie sollte man sonst den fehlenden Abdruck erklären? Auch in dem gedruckten Briefe von 1647 ist von Eingeständnissen aus dem Jahre 1644 oder aus späterer Zeit, von denen Pascal 1658 unter Roberval's Einflusse als vorhanden sprach, keine Rede. Gab es denn gar keine Zeile Torricelli's, die veröffentlicht hätte werden können, und die jener Pascal'schen Anklageschrift als Begründung dienen konnte?

Es gab allerdings Briefe aus dem Jahre 1646, aber sie wurden von anderer Seite bekannt gemacht. Nachdem Pascal 1658 die Anklage erhoben, kam 1659 aus England eine Antwort, von der wir noch reden werden, und eine zweite 1663 aus Italien. Sie führte die Ueberschrift: *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate della vera storia della cicloide e della famosissima esperienza dell' argento vivo*[1]), und ihr Verfasser war Carlo Dati (1619—1679), ein Schüler Torricelli's. Er theilte darin einen Brief Roberval's an Torricelli vom 1. Januar 1646 mit und ebenso die Antwort Torricelli's vom 7. Juli 1646.

Roberval behauptet hier, vor zehn Jahren, mithin zu Anfang des Jahres 1636, in öffentlicher wie vertraulicher Weise gelehrt zu haben, wie man Tangenten durch Zusammensetzung von Bewegungen sich verschaffe. Er habe damals das Verfahren an hervorragenden Beispielen geprüft, an der Quadratrix, der Cissoide, der Conchoide, der Spirale und vielen anderen Curven. Besonders leicht gestaltete sich die Auffindung der Berührenden an Cycloide und Spirale, weil diese Linien durch Zusammensetzung einer geradlinigen und einer kreisförmigen Bewegung entstehen, welche beide gleichförmig sind, und deren Geschwindigkeitsverhältniss in jedem Punkte der Curve definitionsgemäss gegeben ist. Das stimmt also so weit mit Roberval's späteren Behauptungen überein, wie kaum anders erwartet werden konnte.

Torricelli erwidert, er gestehe zu, dass er vor noch nicht so vielen Jahren jene Beweisführungen entdeckt habe, aber er habe sie nicht minder selbständig entdeckt, als dies von irgend einem Anderen vorher oder nachher geschehen sei. Stimme sein Verfahren irgendwie mit dem der Franzosen überein, so sei er darüber in voller Gemüths-

---

[1]) Auszüge aus der ungemein seltenen Schrift bei Jacoli l. c. pag. 280 sqq.

ruhe, und das sei ihm die Hauptsache. Er sei sich bewusst, Alles aus sich heraus gefunden zu haben; wer ihn kenne, werde das gleiche Zutrauen zu ihm haben; was Andere glauben, berühre ihn nicht. Das wonnige Gefühl, Richtiges erfunden zu haben, um dessenwillen allein er in Forschungen sich einlasse, werde ihm Niemand rauben. Um Ruhm, der nur durch Zank und Streit zu erwerben wäre, kümmere er sich nicht. Er sei bereit, alle jene Sätze irgend wem, wer sie nur wolle, zuzugestehen, unter der einzigen Voraussetzung, dass man sie ihm nicht unrechtmässigerweise entreissen wolle. Und weiter unten fährt Torricelli fort, er habe vor mehreren Jahren die aus der Bewegungslehre stammende Tangentenmethode erfunden, ohne dass ihm dabei Licht oder Hilfe von Anderen geworden sei. Er habe mit Freunden davon geredet. Später sei er zu den Sätzen über die Cycloide gelangt und habe auch sie Freunden mitgetheilt, bevor sein Buch herauskam. Plötzlich, ohne dass er es erwartet habe, sei die Botschaft eingetroffen, Alles sei vorher bereits durch Roberval erfunden. Wenn dem in Wahrheit so sei, dann freilich können die Sätze nicht ferner als sein Eigenthum gelten, wiewohl vielleicht kein Sterblicher jemals zu solchem Zugeständnisse sich herbeilassen würde. Sehet daraus, schliesst die Stelle, wie eines feinen Mannes würdig ich handle, indem ich abtrete, was mit gleichem Rechte mein wie Euer ist, da jeder von uns es selbständig erfand, abgesehen von einem kleinen Zeitunterschiede, wenn ein solcher vorhanden war.

Das klingt jedenfalls ganz anders, als Roberval gegen 1658 es Pascal erzählt haben muss, und man begreift, warum Roberval's Freunde diesen Brief Torricelli's, wenn er in seinen Papieren sich vorgefunden haben sollte, nicht zum Drucke beförderten, denn er hätte die Behauptung von einem Eingeständnisse Torricelli's, in unrechtmässiger Weise zu seinem Wissen gelangt zu sein, geradezu Lügen gestraft. Wenn wir so einer mindestens ungenauen Berichterstattung Roberval's auf die Spur gekommen sind, wenn wir früher (S. 711) schon einmal sahen, dass es Roberval nicht darauf ankam, noch 1655 den Satz von der Fläche des sphärischen Dreiecks für sich in Anspruch zu nehmen, den Girard 1629, Cavalieri 1632 im Drucke veröffentlicht hatte, so lohnt es sich, die vorher bei Seite geschobene Untersuchung aufzunehmen, ob denn Roberval dort überall bei der Wahrheit geblieben ist, wo er die Zeitpunkte seiner eigenen Erfindungen genau bestimmte[1]).

Roberval will also die Tangente als Diagonale des Parallelogrammes der die Curve erzeugenden Kräfte zu Anfang 1636 erkannt

---

[1]) Jacoli l. c. pag. 283—284 hat diese Untersuchung geführt.

haben. Aber am 11. October 1636 schrieb er an Fermat[1]), er habe die Tangenten an mehrere Curven gefunden, und er bringt deren Construction in Zusammenhang mit der Quadratur. Das sieht doch nicht nach mechanischen Betrachtungen aus! Der Wortlaut: *Pour les tangentes de la conchoide, je les ai considérées il y a longtemps, comme étans determinations d'équations quarre-quarrées* stimmt viel eher zu jener *vis Analyseos* (S. 877), mittels deren Roberval seinem gedruckten Briefe an Torricelli gemäss, welchen wir auf das Frühjahr 1647 bestimmt haben, schon 1634 die Tangente verschiedener Curven gefunden haben will. Weitere für Roberval's Versuche, die Cycloidentangente zu bestimmen, wichtige Stellen sind in Briefen von Descartes nachgewiesen worden[2]), welche wir ihrer Zeitfolge nach erwähnen. Am 23. August 1638 schrieb Descartes an Mersenne[3]), er freue sich ungemein über dessen Mittheilung, dass keiner seiner Mathematiker, auch nicht Roberval, die Cycloidentangente zu ziehen wisse. Descartes knüpfte daran die Mittheilung seiner eigenen Auflösung dieser Aufgabe (S. 855), welche somit die erste überhaupt gegebene war, welcher dann die von Fermat (S. 861) auf dem Fusse folgte. Schon am 25. September 1638 war sie im Besitze von Descartes, der an diesem Tage seine Bewunderung der Fermatschen Ableitung in die früher (S. 875) von uns erwähnten Worte kleidete, er habe Niemand gekannt, der auf ihn den Eindruck gemacht hätte, so viel wie Fermat von Geometrie zu verstehen. Bei der Cycloide, fuhr Descartes fort[4]), ist es nicht leicht, die Regeln anzuwenden, welche bei anderen Curven zum Ziele führen, und Herr von Roberval, der die Aufgabe stellte, und der zweifellos auch einer der ersten Geometer unseres Jahrhunderts ist, hat eingestanden, die Auflösung nicht zu kennen, auch kein Mittel zu wissen, zu ihr zu gelangen. Freilich hat er seitdem auch gesagt, er habe die Auflösung gefunden, aber das geschah folgenden Tages, nachdem er erfahren, dass wir beide ihm Lösungen zugeschickt hätten. Am 8. October 1638 äussert sich Descartes gegen Mersenne abermals in ähnlicher Weise[5]). Roberval mache sich bis zu einem gewissen Grade lächerlich, indem er glauben machen wolle, er habe die Cycloidentangente gerade am folgenden Tage erfunden, nachdem er erfahren, dass Descartes' Auflösung bei Mersenne angelangt sei. Wieder einen Monat später in einem Briefe an Mersenne vom 15. November 1638 macht sich Descartes über vier bis fünf verschiedene aber stets unrichtige Versuche Roberval's die

[1]) Fermat, *Varia Opera* pag. 140. [2]) Montucla II, 56. [3]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VII, 88. [4]) Ebenda VII, 86. [5]) Ebenda VII, 449.

Cycloidentangente zu ermitteln lustig[1]), und sogar noch am 30. April 1639 bricht er in Lachen aus[2]), *il faut que je rie*, dass Mersenne ihm jetzt schon fünf oder sechs stets von einander verschiedene Tangentenzeichnungen für die Cycloide zugeschickt habe, welche sämmtlich mit Fehlern behaftet gewesen seien. Nun mag ja zu Roberval's Gunsten diesen Bemängelungen seiner Constructionen durch Descartes nicht unbesehen Recht gegeben werden wollen, aber Eines geht aus Roberval's wiederholten Versuchen unwiderleglich hervor: dass er vor April 1639 nicht im Besitz der Anwendung der Methode des Kräfteparallelogrammes auf die Cycloidentangente gewesen sein kann, also auch wahrscheinlich überhaupt nicht im Besitze jener Methode, welche, wie Roberval am 1. Januar 1646 sehr richtig an Torricelli schrieb (S. 887), bei keiner Curve leichter als bei der Cycloide in Anwendung trete.

Damit fällt aber die gegen Torricelli erhobene Anklage, soweit sie sich (S. 885) auf die Tangentenziehung hätte berufen können, zusammen, denn De Beaugrand konnte unmöglich 1638 an Galilei schicken, was frühestens 1639 vorhanden war. Die Untersuchung hat somit festgestellt, was bei dem fast von keinerlei Makel betroffenen Charakter Torricelli's zu vermuthen war, dass diesem gerechterweise ein Vorwurf, die Tangentenmethode Roberval's sich widerrechtlich angeeignet zu haben, nicht gemacht werden kann, dass vielmehr beide, Roberval und Torricelli, selbständig und wahrscheinlich ziemlich gleichzeitig auf den geistreichen und an sich eines Eigenthumstreites wohl würdigen Gedanken gekommen zu sein scheinen. Was aber die Auffindung der Cycloidenfläche betrifft, so ist zwischen den Methoden Roberval's und Torricelli's so wenig Verwandtschaft nachweisbar, dass von einer Entwendung unmöglich die Rede sein kann. Ob De Beaugrand Galilei überhaupt Etwas mittheilte, und wie viel es gewesen sein kann, lässt sich bei dem Fehlen jeglichen Beweisstückes nicht mehr ermitteln.

Wir haben (S. 884) aus Torricelli's *Opera geometrica* nur seine Tangentenmethode erwähnt und sind wegen des darüber entstandenen erbitterten litterarischen Streites längere Zeit bei ihr stehen geblieben, aber auch Anderes ist noch erwähnenswerth[3]). In der Abhandlung *De solido hyperbolico* ist der Satz ausgesprochen, dass, wenn (Figur 178) CF die Asymptote der Hyperbel AE ist, der Umdrehungskörper des unendlichen bei AB anfangenden Flächenstückes zwischen Hyperbel und Asymptote um die Asymptote als Drehungsaxe dem Cylinder

[1]) *Oeuvres de Descartes* (ed. Cousin) VIII, 16. [2]) Ebenda VIII, 115.
[3]) Montucla II, 90.

gleich sei, welchen das Rechteck $ABCD$ bei seiner Umdrehung um BC hervorbringe. Ein für die Zeit seiner Entstehung sehr merkwürdiger Satz wird auch aus der Abhandlung *De motu projectorum* angeführt[1]). Torricelli habe gewusst, dass, wenn man aus einem und demselben Punkte mit einer und derselben Anfangsgeschwindigkeit Körper in die Höhe werfe und nur den Winkel, unter welchem sie geworfen werden, jeden möglichen Werth annehmen lasse, die Scheitelpunkte aller dieser Wurfparabeln eine neue Parabel zum geometrischen Orte haben. Torricelli hat somit zuerst den Begriff der einhüllenden Linie geahnt, wenn auch keineswegs deutlich erkannt. In seinen Untersuchungen über die Cycloide machte er sich eines Irrthums schuldig. Er hielt den Umdrehungskörper der um ihre grösste Ordinate gedrehten Cycloide fälschlich für $\frac{11}{18}$ des umschriebenen Cylinders, während Roberval die Raumbestimmung dieses Körpers richtig stellte. Torricelli hat auch, wie bemerkt worden ist[2]), die logarithmische Spirale, vielleicht auch die logarithmische Curve, jedenfalls aber die Rectification der logarithmischen Spirale gekannt.

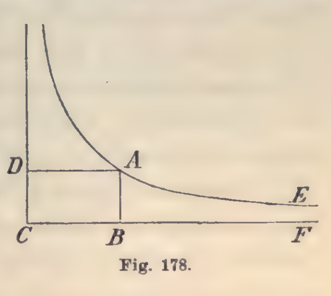


Fig. 178.

Gleich Torricelli hatte auch ein englischer Schriftsteller, den wir hier erwähnen müssen, Castelli zum Lehrer. Er nannte sich Richard White[3]) und mit latinisirtem Namen Ricardus Albius Anglus. Er ist 1590 geboren, hat sich aber, da die Gesetze seiner Heimath Katholiken aus den öffentlichen Schulen fernhielten, bis 1626 nicht mit Wissenschaft beschäftigen können. Dann besuchte er Frankreich und Italien, wo er Philosophie, später auch während zweier Jahre Mathematik trieb, worauf Familienangelegenheiten ihn nach England zurückriefen. Ein 1648 von ihm in Rom herausgegebenes Buch hat einen sehr langen, mit den Worten *Hemisphaerium dissectum*

---

[1]) Heller, Geschichte der Physik II, 106. [2]) Gino Loria, *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* in den *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei.* Sitzung vom 5. December 1897. [3]) Dass der richtige englische Name White ist, lässt schon die Uebersetzung in Albius vermuthen. Vergl. auch Graesse, *Trésor des livres rares et précieux* VI², pag. 442. Ein älteres englisches biographisches Sammelwerk hat statt White den Druckfehler Cohite, und dieser Irrthum ist in zahlreiche andere Werke übergegangen. In einem Briefe von De Sluse an Huygens (abgedruckt in der grossen Gesammtausgabe von Huygens II, 450) ist der Vorname von White als Thomas angegeben. Eine Anmerkung der Herausgeber nennt als dessen Lebensdauer die Jahre 1588—1680. Sollten zwei Brüder White gelebt haben?

beginnenden Titel[1]). Es betrachtet Oberfläche und Rauminhalt von verschiedenartigen Kugelabschnitten, ausserdem auch die Oberfläche eines schiefen Kreiskegels. Hat ein gerader Kreiskegel die Seite s und sein Grundkreis den Halbmesser r, so ist bekanntlich πrs das Maass seiner gekrümmten Oberfläche, oder auch $\pi\varrho^2$, wenn $\varrho^2 = rs$. Die Oberfläche ist also einem Kreise gleich, dessen Halbmesser geometrisches Mittel zwischen dem Halbmesser des Grundkreises und der Seite des Kegels ist. Beim schiefen Kegel giebt es unendlich viele Kegelseiten paarweise in je einer durch die Kegelspitze und den Mittelpunkt des Grundkreises hindurchgehenden Ebene gelegen, und das arithmetische Mittel aller dieser Seiten muss statt s in die beim geraden Kreiskegel giltige Formel eingesetzt werden. Zwei Paare von Seiten zeichnen sich aus, erstens das Paar, welches in der Ebene liegt, die durch die senkrechte Höhe des Kegels hindurchgeht, zweitens das Paar, welches in der zur genannten Ebene senkrechten Ebene sich befindet. Das erste Paar besteht aus der grössten und kleinsten Seite, das zweite Paar ist das einzige gleichseitige. Die Summe des ersten Paares ist die grösste, die des zweiten die kleinste der überhaupt möglichen Summen. Den vierten Theil dieser vier ausgezeichneten Kegelseiten nimmt White als das arithmetische Mittel aller Kegelseiten. Geometrisch bewiesen sei es allerdings nicht, aber so lange nicht bewiesen werde, dass die Vorschrift falsch sei, halte er sie für richtig. Bequemer kann man sich eine Beweisführung in der Mathematik gewiss nicht machen.

81. Kapitel.

Gregorius a Sto. Vincentio. Wallis. Pascal. De Sluse. Hudde. Van Heuraet.

Von ungleich grösserer Bedeutung als der auf Strenge keinerlei Anspruch erhebende Versuch, von welchem am Ende des vorigen Kapitels anhangsweise die Rede war, ist das grosse *Opus geometricum* des Gregorius a Sto. Vincentio, welches wiederholt unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat, zuletzt (S. 850) als wir von der Quadratur der Spirale sprachen, welche durch Gleichsetzung ihrer Fläche mit einem Parabelabschnitte sowohl in gedruckten Schriften des Gregorius als Cavalieri's ermittelt ist. Diese Quadratur der Spirale

[1]) Kästner III, 215—218. Dort ist aus der Vorrede des Buches das Wenige zusammengestellt, was wir von den Lebensverhältnissen White's angeben konnten.

war aber keineswegs der einzige Schritt in das Reich des Infinitesimalen, welchen Gregorius in jenem 1647 gedruckten *Opus geometricum* wagte. Er bediente sich meistens einer besonderen Methode, welche den Namen *Ductus plani in planum* führt, und deren Erörterung unsere nächste Aufgabe ist[1]).

Ducere heisst bekanntlich Multipliciren, und von einer Multiplication von Flächen ist im VII. Buche, welches die erwähnte besondere Ueberschrift besitzt, die Rede; an einen kinematischen Begriff, ein Hinübergleitenlassen einer Ebene über eine andere, ist nicht zu denken. Gregorius selbst giebt die Erklärung[2]): „Ich nenne *Ductum plani in planum* die Bildung jedes Körpers, welcher aus zwei Oberflächen mit derselben oder mit gleicher Basis entstanden ist.“ Uebermässig klar wird man diese Ausdrucksweise so wenig nennen wollen, als das ganze Opus geometricum. Die nähere Auseinandersetzung ist folgende. Gregorius denkt sich (Figur 179) zwei Figuren $ABCD$ und

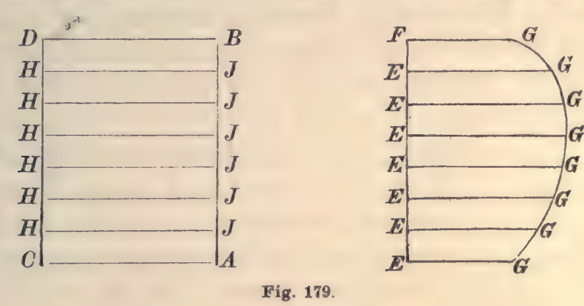


Fig. 179.

EFG, bei welchen $AB = EF$ ist, und stellt die zweite derart senkrecht zur ersten, dass EF mit AB zusammenfällt. In gleichen Entfernungen werden nun lauter Zwischenlinien EG und JH gezogen, welche bei der angegebenen Stellung der beiden Figuren zu einander einen rechten Winkel mit einander bilden, der durch neue in G und H errichtete Senkrechte zu einem Rechtecke sich ergänzt. Die Rechtwinkligkeit ist zwar, sagt Gregorius, nicht nothwendig, jede andere gleiche Neigung thäte es auch, aber bei senkrecht zu einander gewählten Figuren macht sich die Sache leichter. Jene sämmtlichen Rechtecke, von welchen jedes durch das Product der zwei Senkrechten EG mal JH gemessen wird, bilden einen Körper, und das ist eben der *corpus ortum ex ductu plani in planum*. Sind die beiden Figuren,

[1]) Auszüge aus dem *Opus geometricum* bei Kästner III, 225—247. Der vielfach missverstandene *Ductus plani in planum* ist zutreffend behandelt bei Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange (1856) S. 70—73, und bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* III, 188—193. [2]) *Opus geometricum* pag. 704—705.

welche gemeinsam den Körper erzeugen, einander vollkommen gleich und in gleicher Lage, so nennt man den Körper einen *corpus ex ductu superficiei AB in se*, einen Körper, könnte man allenfalls sagen, den die betreffende Figur mit sich selbst erzeugt. Von ihm ist der wechsel-

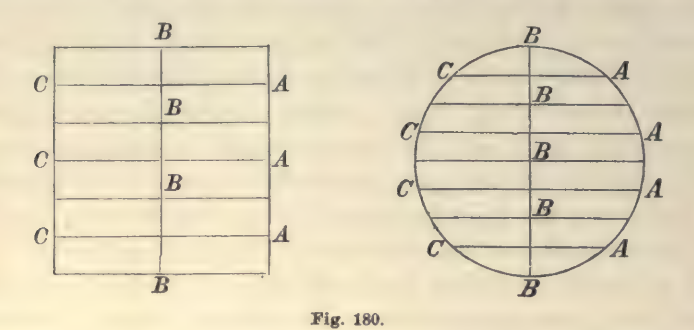


Fig. 180.

weise mit sich selbst erzeugte Körper, *corpus ex ABC ductum in se subalterne*, zu unterscheiden, welcher dann entsteht, wenn die gleichen Figuren nicht in gleicher Lage mit einander in Verbindung treten.

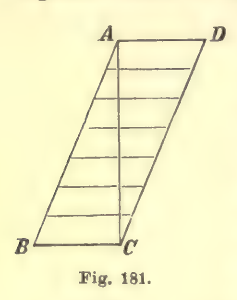


Fig. 181.

Bei den diesen Definitionen beigegebenen Abbildungen (Figur 180 und 181) sind die mit einander in Verbindung tretenden Figuren mit den gleichen Seiten an einander gesetzt, ohne durch perspektivische Zeichnung den entstehenden Körper irgend hervortreten zu lassen. Bei den an die Definition sich anschliessenden Sätzen dagegen sind an einer und derselben Abbildung beide Darstellungen regelmässig vereinigt: die Figuren erscheinen neben einander, und zugleich treten die Körper auf, z. B. wo (Figur 182) aus der Selbsterzeugung eines rechtwinkligen Dreiecks eine Pyramide

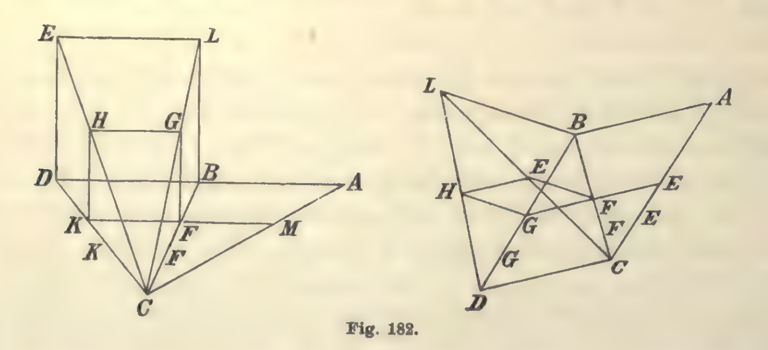


Fig. 182.

mit quadratischer Grundfläche entsteht, während die wechselweise Selbsterzeugung eben jenes rechtwinkligen Dreiecks eine Pyramide

dreieckiger Grundfläche hervorbringt, welche, wie Gregorius beweist[1]), die Hälfte der ersteren Pyramide ist.

Gregorius geht im Allgemeinen darauf aus, Körper bald auf eine, bald auf andere Weise durch dieselben Figuren erzeugen zu lassen und dann Zahlenbeziehungen zwischen jenen verwandten Körpern zu entdecken.

Ein ziemlich allgemeiner Satz in dieser Beziehung ist z. B. folgender[2]). Es sollen drei Figuren gegeben sein, die sämmtlich eine in allen drei Figuren gleich lange Strecke als Theil ihrer Begrenzung besitzen. Im Uebrigen soll die Begrenzung beliebig aussehen und nur dem Gesetze gehorchen, dass die in gleichen Höhen errichteten Senkrechten auf jener gleichen Strecke in den drei Figuren fortwährend stetige geometrische Proportionen bilden. Wird alsdann durch die erste Figur in Verbindung mit der dritten ein Körper erzeugt und ein zweiter Körper durch die zweite Figur mit sich selbst, so müssen beide Körper gleichen Rauminhaltes sein. Der Beweis wird durch Einbeschreibung sehr dünner Parallelopipeda in beide Körper geführt, worauf die Bemerkung folgt, die Anzahl solcher Parallelopipeda könne so gross genommen werden, dass die Körper ganz von ihnen erfüllt (wörtlich: erschöpft) würden, *parallelopipeda illa ita posse multiplicari ut corpora ipsa, quibus inscribuntur, exhauriant.*

Vielleicht ist dieses das erste Vorkommen des Wortes *exhaurire* in geometrischem Sinne, aus welchem man dann das Wort Exhaustionsmethode für das entsprechende schon bei Euklid und Archimed vorkommende, aber nicht besonders benannte Verfahren abgeleitet hat.

An geometrischer Strenge ist diese Abtheilung des Werkes des Gregorius den Indivisibilien Cavalieri's, mit welchen man am ersten geneigt sein dürfte, Vergleichungen anzustellen, wohl überlegen. Dagegen ist die Anwendbarkeit der Indivisibilien entschieden eine reichhaltigere und fruchtbarere gewesen, und eine gegenseitige Einwirkung, welchem von beiden Schriftstellern man nun Kenntniss der Leistungen des Anderen zutrauen wollte, ist hier so gut wie ausgeschlossen.

Erfüllte der *Ductus plani in planum* das VII. Buch des Opus geometricum, so darf auch aus dem VI. der Hyperbel gewidmeten Buche ein Satz nicht unerwähnt bleiben[3]). Wenn, sagt dort Gregorius, eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gezeichnet ist, und parallel zur einen Asymptote Gerade zwischen der Hyperbel und der

---

[1]) *Opus geometricum* pag. 708 [2]) Ebenda pag. 738—739. [3]) Ebenda pag. 597.

anderen Asymptote gezogen werden, welche jeweils gleiche Flächentheile in den entstehenden gemischtlinigen Vierecken begrenzen, so bilden jene Geraden eine geometrische Progression. Das ist offenbar die Wahrheit von der Quadratur der auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel durch Logarithmen, welche hier entdeckt ist, aber ohne dass Gregorius sich dabei des Wortes Logarithmen bedient hätte.

Das Opus geometricum hat einen sichtlichen Einfluss auf ein vier Jahre später erschienenes Buch von Tacquet, dem Antwerpener Ordensgenossen von Gregorius, ausgeübt. Dessen *Cylindricorum et annularium libri quatuor*[1]) bieten zahlreiche Beispiele von Körperinhalten, welche zwar nach der Methode der Indivisibilien berechnet werden können, und von Manchem so berechnet worden seien, aber ohne dass damit den Anforderungen mathematischer Strenge genügt wäre, welche er, Tacquet, stelle. Er ziehe es vor, die zu messenden Räume zwischen zwei Summen von Cylindern oder ähnlichen Gebilden einzuschliessen, die theils Grösseres, theils Kleineres als jene Körper liefern, ihnen aber dabei beliebig nahe gebracht werden können. Das Wort *exhauriri*, dessen Tacquet sich bei dieser Gelegenheit bedient, zeigt den von uns angekündigten Einfluss des Opus geometricum. Ebendarauf weist die von Tacquet angewandte Redensart *ducitur perpendiculariter* (oder wenn nicht rechtwinklig *ductus obliquus*) hin, welche bei ihm freilich statt der multiplicativen Bedeutung eine kinematische angenommen zu haben scheint, welche wir im Sinne des Gregorius noch zurückweisen mussten.

Das gleiche Jahr 1651, in welchem Tacquet's Buch in Antwerpen erschien, war auch das Druckjahr eines mathematischen Werkes eines Toulouser Genossen des Jesuitenordens, des Antoine Lalouvère[2]) (1600—1664). Der Name kommt auch in der Form De la Loubère vor, als Lalovera und noch in anderen aber ähnlichen Schreibformen. Seine erste mathematische Schrift von 1651 führt den Titel *Elementa tetragonismica, seu demonstratio quadraturae circuli et hyperbolae ex datis ipsorum centris gravitatis*[3]). Es scheint ein gewisser Muth dazu zu gehören, diese und die späteren Schriften Lalouvère's zu lesen. Der Grundgedanke ist der der Umkehrung der Guldinschen Regel. Wenn der Inhalt eines Körpers, worunter immer ein Umdrehungskörper zu verstehen ist, bekannt ist, wenn auch der

---

[1]) Kästner III, 266—275. — Mansion, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale* (1887) pag. 288. [2]) Poggendorff I, 1501. — Tannery, *Pascal et Lalouvère* in den *Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* T. V (3e Serie). [3]) Montucla II, 77. — Tannery l. c. p. 6—8 des Sonderabzugs.

Schwerpunkt seines Querschnittes gegeben ist und damit zugleich der von diesem Schwerpunkte während der Umdrehung beschriebene Kreis, dann ist auch der Inhalt des Querschnittes Ergebniss eines einfachen Divisionsexempels. Das Auffallendste ist, dass Lalouvère den Guldinschen Satz unabhängig entdeckt haben will. Guldin's Name und Ansprüche seien ihm erst nachträglich aus Cavalieri's Exercitationes bekannt geworden. Von der Entdeckung durch Pappus weiss Lalouvère wieder nichts oder will nichts davon wissen. Lalouvère gehört auch zu den Mathematikern, welche mit der Cycloide sich beschäftigten. Im August 1658 veröffentlichte er eine kleine Schrift *De cycloide* mit der Raumbestimmung des Umdrehungskörpers der Cycloide um ihre Grundlinie. Am 15. September theilte er brieflich die Rechnung mit, welche ihm das Ergebniss geliefert habe, aber sie war irrig, und schon am 21. September zog er sie als solche wieder zurück Das eigentliche Verfahren Lalouvère's war eben, trotzdem es auf dem gleichen Gedanken wie die Elementa tetragonismica beruhend von selbst zur Uebersetzung in eine Rechnung geführt haben müsste, in der Form altgeometrisch und Lalouvère selbst ein ungeübter und unsicherer Rechner. Der Hauptsache nach geometrisch war desshalb auch seine 1660 erschienene *Geometria promota in VII de cycloide libris*, welchen als Anhang Fermat's Abhandlung über Rectificationen von Curven beigegeben war (S. 869). Die in der Geometria promota veröffentlichten Dinge waren allerdings richtig, aber Lalouvère's Darstellung derselben kam zu spät, um ihm das Erfinderrecht zu verschaffen, denn nunmehr war das Alles schon seit einem Jahre bekannt.

An Quadraturen hat auch der spätere Bischof von Gap De Lyonne[1]) in einer Jugendschrift sich versucht, die 1654 durch Leotaud herausgegeben wurde, welcher uns selbst aus dem mit Gregorius von St. Vincentius und dessen Schülern über die Kreisquadratur geführten Streite (S. 716) bekannt ist. Lyonne's *Amoenior curvilineorum contemplatio* beschäftigt sich hauptsächlich mit den Mondchen des Hippokrates und Figuren ähnlicher Entstehungsweise, deren genauer Flächenraum bestimmt wird.

In Italien, von wo aus, wie bei aller Anerkennung der Verdienste Kepler's zugestanden werden muss, durch Cavalieri der wesentliche Anstoss zur allgemeinen Behandlung infinitesimaler Fragen gegeben worden war, hat die neue Lehre ausser durch Torricelli nur durch einen Schriftsteller noch Erweiterung gefunden. Es war das Stefano degli Angeli[2]) (1623—1697), Professor der Mathematik in Rom, dann in Padua. In der Ueberschrift seiner Werke nannte er sich

[1]) Montucla II, 76. [2]) Kästner III, 212—215. — Poggendorff I, 46—47.

Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi in Veneta Provincia Definitor Provincialis, er war demnach Ordensgenosse Cavalieri's und nicht Jesuit, wie mitunter irrig angegeben ist. Schon 1654 schrieb er *De infinitis parabolis*, worunter Curven von der Gleichung $y^n = b^{n-1}x$ verstanden sind, und in seinem *Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum* von 1659 ist denselben Curven Aufmerksamkeit zugewandt. Insbesondere ist das Tangentenproblem für dieselben gelöst, nachdem Cavalieri die Quadratur veröffentlicht hatte. Analytische Geometrie im Sinne von Descartes und Fermat findet man bei Angeli nicht. Gleichwohl ist durch ihn vermuthlich ein Wort in den mathematischen Sprachschatz eingeführt worden, welches gerade in der analytischen Geometrie sich als zukunftsreich bewährt hat. Um nämlich anzugeben, dass in der Parabel $y^n = b^{n-1}x$ die Subtangente aus zwei Stücken bestehe, von denen das jenseits vom Scheitel gelegene das $n-1$-fache des diesseits vom Scheitel, also innerhalb der Curve, befindlichen Stückes sei,

$$\left[s_t = \frac{y}{y'} = nx = x + (n-1)x\right],$$

spricht er von dem Verhältnisse des Theiles des Diameters ausserhalb der Parabel *ad partem abscissam ab ordinatim applicata versus verticem.* Wir kennen keine ältere Benutzung des Wortes Abscisse in lateinischen Originalschriften. Vielleicht kommt das Wort in Uebersetzungen der Apollonischen Kegelschnitte vor, wo Buch I Satz 20 von ἀποτεμνομέναις die Rede ist, wofür es kaum ein entsprechenderes lateinisches Wort als *abscissa* geben möchte.

Der Ueberschrift nach ist man geneigt, hier auch die *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* von 1666 zu nennen, welche Cardinal Ricci[1]) (1619—1692) zum Verfasser hat. Es scheint indessen, als wenn dort nur antikgeometrische Untersuchungen angestellt wären[2]).

Noch weniger als in Italien sind in Deutschland Fortschritte in der Infinitesimalrechnung gemacht worden, wie sich aus den Zeitverhältnissen leicht begreift. Kepler's Doliometrie war im denkbar ungünstigsten Augenblicke erschienen. Wüthete doch 1618 bis 1648 in weitverbreiteten Gegenden Deutschlands der entsetzliche von seiner Dauer benannte Krieg. Hat man doch fast mehr Anlass zur Verwunderung darüber, dass während jener Zeit einzelne Persönlichkeiten, wie Schwenter und Faulhaber, wissenschaftlichen Sinn besassen und Aufbewahrenswerthes leisteten, als darüber, dass nach Aufhören des Krieges noch zwei Jahrzehnte verstreichen mussten, bis in dem materiell und geistig ausgesogenen Lande ein

---

[1]) Montucla II, 91. — Fabbroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium II.*
[2]) Vergl. Davido Besso, *Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci.* Roma 1893.

Mathematiker ersten Ranges erschien, Leibniz, bis zu dessen Auftreten wir diesen Band fortführen. Der Wissenschaft selbst erwuchs durch das Brachliegen im einzelnen Lande kaum Schaden. Seit sie, dem nationalen Gebiete entrückt, Weltwissenschaft geworden war, fand sie bald da, bald dort Förderer und Förderung und wurde damit unabhängiger von politischen Begebenheiten, welche nachgerade aufhören, einen Einfluss von der Bedeutung zu üben, dass es unentbehrlich wäre, ihre Geschichte mit der Geschichte der Wissenschaften zu vermengen. Was Franzosen leisteten, während der dreissigjährige Krieg Deutschland verheerte, haben wir gesehen. England litt ähnlich wie Deutschland unter dem Gräuel blutiger Kämpfe, aber es waren wenigstens nicht fremde Heere, die dort ihre vernichtenden Schlachten schlugen, und als Cromwell gestorben und das Königthum wieder eingesetzt war, erholte die englische Wissenschaft sich verhältnissmässig schnell. Eine ganze Anzahl von Mathematikern trat dort auf. Ihre Untersuchungen griffen in fast alle Theile unserer Wissenschaft ein, auch in das Gebiet der Infinitesimalrechnung.

Vor allem haben wir bei John Wallis zu verweilen. Schon seine analytisch-geometrische Darstellung der Kegelschnitte von 1655 (S. 820) gehört bis zu einem gewissen Grade hierher, da in ihr die Indivisibilien Cavalieri's bewusste und erfolgreiche Anwendung fanden, aber ganz besonders hervorragend war die gleichfalls 1655 gedruckte *Arithmetica Infinitorum*[1]). Inhalt des Werkes ist die Auffindung von Quadraturen und Kubaturen, also wesentlich das Gleiche, was die Aufgabe von Cavalieri's Indivisibilien bildet. Auch darin zeigt sich Uebereinstimmung, dass bei den Quadraturen der durch eine Curve, durch die Abscissenaxe und eine Schlussordinate begrenzte Raum in seinem Verhältnisse zu dem Rechtecke aufgesucht wird, dessen Seiten die Schlussordinate und die Abscissenaxe sind, dass es bei den Kubaturen auf das Verhältniss der Umdrehungskörper der beiden erstgenannten ebenen Figuren ankommt. Endlich ist die Methode so weit übereinstimmend, dass die Summe gewisser Potenzen aller einzelnen Ordinaten einestheils, die der Schlussordinate anderntheils zur Herstellung jenes Verhältnisses ihre Hilfe bieten müssen. Hiermit und mit dem bei Cavalieri und bei Wallis übereinstimmend richtigen Endergebnisse mancher Untersuchungen ist aber die Aehnlichkeit abgeschlossen. Die grosse Verschiedenheit liegt darin, dass, während Cavalieri bemüht war, seine Ableitungen so geometrisch als irgend möglich zu

[1]) Johannis Wallis, *Opera mathematica* I, 355—478. Auszüge bei Montucla II, 348—353. — Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 149—165. — Ball, *History of the study of mathematics at Cambridge* pag. 41—44. — Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 6—13.

gestalten, Wallis mit vollem Bewusstsein rechnerisch verfuhr und schon durch den gewählten Titel *Arithmetica Infinitorum* auf dieses Bestreben hinwies. Wir würden sagen: Wallis knüpfte an eine Integrationsmethode Kepler's an (S. 830), wenn wir nicht bezweifelten, dass er dieselbe kannte.

Soll z. B. gezeigt werden[1]), dass die Summe 3. Potenzen aller Ordinaten sich zu der gleicher Potenzen der Schlussordinate im Dreiecke wie 1 : 4 verhalten, was Cavalieri ausgesprochen hatte, so führt Wallis den Beweis dadurch, dass er mehr und mehr 3. Potenzen ganzer Zahlen von der 0 anfangend bildet und nun das gesuchte Verhältniss bei wachsender Anzahl der gewählten Glieder darauf prüft, ob wirklich 1 : 4 herauskommt. Er findet aber:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4},\quad \frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\quad \frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12},$$

u. s. w. bis

$$\frac{0+1+8+\cdots+216}{216+216+216+\cdots+216}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

Der Bruch, um welchen $\frac{1}{4}$ übertroffen wird, hat zum Nenner offenbar, *ut patet*, stets um 4 zunehmende Zahlen und wird stetig kleiner, so dass er endlich kleiner als jeder beliebige angebbare Werth wird, und wenn man bis ins Unendliche die Versuche ausdehnt, geradezu verschwindet[2]). Aehnlicherweise werde man, fährt Wallis in den nachfolgenden Lehrsätzen fort, die Verhältnisszahl bei der Summe 4., 5., 6. Potenzen finden; sie sei 1 : 5, 1 : 6, 1 : 7 u. s. f. Denn, sagt er, der Versuch zeigt, dass die durch Induction gefundenen Verhältnisszahlen diesen stetig näher kommen, so dass der Unterschied kleiner als jeder angebbare wird, und bei Fortsetzung des Verfahrens ins Unendliche verschwindet[3]).

Man wird nicht verkennen, dass ein Stehenbleiben bei blosser Induction ohne Ableitung einer allgemeinen Formel, welche derselben als Stütze dient, dass ein kühl ausgesprochenes *patet*, es ist offenbar, nicht mit den heutigen Anforderungen mathematischer Strenge in Einklang zu bringen sind. Man wird ebensowenig verkennen, dass Wallis zur Anstellung seiner Versuche überhaupt erst überging, nach-

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 382 Prop. XXXIX Lemma und Prop. XL. [2]) *Cum autem crescente numero terminorum excessus ille super rationem subquadruplam ita continue minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat (ut patet) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est.* [3]) Ebenda I, 383 Prop. XLIII Lemma: *Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continue propius accedere ita ut differentia tandem evadat quavis assignabili minor; adeoque in infinitum continuata evanescet.*

dem, man darf sogar getrost sagen, weil er die zu erwartenden Ergebnisse voraussah. Cavalieri, Fermat, Roberval, Torricelli hatten mehr oder weniger unabhängig von einander gezeigt, dass, sofern m nur eine ganze positive Zahl war, das Verhältniss der Summe der m^{ten} Potenzen der in arithmetischer Reihe wachsenden Zahlen zu der ebenso oft, als Glieder vorhanden waren, genommenen m^{ten} Potenz der grössten Zahl sich als $1:(m+1)$ erweise, und nun machte Wallis, der allerdings seiner bestimmten Aussage[1]) nach Cavalieri's Schrift nicht gelesen hat, aber deren Inhalt aus dem von Torricelli gegebenen Berichte kannte, nachträglich die hierdurch herausgeforderten Versuche!

Aber man wird ebensowenig Wallis das Verdienst absprechen, die heute noch übliche Form des Grenzüberganges erfunden zu haben. Das Wort, der Unterschied werde kleiner als jeder nur angebbare, *quavis assignabili minor*, hat erst das Verständniss einer Grenze als eines Werdenden zu erzeugen vermocht, und es würde hochbedeutsam hervortreten, wäre selbst Wallis im Uebrigen bei den schon bekannten Ergebnissen stehen geblieben.

Nun machte er aber über seine Vorgänger hinaus einen gewaltigen Schritt, indem er eine Kühnheit der Induction an den Tag legte, welche, an und für sich nicht gerechtfertigt, durch die ihr entnommenen Ergebnisse die Entschuldigung des Erfolges gewinnt. Wenn bei der m^{ten} Potenz der Bruch $\frac{1}{m+1}$, bei der $m+2n^{\text{ten}}$ Potenz der Bruch $\frac{1}{m+2n+1}$, bei der $m+n^{\text{ten}}$ Potenz der Bruch $\frac{1}{m+n+1}$ auftritt, so ist $m+n$ das arithmetische Mittel zwischen m und $m+2n$ und gleichzeitig der Nenner $m+n+1$ das arithmetische Mittel zwischen den Nennern $m+1$ und $m+2n+1$. Das arithmetische Mittel zwischen $m+1$ und $m+n+1$ ist nun $m+\frac{n}{2}+1$, folglich wird $\frac{1}{m+\frac{n}{2}+1}$ der Bruch sein, welcher bei Untersuchung der $m+\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Potenz (als Mittel zwischen m und $m+n$) entsteht, auch wenn n keine gerade Zahl ist, d. h. auch wenn es um Quadratwurzeln sich handelt, und ganz allgemein ist die Geltung der Verhältnisszahl $1:(m+1)$ davon unabhängig gemacht, ob m ganzzahlig oder nicht. Bei $m=\frac{1}{2}$ entsteht das Verhältniss $2:3$; bei $m=\frac{1}{3}$ entsteht $3:4$; bei $m=\frac{1}{10}$ entsteht $10:11$ und so fort[2]), *et sic deinceps*. Sogar den

[1]) Wallis *Opera* I, 357. [2]) Ebenda I, 390 Prop. LIV.

Fall, dass m irrational wird, schliesst der kühne Neuerer mit ein: *Sin Index supponatur irrationalis, puta* $\sqrt{3}$, *erit ratio ut* 1 *ad* $1+\sqrt{3}$ *etc.*, d. h. auch bei $m=\sqrt{3}$ ist die Proportion

$$\sum_{h=0}^{h=n} h^m : n^{m+1} = 1 : (m+1)$$

noch immer wahr!

Wie wird nun die Sache, wenn n aus den positiven Zahlen ausscheidet? Wallis[1]) sagt nicht geradezu, es sei $a^{-1}=\frac{1}{a}$, d. h. er benutzt noch nicht negative Exponenten, so wenig er ausdrücklich $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ schreibt, aber in seinen Schlüssen hat er dieses Bewusstsein, welches, wie die Leser dieses Bandes wissen, durch Jahrhunderte vorbereitet war, klar an den Tag gelegt. Wird $m=-1$, so geht $\frac{1}{m+1}$ in $\frac{1}{0}$ oder ∞ über. *Cum enim primus terminus in serie Primanorum*, d. h. der ersten Potenzen der auf einanderfolgenden Zahlen, *sit* 0, *primus terminus in serie reciproca*, d. h. in der Reihe der reciproken Zahlen, *erit* ∞ *vel infinitus: sicut in divisione, si divisor sit* 0, *quotiens erit infinitus*[2]). Wir machen auf das hier, wie in der Abhandlung über die Kegelschnitte (S. 820) auftretende Unendlichkeitszeichen aufmerksam, auf die nebenbei auftretende Bemerkung, der Divisor 0 bringe den Quotienten ∞ hervor, ohne dass von der Grösse des Dividenden dabei die Rede wäre, auf die Wortverbindung der reciproken Reihe, *series reciproca*. Wallis spricht auch von reciproken Potenzgrössen[3]). Wie die Indices der directen Reihe aufsteigend 1, 2, 3 ... sind, so haben die ihnen reciproken Grössen die entgegengesetzten negativen Indices, *indices contrarios negativos*, $-1, -2, -3\ldots$

Wallis gelangt dabei zu dem von ihm allerdings nicht verstandenen Satze des Ueberganges vom Positiven zum Negativen durch das Unendlichgrosse hindurch[4]). Sein Missverständniss besteht darin, dass er meint, $\frac{1}{a}$ wachse fortwährend, wenn a um je eine Einheit abnehme, und dieses Wachsen habe keinen Abschluss bei $a=0$. Wallis meint also, es sei

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}<\frac{1}{0}<\frac{1}{-1}$$

u. s. w., es seien die negativen Zahlen mehr als unendlich.

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 395 Prop. LXIV. [2]) Ebenda I, 405 Prop. XCI. [3]) Ebenda I, 407 Prop. CI, Scholium. [4]) Ebenda I, 409 Prop. CIV.

Wir haben auf einige formelle Neuerungen hingewiesen, mit welchen Wallis vorging. Ihm gehört auch das Wort Interpolation an: zwei Reihen können leicht interpolirt werden, *interpolari possunt*[1]), indem man beliebig viele Stellen einschiebt. Ferner ist bei Wallis der Name der hypergeometrischen Reihe anzutreffen[2]); er versteht darunter die Reihe, deren Glieder

$$1,\quad 1\cdot\frac{3}{2},\quad 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4},\quad 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6},\cdots$$

heissen, deren allgemeines Glied also $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$.

Mit ähnlich gebauten Ausdrücken hat Wallis zu thun, wo er an die Aufgabe herantritt, die Quadratur des Kreises zu ermitteln und dabei die berühmte, seinen Namen führende Factorenfolge (S. 766) auffindet[3]). Ersetzt man die Bezeichnung von Wallis durch die der heutigen Mathematik, ohne von seinem Gedankengange abzuweichen, so ist die Fläche $\frac{\pi}{4}$ des Kreisquadranten vom Halbmesser 1 durch das Integral $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ dargestellt, das Quadrat des Halbmessers durch 1. Das Verhältniss dieses Quadrates zu jener Fläche ist also

$$4:\pi = 1:\int\limits_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Jenes Integral ist aber enthalten in der allgemeineren Form

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,dx$$

und nicht minder in der allgemeineren Form

$$\int\limits_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Aus der ersteren entsteht es durch $\lambda = 1$, aus der zweiten durch $\mu = 1$, aus der noch zusammengesetzteren Form

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 443 Prop. CLXX. In Prop. CXC (I, 463) kommt statt *interpolatio* das Wort *intercalatio* vor, dessen man sich sonst vorzugsweise in der Chronologie (Schaltmonat, Schalttag) bediente. [2]) Ebenda I, 466 im 4. Alinea. [3]) Cayley, *The investigation by Wallis of his expression for π* in dem *Quarterly Journal of Mathematics* XXIII, 165 sqq. zeichnet sich keineswegs durch Klarheit aus. Vorzuziehen sind die Darstellungen hei Marie und bei Reiff a. a. O.

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

durch gleichzeitige Annahme von $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Geradzahlige Werthe von λ gestatten die Potenzirung unter dem Integralzeichen auszuführen, wodurch zwar mehrgliedrige Ausdrücke auftreten, deren einzelne Monome aber nach den Regeln, über die wir berichtet haben, und die als

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$$

sich zusammenfassen lassen, integrirt werden können. Da ferner für Wallis bereits der Satz vorhanden war, den wir heute dahin aussprechen, das Integral einer Summe sei gleichbedeutend mit der Summe der Integrale, so findet er eine ganze Anzahl von Werthen der Function

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$$

bei $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ und $\mu = -1, 0, 1, 2, \ldots 8$, von welchen die bei $\mu = -1$ erscheinenden allerdings falsch sind. Ist gleichzeitig λ und μ grad, so haben die Integrale eine sehr symmetrische Gestalt, und Wallis nimmt nach derselben Induction, von welcher er fortwährend Gebrauch macht, an, diese Symmetrie müsse erhalten bleiben, auch wenn λ ungrad gewählt wird. Kurzum Wallis beabsichtigt eine Interpolation, welche den doppelten Zweck erfülle, einen Mittelwerth zwischen zwei Ausdrücken zu finden, der als Werth zwischen beiden enthalten in der Form mit der Bauart beider übereinstimme. Diesem Doppelzweck rückt er allmählig dadurch näher, dass ein Factor, der als Quadratwurzel geschrieben die Symmetrie stört, allmählig beseitigt wird, und dieses geschieht, indem der Radicand der Einheit näher gebracht wird, während andere Factoren daneben erscheinen, die in das allgemeine Gesetz passen. Schliesslich erscheint

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \,.\, 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \,.\, 6 \cdot 8 \cdots}$$

mit im Zähler und im Nenner ins Unendliche fortgesetzten Factorenfolgen[1]).

Wenige Jahre nach der Arithmetica Infinitorum gab Wallis 1659 eine Schrift heraus[2]), welche den umfangreichen Titel führt: *Tractatus duo. Prior de Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior epistolaris, in qua agitur de Cissoide et corporibus inde genitis et de cur-*

[1]) Wallis, *Opera* I, 469 Prop. CXCI. [2]) Ebenda I, 489—569.

varum tum linearum Εὐθύνσει, tum superficierum Πλατυσμῷ. Auf die Veranlassung zu dieser Schrift[1]), welche, bevor sie gedruckt erschien, schriftlich und zwar vermuthlich in wenigstens theilweise anderem Wortlaute Verbreitung gefunden hatte, kommen wir sogleich zurück. Was den Inhalt betrifft, so setzt er sich zunächst aus den wichtigsten Sätzen über die Cycloide und über deren je nach Wahl der Umdrehungsaxe verschiedenartige Umdrehungskörper zusammen. Als Anhang folgen sodann[2]) die in Freundeskreisen seit Juli 1658 bekannt gegebenen Untersuchungen von Christoph Wren, über die Tangente der Cycloide und namentlich über deren Rectification, welche von allen Seiten ihm als Erfindung zugestanden worden ist (S. 873). Die Rectification vollzog Wren ganz anders als Fermat und auch ein holländischer Mathematiker Van Heuraet es thaten. Diese führten jedenfalls ohne von Torricelli's früheren Arbeiten (S. 891) Kenntniss zu haben die für sie neue, vielfach in ihrer Ausführbarkeit angezweifelte Aufgabe der Rectification auf die schon lange bekannte und für mannigfache Curven erfolgreich durchgeführte Quadratur zurück. Wren dagegen schloss die Curve in zwei sägeförmige Linienzüge, *polygona serrata,* ein, von welchen der innere kleiner, der äussere grösser als ein Gegebenes bleiben musste, während der Unterschied beider verschwindend klein wurde. Noch vor Wren's Arbeiten soll William Neil (1637—1670) bereits 1657 die Rectification der cubischen Parabel vollzogen haben. So behauptete[3]) wenigstens Wallis 1659, so wiederholte er in einem 1673 in den sogenannten Philosophical Transactions, den Mittheilungen der Londoner königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, zum Abdrucke gebrachten Briefe. Auch Neil's Rectification besteht in der Zurückführung auf eine Quadratur. Eine Möglichkeit der Rectification hatte übrigens auch Wallis selbst bereits in der Arithmetica Infinitorum behauptet, und auf diese Stelle machte ein weiterer Anhang der Schrift von 1659 aufmerksam.

Diesen Anhang bildet ein Brief an Huygens. Zuerst besprach Wallis in demselben die Anfeindungen Torricelli's, welche er ebenso verurtheilte, wie es später 1663 Carlo Dati that (S. 887). Torricelli sei gewiss kein litterarischer Dieb an Roberval's geistigem Eigenthum gewesen, und wenn Roberval's Landsleute fortwährend auf Briefe pochten, in welchen Torricelli Roberval's Erstlingsrechte anerkenne, so beweise diese Anerkennung nur die Unbefangenheit des edeldenkenden Mannes. Auf ein Geständniss aber, dass Torricelli

---

[1]) Montucla II, 68—70. [2]) Wallis, *Opera* I, 533—541 [3]) Ebenda I, 551—553.

von jenen Untersuchungen gewusst habe, lasse sich die Sache nicht zuspitzen. Dann wendet sich Wallis zu dem von Huygens entdeckten Satze, dass der von der Cissoide und ihrer Asymptote eingeschlossene Flächenraum das Dreifache des erzeugenden Kreises sei[1]), und liefert dessen Beweis durch die Arithmetica Infinitorum, d. h. einen Beweis durch Interpolation von Zahlenreihen. Diese Auseinandersetzung führt weiter zu Rectificationsversuchen. Hier gedenkt er[2]), bevor er Neil's Verdienste hervorhebt, dessen, was er seiner Zeit im XXXVIII. Satze der Arithmetica Infinitorum[3]) angedeutet habe. Die Sehnen einer Curve, heisst es dort ungefähr, sind stets Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, deren Katheten Stücke von Abscissen und Ordinaten der Curve sind. Vermöge der Gleichung der Curve kann daher jene Sehne als von dem Abscissenstücke abhängig oder zu ihm in einem gewissen Verhältnisse stehend betrachtet werden, und da die Summe der Sehnen um so genauer mit der Curve zusammenfällt, je kleiner die einzelne Sehne ist, so kommt auch die Rectification auf die Gedankenfolge der Arithmetica Infinitorum zurück. Wir würden heute die letzte Behauptung in die Worte kleiden, es komme auf die Integration der Gleichung

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

an. Es ist wirklich auffallend, dass Wallis dieser die Aufgabe unmittelbar ins Auge fassenden Methode, von welcher die von Wren benutzte nach unseren darüber gegebenen Andeutungen nur so unwesentlich abweicht, dass eine Abhängigkeit Wren's von der betreffenden Stelle der Arithmetica Infinitorum gar nicht ausgeschlossen ist, selbst wieder den Rücken kehrt, wo er in der Fortsetzung des Briefes an Huygens die Ausstreckung, *εὐθύνσις*, der Curven, die Ausbreitung, *πλατυσμός*, der Oberflächen, worunter aber nur Quadraturen ebener Figuren zu verstehen sind, sich zur Aufgabe stellt. Da ist es immer wieder eine Zurückführung von Rectificationen auf Quadraturen, genauer gesagt die Führung des Nachweises, dass eine Curvenlänge zu einer Strecke sich ebenso verhalte, wie eine Curvenfläche zu einem Rechtecke, welche angestrebt wird. Wir können nicht umhin, auch auf Fermat's Rectification (S. 872) nochmals hinzuweisen. Fermat wusste in derselben von Wren's Rectification der Cycloide. Wenn er diese Kenntniss, wie sich zeigen wird, auch aus einem Briefe Wren's an Pascal schöpfte, so hat er doch muthmasslich Wallis' Schrift von 1659 gelesen. Sein erster Nachweis von der Möglichkeit einer Rectification ist im Charakter Wren's, seine Aus-

---

[1]) Wallis, *Opera* I, 545. [2]) Ebenda I, 550. [3]) Ebenda I, 380—381.

führung der Rectification verlässt die eingeschlagene Bahn wieder mit der gleichen Folgewidrigkeit, wie Wallis sie übte.

Wir haben zugesagt, auf die Veranlassung zur Veröffentlichung der Schrift *De Cycloide* zurückzukommen. Auch die Erfüllung dieser Zusage führt uns zurück nach Frankreich und zu einem Schriftsteller aus dem engsten Roberval'schen Kreise, zu Blaise Pascal. Seine Erfindung einer Rechenmaschine, seine Arbeiten über die Kegelschnitte, über das arithmetische Dreieck mit den verschiedenen Anwendungen desselben auf Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf Zahlentheorie u. s. w. fallen sämmtlich vor Ende August 1654. Es folgte eine in mathematischer Beziehung unfruchtbare Unterbrechung. Im September 1654 wandte Pascal in Folge von Ereignissen, welche vollständig zu ermitteln noch nicht gelungen ist, von der Mathematik sich ab. Ganz andere Gedanken waren es, welche ihn ausschliesslich beschäftigten, welche ihn mit Männern gleicher Richtung in enge Verbindung brachten, und welche ihren schriftstellerischen Ausfluss in den vom Januar 1656 bis Juni 1657 erschienenen, gegen den Jesuitenorden gerichteten Provinzialbriefen hatten. Von da an etwa mögen die alten mathematischen Neigungen Pascal's wieder hervorgetreten sein, und in schlaflosen Nächten zu Anfang des Jahres 1658 erfolgreiche Untersuchungen über die Cycloide hervorgebracht haben. Im Juni 1658 traten dieselben in Gestalt eines namenlos veröffentlichten Preisausschreibens[1]) in die Oeffentlichkeit. Galilei und Torricelli, hiess es dort (S. 885), hätten mit der Cycloide sich beschäftigt. Gewisse Fragen seien aber noch immer unerledigt, und deren Beantwortung werde nun zur Wettbewerbung ausgeschrieben. Sei (Figur 183)

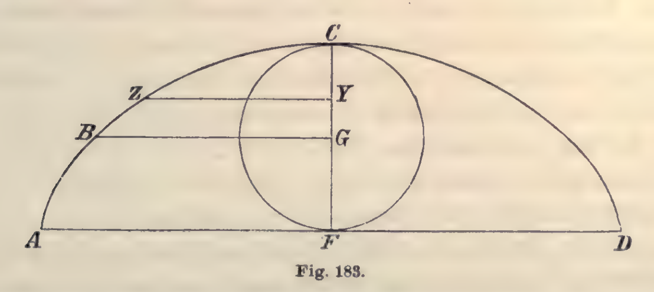


Fig. 183.

Z ein beliebiger Punkt der Cycloide und von ihm aus parallel zur Grundlinie AD eine Gerade ZY bis zum Durchschnitte mit der Axe CF gezogen. Man verlangt nun zu wissen: die Fläche CZY und deren Schwerpunkt; Rauminhalt und Schwerpunkt der Umdrehungskörper von CZY sowohl um ZY als um CY; endlich die Schwer-

[1]) Pascal III, 322 sqq.

punkte der vier Körperstücke, welche entstehen, wenn man die beiden genannten Umdrehungskörper je durch eine durch die jedesmalige Drehungsaxe hindurchgehende Ebene schneidet. Die Sonderfälle sollten dabei hervorgehoben werden, dass Z mit A und B zusammenfalle, Y also mit F und mit G (dem Mittelpunkte der Axe CF). Man verlange nur, dass die Methode der Ermittelung richtig und deutlich nachgewiesen werde, ob dabei etwa Rechenfehler unterlaufen, komme nicht in Betracht. Fernere Bedingung sei, dass die Lösung vor dem 1. October 1658 erfolge. Als Preis wurden 60 spanische Dublonen ausgesetzt, welche bei Herrn von Carcavy niedergelegt seien und von welchen dem ersten Einsender 40, dem zweiten 20 ausbezahlt werden sollten. Sollte überhaupt keine preiswürdige Lösung am 1. October vorhanden sein, so werde der Preisausschreiber seine eigenen Auflösungen veröffentlichen, deren dann Jeder als Ausgangspunkt zu weiteren Untersuchungen sich bedienen könne. Am 7. October 1658 folgte eine Erklärung[1]), der Zeitpunkt der Einsendung sei nun vorüber, und nur die zeitweilige Abwesenheit des Herrn von Carcavy verhindere, dass mit der Prüfung der eingegangenen Bewerbungsschriften begonnen werde. Darauf aber, was einige auswärtige Gelehrte beansprucht hätten, dass man die Ankunft ihrer Arbeiten abwarte, sofern sie nur den Nachweis einer vor dem 1. October erfolgten Absendung beibrächten, weil sonst die Pariser Gelehrten zu sehr bevorzugt seien, könne man sich nicht einlassen. Die Bedingungen des Preisausschreibens seien nun einmal so, wie sie seien, und müssten eingehalten werden. Auch wegen der gestatteten Rechenfehler wurden neue Einschränkungen gemacht. Darunter seien nur nebensächliche Irrthümer zu verstehen, nicht aber solche, welche einen wesentlichen Einfluss ausüben. Die eigenen Auflösungen des Preisausschreibers seien zur Zeit schon in den Händen der Herren von Carcavy und von Roberval und würden nach Prüfung der Eingänge veröffentlicht werden. Zunächst werde aber in einigen Tagen die *Histoire de la Roulette* erscheinen, welche berichten werde, wie und durch wen die ersten Untersuchungen über die in Frage stehende Curve zu Stande gekommen seien. In der That folgte die angekündigte Schrift[2]) unter dem 10. October. Es war jene Verherrlichung Roberval's und Schmähung Torricelli's, von welcher wir schon früher gehandelt haben. Torricelli soll, wie wir in aller Kürze wiederholen, gar nichts geleistet haben, Roberval soll alles gefunden haben: die Quadratur der Roulette, wie die Curve jetzt fortwährend genannt wird, während der Name der Cycloide verbannt ist, die Tangente, die Kubaturen der

---

[1]) Pascal III, 328—333. [2]) Ebenda III, 337—343.

beiden Umdrehungskörper, erst dessen um die Grundlinie, dann dessen um die Axe. Ausserdem habe Roberval auch die verlängerte und verkürzte Roulette in Untersuchung genommen. So weit sei die Forschung etwa 1644 gewesen und habe dann 14 Jahre geruht. In diesem Zeitpunkte sei der Preisausschreiber, der von geometrischen Dingen sich seit lange abgewandt hatte, durch einen Zufall ihnen wieder näher getreten, und er habe sich Methoden zur Auffindung von Quadraturen, Kubaturen, Rectificationen, sowie von Schwerpunkten von Körpern, ebenen und gekrümmten Flächen und Curven gebildet, welchen wenig Dinge entschlüpfen möchten. Diese Methoden habe er an den Rouletten geprüft und bewährt gefunden, worauf er sein Preisausschreiben in alle Weltgegenden schickte. Die eingegangenen Lösungsversuche würden dermalen geprüft, aber es seien auch Sendungen eingetroffen, welche, wenn auch nicht die Beantwortung der gestellten Fragen, doch Interessantes enthielten. Darunter wird die gedruckte Abhandlung Lalouvère's und ein Brief Wren's besonders hervorgehoben. Erstere enthalte nichts als die Entdeckungen Roberval's, nur anders dargestellt, was aber keine Schwierigkeit bereite, denn es sei immer leicht, einen schon bekannten Satz anders zu beweisen. Die Rectification der Roulette durch Wren dagegen sei neu und sehr schön. Einen Beweis habe allerdings Wren nicht mitgeschickt. Fermat habe einen solchen sofort gefunden. Roberval habe das Gleiche geleistet, und zwar sobald man ihm von der Sache sprach, die ihm nicht neu gewesen sei, denn er besitze eine sehr schöne Rectificationsmethode, die er nur noch nicht habe der Oeffentlichkeit übergeben wollen.

Unter dem 25. November 1658 erschien das Urtheil des Preisgerichtes[1]). Es hatte sich nur mit zwei Arbeiten zu beschäftigen. Die Verfasser, welche zunächst noch nicht genannt wurden, waren Lalouvère und Wallis. Beiden Verfassern könne ein Preis nicht zuerkannt werden. Lalouvère hatte nur ohne Begründung der angewandten Methode eine Rechnung eines der aufgegebenen Fälle eingereicht, er hatte dann in wiederholten Briefen vom September, October, November die Mangelhaftigkeit seiner Rechnung zugestanden, ohne sie zu berichtigen, und damit habe er selbst sein Urtheil gesprochen. Wallis hatte seiner Bewerbungsschrift, das Manuscript der 1659 gedruckten Abhandlung *De Cycloide* (S. 907), gleichfalls berichtigende Briefe nachfolgen lassen, hatte am 30. September noch gefragt, ob man nicht auch eine solche Lösung als befriedigend betrachten würde, welche der richtigen nahe käme, und dadurch den

[1]) Pascal III, 349—352.

Beweis eigenen Misstrauens gegen seine Ergebnisse geliefert. In der That seien dieselben mit Irrthümern behaftet, welche nicht als blosse Rechenfehler, sondern als Denkfehler, als Fehler des Verfahrens sich kennzeichneten. Er berücksichtige z. B. nicht, ob die Entfernung der unendlich vielen Oberflächen, welche er zu Hilfe ziehe, unter einander die gleiche sei oder nicht u. s. w. Da man der gedruckten Abhandlung von Wallis diesen Vorwurf nicht machen kann, so stammt daher die oben ausgesprochene Vermuthung, er habe bei der Veröffentlichung mehr als nur Nebensächliches abgeändert. Eine letzte Streitschrift, denn dazu waren Pascal's fortwährend ohne Unterschrift veröffentlichten Aeusserungen nachgerade geworden, bildet die Fortsetzung der Geschichte der Roulette[1]) vom 12. December. Sie ist gegen Lalouvère gerichtet und wirklich vernichtend für ihn, da sie an der Hand von Vorschlägen, welche man demselben gemacht hatte, und auf welche er nie einging, den Nachweis führt, dass seine Ansprüche auf Erhaltung des Preises so unbegründet als möglich seien, dass er sich nicht im Stande gefühlt habe, Richtiges zu liefern. Nicht gesagt ist aber, dass Pascal selbst über die Cycloidenangelegenheit Briefe mit Lalouvère gewechselt hatte, in welchen ein ganz anderer durchaus anerkennender Ton herrschte[2]), nicht gesagt, dass am 8. December eine kurze aber scharfe Gegenerklärung von Lalouvère erschienen war, welche den anonymen Verfasser der Geschichte der Roulette einen Verleumder nannte[3]). Dadurch sind Pascal's Zornesergüsse ziemlich erklärt, wenn auch nicht genügend gerechtfertigt. Auszüge aus den erwähnten Briefen Pascal's an Lalouvère hat dieser in seiner Geometria promota von 1660 (S. 897) der Oeffentlichkeit übergeben.

Endlich kamen nun im Januar 1659 Pascal's Abhandlungen, aber sie kamen nicht unter dessen eigenem Namen, wenn die gewählte Maske ihn auch nicht lange verbarg. Die Provinzialbriefe hatte Pascal mit Louis de Montalte unterzeichnet, und uns ist kein Zweifel, dass dieser Name gewählt worden war, um an den auf hohem Berge, auf dem Puy-du-Dôme, angestellten Barometerversuch zu erinnern, über welchen Pascal seinen ersten Streit mit Mitgliedern des Jesuitenordens geführt hatte. Aus Louis de Montalte wurde jetzt durch blosse Buchstabenversetzung Amos Dettonville, und unter diesem Namen sind die Schriften verfasst, deren Vorgeschichte wir ausführlich zu schildern genöthigt waren, und auf die wir jetzt selbst einzugehen haben.

---

[1]) Pascal III, 352—357. [2]) Tannery, *Pascal et Lalouvère* in den *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* T. V (3. Série) pag. 11—15 des Sonderabzuges. [3]) Ebenda pag. 20 des Sonderabzuges.

Wir müssen zurückgreifen auf das Jahr 1654. Damals schickte Pascal (S. 753) seine Abhandlungen über das arithmetische Dreieck und dessen Anwendungen an Fermat und erhielt zur Antwort, auch Fermat habe Aehnliches gefunden. Zu jenen Anwendungen zählten wir, als wir von diesem Austausche von Mittheilungen sprachen, auch die Auffindung der Summen von Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen. Bei Fermat bildete sie die Grundlage seiner Quadraturen von Parabeln jeder Ordnung, bei Pascal verknüpfte sie sich gleichfalls mit infinitesimalen Betrachtungen. In dem Aufsatze *Potestatum numericarum summa*[1]) erklärt Pascal, der Zusammenhang der Potenzsummen mit der Ausmessung von krummlinig begrenzten Flächenstücken, *spatiorum curvilineorum dimensiones,* sei Jedem ersichtlich, der einigermassen mit der Lehre von den Indivisibilien vertraut sei, und kurz darauf spricht er den Satz aus: *in continua quantitate, quotlibet quantitates cuius vis generis quantitati superioris generis additas nihil ei superaddere.* Dass man ihn recht verstehe, erklärt er dann diesen Ausspruch dahin, dass Punkte zu Strecken, Linien zu Flächen, Flächen zu Körpern hinzugefügt werden können, ohne sie zu verändern, dass auch bei Zahlen niedrigere Potenzen höheren gegenüber vernachlässigt werden können. Hatte Pascal also auch wirklich für einige Jahre mit der Mathematik gebrochen, so brauchte er den Faden nur an jener Stelle wieder anzuknüpfen, bis zu welcher er 1654 vorgedrungen war, um sofort in den brennenden Tagesfragen auf dem Laufenden sich zu befinden. In der That ist die Lehre vom Gleichgewichte am zweiarmigen Hebel, mit welcher der Brief von Dettonville an Carcavy[2]) beginnt, eine unmittelbare Anwendung einer Art von arithmetischem Dreieck (Figur 184). Sind von A nach B und C die Entfernungen 3 und 2, und hängen an allen Punkten ganzzahliger Entfernungen Gewichte in der Grösse der auf der Figur beigeschriebenen Zahlen, so findet bei Unterstützung des Punktes A Gleichgewicht statt, weil $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4 = 1\cdot 9 + 2\cdot 8$ und die Wirkung des Gewichtes p in der Entfernung l durch lp gemessen wird. Die Summe $1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4$ kann man aber auch schreiben

Fig. 184.

$$\begin{array}{r} 3+5+4 \\ +5+4 \\ +4 \end{array}$$

[1]) Pascal III, 303—311. Die im Texte angeführten Stellen gehören S. 310 und 311 an. [2]) Ebenda III, 364—385. Ein guter Auszug aller Infinitesimaluntersuchungen Pascal's bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* IV, 189—229.

und diese Summe soll die bei 3 anfangende Triangularsumme von 3, 5, 4 heissen. Gleichgewicht findet also statt, wenn die Triangularsumme der von dem Unterstützungspunkte nach beiden Seiten vorhandenen Gewichte dem Unterstützungspunkte zunächst anfangend eine und dieselbe ist. Im Unterstützungspunkte selbst darf natürlich auch noch ein Gewicht von beliebiger Grösse vorhanden sein. So findet also auch wieder (Figur 185) bei Unterstützung von A Gleichgewicht statt, wenn abermals die beigeschriebenen Zahlen den Grössen der in den einzelnen Punkten aufgehängten Gewichte entsprechen. Nun bilde man etwa von C anfangend die Triangularsumme aller Gewichte $1 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 7 = 99$ und die einfache Summe aller Gewichte $8 + 9 + 5 + 4 + 0 + 7 = 33$, so ist die erstere Summe das Sovielfache der zweiten, als es wieder von C anfangend bis nach A, dieses selbst mitgezählt, Punkte giebt.

B F E A D C
7 0 4 5 9 8

Fig. 185.

Es ist natürlich, dass der Satz auch richtig bleiben muss, wenn man beide Summen von B aus bildet. Pascal giebt einen Beweis, dessen eigenthümliche Form verständlicher werden dürfte, wenn wir ihn vorher in allgemeine Buchstaben übersetzen. Die Gewichte mögen vom gewählten Anfangspunkte an gerechnet $p_1, p_2, \ldots p_{\mu+\nu-1}$ heissen, und p_μ hänge am Unterstützungspunkte. Die Triangularsumme jener Gewichte ist

$$1 \cdot p_1 + 2p_2 + \cdots + \mu p_\mu + (\mu + 1)\, p_{\mu+1} + \cdots + (\mu + \nu - 1)\, p_{\mu+\nu-1}.$$

Wegen des vorhandenen Gleichgewichtes ist

$$1 \cdot p_{\mu+1} + 2p_{\mu+2} + \cdots + (\nu - 1) p_{\mu+\nu-1} = 1 \cdot p_{\mu-1} + 2p_{\mu-2} + \cdots + (\mu - 1) p_1$$

oder

$$0 = (\mu - 1) p_1 + (\mu - 2) p_2 + \cdots + 1 \cdot p_{\mu-1} + 0 p_\mu - 1 p_{\mu+1} - \cdots - (\nu - 1) p_{\mu+\nu-1}.$$

Wird dieser den Werth nicht verändernde Ausdruck zur obigen Triangularsumme addirt, so geht dieselbe in

$$\mu\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu+\nu-1})$$

über, womit der Satz bewiesen ist. Pascal schreibt nun in dem gegebenen Zahlenbeispiele

7 0 4 5 9 8
7 0 4 5 9
7 0 4 5
7 0 4
7 0
7

Aber das durch den Horizontalstrich abgetrennte kleine Dreieck

7 0 4
7 0
7

beträgt wegen des vorhandenen Gleichgewichtes so viel wie

$\begin{matrix} 8 & 9 \\ 8 & \end{matrix}$ oder wie $\begin{matrix} & 8 \\ 9 & 8 \end{matrix}$.

Setzt man dieses Dreieckchen rechts von dem Diagonalstrich, so entsteht ein Rechteck

7 0 4 5 9 8
7 0 4 5 9 8
7 0 4 5 9 8

aus drei gleichen Zeilen, und, sagt Pascal[1]), wenn diese Beweisform auch ungewöhnlich ist, so ist sie kurz, klar und hinreichend für Solche, welche in der Kunst des Beweises bewandert sind. Bildet man in den allgemeinen von uns benutzten Buchstaben die bei $p_{\mu+\nu-1}$ anfangende Triangularsumme der Gewichte, so muss sie

$$\nu\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_{\mu+\nu-1})$$

liefern. Die beiden von rechts und links anfangenden Triangularsummen verhalten sich also wie $\mu : \nu$ oder, wenn man die Zahl der Zwischenpunkte so vermehrt, dafs sie stetig aufeinander folgen und μ und ν unendlich gross werden, wie die Entfernungen des Unterstützungspunktes von den beiden Endpunkten der Strecke. Dadurch bestimmt sich aber der Unterstützungspunkt, d. h. der Punkt, bei dessen Unterstützung Gleichgewicht eintritt, oder der Schwerpunkt der mit Gewichten beschwerten Strecke.

Der Satz lässt sich auf höhere Raumgebilde ausdehnen, deren Theilchen man als auf die Punkte einer Geraden wirkend betrachten kann, welche senkrecht zu parallelen, die Oberfläche begrenzenden oder theilenden Ebenen steht. Man erfährt alsdann, in welcher Zwischenebene der Schwerpunkt der Oberfläche liegt. Wenn (Figur 186) die durch T hindurchgehende Ebene den Schwerpunkt der Oberfläche $YCFOZ$ enthält, so verhält sich $TO : TA$ wie die Triangularsummen der Theile der Oberfläche, deren erste bei B, die zweite bei C ihren Anfangspunkt hat. Man kann nämlich die Flächentheile als Gewichte betrachten, welche in den Punkten der Strecke OA wirksam sind. Desshalb brauche man nicht Scheu zu tragen[2]), die Sprache der Indivisibilien zu ge-

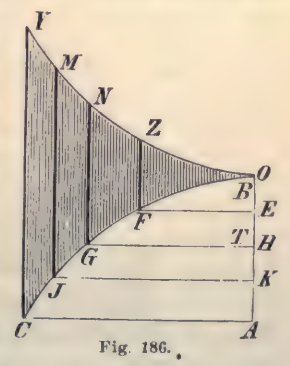


Fig. 186.

[1]) Pascal III, 367 Avertissement. [2]) Ebenda III, 372.

brauchen und von der Summe der Ordinaten u. s. w. zu reden. Man müsse nur den richtigen Gedanken damit verbinden. Wie hier Flächentheilchen als Gewichte auftreten, so sei dort von Linien oder vielmehr kleinen Rechteckchen die Rede deren Grundlinien beliebig kleine Stücke der Axe der Figur sind.

Ausser den Triangularsummen bildete Pascal auch Pyramidalsummen[1]), welche die Summe von je um ein Element abnehmenden Triangularsummen sind. Aus A, B, C entstehen die Triangularsummen

$$1A + 2B + 3C, \quad 1B + 2C, \quad 1C;$$

aus diesen die Pyramidalsumme $1A + 3B + 6C$, wo der Coefficient des n^{ten} Elementes $\frac{n(n+1)}{2}$ ist, wie n dessen Coefficient in der ersten Triangularsumme ist. Zieht man die Triangularsumme beliebig vieler Elemente von ihrer verdoppelten Pyramidalsumme ab, so ist in dieser Differenz das n^{te} Element mit dem Coefficienten $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ behaftet. Eine Triangularsumme verhält sich aber zur Pyramidalsumme wie eine Indivisible, weil sie um einen Grad niedriger ist[2]) und kann vernachlässigt werden. Man erkennt hier das Zurückgreifen auf den Satz der *Potestatum numericarum summa*, wenn Pascal sich auch auf diese frühere Arbeit nicht beruft. Das Ergebniss lautet dahin, dass die doppelte Pyramidalsumme gegebener Elemente als Summe dieser Elemente, jeweil mit dem Quadrate ihrer Ordnungsziffer vervielfacht erscheint.

Die Triangularsumme gegebener Elemente stellt sich dar als ein Körper, welchen Pascal *onglet* nennt[3]), ein Wort, welches verschiedene Bedeutungen in der französischen Sprache hat, z. B. Grabstichel, und an dessen Schneide dachte Pascal muthmasslich (Figur 187). Eine Figur BAC, die aus zwei zu einander senkrechten Geraden und einer Curve besteht, nennt Pascal ein *triligne* in augenscheinlicher Nachahmung des Cavalieri'schen *trilineum* (S. 838). Man bildet nun etwa von AC anfangend die Triangularsumme aller Ordinaten des dreilinigen

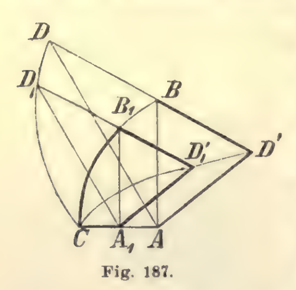


Fig. 187.

Raumes. Die zu summierenden Zeilen stellen sich als Ebenen dar, die in B beginnen und unten durch zu AC parallele, aber B immer näher rückende Gerade abgeschlossen werden. Denkt man diese Ebenen als unendlich dünne prismatische Körperchen aufeinander gelegt, so

---

[1]) Pascal III, 376. [2]) Ebenda III, 377: *La somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales puisqu'il y a une dimension de moins.* [3]) Ebenda III, 379.

entsteht das Onglet $CABD$, begrenzt von drei Ebenen ABC, ABD, ADC und einer cylindrischen Oberfläche BCD. Man kann es auch so entstanden denken, dass über dem Triligne ABC ein gerader Cylinder von der Höhe $BD = BA$ errichtet ist und nun eine Schnittebene durch DAC hindurchgelegt wird, welche mit ABC einen Winkel von 45° bildet. Denkt man sich genau dieselbe Construction auch nach unten, wo ein Onglet $CABD'$ entsteht, so setzen beide sich zum Doppelonglet $DCAD'$ zusammen, und dieses steht zu dem halben Umdrehungskörper von ACD um AC in eigenthümlichen Beziehungen. Eine der Ebene DAD' parallel gelegte, durch einen Punkt A_1 der AC hindurchgehende Ebene schneidet das Doppelonglet in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke $D_1A_1D_1'$, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2}A_1D_1'^2$ ist. Dieselbe Ebene schneidet den erwähnten halben Umdrehungskörper in einem Halbkreise vom Halbmesser A_1B_1, dessen Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}A_1B_1^2 = \frac{\pi}{4}A_1D_1'^2$ ist. Letzterer Schnitt ist also das $\frac{\pi}{2}$fache des ersteren, und da das gleiche Verhältniss bei jedem Parallelschnitte obwaltet, so ist der genannte halbe Umdrehungskörper das $\frac{\pi}{2}$fache des Doppelonglet[1]). Pascal macht überdies noch auf andere Beziehungen beider Körper zu einander aufmerksam und beweist dieselben. Ihre gekrümmten Oberflächen, ihre Schwerpunkte u. s. w. treten dabei in Frage. Die Onglets dreiliniger rechtwinkliger Figuren sind damit in den Vordergrund der Betrachtungen gerückt, und mit ihnen beschäftigt sich eine besondere Abhandlung[2]). Gleich zu Anfang derselben stellt Pascal wieder einen neuen Begriff, den der Adjungirten der dreilinigen Figur, *l'adjointe du triligne*, auf, und dieses dürfte das erste Vorkommen des Wortes adjungiren in der Mathematik sein (Figur 188). Ist eine dreilinige Figur ABC links von einer Geraden AB gelegen und durch diese, durch die zu ihr senkrechte AC und durch die Curve BC begrenzt, und bildet man rechts von AB unter Zuhilfenahme der zu ihr senkrechten BK und irgend einer Curve AK eine zweite dreilinige Figur, so heisst diese der ersteren adjungirt. Wird nun die adjungirte Figur ABK durch Umfalzen in eine solche Lage gebracht, dass ihre Ebene senkrecht zur Ebene der ABC sich befindet, zieht man aus jedem Punkte D der AB senkrecht zu AB die selbst unter rechtem Winkel an einander stossenden DF, DO und vollendet aus

Fig. 188.

---

[1]) Pascal III, 380. [2]) Ebenda III, 385—403.

ihnen ein Rechteck, so entsteht ein Körper, den Pascal als *triligne multiplié par la figure adjointe* bezeichnet, hier sein Studium des Gregorius von St. Vincentius verrathend, nach dessen *ductus plani in planum* der Ausdruck offenbar gebildet ist. Der Rauminhalt dieses Körpers ist aber auch einer zweiten Zerlegung in parallele Schnitte fähig. Wie man die erstgenannten Ebenen parallel zu AC führte, kann man sie auch parallel zu AB führen. Der Körperinhalt verändert sich selbstverständlich nicht, er wird nur in andersartige Elemente zerlegt, ein Verfahren, dessen die spätere Integralrechnung sich mit Vorliebe bedient hat und noch bedient. Man hat desshalb auch die nicht sehr leicht verständliche Sprache Pascal's in die Zeichen der Integralrechnung zu übersetzen versucht[1]) und dadurch nachgewiesen, dass Pascal mit der sogenannten theilweisen oder partiellen Integration,

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,$$

bekannt war, wenn er auch genöthigt war, den gegenwärtig allgemeinen Satz vielleicht in ein Dutzend von besonderen Sätzen zu theilen. Auch die übrigen Abhandlungen Pascal's aus dem Jahre 1659 sind wesentlich von Aufgaben der Integralrechnung erfüllt, bei deren Lösung Pascal immer wieder vermöge des Mangels an einer allgemeinen Bezeichnung schwerfällig von einer Sonderuntersuchung zur anderen fortschreiten musste, innerhalb dieser Einengung aber die Auflösungen wirklich lieferte. Ohne über alle diese Abhandlungen zu berichten, begnügen wir uns, deren Ueberschriften anzugeben[2]): *Propriétés des sommes simples triangulaires et pyramidales. Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle. Petit traité des solides circulaires. Traité général de la roulette. Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes. De l'escalier, des triangles cylindriques et de la spirale autour d'un cône. Égalité des lignes spirale et parabolique.* Von diesen Abhandlungen ist die *Dimension des lignes courbes de toutes les roulettes* mit einer besonderen Widmung an Huygens, die *De l'escalier* u. s. w. mit einer eben solchen an De Sluse versehen. Der *Traité des sinus du quart de cercle*[3]) beginnt mit einem Lemma, welches (Figur 189) die Aehnlichkeit der Dreiecke EKE und AID betont. Diese Figur ist, wie im 98. Kapitel gezeigt werden wird, von folgewichstigster Einwirkung auf Leibniz gewesen.

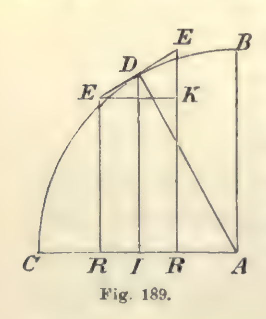


Fig. 189.

[1]) Marie l. c. IV, 202—215. [2]) Pascal III, 403—464. [3]) Ebenda III, 409.

So sehr Huygens selbst es verdient, auch wegen seiner vielfach bahnbrechenden Leistungen in der Curvenlehre, mithin als Mitarbeiter auf dem Gebiete der Infinitesimalbetrachtnngen ausführlich behandelt zu werden, so kann dieses doch nicht innerhalb dieses Bandes geschehen. Sein *Horologium oscillatorium*, in welchem die zahlreichsten und wichtigsten Entdeckungen sich vorfinden, wurde erst 1673 veröffentlicht, fällt also über die Grenze hinaus, welche wir uns gesteckt haben.

Anders verhält es sich mit De Sluse[1]). Seine mathematischen Leistungen der Oeffentlichkeit zu übergeben, zögerte er ungemein, doch ist Manches und keineswegs Unbedeutendes in Briefen niedergelegt. Das Cycloiden-Preisausschreiben, welches ihm durch Carcavy zugeschickt worden war, ohne dass der Name des Preisstellers dabei genannt worden wäre[2]), veranlasste ihn, an Pascal, mit welchem er ohnedies schon einige Briefe gewechselt hatte, darüber zu schreiben. Am 2. August 1658 erweiterte er dabei sehr wesentlich[3]) den Begriff der Cycloide. Dieses Namens bediente De Sluse sich fortwährend und nicht des Wortes Roulette, welches das Preisausschreiben ja auch noch nicht kannte. De Sluse denkt sich eine ganz beliebige Curve, welche längs einer Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgeschoben wird, während ein Punkt gleichfalls mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Curve durchläuft. Der Ort, welchen der genannte Punkt bei seiner doppelten Bewegung auf und mit der Curve beschreibt, heisst ihm Cycloide, in welchem Verhältnisse auch die beiden Geschwindigkeiten zu einander stehen mögen. Von dieser Beschreibungsart ausgehend, gelangt De Sluse zu einander gleichflächigen, gemischtlinigen Dreiecken, welche den Trilignen Pascal's nahe verwandt sind, wie De Sluse selbst in einem Briefe vom 29. April 1659 bemerkt[4]).

Eine Auflösung des Tangentenproblems für algebraische Curven[5]), deren Gleichungspolynom in Gestalt einer rationalen ganzen Function gegeben war, scheint De Sluse seit 1652 besessen zu haben. Sie besteht in Folgendem. Die Gleichung der Curve heisse $f(x,y) = 0$, wo x die Abscisse, y die Ordinate der Curve bedeutet, und a sei die Subtangente. Man schreibt sämmtliche Glieder von $f(x, y)$, in welchen der Buchstabe x vorkommt, links, sämmtliche Glieder, in welchen der Buchstabe y vorkommt, mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts hin. Glieder, welche x und überdies y enthalten, werden auf

---

[1]) *Correspondence de René François de Sluse publiée pour la première fois et précédée d'une introduction par* M. C. Le Paige im *Bulletino Boncompagni* XVII (1884) und C. Le Paige im *Bulletin de l'Institut archéologique Liègeois* XXI, 532—549 (1888). [2]) *Bulletino Boncompagni* XII, 499. [3]) Ebenda XII, 501. [4]) Ebenda XII, 507. [5]) Ebenda XII, 477—478, 605, 607.

beiden Seiten Stellung finden müssen. Die Glieder rechts werden, jedes für sich, mit dem Exponenten der in ihnen vorkommenden Potenz von y vervielfacht. Ebenso verfährt man links mit dem Exponenten der in jedem Gliede verkommenden Potenz von x und ersetzt dabei ein x in jedem Gliede links durch a. Schreibt man nun ein Gleichheitszeichen zwischen beide nach dieser Vorschrift veränderten Gliedergruppen, so hat man eine nach a lineare Gleichung, aus welcher diese Grösse sich ergiebt. Ist z. B.

$$x^{n+1} - cx^n + by^n = 0,$$

so wird zunächst

$$x^{n+1} - cx^n \qquad\qquad - by^n$$

angesetzt und daraus

$$(n+1)\,ax^n - nacx^{n-1} = -nby^n$$

gebildet, nebst

$$a = \frac{nby^n}{ncx^{n-1} - (n+1)\,x^n}.$$

Die Curve

$$py^2 + 2qxy^3 + sx^3 + t = 0$$

dagegen veranlasst den Ansatz

$$2qxy^3 + sx^3 \qquad\qquad - py^2 - 2qxy^3$$

und daraus

$$2qay^3 + 3asx^2 = -2py^2 - 6qxy^3,$$

also

$$a = -\frac{2py^2 + 6qxy^3}{2qy^3 + 3sx^2}.$$

Die erste Curve, welche wir hier als Beispiel gewählt haben, ist eine sogenannte Perle[1]), deren allgemeine Gleichung

$$by^n = (c-x)^p x^m$$

hier für den Sonderfall $p = 1$, $m = n$ in's Auge gefasst wurde. Diese Perlen sind von De Sluse zuerst untersucht worden, der die Quadratur des Kreises mit ihrer Hilfe für möglich hielt, beziehungsweise eine Abhängigkeit der Quadraturen beider Curven von einander behauptete.

Wir haben (S. 808) des Mesolabum von 1659 gedacht, in welchem De Sluse die Aufgabe behandelte, zwischen zwei Grössen zwei geometrische Mittel einzuschalten, und der zweiten Auflage dieses Werkes von 1668, in welcher De Sluse die früher bei Lösung jener besonderen Aufgabe brauchbaren Mittel als zur Behandlung jeder kubischen Gleichung tauglich erkannte. Diese zweite Auflage des Mesolabum besitzt noch einen Anhang mit der Ueberschrift: Verschiedenes, *Miscellanea*[2]).

---

[1]) *Bulletino Boncompagni* XII, 472. [2]) Ebenda XII, 475—476.

Neben anderen nicht uninteressanten Dingen findet man in den Miscellaneen die erste allgemeine Untersuchung von Inflexionspunkten von Curven und von solchen Curven, welche die untersuchten gerade in ihren Inflexionspunkten schneiden. Diese und andere Betrachtungen verschafften dem Werke unter den Zeitgenossen die höchste Anerkennung. Spätere Leistungen von De Sluse sind von geringerem Belang.

Es bleibt uns nur noch übrig, auf die Ausgabe der Descartesschen Geometrie von 1659 zurückzugreifen und die darin zum Abdrucke gebrachten, nicht von Descartes herrührenden, auf die höhere Curvenlehre bezüglichen Abhandlungen zu besprechen. Sie gehören zwei holländischen Mathematikern an: Hudde und Van Heuraet.

Wir haben an die Methode von Johannes Hudde zur Erkennung der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung (S. 802), welche in einem Briefe vom Juli 1657 niedergelegt ist, nur zu erinnern. Im Januar des folgenden Jahres 1658 entstand ein zweiter Brief Hudde's über Maximal- und Minimalwerthe, *De Maximis et Minimis*[1]). Er wendet zur Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe genau das gleiche Mittel an, welches in dem früheren Briefe zur Ermittelung gleicher Gleichungswurzeln geführt hatte, nämlich die Multiplication der einzelnen Glieder des Ausdruckes, welcher einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll, mit Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, und zwar, meint er, könne man füglich als solche Factoren die Exponenten der Potenzen von x in den einzelnen Gliedern wählen, wobei vorausgesetzt ist, dass der zu behandelnde Ausdruck erstlich rational ist und zweitens kein x im Nenner enthält. Ist dagegen eine gebrochene Function zu untersuchen, so weiss Hudde offenbar nur dann Rath, wenn der Nenner ein Monom x^n ist, und wenn es dann genügt, den Zähler für sich zu untersuchen. Auch an Fälle, in welchen mehrere Veränderliche vorkommen, die durch Gleichungen mit einander verbunden sind, wagt er sich heran und eliminirt mittels der betreffenden Gleichungen die störenden überzähligen Unbekannten. Einen Beweis seiner Methode giebt Hudde nicht. Zur Verdeutlichung unserer Schilderung lassen wir zwei von Hudde's Bei spielen folgen. Erstlich soll

$$(3a - b)\,x^3 - \frac{2b^2ax}{3c} + a^2b$$

Maximum werden. Hudde vervielfacht die Glieder mit 3, 1, 0. Diese Zahlen bilden freilich keine arithmetische Progression, aber der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass in dem vorgelegten Ausdrucke

[1]) Descartes, Geom. I, 507—516.

streng genommen auch das Glied $0x^2$ vorkomme, welches mit dem unter den Multiplicatoren fehlenden 2 zu vervielfachen sei. Das Ergebniss der Multiplication ist

$$3(3a - b)x^3 - \frac{2b^2ax}{3c} = 0, \quad (9a - 3b)x^2 = \frac{2b^2a}{3c},$$

und damit begnügt sich Hudde. Zweitens soll $z = \frac{1}{2}v - y$ Maximum werden, während bekannt ist $y^3 - nyx + x^3 = 0$ und $v - x = y$. Man setzt y aus der letzten Gleichung in die beiden vorhergehenden ein und findet

$$x = \frac{v}{2} + z, \quad v^3 - 3v^2x + 3vx^2 = vnx - nx^2.$$

Nun wird der Werth von x aus der ersten neuen Gleichung in die zweite eingesetzt und damit

$$\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nv^2 + 3z^2v + nz^2 = 0$$

erhalten. Das Gleichungspolynom vervielfacht Hudde mit der fallenden Progression 3, 2, 1, 0, so dass $\frac{3}{4}v^3 - \frac{1}{2}nv^2 + 3z^2v = 0$ entsteht und $z^2 = \frac{1}{6}nv - \frac{1}{4}v^2$. Der so gewonnene Werth von z^2 verändert die vorher zwischen v und z gewonnene Gleichung in $v^2 = \frac{1}{3}n^2$, ein Ergebniss, welches vollständig richtig ist. Hudde behauptet in einer Nachschrift[1]), auch darüber geschrieben zu haben, wie man Maximalwerthe von Functionen mehrerer Veränderlichen finde, wenn zwischen ihnen keine Gleichungen gegeben sind, doch ist das Alles, was wir von dieser hochbedeutsamen Erweiterung der Aufgabe wissen. Dass Hudde's Verfahren in dem Falle einer einzigen Veränderlichen noch an denselben Unvollkommenheiten leidet, welche dem von Fermat anhaften, dass es nämlich unentschieden lässt, ob Maximum oder Minimum eintritt, dass es versagt, wenn mehrere Ableitungen der untersuchten Function als nur die erste verschwinden, dass es überdies nur bei ganzen rationalen Functionen anwendbar ist, erkennt man sofort. Hudde scheint, wenn man einer Aeusserung Leibnizens volles Vertrauen schenken darf[2]), auch mit der ungemein wichtigen Aufgabe sich beschäftigt zu haben, die Gleichung einer Curve aus gegebenen Punkten derselben zu ermitteln, er soll sich sogar gerühmt haben, im Stande zu sein, die Gleichung der Umrisse des Bildnisses irgend einer Persönlichkeit herzustellen.

Heinrich van Heuraet ist (S. 905) der Erfinder einer Rectificationsmethode[3]), welche er in einem Briefe vom 13. Januar 1659

[1]) Descartes, Geom. I, 516. [2]) Montucla II, 150. [3]) Descartes, Geom. I, 517—520.

beschrieben hat. Er verwandelte die Frage nach der Länge einer Curve in die nach dem Flächenraume einer zweiten Curve, führte also die eine Aufgabe auf eine zweite zurück, deren Auflösung zwar auch nicht allgemein gegeben war, aber doch schon in so zahlreichen Fällen, dass man jene Zurückführung als einen Fortschritt zu bezeichnen hatte (Figur 190). Nach Van Heuraet ist die Fläche $ALKMB$ gleich dem Rechtecke, dessen Seiten eine Constante a und die Länge der Curve EDF sind, wenn nur auf jeder Ordinate KDC der beiden Curven die Proportion stattfindet $a : KC = DC : DN$, wo DN die Normale der auf ihre Länge zu untersuchenden Curve EDF im Punkte D ist. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich am leichtesten unter Anwendung neuerer Hilfsmittel. Wir setzen $OC = x$, $DC = y$, $KC = Y$, alsdann ist $DN = y\sqrt{1 + y'^2}$ und die Proportion heisst

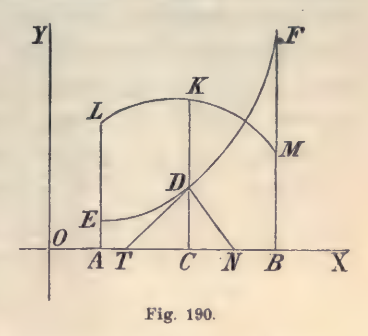


Fig. 190.

$$a : Y = y : y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Daraus folgt $Y = a\sqrt{1 + y'^2}$ und

$$\int Y dx = a \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

wenn beide Integrationen zwischen denselben Abscissen, etwa beide von OA bis OB, vollzogen werden. Van Heuraet's Erfindung steht nicht allein. Wir haben Zurückführungen von Rectificationen auf Quadraturen auch bei Fermat, bei Neil ausführen sehen. Die Veröffentlichung Van Heuraet's ist unzweifelhaft die älteste, und ein Anlehnen an die beiden anderen Schriftsteller steht bei ihm ganz ausser Frage. Auch das Umgekehrte möchten wir nicht behaupten. Weit eher vermuthen wir den gemeinsamen Keim aller dieser Verwandlungen der Betrachtung einer Curve in die einer anderen in der durch Cavalieri zuerst zum Abdrucke gebrachten Vergleichung der Spirale mit der Parabel.

Ein kurzes Ueberdenken des in den vier letzten Kapiteln 78 bis 81 Zusammengestellten lässt Eines klar hervortreten: dass das halbe Jahrhundert von 1615—1668 als das der Erfindung der Infinitesimalrechnung benannt werden darf. Aufgaben der Integralrechnung wurden zuerst behandelt. Aufgaben der Differentialrechnung folgten. Dann lösten beide Gattungen von Aufgaben in buntem Gemische sich ab. Und bunt wie die Aufgaben mischt sich die stammliche Zugehörigkeit der Männer, welchen die gewaltigen

Fortschritte verdankt werden. Von Deutschland nach Italien, von dort nach Frankreich, nach den Niederlanden, nach England haben wir den Gedanken wandern sehen, an den gleichen Orten haben wir neue Gedanken begrüssen dürfen. Zweierlei ist aber aus dem Gewirre der Aufgaben, aus dem Gewühle der Mathematiker unzweifelhaft zu erkennen. Erstens, dass die Franzosen es waren, welche die eigentlich leitende Rolle spielen, und dass insbesondere Fermat als derjenige zu bezeichnen ist, der in der Differentialrechnung, Pascal als der, der in der Integralrechnung am erfolgreichsten thätig war. Zweitens, dass ein innerer Zusammenhang zwischen allen behandelten Aufgaben doch nur Wenigen, am meisten vielleicht Fermat einleuchtete, welcher auch den ersten Anlauf dazu nahm, eine einheitliche Bezeichnung einzuführen, der nur ein wesentlicher Mangel anhaftete: dem Fermat'schen E war nicht anzusehen, wovon es als Veränderung auftrat.

Das war also das Gebiet, welches nunmehr die Thätigkeit der hervorragendsten Mathematiker forderte und in Anspruch nahm. Es musste, wenn wir so sagen dürfen, gezeigt werden, dass der Wortlaut der scheinbar so verschieden klingenden Aufgaben schliesslich einer Sprache angehörte. Es musste dieser Sprache eine geeignete Schrift zur Verfügung gestellt werden.

Zwei Männer waren es vornehmlich, welche diesen Fortschritt der Wissenschaft an ihren Namen knüpften, und welche deshalb verdienen, in ähnlicher Weise am Ende dieses zweiten Bandes aufzutreten, wie Leonardo der Pisaner und Jordanus Nemorarius am Ende des ersten Bandes. Sie gehörten nicht mehr Frankreich an, sei es, dass man dort, seit Fermat's Arbeiten bekannter wurden, glaubte, dieser habe in der Bezeichnung schon Genügendes geleistet, sei es, dass der französische Geist dem Formalen sich weniger anpasst. Jedenfalls ist es England und Deutschland, wo inzwischen die Männer der Zukunft heranwuchsen, für welche das Jahr 1668 und das darauf folgende 1669 Wendepunkte ihres Lebens bilden.

1666 erschien in Leipzig die Doctordissertation von Gottfried Wilhelm Leibniz. 1668 knüpfte er Beziehungen zu einflussreichen Persönlichkeiten an verschiedenen Orten an, welche für seine Laufbahn von grösster Bedeutung wurden. 1669 wurde Isaac Newton Professor der Mathematik in Cambridge.

Register.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

T.

U.

V.

W.



PROEMIO DI EVANGELIST

AL TRATTATO "DE DEFINITIONIBU

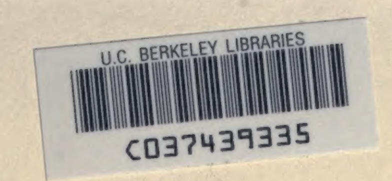
La prima pagina e le ultime

[Raccolta Galileiana della B
Discepoli, vol. XXVI, c
miche di Evangelista Tor
Le postille marginali ne
mano di Lodovico Seren








U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037439335

